Министерство образования и науки РФ

Иркутский государственный технический университет

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания по выполнению контрольных работ для **специалистов** технического профиля заочной формы обучения (2-й курс)

Издательство

Иркутского государственного технического университета

2020

УДК…

Математика: метод.указания по выполнению контрольных работ для специалистов технического профиля заочной формы обучения (2–й курс)/ сост.: Е.А. Лукьянова, И.А. Огнёв, – Иркутск: Изд–во ИрГТУ, 2020. – 40 с.

Методические указания соответствуют требованиям ФГОС.

Предлагаются задания и рекомендации по выполнению контрольных работ по математике для специалистов технического профиля второго курса, обучающихся по заочной и дистанционной форме, по направлениям: СМ, СДМ, РТ.

Рецензент: доцент кафедры математики ИрГТУ, кандидат педагогических наук Зепнова Н.Н.

Одобрено отделением прикладной математики и информатики ИрНИТУ .

Рекомендовано к печати Научно–методическим советом Иркутского национального исследовательского технического университета.

Оглавление

Общие указания по самостоятельной работе 4
Правила оформления и защиты контрольных работ 4
Основная литература 5
Дополнительная литература 5
Электронные пособия 5
Контрольные вопросы 7
Контрольная работа№3 9
Дифференциальные уравнения. 9
Кратные и криволинейные интегралы. 14
Контрольная работа №4 18
Ряды. 19
Теория вероятностей. 21
Рекомендации по выполнению контрольных работ 29
Контрольная работа № 3 35
Дифференциальные уравнения 35
Кратные и криволинейные интегралы. 39
Контрольная работа №4 45
Ряды. 45
Теория вероятностей. 49

“Много из математики не остается в памяти, но когда поймешь ее, тогда легко при случае вспомнить забытое”

М.В. Остроградский

Общие указания по самостоятельной работе

Основной формой обучения студента – заочника является самостоятельная работа. Изучение высшей математики основано на материалах, предоставляемых на лекциях и практических занятиях, проводимых во время сессий. Дополнительные сведения студент может почерпнуть в учебной и специальной литературе, на соответствующих WEB–страницах в сети Интернет и других информационных носителях.

Подробные рекомендации по организации самостоятельной работы студент может получить во время сессий на установочных и обзорных лекциях и практических занятиях. А также на индивидуальных консультациях, регулярно проводимых в учебном заведении в течение всего учебного года, и дистанционно, по интернету, на сайтах заочно–вечернего факультета ИрГТУ и/или по электронной переписке с преподавателем.

Итоговой формой отчета о самостоятельной работе является выполнение двух контрольных работ, представленных в данной методичке в соответствии с рабочим планом по математике для студентов второго курса, которые должны быть сданы на проверку преподавателю до начала или во время экзаменационной сессии.

При подготовке к экзаменационной сессии рекомендуется ознакомиться с образцами билетов по дисциплине«Математика», предлагаемых во время сдачи зачёта студентам 2–го курса технических специальностей, приведёнными в конце методических указаний.

Правила оформления и защиты контрольных работ

Перед началом сессии в соответствии с учебной программой по математике студентам второго курса необходимо выполнить две контрольные работы. Задания выбираются из данной методички по индивидуальному варианту, номер которого равен $(10 - n)$, если фамилия студента начинается с буквы из первой части алфавита (от Адо Л), или$(20 - n)$, если фамилия начинается с буквы из второй части алфавита (от М до Я), где $n -$ последняя цифра номера зачётной книжки студента.

На титульном листе работы указываются Ф.И.О., название дисциплины, номер контрольной работы, шифр специальности (группа), номер зачётной книжки, в конце ставится личная роспись студента. Работы должны оформляться в рукописном варианте, решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач. Условия заданий необходимо переписывать полностью, решения описывать подробно и ясно, сопровождая его при необходимости таблицами

и рисунками, оставляя поля и пробелы после каждой задачи для замечаний рецензента.

После успешной защиты самостоятельно решённых и правильно оформленных контрольных заданий студент допускается к сдаче текущего зачёта или экзамена. Если студент не смог получить положительную оценку своих знаний, он должен заново представлять контрольные работы во время следующей пересдачи сессии. Пересдача другому преподавателю, не принимавшему зачёт или экзамен в вашей группе во время сессии, производится только при наличии разрешения администрации деканата, заверенного подписью ответственного лица на индивидуальном экзаменационном листке, полученном у специалиста по УМР.

Основная литература

1. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис–Пресс, 2009.
2. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.], Ч. 2.– М.: Высшая школа, 2008.
3. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб.пособие. – Минск: Вышэйш. шк., Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко.–Б.м.: Б.и., 2009.
4. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб.пособие. – Минск: Вышэйш. шк., Ч.3.Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко. – Б.м.: Б.и., 2005.
5. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб.пособие. – Минск: Вышэйш.шк., Ч. 4.Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко. – Б.м.: Б.и., 2006.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для втузов/ – М: Изд–во физ.–мат. лит. 2010.

Дополнительная литература

1. Справочник для студентов технических вузов: высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов/ А. Д. Полянин, В. Д. Полянин,В.А. Попов и др. –М.: АСТ: Астрель, 2008.
2. Линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ: конспект лекций за 1–ый семестр для технических специальностей/ Ирк. Гос. техн. ун–т; сост. В.А. Труппова, Б.В. Агалаков – Иркутск: Изд–во ИрГТУ, 2010.

Электронные пособия

1. WEB:http://www. mathtest.ru.–сайт кафедры математики НИ Ир ГТУ.
2. E–mail:ood@istu.edu –контент по математике кадры общеобразовательных дисциплин (ООД) заочно–вечернего факультета (ЗВФ) НИ Ир ГТУ.

3. WEB: http:// www. gpntb. ru. – сайт Государственной Публичной Научно–Технической Библиотеки(ГПНТБ), открытый в режиме онлайн в научно–технической библиотеке НИ ИрГТУ.

Контрольные вопросы

1. Понятие дифференциального уравнения первого порядка. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка
2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Уравнение Бернулли и его решение.
6. Дифференциальные уравнения 2–го порядка, допускающие понижение порядка.
7. Линейные однородные дифференциальные уравнения и свойства их решений.
8. Линейная независимость функций. Определитель Вронского. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
9. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
11. Определение фундаментальной системы решений в зависимости от типа корней характеристического уравнения.
12. Метод вариации произвольных постоянных.
13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью, метод подбора частного решения.
14. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решений.
15. Определение двойного интеграла, его свойства и методы вычисления.
16. Двойной интеграл в полярной системе координат. Якобиан преобразования.
17. Определение криволинейного интеграла 1–го рода. Свойства и методы вычисления криволинейного интеграла 1–го рода.
18. Определение криволинейного интеграла 2–го рода. Свойства и методы вычисления.
19. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла 2–го рода от пути интегрирования.
20. Определение числового ряда. Определение частичной суммы ряда.
21. Определение сходящегося числового ряда. Критерий Коши.
22. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.
23. Признак сравнения, Предельная форма признака сравнения.
24. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши.
25. Понятие знакопеременных и знакочередующихся рядов.

26. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость знакочередующихся рядов.
27. Степенной ряд. Область сходимости степенного ряда. Правило нахождения радиуса сходимости.
28. Разложение элементарных функций в степенной ряд.
29. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.
30. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
31. Формулы коэффициентов ряда Фурье.
32. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.
33. Классическое определение вероятности.
34. Определение условной вероятности. Зависимые и независимые события.
35. Произведение и сумма событий. Теоремы умножения и сложения.
36. Формулы полной вероятности и Байеса.
37. Независимые повторные испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число появления события.
38. Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа.Формула Пуассона.
39. Понятие случайной величины. Одномерные дискретные случайные величины. Функция распределения одномерной случайной величины и ее свойства.
40. Одномерные непрерывные случайные величины. Плотность распределения.
41. Математическое ожидание случайной величины. Мода, медиана, квантиль порядка p, асимметрия, эксцесс.
42. Дисперсия случайной величины. Моменты случайной величины.
43. Равномерное и показательное распределения, их числовые характеристики.
44. Нормальное распределение. Числовые характеристики нормального распределения. Правило трех сигм.

Контрольная работа№3

Дифференциальные уравнения.

Задача 1. Найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка.

1. $y'\sin x - y\cos x = 1,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
2. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$
3. $y' + \frac{2y}{x} = -x^2,\quad y(3) = 1.$
4. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2},\quad y(0) = 2.$
5. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2,\quad y(-2) = 5.$
6. $xy' - 2y = x^3\cos x,\quad y(\pi) = 1.$
7. $y'x\ln x - y = 3x^3\ln x^2,\quad y(e) = 0.$
8. $y' + 2xy = xe^{-x^2},\quad y(0) = 4.$
9. $y'\cos x - 2y\sin x = 2,\quad y(0) = 3.$
10. $y' - \frac{3y}{x} = x^3e^x,\quad y(1) = e.$
11. $xy' - 3y = x^4e^x,\quad y(1) = e.$
12. $y'\cos x + y\sin x = 1,\quad y(0) = 2.$
13. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
14. $y' - \frac{y}{x} = -2\ln x,\quad y(1) = 1.$
15. $xy' + 2y = \frac{1}{x},\quad y(3) = 1.$
16. $y' - y\cos = -\cos x,\quad y(0) = 3.$
17. $y' + 2xy = e^{-x^2}\sin x,\quad y(0) = 1.$
18. $x^2y' + xy + 1 = 0,\quad y(1) = 2.$
19. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x},\quad y(0) = 5.$
20. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\quad y(0) = \frac{1}{2}.$

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1. $y''x\ln x = y;\quad y(e) = e-1; y'(e) = 1.$
2. $y'''\cos^4 x = -\sin 2x;\quad y(\pi) = 0; y'(\pi) = 2; y''(\pi) = -1.$
3. $2xy'' = y',\quad y(9) = 8; y'(9) = 3.$
4. $y'' = y'\ln y',\quad y(0) = 0; y'(0) = 1.$
5. $y''(x^2+1) = 2xy',\quad y(0) = 1; y'(0) = 3.$
6. $y''\cos x + y'\sin x = 0,\quad y(0) = -\frac{1}{4}; y'(0) = 2.$
7. $xy'' = (1+2x^2)y',\quad y(1) = \sqrt{e}+1; y'(1) = \sqrt{e}.$
8. $y''' = \sin^2 x,\quad y(0) = 5; y'(0) = 1{,}8; y''(0) = 0.$
9. $y'' = 2\sqrt{1+y'},\quad y(0) = 5; y'(0) = -1.$
10. $y'' + (y')^2 = 0,\quad y(2) = \ln(2e); y'(2) = \frac{1}{2}.$
11. $xy'' = (1+2x^2)y',\quad y(2) = 0; y'(2) = e.$
12. $y''x\ln x = y',\quad y(e) = 3; y'(e) = 4.$
13. $y'''\sin^4 x = \sin 2x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; y'(\frac{\pi}{2}) = 2; y''(\frac{\pi}{2}) = -1.$

14. $y^{(IV)} = \cos^2 x,$ $y(0) = \frac{1}{32}; y'(0) = 0; y''(0) = \frac{1}{8}; y'''(0) = 0.$

15. $y''x = y' \ln y',$ $y(1) = 0; y'(1) = e.$

16. $y'' = \sqrt{1-(y')^2},$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3; y'(\frac{\pi}{2}) = 1.$

17. $y'''(x-1) - y'' = 0,$ $y(2) = 2; y'(2) = 1; y''(2) = 1.$

18. $y'' = x \sin x,$ $y(0) = 0; y'(0) = 0.$

19. $y'' - (x+2)^5 = 1,$ $y(-1) = \frac{1}{12}; y'(-1) = -\frac{1}{4}.$

20. $y'' = 2x \ln x.$ $y(1) = \frac{13}{18}; y'(1) = \frac{3}{2}.$

Задача 3. Найти общее и частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = \frac{1}{2},$

2. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1,$ $y(0) = -3,$ $y'(0) = -\frac{1}{5},$

3. $y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = \frac{4}{3},$

4. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x,$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = \frac{3}{4},$

5. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x},$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = 9,$

6. $y'' + 4y = \sin 2x + 1,$ $y(0) = \frac{1}{4},$ $y'(0) = 0,$

7. $y'' + y' = e^{-x},$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1,$

8. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 3,$

9. $y'' + 9y' = 36e^{3x},$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0,$

10. $y'' + 2y' - 8y = 3\sin x,$ $y(0) = -1,$ $y'(0) = -\frac{3}{2},$

11. $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x}$ $y(0) = \frac{2}{3},$ $y'(0) = 2,$

12. $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 + 4,$ $y(0) = 2,$ $y'(0) = 3,$

13. $y'' + y' - 5y = 50\cos x,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = 5,$

14. $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x},$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 4,$

15. $y'' - 4y' + 5y = 10x,$ $y(0) = 10,$ $y'(0) = 6,$

16. $y'' - 4y' + 4y = 3x - x^2,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = \frac{4}{3},$

17. $y'' - 6y' + 9y = 4e^x,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = 8,$

18. $y'' - 4y' + 4y = -169\sin 3x,$ $y(0) = -12,$ $y'(0) = 16,$

19. $y'' + 2y' - 8y = 16x + 4,$ $y(0) = 2,$ $y'(0) = 6,$

20. $y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4,$ $y(0) = \frac{2}{25},$ $y'(0) = \frac{3}{5}.$

Задача 4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 12x_1 + 5x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 4x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 2x_2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 4x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 3x_2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 5x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 5x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 2x_2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 2x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 6x_2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 4x_2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 5x_2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 2x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 6x_2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 6x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 2x_2. \end{cases}$

Задача 5. Решить уравнения колебания струны методом Фурье.

1. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{3};\ 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 2h(2-x);\ \dfrac{3}{2} \le x \le 2; \end{cases}$ $\psi(x) = x(2-x).$

2. $\varphi(x) = \begin{cases} hx;\ 0 \le x \le 1, \\ h;\ 1 \le x \le 2, \\ h(3-x);\ 2 \le x \le 3; \end{cases}$ $\psi(x) = x(3-x).$

3. $\varphi(x) = \begin{cases} 2h(x-3);\ 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2h(x-3)}{3};\ \dfrac{3}{2} \le x \le 3; \end{cases}$ $\psi(x) = x(3-x).$

4. $\varphi(x) = \begin{cases} 2hx;\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2h(4-x)}{7};\ \dfrac{1}{2} \le x \le 4; \end{cases}$ $\psi(x) = x(4-x).$

5. $\varphi(x) = \begin{cases} -4hx;\ 0 \le x \le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{4h(x-5)}{19};\ \dfrac{1}{4} \le x \le 5; \end{cases}$ $\psi(x) = x(5-x).$

6. $\varphi(x) = \begin{cases} -hx;\ 0 \le x \le 1, \\ -h;\ 1 \le x \le 3, \\ h(x-4);\ 3 \le x \le 4; \end{cases}$ $\psi(x) = x(4-x).$

7. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{3};\ 0 \le x \le 3, \\ \dfrac{h(6-x)}{3};\ 3 \le x \le 6; \end{cases}$ $\psi(x) = x(6-x).$

8. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{-2hx}{7};\ 0 \le x \le \dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{2h(x-7)}{7};\ \dfrac{7}{2} \le x \le 7; \end{cases}$ $\psi(x) = x(7-x).$

9. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{hx}{2};\ 0\le x\le 2,\\ h;\ 2\le x\le 4,\\ h(5-x);\ 4\le x\le 5;\end{cases}\qquad \psi(x)=x(5-x).$$

10. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{-hx}{3};\ 0\le x\le 3,\\ -h;\ 3\le x\le 6,\\ h(x-7);\ 6\le x\le 7;\end{cases}\qquad \psi(x)=x(7-x).$$

11. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{5};\ 0\le x\le \dfrac{5}{2},\\ \dfrac{2h(5-x)}{5};\ \dfrac{5}{2}\le x\le 5;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}2x;\ 0\le x\le \dfrac{5}{2},\\ 2(5-x);\ \dfrac{5}{2}\le x\le 5.\end{cases}$$

12. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{3};\ 0\le x\le \dfrac{3}{2},\\ \dfrac{2h(3-x)}{3};\ \dfrac{3}{2}\le x\le 3;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}2x;\ 0\le x\le \dfrac{3}{2},\\ 2(3-x);\ \dfrac{3}{2}\le x\le 3.\end{cases}$$

13. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{7};\ 0\le x\le \dfrac{7}{2},\\ \dfrac{2h(7-x)}{7};\ \dfrac{7}{2}\le x\le 7;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}4x;\ 0\le x\le \dfrac{7}{2},\\ 2(7-x);\ \dfrac{7}{2}\le x\le 7.\end{cases}$$

14. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{9};\ 0\le x\le \dfrac{9}{2},\\ \dfrac{2h(9-x)}{9};\ \dfrac{9}{2}\le x\le 9;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}4x;\ 0\le x\le \dfrac{9}{2},\\ 2(9-x);\ \dfrac{9}{2}\le x\le 9.\end{cases}$$

15. $$\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{2hx}{11};\ 0\le x\le \dfrac{11}{2},\\ \dfrac{2h(x-11)}{11};\ \dfrac{11}{2}\le x\le 11;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}6x;\ 0\le x\le \dfrac{11}{2},\\ 6(11-x);\ \dfrac{11}{2}\le x\le 11.\end{cases}$$

16. $$\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{2hx}{13};\ 0\le x\le \dfrac{13}{2},\\ \dfrac{2h(x-13)}{13};\ \dfrac{13}{2}\le x\le 13;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}6x;\ 0\le x\le \dfrac{13}{2},\\ 6(13-x);\ \dfrac{13}{2}\le x\le 13.\end{cases}$$

17. $$\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{2hx}{15};\ 0\le x\le \dfrac{15}{2},\\ \dfrac{2h(x-15)}{15};\ \dfrac{15}{2}\le x\le 15;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}8x;\ 0\le x\le \dfrac{15}{2},\\ 8(15-x);\ \dfrac{15}{2}\le x\le 15.\end{cases}$$

18. $$\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{2hx}{3};\ 0\le x\le \dfrac{3}{2},\\ \dfrac{2h(x-3)}{3};\ \dfrac{3}{2}\le x\le 3;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}8x;\ 0\le x\le \dfrac{3}{2},\\ 8(3-x);\ \dfrac{3}{2}\le x\le 3.\end{cases}$$

19. $\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{2hx}{5};\ 0\le x\le\dfrac{5}{2},\\ \dfrac{2h(x-5)}{5};\ \dfrac{5}{2}\le x\le 5;\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}10x;\ 0\le x\le\dfrac{5}{2},\\ 10(5-x);\ \dfrac{5}{2}\le x\le 5.\end{cases}$

20. $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{17};\ 0\le x\le\dfrac{17}{2},\\ \dfrac{2h(17-x)}{17};\ \dfrac{17}{2}\le x\le 17;\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}10x;\ 0\le x\le\dfrac{17}{2},\\ 10(17-x);\ \dfrac{7}{2}\le x\le 17.\end{cases}$

Кратные и криволинейные интегралы.

Задача 6. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертёж области интегрирования.

1. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-8x^2}^{-2x+6}f(x,y)dy,$
2. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-4y-4}^{-8y^2}f(x,y)dx,$
3. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{8x^2}^{4x+4}f(x,y)dy,$
4. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{2y-6}^{8y^2}f(x,y)dx,$
5. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{4x-4}^{8x^2}f(x,y)dy,$
6. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{8y^2}^{2y+6}f(x,y)dx,$
7. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-2x-6}^{-8x^2}f(x,y)dy,$
8. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-8y^2}^{-4y+4}f(x,y)dx,$
9. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-4x-4}^{-8x^2}f(x,y)dy,$
10. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{4y-4}^{8y^2}f(x,y)dx,$
11. $\int\limits_{1}^{3}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)dy,$
12. $\int\limits_{-5}^{-1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{-6y-y^2}}f(x,y)dx,$
13. $\int\limits_{3}^{5}dx\int\limits_{-\sqrt{8x-x^2}}^{0}f(x,y)dy,$
14. $\int\limits_{-3}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{-4y-y^2}}^{0}f(x,y)dx,$
15. $\int\limits_{-3}^{-1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{-4x-x^2}}f(x,y)dy,$
16. $\int\limits_{1}^{7}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{8y-y^2}}f(x,y)dx,$
17. $\int\limits_{-4}^{-2}dx\int\limits_{-\sqrt{-6x-x^2}}^{0}f(x,y)dy,$
18. $\int\limits_{1}^{3}dy\int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{0}f(x,y)dx,$
19. $\int\limits_{2}^{6}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{8x-x^2}}f(x,y)dy,$
20. $\int\limits_{2}^{4}dy\int\limits_{-\sqrt{6y-y^2}}^{0}f(x,y)dx.$

Задача 7.Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Сделать чертёж области интегрирования.

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{4+y^2}$, где область D ограничена линиями: $y=x, x=2, y=0;$
2. $\iint\limits_D xy^3 dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y=4, y=\sqrt{25-x^2}, x=0, y=0;$
3. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,$ где область D ограничена линиями: $x\le 2, y\le x, xy\ge 1;$
4. $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy,$ где область D ограничена линиями: $x\ge 0, y\le \pi, y\ge x;$
5. $\iint\limits_D \frac{x}{y^2} dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y\ge x, y\le 9x, y\le \frac{1}{x};$
6. $\iint\limits_D ydxdy,$ где область D ограничена линиями: $y\le \sqrt{x}, y\ge -x, x-y\le 2;$
7. $\iint\limits_D dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y\le x, y\ge \frac{x}{4}, x+2y\le 6;$
8. $\iint\limits_D ydxdy,$ где область D ограничена линиями: $y\ge 0, x\ge 0, y\le \sqrt{9-x^2};$
9. $\iint\limits_D \frac{x^3}{y} dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y\le 4, y\le x^2, y\ge \frac{x^2}{4};$
10. $\iint\limits_D x^3y^2 dxdy,$ где область D ограничена линиями: $x^2+y^2\le 9;$
11. $\iint\limits_D xydxdy,$ где область D ограничена линиями: $x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0;$
12. $\iint\limits_D xy^2 dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y^2\le 4x, x\le 1;$
13. $\iint\limits_D xydxdy,$ где область D ограничена линиями: $y=\cos x, x=0, x=\frac{\pi}{4}, 2y=x;$
14. $\iint\limits_D (x+y^2)dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y=x, y=4-3x, y=0;$
15. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x+y},$ где область D ограничена линиями: $y-x=3, x=1, 3y+5x=25, y=0;$
16. $\iint\limits_D (x-y)dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y=x^3, y=x, y=3;$

17. $\iint\limits_D \frac{y}{1+x^2}\,dxdy,$ где область D ограничена линиями: $y = x,\ x = \sqrt{3y};$

18. $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,$ где область D ограничена линиями: $x = 2, y^2 = 8x;$

19. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy,$ где область D ограничена линиями: $x = y^2 + 1, y = 1, x = 0, y = 0;$

20. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x+3},$ где область D ограничена линиями: $y - x = 1, y = 3 - x^2.$

Задача 8. Вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями. Сделать чертёж.

1. $2y^2 = x, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, z = 0.$

2. $x + y + z = 6, x^2 + y^2 = 9,$ $x = 0, y = 0, z = 0.$

3. $z = 5 - 2y^2, x + 3y = 6,$ $x = 0, y = 0, z = 0.$

4. $z = x^2 + y^2, x + y = 3,$ $x = 0, y = 0, z = 0.$

5. $3x + 2y + z - 6 = 0,$ $x = 0, y = 0, z = 0.$

6. $4y^2 = x, \frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{z}{4} = 1, z = 0.$

7. $x + y + z = 3, x^2 + y^2 = 1, z = 0.$

8. $z = 1 + x + y, x + y = 1, x = 0.$

9. $z = xy, x + y + z = 1, z = 0.$

10. $x = y, x + 2y = 6, z = x^2, z = 0.$

11. $z = 1 - x^2, 3x + y = 6,$ $y = 0, z = 0.$

12. $x + z = 1, y^2 = x - 1,$ $x = 0, y = 0, z = 0.$

13. $z = y, y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2},$ $y = \sqrt{4 - x}, z = 0.$

14. $z = x^2, x - 2y + 2 = 0,$ $x + y = 7, z = 0.$

15. $z = \frac{1}{2}y^2, 2x - y = 0,$ $x + y = 9, z = 0.$

16. $z = 2 - x - y, y = x^2, z = 0.$

17. $x^2 + y^2 = 1, z = 3 - x - y, z = 0.$

18. $y = x^2, z = 2 - x - y,$ $y = 0, z = 0.$

19. $z = 1 + y^2, x + y = 1,$ $x = 0, y = 0, z = 0.$

20. $z = x^2, x + y = 2, y = 0, z = 0.$

Задача 9.Вычислить криволинейный интеграл. Сделать чертёж.

1. $\int\limits_L (xy - 1)dx + x^2 ydy$ вдоль дуги параболы $4x + y^2 = 4$ от $A(1,0)$ до $B(0,2);$

2. $\int\limits_L (x^2 - y^2)dx + xydy$ от $A(1,1)$ до $B(0,2)$ вдоль прямой, проходящей через

эти точки;

3. $\int\limits_L ydx + xdy$, где L – часть окружности $x = R\cos t, y = R\sin t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$;
4. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$ вдоль кривой $y = x^2$ от $A(0,0)$ до $B(1,1)$;
5. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$ вдоль линии $y = x$ от $A(0,0)$ до $B(1,1)$;
6. $\int\limits_L xdy$, где L – образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ в положительном направлении;
7. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$ вдоль кривой $y^2 = x$ от $A(0,0)$ до $B(1,1)$;
8. $\int\limits_L (x + 3y)dx + (y + 3x)dy$ вдоль прямой $y = 2x - 1$ от $A(1,1)$ до $B(2,3)$;
9. $\int\limits_L x^2ydx + x^3dy$, где L – область, ограниченная линиями $y^2 = x, x^2 = y$ (против хода часовой стрелки);
10. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$ по прямой, соединяющей точки $O(0,0)$ и $M(\pi, \pi)$;
11. $\int\limits_L 2xdy - 3ydx$, где L – контур треугольника с вершинами $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(2,5)$ пробегаемый против хода часовой стрелки;
12. $\int\limits_L ydx - (y + x^2)dy$, L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью OX и пробегаемая по ходу часовой стрелки;
13. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$ по параболе $y = \frac{x^2}{\pi}$, от точки $A(0,0)$ до $B(\pi, \pi)$;
14. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$ по ломаной OPM, где $O(0,0)$, $P(\pi,0)$, $M(\pi, \pi)$;
15. $\int\limits_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$ по ломаной OAB, где $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,2)$;
16. $\int\limits_L \frac{y^2 + 1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$, где L – отрезок AB от точки $A(1,2)$ до $B(2,4)$;
17. $\int\limits_L (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$, где L – отрезок AB от точки $A(0,0)$ до $B(2,4)$;
18. $\int\limits_L 2xdy + ydx$ вдоль параболы $x = y^2$ от точки $A(1,1)$ до $B(4,2)$;
19. $\int\limits_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$ вдоль эллипса $x = a\cos t, y = a\sin t$, обходя его против часовой стрелки;

20. $\int\limits_L \left(x^2 y + 2\right)dx + ydy,$ где L – отрезок AB от точки $A(1,2)$ до $B(2,6)$.

Задача 10. А. Требуется: 1) найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ (выбирается внешняя нормаль к σ); 2) вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ по контуру **Г**, образованному пересечением поверхностей $\sigma_1 и\ \sigma_2$ (направление обхода должно быть выбрано так , чтобы область, ограниченная контуром **Г**, находилась слева); 3) проверить правильность вычисленных значений потока и циркуляции с помощью формул Остроградского и Стокса; 4) дать заключение о наличии источников или стоков внутри области, ограниченной поверхность σ; 5) сделать схематичный чертёж поверхности σ.

1. $\vec{a} = (3x-5y)\vec{i} + (6x+5y)\vec{j} + (4z-xy+4)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z+1)^2,\ \sigma_2: z=1.$

2. $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + (4x^2+2z+4)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z+2)^2,\ \sigma_2: z=4.$
3. $\vec{a} = (3x+2y)\vec{i} + (5x-2y)\vec{j} + (3z-y^2-3)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z-1)^2,\ \sigma_2: z=3.$

4. $\vec{a} = (3x-4y)\vec{i} + (3y-x)\vec{j} + (xy-2z+4)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z-2)^2,\ \sigma_2: z=4.$
5. $\vec{a} = (-x+5y)\vec{i} + (8x-y)\vec{j} + (3xy-2z-2)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z+3)^2,\ \sigma_2: z=-1.$

6. $\vec{a} = (7x+2y)\vec{i} + (5x-2y)\vec{j} + (3z-y^2-3)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z+1)^2,\ \sigma_2: z=-3.$

7. $\vec{a} = (2x-3y)\vec{i} + (5z-4y)\vec{j} + (6z-2y^2-6)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z-1)^2,\ \sigma_2: z=-1.$

8. $\vec{a} = (6x+5z)\vec{i} + (3x-y)\vec{j} + (2y^2-z+4)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z-4)^2,\ \sigma_2: z=6.$
9. $\vec{a} = (y-2x)\vec{i} + (4x+3y)\vec{j} + (3z-2y^2+9)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z+3)^2,\ \sigma_2: z=-5.$

10. $\vec{a} = (5x+4y)\vec{i} + (7x-2y)\vec{j} + (2xy+z-4)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2=(z-4)^2,\ \sigma_2: z=2$

Б. Выполнить те же задания, что и в пункте **А**, взяв в качестве вектора $\vec{a}$ $rot\vec{G}$.

11. $\vec{G} = (2x-z)\vec{i} + (2y-xz)\vec{j} + (4-2x)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2+2z+3=0,\ \sigma_2: z=-2.$
12. $\vec{G} = (x+2)\vec{i} + (y-xz)\vec{j} + (3-z)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2+2x+1=0,\ \sigma_2: z=-1.$
13. $\vec{G} = (2x+z)\vec{i} + (2y-xz)\vec{j} + (3+x)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2+2z-3=0,\ \sigma_2: z=1.$
14. $\vec{G} = (x-6)\vec{i} - (xz-y)\vec{j} + (1+z^2)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2+2z-5=0,\ \sigma_2: z=2.$
15. $\vec{G} = 3z\vec{i} - (4-xz)\vec{j} + (z^2+3x)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2+2z-7=0,\ \sigma_2: z=3.$
16. $\vec{G} = (x+z)\vec{i} - (y-xz)\vec{j} + (2z+x)\vec{k},\ \ \sigma_1:\ x^2+y^2-2z-3=0,\ \sigma_2: z=-2.$

17. $\vec{G} = 2x\vec{i} - (xz - 2y)\vec{j} + (4 + z^2)\vec{k}$, $\sigma_1: x^2 + y^2 - 2z - 3 = 0,\ \sigma_2: z = -1.$

18. $\vec{G} = (2x - z)\vec{i} - (xz - 2y)\vec{j} - (x - z)\vec{k}$, $\sigma_1: x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0,\ \sigma_2: z = 1.$

19. $\vec{G} = (3x + z)\vec{i} - (3y - xz)\vec{j} + (1 + x)\vec{k}$, $\sigma_1: x^2 + y^2 - 2z + 3 = 0,\ \sigma_2: z = 2.$

20. $\vec{G} = (x + 1)\vec{i} + (y - 2 - xz)\vec{j} + z\vec{k}$, $\sigma_1: x^2 + y^2 - 2z + 5 = 0,\ \sigma_2: z = 3.$

Контрольная работа №4

Ряды.

Задача 11. Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью достаточных признаков сходимости.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^{2n}}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n+3}}$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+1}$,
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n^5+2}\right)^n$,
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^4}$,
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)^3}$,
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{(7n+3)^2}$,
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n}$,
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^{3n-1}}$,
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{5n}}$,
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{7^n}$,
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)^n}$,
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}}$,
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+7}}$,
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5n+2}\right)^n$,
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n}}$,
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{4}{3}\right)^n$,
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n-1}}$.

Задача 12. Найти область сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{3^n}(x+3)^n$,
2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-6}{6^n}(x-6)^n$,
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$,
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n}$,

3. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{4^n}(x-4)^n,$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{2^n}(x+2)^n,$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+6}{6^n}(x+6)^n,$

6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-5}{5^n}(x-5)^n,$

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2}{2^n}(x-2)^n,$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4}{4^n}(x+4)^n,$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+5}{5^n}(x+5)^n,$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{3^n}(x-3)^n,$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n^2-1)(x-2)^n,$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n},$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)8^n},$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{\sqrt[3]{n^4-2}},$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n},$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} (3n-1)(x+2)^n,$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n},$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{3n+2}.$

Задача 13. Вычислить приближённо определённый интеграл с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

1. $\int_{-0,4}^{0} \sin\frac{5x^2}{2}\,dx,$

2. $\int_{-0,25}^{0} \frac{\sin 2x}{x}\,dx,$

3. $\int_{-1/3}^{0,1} \frac{1-\cos 3x}{x^2}dx,$

4. $\int_{-0,75}^{0} \cos\frac{4x^2}{3}dx,$

5. $\int_{-0,3}^{0} \cos\frac{10x^2}{3}\,dx,$

6. $\int_{-0,2}^{0} \frac{\ln(1-2x^3)dx}{x},$

7. $\int_{-0,2}^{0} e^{-5x^2}\,dx,$

8. $\int_{0}^{0,16} e^{-\sqrt{x}}\,dx,$

11. $\int_{-0,5}^{0} \frac{\ln(1-x^2)}{x}dx,$

12. $\int_{0}^{0,6} \frac{\sin 0{,}6x dx}{x},$

13. $\int_{0}^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^2}}$

14. $\int_{-1}^{1} \sin x^2 dx,$

15. $\int_{0}^{0,5} e^{-x^2}\,dx,$

16. $\int_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx,$

17. $\int_{-0,2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},$

18. $\int_{0}^{0,1} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx,$

9. $\int_{-1}^{0} \sin \frac{x^2}{5}\, dx,$

10. $\int_{-0,5}^{0} arctgx^2\, dx,$

19. $\int_{-0,5}^{0} xe^{-2x^2}\, dx,$

20. $\int_{0}^{1} \cos\sqrt{2x}\, dx.$

Задача 14. С помощью разложения в ряд найти приближённо частное решение дифференциального уравнения (определить пять отличных от нуля членов разложения).

1.	$y' = \cos x + y^2,$	$y(0) = 1;$	11.	$y' = x^2 - y^2,$	$y(1) = 2;$
2.	$y' = y + y^2,$	$y(0) = 3;$	12.	$y' = x^2 + y^3,$	$y(1) = 1;$
3.	$y' = \sin x + y^2,$	$y(0) = 1;$	13.	$y' = xy + e^y,$	$y(0) = 0;$
4.	$y' = x^2 + y^2,$	$y(0) = 2;$	14.	$y' = x^2 + x + y^2,$	$y(0) = 1;$
5.	$y' = 2e^y + xy,$	$y(0) = 0;$	15.	$y' = x^2 y + y^3,$	$y(0) = 1;$
6.	$y' = e^x + y^2,$	$y(0) = 0;$	16.	$y' = x + 2y^2,$	$y(0) = 0;$
7.	$y' = 2e^y - xy,$	$y(0) = 0;$	17.	$y' = y + x^2,$	$y(0) = -2;$
8.	$y' = e^x + y,$	$y(0) = 4;$	18.	$y' = y^2 + x^3,$	$y(0) = 0{,}5;$
9.	$y' = \sin x + 0{,}5y^2,$	$y(0) = 1;$	19.	$y' = y + xe^y,$	$y(0) = 0;$
10.	$y' = x^2 + x + y^2,$	$y(0) = 5;$	20.	$y' = 2x + \cos y,$	$y(0) = 0;$

Задача 15. Представить периодическую функцию *f(x)*, заданную на полупериоде [*0,l*] рядом Фурье по синусам или косинусам. Построить график функции и график суммы полученного рядя Фурье.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0;\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi; \end{cases}$ по косинусам.

2. $f(x) = \begin{cases} 0;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x;\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi; \end{cases}$ по синусам.

3. $f(x) = \begin{cases} 0;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\sin x;\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi; \end{cases}$ по косинусам.

4. $f(x)=\begin{cases}0;\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ \cos x;\ \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi;\end{cases}$ по синусам.

5. $f(x)=\begin{cases}0;\ 0\le x< \dfrac{\pi}{2},\\ \sin x;\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi;\end{cases}$ по косинусам.

6. $f(x)=\begin{cases}1+\cos x;\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0;\ \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi;\end{cases}$ по синусам.

7. $f(x)=\begin{cases}0;\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ \cos x;\ \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi;\end{cases}$ по косинусам.

8. $f(x)=\begin{cases}0;\ 0\le x< \dfrac{\pi}{2},\\ -\sin x;\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi;\end{cases}$ по синусам.

9. $f(x)=\begin{cases}0;\ 0\le x< \dfrac{\pi}{2},\\ \sin x;\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi;\end{cases}$ по косинусам.

10. $f(x)=\begin{cases}0;\ 0\le x< \dfrac{\pi}{2},\\ \sin x;\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi;\end{cases}$ по синусам.

11. $f(x)=\begin{cases}2x;\ 0\le x\le 3,\\ 6;\ 3<x\le 6;\end{cases}$ по синусам.

12. $f(x)=\begin{cases}-x;\ 0\le x\le 2,\\ -2;\ 2<x\le 4;\end{cases}$ по косинусам.

13. $f(x)=\begin{cases}1;\ 0\le x\le 1,\\ 2-x;\ 1<x\le 4;\end{cases}$ по синусам.

14. $f(x)=\begin{cases}-2;\ 0\le x\le 1,\\ 2x-4;\ 1<x\le 2;\end{cases}$ по косинусам.

15. $f(x)=\begin{cases}x;\ 0\le x\le 2,\\ 2;\ 2<x\le 4;\end{cases}$ по синусам.

16. $f(x)=\begin{cases}-2x;\ 0\le x\le 3,\\ 6;\ 3<x\le 6;\end{cases}$ по косинусам.

17. $f(x)=\begin{cases}3;\ 0\le x\le 3,\\ -x+6;\ 1<x\le 6;\end{cases}$ по синусам.

18. $f(x)=\begin{cases}-4;\ 0\le x\le 2,\\ 2x-8;\ 2<x\le 4;\end{cases}$ по косинусам.

19. $f(x)=\begin{cases}3x;\ 0\le x\le 1,\\ 3;\ 1<x\le 2;\end{cases}$ по синусам.

20. $f(x)=\begin{cases}-x;\ 0\le x\le 3,\\ -3;\ 3<x\le 6;\end{cases}$ по косинусам.

Теория вероятностей.

Задача 16. Решить задачи на вычисление вероятности случайных событий.

1. а) Набирая номер телефона, абонент забыл первые три цифры, и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
   б) Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее 2 раз; б) не менее 2 раз.
2. а) В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобрано 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
   б) Событие *B* произойдёт в случае, если событие *A* наступит не менее 4 раз. Найти вероятность наступления события *B,* если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события *A* равна 0,8.
3. а) В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобрано 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.
   б) Найти вероятность того, что событие *A* произойдёт не менее 2 раз в 4 независимых испытаниях, если вероятность наступления события *A* в одном испытании равна 0,6.
4. а) Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из 3 человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран. Найти вероятность того, что в делегацию войдут 2 женщины и 1 мужчина.
   б) Вероятность наступления события *A* хотя бы один раз при трёх испытаниях равна 0,936. Найти вероятность наступления события *A* при одном испытании.
5. а) На полке расставляют наудачу 10 книг. Найти вероятность того, что 3 определённые книги окажутся рядом.
   б) Вероятность поражения цели хотя бы одной пулей при 4 независимых выстрелах равна 0,59. Какова вероятность поражения цели при одном

выстреле?

6. а) Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпадет одинаковое количество очков.
   б) Пусть вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартная, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 деталей не более 2 нестандартных.
7. а) Группа из 10 мужчин и 10 женщин делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части мужчин и женщин одинаково.
   б) Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров: а) не более одного потребует ремонта; б) хотя бы один не потребует ремонта.
8. а) В зале 50 мест. Найти вероятность того, что из 10 человек 5 займут определённые места, если места занимаются ими случайным образом.
   б) Вероятность выиграть по лотерейному билету равна 1/7. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из шести.
9. а) Для производственной практики на 30 студентов представлено 15 мест в Рязани, 8 – в Тамбове и 7 – в Воронеже. Какова вероятность того, что два определённых студента попадут на практику в один город?
   б) Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Найти вероятность разрушения объекта, если для этого необходимо не менее трёх попаданий, а сделано 15 выстрелов.
10. а) В партии из 10 изделий имеется 4 бракованных. Наугад выбирают 5 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 5 изделий 3 бракованных.
    б) Найти вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковые.
11. а) Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) все трое промахнутся; 3) только один стрелок попадёт в цель; 4) хотя бы один стрелок попадёт в цель.
    б) Вероятность появления события A при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трёх независимых испытаниях оно появится: 1) не менее двух раз; 2) хотя бы один раз.
12. а) В первом ящике 6 белых и 4 чёрных шара, во втором – 7 белых и 3 чёрных. Из каждого ящика наугад выбирают по одному шару. Чему равна вероятность того, что шары разного цвета?
    б) Игральную кость подбрасывают 3 раза. Найти вероятность того, что дважды появится число очков, кратное трём.

13. а) На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь стандартная, для первого станка равна 0,8, для второго – 0,9. Производительность второго станка втрое больше, чем первого. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

б) Событие B появится в случае, если событие A появится не менее четырёх раз. Найти вероятность того, что наступит событие B, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,5.

14. а) На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4, 5. Наугад выбирают одну за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой?

б) Случайно встреченное лицо может оказаться, с вероятностью $p=0,2$, брюнетом, с $p=0,3$ – блондином, с $p=0,4$ – шатеном и с $p=0,1$ – рыжим. Какова вероятность того, что среди трёх случайно встреченных лиц: 1) не менее двух брюнетов; 2) один блондин и два шатена; 3) хотя бы один рыжий.

15. а) Из партии, в которой 20 деталей без дефектов и 5 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что: 1) все три детали без дефектов; 2) по крайне мере одна деталь без дефектов?

б) Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,99. Найти вероятность трёх попаданий при четырёх выстрелах.

16. а) Слово «карета», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой. Какова вероятность получить при таком извлечении слово «карета»?

б) В квартире четыре электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется неисправной в течение года, равна 5/6. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить не менее половины лампочек?

17. а) Ящик содержит 10 деталей, среди которых 3 стандартных. Найти вероятность того, что из наудачу отобранных 5 деталей окажется не более одной стандартной.

б) В ящике имеется по одинаковому числу деталей, изготовленных №1 и №2. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу отобранных деталей изготовлены заводом №1: 1) две детали; 2) менее двух деталей; 3) более двух деталей.

18. а) Брошены два одинаковых игральных кубика. Найти вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани.

б) Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из трёх телевизоров: 1) не более одного потребует ремонта; 2) хотя бы один не потребует ремонта.

19. а) Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,3. а из второго – 0,4.

б) В ящике лежат несколько тысяч одинаковых предохранителей. Половина из них изготовлена I заводом, остальные – II заводом. Наудачу вынули пять предохранителей. Чему равна вероятность того, что I заводом из них изготовлены: 1) два предохранителя; 2) менее двух предохранителей; 3) более двух предохранителей?

20. а) В урне лежит 12 белых и 8 красных шаров. Вынули 8 шаров. Какова вероятность того, что: 1) три из них красные; 2) красных шаров вынуто не более трёх?

б) Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равно 0,1. Найти вероятность того, что: 1) из трёх проверенных изделий только одно нестандартное; 2) нестандартным будет только третье по порядку проверенное изделие.

Задача 17. Случайная величина X имеет распределение вероятностей, представленное таблицей. Найти функцию распределения $F(x)$. Построить многоугольник распределения. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

1.

X_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P_i	0,3	?	0,2	0,15	0,25

2.

X_i	0,2	0,4	0,7	0,8	1
P_i	0,1	0,15	?	0,2	0,3

3.

X_i	–1	0	1	2	3
P_i	0,1	?	0,25	0,2	0,3

4.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,1	0,15	0,25	?	0,3

5.

X_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P_i	0,2	0,25	0,15	?	0,3

6.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	?	0,2	0,3	0,15	0,25

7.

X_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

11.

X_i	0,2	0,4	0,7	0,8	1
P_i	0,1	0,15	0,2	0,15	?

12.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,25	?	0,3	0,2	0,1

13.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,1	0,1	0,2	0,15	?

14.

X_i	–1	0	1	2	3
P_i	?	0,2	0,2	0,3	0,2

15.

X_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P_i	0,1	0,15	?	0,2	0,3

16.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,3	?	0,05	0,15	0,4

17.

X_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

P_i	0,3	?	0,25	0,15	0,1

8.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,2	0,15	0,25	0,1	?

9.

X_i	–1	0	1	2	3
P_i	0,1	0,15	0,2	?	0,3

10.

X_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P_i	?	0,25	0,15	0,1	0,3

P_i	0,1	0,05	0,25	0,3	?

18.

X_i	–2	–1	0	1	2
P_i	0,2	0,15	?	0,25	0,25

19.

X_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P_i	0,1	?	0,05	0,4	0,4

20.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,15	0,15	0,15	?	0,2

Задача 18. Случайная величина X задана функцией распределения F. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X.

1. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x<1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

2. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{\left(x^2-x\right)}{2}, & 1<x<2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

3. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

4. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 3x^2+2x, & 0<x\le \dfrac{1}{3};\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

11. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{x-1}{2}, & 1\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$

12. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$

13. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ \dfrac{x-3}{2}, & 3\le x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$

14. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{x+2}{4}, & -2\le x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

5. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{x}{2}-1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

6. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^2}{9}, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$

7. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

8. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2};\\ \cos x, & \frac{-\pi}{2}<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

9. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\sin x, & 0<x\le \frac{\pi}{6};\\ 1, & x>\frac{\pi}{6}.\end{cases}$

10. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le \frac{3\pi}{4};\\ \cos 2x, & \frac{3\pi}{4}<x\le \pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

15. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & -1<x\le \frac{1}{3};\\ 1, & x>\frac{1}{3}.\end{cases}$

16. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 0{,}5x, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

17. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

18. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin 2x, & 0<x\le \frac{\pi}{4};\\ 1, & x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

19. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

20. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le \frac{\pi}{6};\\ -\cos 3x, & \frac{\pi}{6}<x\le \frac{\pi}{3};\\ 1, & x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

Задача 18. Найти выборочное уравнения прямой

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

регрессии Y на X по данной корреляционной работе.

1.

Y	**X**						**n_y**
	4	9	14	19	24	29	
10	2	3	–	–	–	–	5
20	–	7	3	–	–	–	10
30	–	–	2	50	2	–	54
40	–	–	1	10	6	–	17
50	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	N=100

2.

Y	**X**						**n_y**
	10	15	20	25	30	35	
30	2	6	–	–	–	–	8
40	–	4	4	–	–	–	8
50	–	–	7	35	8	–	50
60	–	–	2	10	8	–	20
70	–	–	–	5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	N=100

3.

Y	**X**						**n_y**
	15	20	25	30	35	40	
5	4	2	–	–	–	–	6
10	–	6	4	–	–	–	10
15	–	–	6	45	2	–	53
20	–	–	2	8	6	–	16
25	–	–	–	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	N=100

4.

Y	**X**						**n_y**
	15	15	20	25	30	35	
6	4	2	–	–	–	–	6
12	–	6	2	–	–	–	8
18	–	–	5	40	5	–	50
24	–	–	2	8	7	–	17
30	–	–	–	4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	N=100

5.

Y	**X**						**n_y**
	5	10	15	20	25	30	
20	1	5	–	–	–	–	6
30	–	5	3	–	–	–	8
40	–	–	9	40	2	–	51
50	–	–	4	11	6	–	21
60	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	N=100

6.

Y	**X**						**n_y**
	5	10	15	20	25	30	
8	2	4	–	–	–	–	6
12	–	3	7	–	–	–	10
16	–	–	5	30	10	–	45
20	–	–	7	10	8	–	25
24	–	–	–	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	N=100

7.

Y	**X**						**n_y**
	2	7	12	17	22	27	
10	2	4	–	–	–	–	6
20	–	6	2	–	–	–	8

30	–	–	3	50	2	–	55
40	–	–	1	10	6	–	17
50	–	–	–	4	7	3	14
$\mathbf{n_x}$	2	10	6	64	15	3	N=100

8.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	11	16	21	26	31	36	
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	45	4	–	55
55	–	–	2	8	6	–	16
65	–	–	–	4	7	3	14
$\mathbf{n_x}$	2	10	11	57	17	3	N=100

9.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	4	9	14	19	24	29	
8	3	3	–	–	–	–	6
18	–	5	4	–	–	–	9
28	–	–	40	2	8	–	50
38	–	–	5	10	6	–	21
48	–	–	–	4	7	3	14
$\mathbf{n_x}$	3	8	49	16	21	3	N=100

10.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	5	10	15	20	25	30	
11	4	2	–	–	–	–	6
21	–	5	3	–	–	–	8
31	–	–	5	45	5	–	55
41	–	–	2	8	7	–	17
51	–	–	–	4	7	3	14
$\mathbf{n_x}$	4	7	10	57	19	3	N=100

11.

Y	**X**						**n_y**
	5	10	15	20	25	30	
10	2	6	–	–	–	–	8
20	–	7	3	–	–	–	10
30	–	–	2	40	2	–	44
40	–	–	1	10	13	–	24
50	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	13	6	54	22	3	N=100

12.

Y	**X**						**n_y**
	15	20	25	30	35	40	
30	1	6	–	–	–	–	7
40	–	–	4	–	–	5	9
50	–	4	7	30	9	–	50
60	–	–	2	10	8	–	20
70	5	–	–	–	6	3	14
n_x	6	10	13	40	23	8	N=100

13.

Y	**X**						**n_y**
	4	9	14	19	24	29	
5	–	–	4	2	–	–	6
10	–	6	–	–	–	4	10
15	45	–	6	–	2	–	53
20	–	6	2	8	–	–	16
25	7	–	–	4	–	4	15
n_x	52	12	12	14	2	8	N=100

14.

Y	**X**						**n_y**
	2	7	12	17	22	27	
6	–	–	–	4	2	–	6

12	–	5	3	–	–	–	8
18	–	5	–	40	5	–	50
24	–	–	2	8	–	7	17
30	8	–	–	4	7	–	19
$\mathbf{n_x}$	8	10	5	56	14	7	N=100

15.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	11	16	21	26	31	36	
20	–	–	–	–	7	–	7
30	–	4	3	–	–	–	7
40	1	–	9	40	2	–	52
50	–	6	4	11	6	–	27
60	–	–	–	4	–	3	7
$\mathbf{n_x}$	1	10	16	55	15	3	N=100

16.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	2	7	12	17	22	27	
8	2	–	–	–	–	4	6
12	–	3	7	–	–	–	10
16	–	–	5	30	10	–	45
20	–	4	7	10	8	–	29
24	5	1	–	–	4	–	14
$\mathbf{n_x}$	7	8	19	40	22	4	N=100

17.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	11	16	21	26	31	36	
10	–	4	–	–	1	–	5
20	2	–	2	–	–	6	10
30	–	6	3	40	2	–	51
40	10	–	1	2	6	–	19
50	–	–	–	4	8	3	15
$\mathbf{n_x}$	12	10	6	46	17	9	N=100

18.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	4	9	14	19	24	29	
25	–	–	4	–	1	1	6
35	7	–	2	–	–	2	11
45	–	–	6	40	4	–	50
55	–	8	2	–	9	–	19
65	3	–	–	4	7	–	14
$\mathbf{n_x}$	10	8	14	44	21	3	N=100

19.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	5	10	15	20	25	30	
8	–	–	1	–	4	1	6
18	5	–	4	–	–	–	9
28	–	–	40	–	8	2	50
38	–	10	5	–	6	–	21
48	–	–	–	4	7	3	14
$\mathbf{n_x}$	5	10	50	4	25	6	N=100

20.

Y	**X**						$\mathbf{n_y}$
	2	7	12	17	22	37	
11	–	–	–	2	–	4	6
21	3	5	–	–	–	–	8
31	–	–	5	45	–	–	50
41	–	8	2	–	7	–	17
51	–	–	–	4	7	8	19
$\mathbf{n_x}$	3	13	7	51	14	12	N=100

Рекомендации по выполнению контрольных работ
Контрольная работа № 3
Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Тип уравнения	Вид уравнения	Характерные признаки уравнения	Метод решения
Уравнение с разделяющимися переменными	$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	Коэффициенты при дифференциалах *dx* и *dy* представляют собой произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной *x*, а другая только от переменной *y*.	Общее решение: $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$ $y' = \frac{dy}{dx}$
Однородное	$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	*P(x,y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одного порядка.	Подстановка: $\frac{y}{x} = u, y = u \cdot x$ $y' = u'x + u$ $dy = xdu + udx$
Линейное	$y' + p(x) \cdot y = q(x)$	Левая часть уравнения является линейной комбинацией искомой функции и её производной, правая часть является функцией независимой переменной.	Общее решение: $y = (\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ Подстановка: $y = u \cdot v$
Бернулли	$y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$ $n \neq 0,1$	Отличается от линейного уравнения тем, что в правой части есть множитель – степень искомой функции.	Подстановка: $y = u \cdot v$

Уравнения, допускающие понижение порядка

Тип уравнения	Метод решения
$y^{(n)} = f(x)$	Порядок уравнения понижается путём последовательного интегрирования n раз
$y'' = f(x, y')$	$y' = z(x),\ y'' = z'(x)$
$y'' = f(y, y')$	$y' = z(y),\ y'' = z'(y) \cdot z(y)$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$ay'' + by' + cy = 0$, a, b *и* $c -$ некоторые числа.

$ak^2 + bk + c = 0 -$ характеристическое уравнение

При решении характеристического уравнения возможны следующие случаи:

дискриминант	корни	частные решения	общее решение
D > 0	$k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1(x)}$, $y_2 = e^{k_2(x)}$	$y = C_1 e^{k_1(x)} + C_2 e^{k_2(x)}$
D = 0	$k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1(x)}$, $y_2 = xe^{k_2(x)}$	$y = C_1 e^{k_1(x)} + C_2 xe^{k_2(x)}$
D< 0	$k_1 = \alpha + \beta i$ $k_2 = \alpha + \beta i$	$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_1 = e^{(\alpha-\beta i)x}$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$ay'' + by' + cy = f(x)$, a, b *и* $c -$ некоторые числа.

$y = y_{одн} + y_{частн} -$ общее решение.

Случай 1. Правая часть уравнения имеет вид

$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, $\alpha \in R$, $P_n(x) -$многочлен степени n.

В этом случае частное решение $y_{частн} = P_n^{общ}(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r$,

r – число, показывающее, сколько раз α является корнем характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$, $P_n^{общ}(x)$ – многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами

Случай 2. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, где $P_n(x), Q_n(x) -$ многочлены степени n соответственно, α *и* β – действительные числа.

В этом случае частное решение $y_{частн} = e^{\alpha x}(P_n^{общ}(x)\cos\beta x + Q_n^{общ}(x)\sin\beta x) \cdot x^r$,

r – число, равное кратности $\alpha + \beta i$, как корня характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$

$P_n^{общ}(x)$ *и* $Q_n^{общ}(x) -$ многочлены степени n с неопределёнными коэффициентами,

n – наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ *и* $Q_n(x)$.

Задача 1. Найти общее решение уравнения $xy' - y = x^3$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как оно содержит искомую функцию y и ее производную y' в первой степени и не содержит их произведений.

Применяем подстановку $y = uv$, где u и v - некоторые неизвестные функции аргумента x.

Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид

$$xu'v + xuv' - uv = x^3 \quad \text{или} \quad v(xu' - u) + xuv' = x^3. \qquad (1)$$

Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию u так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой части равенства (1), обращалось в нуль, т.е. выберем функцию u так, чтобы имело место равенство:

$$xu' - u = 0. \qquad (2)$$

При таком выборе функции u уравнение (1) примет вид:

$$xuv' = x^3 \text{ или } uv' = x^2. \qquad (3)$$

Уравнение (2) есть уравнение с разделяющимися переменными относительно *u* и *x*. Решим это уравнение:

$$x\frac{du}{dx} - u = 0; \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}; \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}; \quad ln|u| = ln|x|; \quad u = x.$$

Чтобы равенство (2) имело место, достаточно найти одно какое-либо частное решение, удовлетворяющее этому уравнению. Поэтому для простоты при интегрировании этого уравнения находим то частное решение, которое соответствует значению произвольной постоянной $C = 0$. Подставив в (3) найденное выражение для *u*, получим:

$$xv' = x^2; \; v' = x; \quad \frac{dv}{dx} = x; \quad dv = xdx.$$

Интегрируя, получаем $v = \frac{x^2}{2} + C$. Тогда $y = x(\frac{x^2}{2} + C)$ - общее решение данного уравнения.

Задача 2. Найти частное решение уравнения $y'' + 16y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = -1, \; y'(\pi) = 0$.

Решение. Данное уравнение является однородным линейным уравнением. Для нахождения y составим характеристическое уравнение $k^2 + 16 = 0$, имеющее комплексные корни $k_1 = 4i$, $k_1 = -4i$. В этом случае общее решение однородного уравнения ищем в виде:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \qquad (4)$$

где $\alpha \pm \beta i$ - комплексные корни характеристического уравнения. Подставив в (4) $\alpha = 0, \; \beta = 4$ имеем:

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Для нахождения частного решения $\bar{y}$ однородного дифференциального уравнения находим y':

$$y' = (C_1 + 4C_2 x)\cos 4x + (B - 4Ax)\sin 4x.$$

Используя начальные условия, получим систему: $\begin{cases} C_1 = -1 \\ C_1 + 4C_2\pi = 0 \end{cases}$,

откуда $C_1 = -1, \; C_2 = \frac{1}{4\pi}$.

Следовательно, $\bar{y} = -\cos 4x + \frac{1}{4\pi}\sin 4x$ есть искомое частное решение данного дифференциального уравнения.

Задача 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 3\sin 2x - 2\cos 2x$.

Решение. Общее решение у данного уравнения равно сумме общего решения $y_{одн}$ однородного уравнения и какого-либо частного решения у данного уравнения, т.е.

$$y = y_{одн} + \bar{y}.$$

Для нахождения $y_{одн}$ составим характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$, имеющее комплексные корни $k_1 = -2 + 3i$, $k_2 = -2 - 3i$. В этом случае общее решение однородного уравнения ищем в виде:

$$y_{одн} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \qquad (5)$$

где $\alpha \pm \beta i$ - комплексные корни характеристического уравнения. Подставив в (5) $\alpha = -2$, $\beta = 3$ имеем:

$$y_{одн} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Для нахождения частного решения $\bar{y}$ неоднородного дифференциального уравнения воспользуемся следующей теоремой: если правая часть неоднородного уравнения есть функция $f(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ и числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение $\bar{y} = e^{\alpha x}(A\cos \beta x + B \sin \beta x)$. Если же числа $\alpha \pm \beta i$ являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение

$$\bar{y} = xe^{\alpha x}(A\cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Применяя эту теорему при $\alpha = 0$, $\beta = 2$, имеем:

$$\bar{y} = A\cos 2x + B \sin 2x.$$

Дифференцируя это равенство, находим $\bar{y}'$:

$$\bar{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

Дифференцируя последнее равенство, находим $\bar{y}''$:

$$\bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставив в исходное уравнение выражения для y, $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$, получим:

$$(9B - 8A)\sin 2x + (9A + 8B)\cos 2x = 3\sin 2x - 2\cos 2x,$$

откуда $A = -\frac{42}{145}$, $B = \frac{11}{145}$.

Следовательно, $\bar{y} = -\frac{42}{145}\cos 2x + \frac{11}{145}\sin 2x$ есть частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Искомое общее решение данного дифференциального уравнения запишем в виде

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{42}{145}\cos 2x + \frac{11}{145}\sin 2x.$$

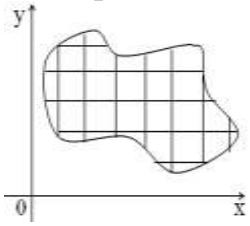
Кратные и криволинейные интегралы.

Кратные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой *f(x, y) = 0*.Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i.



Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} \sum \sum_{\Delta} f(x, y) \Delta y \Delta x$$

Вычисление двойного интеграла.

Если функция *f(x, y)* непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a<b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ≤ψ, тогда

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy .$$

Замена переменных в двойном интеграле. Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx$, где переменная x изменяется в пределах от a до b, а переменная y – от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$. Пусть $x = f(u, v)$; $y = \varphi(u, v)$.

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{V_1}^{V_2} dv \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u,v),\varphi(u,v))\cdot|i|\cdot du$$

Выражение $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = |i|$ называется *определителем Якоби* или *якобианом* функций f(u, v) и φ(u, v).

Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.
2) Вычисление площадей в полярных координатах.
3) Вычисление объемов тел.
4) Вычисление площади кривой поверхности.
5) Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.
6) Вычисление центров тяжести площадей плоских фигур.
7) Координаты центра тяжести тела.
8) Моменты инерции тела относительно осей координат.
9) Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей.
10) Момент инерции тела относительно начала координат.
11) Вычисление массы неоднородного тела.

Криволинейные интегралы.

Рассмотрим в пространстве XYZ кривую AB, в каждой точке которой определена произвольная функция $f(x, y, z)$.

Разобьем кривую на конечное число отрезков и рассмотрим произведение значения функции в каждой точке разбиения на длину соответствующего отрезка $f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$

Сложив все полученные таким образом произведения, получим так называемую **интегральную** сумму функции $f(x, y, z)\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги надо определить его связь с обыкновенным определенным интегралом.

Пусть кривая AB задана параметрически уравнениями x = x(t), y = y(t), z =

z(t), $\alpha \le t \le \beta$, где функции x, y, z – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, а точке B соответствует $t = \beta$. Функция f(x, y, z) – непрерывна на всей кривой AB.

Криволинейный интеграл по длине дуги AB будет находиться по формуле:

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

Если интегрирование производится по длине плоской кривой, заданной уравнением $y = \varphi(x), \quad a \le x \le b,$ то получаем:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$$

Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой AB интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется криволинейным интегралом по переменной *x* от функции *P(x, y, z)* по кривой AB в направлении от точки A к точке B.

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i$$

Сумму криволинейных интегралов также называют криволинейным интегралом второго рода.

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

В случае, если AB – плоская кривая, заданная параметрически, то

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt.$$

В случае, если AB – плоская кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, то

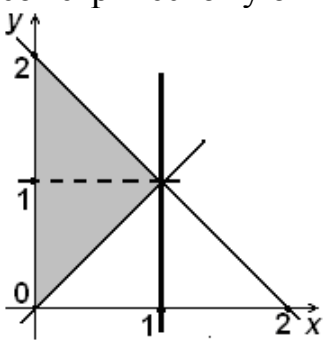
$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x, f(x) + Q(x, f(x))\, f'(x)\right]dx.$$

Задача 4. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x,y)dy$. Сделать чертёж области интегрирования.

Решение. Чтобы изменить порядок интегрирования, составим геометрическое описание области интегрирования.

$$0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2 - x.$$

Построим чертеж согласно геометрическому описанию.



Проецируя данную область на ось Оу, видим, что при этом ее верхняя граница состоит из двух линий. Поэтому разделим область на две части, геометрическое описание которых имеет следующий вид:

$$1)\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y,$$

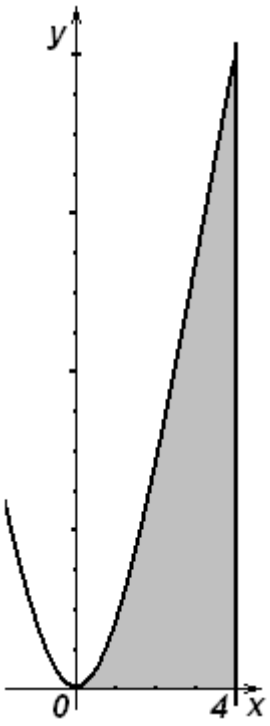
$$2)\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2 - y.$$

Теперь записываем данный интеграл с измененным порядком интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx\ .$$

Задача 5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2,\ x = 4,\ y = 0.$$



Сделать чертёж области интегрирования.

Решение. Необходимо воспользоваться формулами

$$x_c = \frac{S_y}{S},\ y_c = \frac{S_x}{S}.$$

Вычисляем величины S, S_x, S_y.

$$S = \int_0^4 dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{4^3}{3}\ .$$

$$S_x = \int_0^4 dx \int_0^{x^2} y dy = \int_0^4 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^4 \frac{x^4}{2} dx = \frac{x^5}{10}\Big|_0^4 = \frac{4^5}{10}.$$

$$S_y = \int_0^4 x dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = \frac{4^4}{4} = 4^3.$$

Подставляя найденные значения в формулы, получаем

$$x_c = \frac{S_y}{S} = 4^3 : \frac{4^3}{3} = 3;\ \ y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{4^5}{10} : \frac{4^3}{3} = \frac{4^2 \cdot 3}{10} = 4{,}8.$$

Задача 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

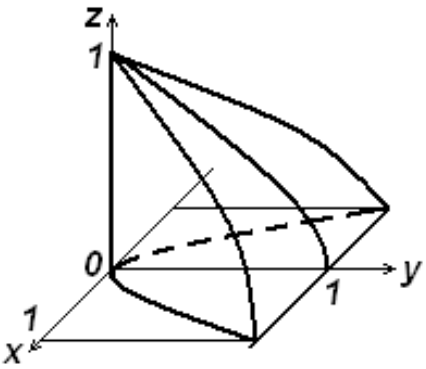
$$z^2 = 1 - y,\ y = x^2,\ z \ge 0.$$

Сделать чертёж области интегрирования.

Решение. Составим геометрическое описание области интегрирования:

$$-1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le \sqrt{1-y}\ .$$

Построим чертеж согласно геометрическому описанию.



$$V=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{1-y}}dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\sqrt{1-y}\,dy=-\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(1-y)^{\frac{1}{2}}d(1-y)=$$

$$=-\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{1}dx=-\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{1}dx=\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Сделаем подстановку $\boldsymbol{x=sint}$. Пересчитаем пределы интегрирования

$$x=1,\quad t=\arcsin x=\frac{\pi}{2},$$

$$x=-1,\ t=-\frac{\pi}{2}.$$

Тогда интеграл с учетом четности подынтегральной функции можно вычислить следующим образом:

$$\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}d(\sin t)=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,d(\sin t)=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cos t\,dt=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t)^2\,dt=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}\right)dt=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}\right)dt=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\right)dt=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4t\right)dt=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t\right)dt=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{32}\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$$

Задача 7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\hat{I}\hat{A}}(xy-x)dx+\frac{x^2}{2}dy$ вдоль дуги параболы $y=2\sqrt{x}$ от начала координат до точки A(1;2).

Решение. Подставляем вместо переменной *y* её выражение через переменную *x*.

$$\int_{ÎÀ}(xy-x)dx+\frac{x^2}{2}dy=\int_0^1(2x\sqrt{x}-x+\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\int_0^1(2x^{\frac{3}{2}}-x+\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}})dx=$$

$$=\int_0^1(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-x)dx=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=1.$$

Контрольная работа №4

Ряды.

Числовые ряды.

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом** $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Числа $u_1, u_2, ...$ называют членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм $\lim S_n = S$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами

Если $u_n \le v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Признак Даламбера: Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при ρ< 1 ряд сходится, а при ρ> 1 – расходится. Если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Признак Коши (радикальный признак): Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших nвыполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Интегральный признак Коши: Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), то ряд φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … = $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Признак Лейбница: Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$ абсолютные величины u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ и общий член стремится к нулю $u_n \to 0$, то ряд сходится.

Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Степенные ряды.

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при x = x_1, то он сходится и притом абсолютно для всех $|x| > |x_1|$.

Для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех *x* таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется *радиусом сходимости*. Интервал (-R, R) называется *интервалом сходимости*.

Радиус сходимости можно найти по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|.$$

Разложение функции в степенной ряд можно осуществить с помощью формул Тейлора и Маклорена.

Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

.

Ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f''(0)}{n!}x^n ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n .$$

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n + .. \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (-1<x<1)$$

Приближенные вычисления с помощью рядов.
Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$$

Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды, то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям. Это решение можно представить степенным рядом: $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные c_i. Эта задача решается **методом сравнения неопределенных коэффициентов**.

Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые действия со степенными рядами (дифференцирование, сложение, вычитание, умножение и пр.) Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_i.

Также применяют **метод последовательного дифференцирования.** Решение дифференциального уравнения находят в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Используя заданные начальные условия, последовательно находят значения производных и подставляют в формулу ряда Маклорена.

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^2n}$.

Решение. Постоянный общий множитель членов ряда выносим за знак суммы, т.е.

$$\frac{1}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Как известно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический, т.е. расходящийся. Следовательно, исследуемый ряд также расходящийся.

Задача 9. Исследовать на сходимость с помощью признака Лейбница

знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5n}{n^2+3}$.

Решение. Беря последовательно $n = 1,2,3,...$, запишем данный ряд в виде бесконечной суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5n}{n^2+3} = -\frac{5}{4} + \frac{10}{7} - \frac{15}{12} + \frac{20}{19} - \frac{25}{28} + ...$$

Общий член данного ряда по абсолютной величине стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+3/n} = 0.$$

Члены ряда убывают по абсолютной величине, т.е.

$$\frac{5}{4} > \frac{10}{7} > \frac{15}{12} > \frac{20}{19} > \frac{25}{28} > ...$$

Следовательно, по признаку Лейбница сходимости знакочередующихся рядов этот ряд сходится.

Задача 10. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ и исследовать сходимость на концах интервала сходимости.

Решение. Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}2^n}{2^{n+1}nx^n} \right| = \frac{1}{2}|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = \frac{1}{2}|x|.$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях *x*, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{2}|x| < 1 \quad \text{или} \quad |x| < 2, \quad \text{или} \quad -2 < x < 2.$$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала.

При $x = -2$ ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$.

Данный ряд является знакочередующимся; абсолютная величина его общего члена стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Следовательно, по признаку Лейбница сходимости знакочередующихся рядов, этот ряд расходится. Значит, $x = -2$ не принадлежит области сходимости исследуемого ряда.

При $x = 2$ ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Данный ряд является расходящимся, поскольку для него не выполняется необходимый признак сходимости знакоположительных рядов, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Таким образом, $-2 < x < 2$ - область сходимости данного ряда.

Задача 11. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$ с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда. Заменив x в разложении функции $\cos x$ в ряд Маклорена на $\sqrt{x}$, имеем:

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{4!} - \frac{(\sqrt{x})^6}{6!} + \ldots$$

или

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots$$

Тогда

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx = \int_0^1 (1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots)dx = \left(x - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^4}{6!\cdot 4} + \ldots \right)_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} + \ldots$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Так как четвертый его член по абсолютной величине меньше 0,001, то для обеспечения заданной точности достаточно взять первые три члена. Тогда

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} \approx 0{,}764.$$

Теория вероятностей.

Элементы комбинаторики. Алгебра событий.

Суммой A+B двух событий A и B называют событие, состоящее в том,
Что произошло хотя бы одно из событий A и B. **Суммой нескольких событий**, соответственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B. Аналогично **произведением нескольких событий** называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.

Разностью A\B событий A и B называется событие, состоящее в том, что A произошло, а B–нет.

События A и B называются **совместными**, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае события называются **несовместными.**

Перестановки–это комбинации, составленные из всех n элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок $P_n = n!$

Размещения–комбинации из m элементов множества, содержащего n

различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Сочетания–комбинации из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов, отличающиеся только составом элементов. Число всех возможных сочетаний $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Определение вероятности. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Вероятностью события А называется отношение числа исходов опыта, Благоприятных этому событию, к числу возможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Статистической вероятностью события считают его относительную частоту $w(A) = \frac{m}{n}$: отношение числа опытов, в которых наблюдалось событие А, к общему количеству проведенных испытаний.

Теорема сложения. Вероятность $P(A + B)$ суммы событий A и B равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

Теорема умножения Вероятность произведения двух событий равна Произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Формула полной вероятности.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)$$

Формула Байеса.

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}$$

Схема Бернулли. Формула Пуассона.

Рассмотрим серию из *n* испытаний, в каждом из которых событие *A* появляется с одной и той же вероятностью *p*, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется **схемой Бернулли.**

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Приближенная формула Пуассона, еслиприбольшомчислеиспытанийвероятностьпоявленияAводномопытемала, а произведение $np = \lambda$ сохраняет постоянное значение для разных серий опытов.

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Дискретные и непрерывные случайные величины, их числовые характеристики.

Случайной величиной называют величину, которая в результате опыта принимает различные значения, заранее неизвестные.

Дискретная случайная величина принимает отдельные изолированные значения с определенными вероятностями. Законом распределения случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

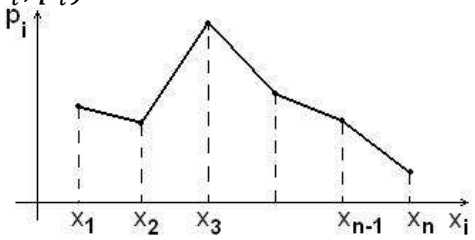
Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая случайная величина.

Закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде ряда распределения, многоугольника распределения и функции распределения.

Ряд распределения:

X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
P	p_1	p_2	p_3	. . .	p_n

Многоугольник распределения – это ломаная, вершинами которой являются точки с координатами $(x_i; p_i)$:



Числовыми характеристиками называют параметры, отражающие наиболее существенные черты закона распределения случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений возможных значений случайной величины и их вероятностей:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i\,.$$

Свойства математического ожидания независимых случайных величин:

1. $M(C) = C$ (С – постоянная),
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$,
3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$,
4. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

Модой дискретной случайной величины называется ее наивероятнейшее значение.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию можно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$,
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$,
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$,
4. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Среднее квадратическое отклонение – это $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Этот параметр имеет размерность случайной величины и может быть наглядно представлено графически.

Случайная величина называется, если множество всевозможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Функцией распределения *F*(*x*) случайной величины *X* называется Вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее *x*:
$F(x) = p(X < x)$.

Свойства функции распределения.

1) $0 \le F(x) \le 1$.
2) $F(x)$ - неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4) $p(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Функция $f(x)$, называемая **плотностью распределения** непрерывной случайной величины, определяется по формуле:
$f(x) = F'(x)$.

Свойства функции плотности распределения.

1) $f(x) \ge 0$, так как функция распределения является неубывающей.
2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$; 3) $p(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
5) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, так как $F(x) \to const$ при $x \to \pm\infty$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)$$

Задача 12. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет три окрашенные грани.

Решение. Пусть событие А - наудачу извлеченный кубик имеет три окрашенные грани. Число исходов, благоприятствующих событию А равно 8, а число всех равновозможных исходов равно 1000. Следовательно,

$$P(A) = \frac{8}{1000} = 0{,}008 .$$

Задача 13. В больницу поступают 50% больных с заболеванием А , 30% с заболеванием В и 20% с заболеванием С. Вероятность полного выздоровления равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что пациент выписан из больницы здоровым.

Решение. Событие *A* - пациент выписан из больницы здоровым. Можно сделать предположения:

событие H_1 - выписанный болел заболеванием А, $P(H_1)=0{,}5$;

событие H_2 - выписанный болел заболеванием В, $P(H_2)=0{,}3$;

событие H_3 - выписанный болел заболеванием С, $P(H_3)=0{,}2$.

Вероятность события А найдем по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=$$

$$=0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}77$$

Задача 14. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из 360 семян взойдут не менее 280 и не более 300.

Решение. Используем интегральную формулу Лапласа

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

По условию задачи $n=360$, $p=0{,}8$, $q=1-p=0{,}2$, $k_1=280$, $k_2=300$.

По приведенной формуле имеем

$$P_{360}(280\le k\le 300)\approx \Phi(1{,}58)-\Phi(-1{,}05)=$$

$$=0{,}44295+0{,}34850=0{,}79145$$

Задача 15. Задан закон распределения дискретной случайной величины X

X	15	11	13	12
p	0,2	0,5	0,2	0,1

(в первой строке указаны возможные значения величины X, во второй строке даны вероятности p этих значений). Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ.

Решение. 1) $M(X)=15\cdot 0{,}2+11\cdot 0{,}5+13\cdot 0{,}2+12\cdot 0{,}1=12{,}3$

2) $D(X)=M(X^2)-M(X)=15^2\cdot 0{,}2+11^2\cdot 0{,}5+13^2\cdot 0{,}2+$
$12^2\cdot 0{,}1-12{,}3^2=153{,}7-12{,}3^2=2{,}41$

3) $\sigma=\sqrt{D(X)}=1{,}55$

Задача 16. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{4} & при \quad 0\le x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Найти: 1) дифференциальную функцию распределения *f(x)*;

2) математическое ожидание M(X);

3) дисперсию D(X);

4) $P(0{,}5 < x < 1)$, $P(x < 1{,}5)$.

Решение. 1) Дифференциальной функцией распределения *f(x)* непрерывной случайной величины X называется производная от интегральной функции распределения F(x), т.е. $f(x) = F'(x)$.

Искомая дифференциальная функция имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, x > 2, \\ \dfrac{x}{2} & при \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

2) Математическое ожидание непрерывной случайной величины X вычислим по формуле

$$M(X) = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

3) Дисперсию непрерывной случайной величины X вычислим по формуле

$$D(X) = \int_0^2 (x - \frac{1}{6})^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}) dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36})\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{18}) = \frac{61}{36}.$$

4) $P(0{,}5 < x < 1) = F(1) - F(0{,}5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$,

$$P(x < 1{,}5) = F(1{,}5) = 0{,}5625 .$$

Учебное издание

Математика

Методические указания по выполнению контрольных работ
для бакалавров технического профиля заочной формы обучения (2-й курс)

Составители:
Лукьянова Елена Александровна,
Огнёв Игорь Анатольевич

Редактор Л.А. Кром

Подписано в печать ……Формат
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл .печ. л. …
Уч.-изд. л……. Тираж……экз. Зак….Поз.плана…

ИД № от ……
Иркутский государственный технический университет
664074, Иркутск, Лермонтова, 83