В.Д. Бертяев Л.А.Булатов В. И.Латышев А. Г. Митяев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Курсовые работы с использованием Mathcad



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. КУРСОВЫЕ РАБОТЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ Mathcad

УДК 534.1 + 538.56

ISBN –

Представлены курсовые работы по кинематике, статике и динамике выполняемые студентами ТулГУ при изучении теоретической механике. Исследовательская часть курсовых работ проводится с использованием математически-ориентированного пакета Mathcad.

Ил.: 64. Табл.: 22. Библиогр.: 13

Рецензенты: Кафедра теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Заведующий кафедрой В.В. Дубинин
Кафедра теоретической механики Московского автомобильно-дорожного института (государственный технический университет)
Заведующий кафедрой В.Б. Борисевич

ISBN

© В. Д. Бертяев, А. Л. Булатов, В. И. Латышев, А.Г. Митяев; 2009

©

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика, являющаяся одной из фундаментальных дисциплин, играет существенную роль в подготовке бакалавров и специалистов всех инженерных направлений и специальностей подготовки.

На законах и принципах теоретической механики базируется целый ряд естественнонаучных и общетехнических дисциплин, таких как сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, строительная механика и др. Решение инженерных и научных задач, проектирование новых машин, конструкций и сооружений также осуществляется на основе теорем и принципов теоретической механики.

Хорошие знания теоретической механики требуют не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и при необходимости выбрать оптимальный вариант решения. Все вышеизложенное наиболее успешно может быть достигнуто при выполнении курсовых работ.

Данный сборник содержит 7 заданий по всем основным разделам теоретической механики, утвержденных Министерством образования Российской федерации (кинематика – 1, статика – 3, динамика и аналитическая механика – 3). В нем приведены примеры выполнения заданий, основываясь на которых, студенты (особенно заочных и вечерних форм обучения) смогут самостоятельно их выполнять. Большинство заданий при выполнении требуют проведения некоторых исследований и принятия на их основе практических рекомендаций.

Предлагаемые курсовые работы дают возможность после изучения изло-

женного материала, самостоятельно решать более сложные и математически трудоемкие задачи механики.

Выполнение курсовых работ осуществляется с использованием математического пакета Mathcad, который представляет собой эффективное средство для аналитических преобразований и численного решения теоретических и практических задач. Область его применения простирается от простейших вычислений до расчета сложных задач в различных отраслях знаний. С помощью Mathcad можно с успехом решать задачи механики абсолютно твердых и деформируемых тел. Пакет имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики.

Использование Mathcad в теоретической механике позволяет проводить анализ поведения механических систем в соответствии с поставленной задачей, что дает возможность решать реальные инженерные задачи учащимися младших курсов не знакомых еще с численными методами и программированием, но имеющих базовые знания в курсе информатики.

Общие положения

Процедура постановки и решения задач теоретической механики включает в себя пять основных этапов:

1) Формулировку задачи;
2) Построение расчетной схемы;
3) Построение математической модели;
4) Реализация математической модели (решение задачи);
5) Анализ результатов и принятие решений.

Первые три этапа включает в себя постановка задачи.

Формулировка задачи — это условие (текст) задачи. Она осуществляется руководителем работ совместно с исполнителем.

Расчетная схема — это рисунок, на котором изображены: рационально выбранная система координат; упрощенная схема механической системы в произвольном или заданном положении; механические характеристики и т.п. (в зависимости от применяемого метода).

Математическая модель — это система алгебраических и / или дифференциальных уравнений (уникальная для каждого применяемого метода), а также начальных условий, описывающих кинематическое поведение механической системы.

Реализация математической модели — это решение поставленной задачи выбранным, на этапе постановки, методом.

Анализ полученных результатов — это сравнение решений, полученных разными методами, определение критических состояний механической системы и нахождение оптимальных параметров для ее функционирования.

Требования к оформлению и защите[1]

Работа представляется к защите в виде пояснительной записки. Пояснительная записка, объемом 25-30 листов, аккуратно оформляется на листах формата А4. Каждый лист должен быть пронумерован. Разделы и параграфы должны быть озаглавлены и пронумерованы. Формулы, на которые есть ссылки в тексте пояснительной записки, обязательно нумеруются. Листы должны быть скреплены между собой. Пояснительная записка включает в себя:

1) Титульный лист.
2) Аннотация (Краткое содержание работы).
3) Оглавление с нумерацией страниц каждого раздела.
4) Схема механизма (конструкции) и необходимые численные данные для выполнения задания (на отдельном листе).
5) Постановка задачи. Описание подхода к решению задачи, формулировка математической модели и методов решения, использованных в процессе работы над проектом.
6) Решение полученной системы уравнений.
7) Анализ результатов.
8) Список литературы.

При защите работы оцениваются следующее: оформление пояснительной записки; правильность постановки и решения задач механики; самостоятельность выполнения задания; грамотный анализ полученного решения.

При защите необходимо уметь прокомментировать любой метод решения, уметь определять механические характеристики системы по требованию преподавателя.

[1] Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются, а возвращаются для переделки.

1. КИНЕМАТИКА

Данное задание посвящено применению основных теорем и принципов кинематики к исследованию механических систем. Студенты, выполняя то или иное задание, должны получить навыки и умения:

- нахождения геометрических связей наложенных на заданный механизм и формулировку их в математическом виде;
- составления уравнений движения произвольной точки механизма и определения ее траектории, скорости, ускорения;
- применения теорем о сложении скоростей и ускорений в плоском движении твердого тела и в сложном движении точки;
- решения поставленной задачи аналитическим и графическим способом.

К1. КИНЕМАТИКА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Плоские механизмы имеют широкое применение в технике. Кинематическое исследование этих механизмов играет важную роль на этапе предварительного проектирования узлов и звеньев сложных машин. Проектируя новую машину или прибор, разработчик должен уметь создавать такие кинематические схемы, чтобы выходные звенья механизма совершали движения, требуемые технологическим процессом. При этом часто приходится искать способы получения заданных движений всего механизма или его отдельных звеньев в зависимости от тех или иных ограничений определяемых условиями функционирования машины.

Цель курсовой работы.

Приобретение навыков кинематического расчёта плоского шарнирного механизма с использованием различных методов.

Содержание курсовой работы

Объектом исследования является плоский многозвенный шарнирный механизм с одной степенью свободы, ведущее звено которого движется по закону

$$\varphi(t) = \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $рад/с$ – угловая скорость; T – период вращения ведущего звена.

Требуется: применяя различные методы и теоремы кинематики определить: закон движения ведомых звеньев механизма; угловые скорости, угловые ускорения звеньев, совершающих вращательные и плоское движение; закон движения, траектория, а также скорости и ускорения заданных точек, и звеньев совершающих поступательные движения.

Схемы механизмов, а также геометрические характеристики тел приведены в альбоме заданий.

Методы исследований:

- аналитический метод;
- геометрические (графический и графоаналитический) методы.

1. С помощью аналитического метода составить уравнения геометрических связей механизма, получить зависимости углов поворотов ведомых звеньев от времени или от угла поворота ведущего звена.
2. Получить системы разрешающих уравнений для определения угловых скоростей и ускорений ведомых звеньев, а также линейной скорости и ускорения звена, движущегося поступательно.
3. Записать уравнения для вычисления координат, линейных скоростей и ускорений точек, определенных в задании.
4. Используя основные теоремы плоскопараллельного движения твёрдого тела, выполнить расчёт скоростей и ускорений всех звеньев и всех узловых точек (шарниров) механизма для заданного его положения.
5. Используя основные теоремы составного движения точки при вращательном переносном движении, выполнить расчёт скоростей и ускорений всех звеньев и всех узловых точек (шарниров) механизма для заданного его положения.
6. Сравнить решения, полученные разными геометрическими методами.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Провести кинематическое исследование плоского шарнирного многозвенного механизма с одной степенью свободы, для которого известны все геометрические размеры и закон движения ведущего звена (рис. 1).

Определить законы движения всех звеньев механизма, угловые скорости и ускорения ведомых звеньев, а также линейные скорость и ускорение звена, движущегося поступательно. Вычислить скорости и ускорения всех узловых точек механизма, а также точек M и K, в зависимости от значения угла поворота ведущего звена $\varphi(t)$. Произвести визуализацию механизма, изобразить траектории, векторы скоростей и ускорений всех его заданных точек, если даны:

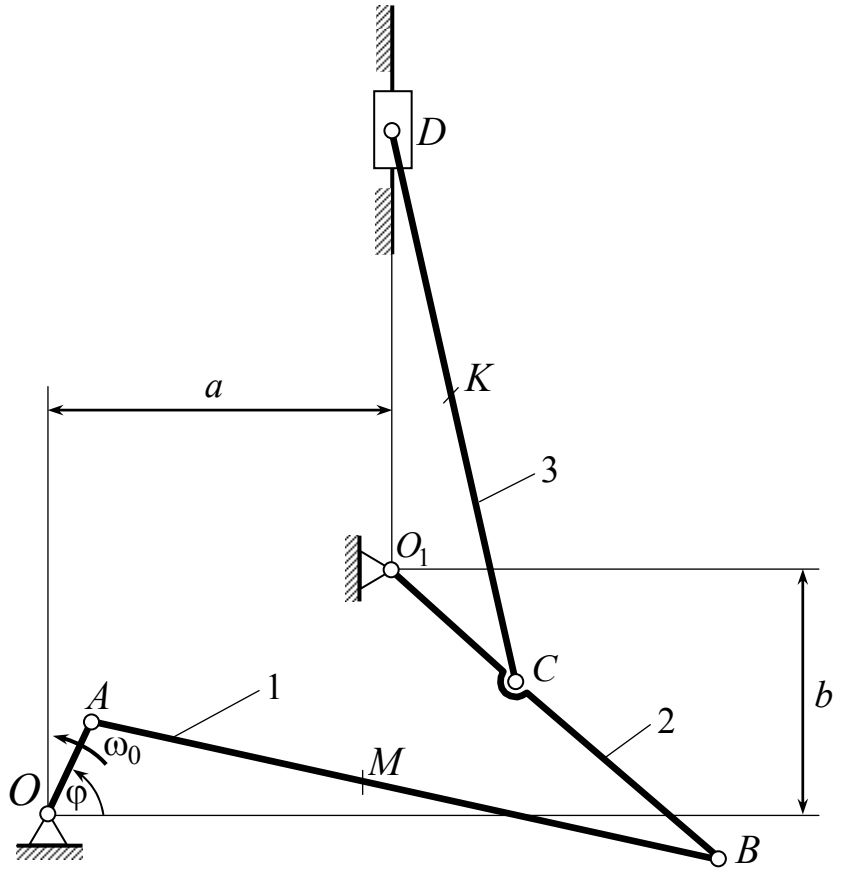
- геометрические размеры

$$OA,\ AM,\ AB,\ O_1B,\ O_1C,\ CD,\ CK,\ a,\ b;$$

- закон движения ведущего звена механизма

$$\varphi(t) = \omega_0\, t,$$

где ω_0 – угловая скорость ведущего звена.



Исходные данные:

геометрические размеры

$$OA = 15\ см,\quad AM = 42\ см,\quad AB = 97\ см,\quad O_1B = 60\ см,\quad O_1C = 45\ см,$$
$$CD = 86\ см,\quad CK = 47\ см,\qquad a = 50\ см,\qquad b = 37\ см;$$

закон движения ведущего звена механизма

$$\varphi(t) = \omega_0\, t\,,$$

где $\omega_0 = \pi/18\ c^{-1}$ – угловая скорость ведущего звена.

Рис. 1. Схема механизма и исходные данные для расчета

1. Аналитический метод

Составление уравнений геометрических связей

Изобразим плоский механизм в произвольном положении (рис. 2).

В качестве системы отсчета примем правую декартову систему координат. Начало системы координат расположим в подшипнике O. Положительные углы поворота в этом случае направлены против часовой стрелки.

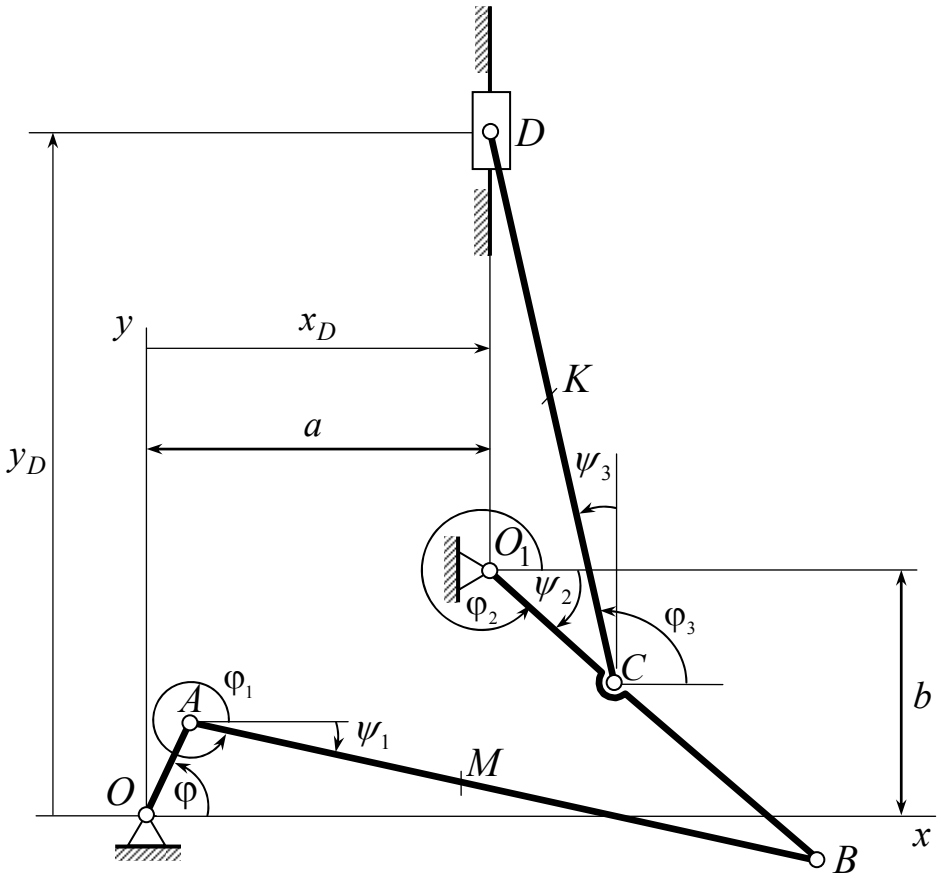


Рис. 2. Расчетная схема механизма

Изобразим углы поворота звеньев $\varphi_k, k = 1,2,3$, отсчитывая их от горизонтальной оси Ox в положительном направлении.

В состав данного многозвенного механизма входят:

- два кривошипа OA и O_1B, которые совершают вращательное движение вокруг неподвижных осей перпендикулярных плоскости xOy и проходящих через точки O и O_1 соответственно;
- два шатуна AB и CD, совершающих плоскопараллельное движение в плос-

кости xOy;

- ползун D движется возвратно-поступательно вдоль направляющей параллельной оси Oy;
- неподвижное звено OO_1.

Для составления уравнений геометрических связей выделим точки механизма, траектории которых известны. К этим точкам относятся шарниры A, B, C и D. Точки A, B, и C движутся по окружностям радиусов OA, O_1B и O_1C соответственно, а ползун D – по прямолинейной траектории параллельной оси Oy (рис. 2).

Шарнир A принадлежит одновременно шатуну AB и кривошипу OA, для которого известен закон вращательного движения и, следовательно, закон движения точки A определен. Шарнир B принадлежит одновременно шатуну AB и кривошипу O_1B, а шарнир C – шатуну CD и кривошипу O_1B. Из двух точек C и B, одновременно принадлежащих кривошипу O_1B, одна является зависимой, т. е. определение закона движения одной точки приводит к возможности определения закона движения для другой.

Так как закон плоскопараллельного движения твердого тела можно определить по двум любым точкам этого тела, в качестве базовых точек, при составлении уравнений геометрических связей, примем точки B и D.

Построим для этих точек векторные контуры, с помощью которых можно составить уравнения геометрических связей (рис. 3):

для точки B (рис. 3 а) $$\overline{r}_B \equiv \overline{r}_A + \overline{\rho}_{AB} = \overline{r}_{O_1} + \overline{\rho}_B, \qquad (1)$$

для точки D (рис. 3 б) $$\overline{r}_D = \overline{r}_{O_1} + \overline{\rho}_C + \overline{\rho}_{CD}. \qquad (2)$$

Для получения уравнений геометрических связей запишем соотношения (1), (2) в проекциях на оси координат Ox и Oy

$$
\begin{aligned}
OA\cos(\varphi)+AB\cos(\varphi_1)&=a+O_1B\cos(\varphi_2),\\
OA\sin(\varphi)+AB\sin(\varphi_1)&=b+O_1B\sin(\varphi_2),\\
a&=a+O_1C\cos(\varphi_2)+CD\cos(\varphi_3),\\
y_D&=b+O_1C\sin(\varphi_2)+CD\sin(\varphi_3).
\end{aligned}
$$

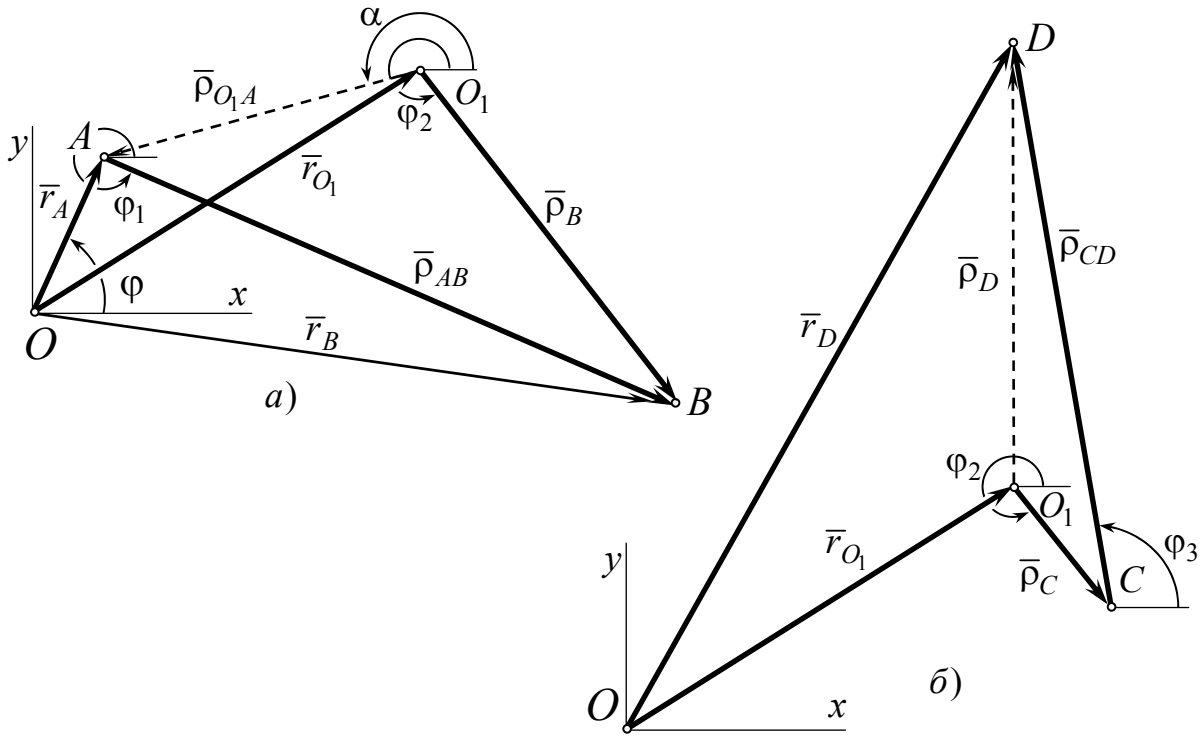


Рис. 3. Векторные контуры для базовых точек механизма

Перенося слагаемые с неизвестными функциями в одну сторону, получим уравнения геометрических связей в координатной форме

$$
\begin{aligned}
AB\cos(\varphi_1)-O_1B\cos(\varphi_2)&=a-OA\cos(\varphi),\\
AB\sin(\varphi_1)-O_1B\sin(\varphi_2)&=b-OA\sin(\varphi),\\
O_1C\cos(\varphi_2)+CD\cos(\varphi_3)&=0,\\
O_1C\ \sin(\varphi_2)+CD\sin(\varphi_3)-y_D&=b.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

В уравнениях (3) задаваемой функцией является закон вращения ведущего звена $\varphi(t)$, а определяемыми функциями времени являются

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\quad \varphi_2(t),\quad y_D(t).$$

Система (3) представляет замкнутую систему уравнений для определения

законов движения всех звеньев многозвенного механизма.

Решение уравнений (3) можно найти различными методами, как аналитическими, так и численными. Подробно о решении систем нелинейных уравнений численными методами изложено в работе [1].

Определение законов движения звеньев механизма

Аналитические методы при решении нелинейных систем уравнений типа (3) применяются в тех случаях, когда необходимо получить (если это возможно) выражения для искомых функций в параметрическом виде.

Для нахождения законов движения звеньев механизма в аналитической форме запишем первые два уравнения системы (3) в следующем виде (рис. 2, рис. 3 а, рис. 4)

$$\begin{aligned} AB\cos(\varphi_1) - O_1B\cos(\varphi_2) &= a - OA\cos(\varphi) = -x_{O_1A} = -O_1A\cos(\alpha), \\ AB\ \sin(\varphi_1) - O_1B\sin(\varphi_2) &= b - OA\sin(\varphi) = -y_{O_1A} = -O_1A\sin(\alpha), \end{aligned} \qquad (4)$$

где $x_{O_1A} = O_1A\cos(\alpha)$, $y_{O_1A} = O_1A\sin(\alpha)$ – проекции вектора $\overline{\rho}_{O_1A}$ на оси координат; O_1A – его модуль (рис. 4)

$$O_1A = \sqrt{x_{O_1A}{}^2 + y_{O_1A}{}^2} = \sqrt{O_1A^2 + OA^2 - 2\,OA\,OO_1\cos(\varphi - \beta)};$$

α – угол, определяемый выражениями

$$\cos(\alpha) = \frac{OA\cos(\varphi) - a}{O_1A}, \quad \sin(\alpha) = \frac{OA\sin(\varphi) - b}{O_1A},$$

$OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\beta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ – модуль и направление вектора $\overline{r}_{O_1}$.

Для нахождения угловой координаты φ_2 приведем уравнения (4) к виду

$$\begin{aligned} AB\cos(\varphi_1) &= O_1B\cos(\varphi_2) - O_1A\cos(\alpha), \\ AB\sin(\varphi_1) &= O_1B\sin(\varphi_2) - O_1A\sin(\alpha), \end{aligned}$$

и, воспользовавшись тригонометрической формулой $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$, получим $AB^2 = O_1B^2 + O_1A^2 - 2\,O_1B\,O_1A\left[\cos(\varphi_2)\cos(\alpha) + \sin(\varphi_2)\sin(\alpha)\right]$.

Используя формулы приведения, найдем

$$\cos(\varphi_2 - \alpha) = \frac{O_1B^2 + O_1A^2 - AB^2}{2\,O_1B\;\;O_1A} = \cos\gamma_2 .$$

Так как $\cos(\gamma_2)$ является четной функцией углового аргумента, то угол φ_2 может иметь два значения $\varphi_2 = \gamma_2 + \alpha$ или $\varphi_2 = \gamma_2 - \alpha$, что соответствует двум положением четырехзвенника $OABO_1$ относительно O_1A при одной и той же угловой координате ведущего звена φ (рис. 4).

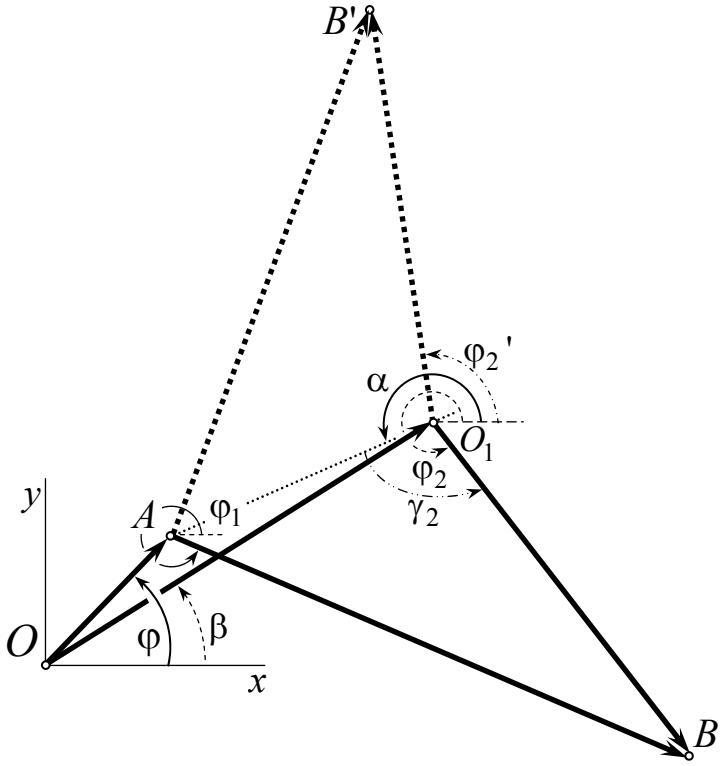


Рис. 4. Определение угловых координат звеньев

Учитывая начальное положение механизма (рис. 2) принимаем

$$\varphi_2 = \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 + O_1A^2 - AB^2}{2\,O_1B\;\;O_1A}\right). \qquad (5)$$

Для нахождения угловой координаты φ_1 уравнения (4) перепишем в следующем виде

$$AB\cos(\varphi_1) + O_1A\cos\alpha = O_1B\cos(\varphi_2),$$
$$AB\sin(\varphi_1) + O_1A\;\sin\alpha = O_1B\sin(\varphi_2).$$

Используя процедуру, изложенную выше, получим

$$AB^2 + O_1A^2 + 2\ AB\ \ O_1A\left[\cos(\varphi_1)\cos\alpha + \sin(\varphi_1)\sin\alpha\right] = O_1B^2.$$

Окончательно, угловая координата φ_1 равна

$$\varphi_1 = \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 - O_1A^2 - AB^2}{2\ AB\ \ O_1A}\right). \tag{6}$$

Для нахождения остальных неизвестных величин используем оставшиеся два уравнения системы (3). Из третьего уравнения (3) найдем угловую координату звена CD

$$\varphi_3 = \arccos\left[-\frac{O_1C}{CD}\cos(\varphi_2)\right], \tag{7}$$

а из четвертого – вертикальную координату ползуна D

$$y_D = b + O_1C\sin(\varphi_2) + CD\sin(\varphi_3). \tag{8}$$

Уравнения (5) – (8) позволяют определить угловые координаты звеньев совершающих вращательные и плоскопараллельные движения, а также закон движения звена движущегося поступательно.

Определение угловых и линейных скоростей звеньев

Для определения угловых и линейных скоростей звеньев механизма продифференцируем по времени уравнения геометрических связей (3). При этом следует учесть, что производные по времени от функций $\varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ и $y_D(t)$ равны

$$\dot\varphi(t) = \omega_0,\ \dot\varphi_1(t) = \omega_1,\ \dot\varphi_2(t) = \omega_2,\ \dot\varphi_3(t) = \omega_3,\ \dot y_D(t) = v_D.$$

Перенося слагаемые с неизвестными в одну сторону, получим

$$\begin{array}{rrrrl}
-AB\ \sin(\varphi_1)\,\omega_1 & +O_1B\sin(\varphi_2)\,\omega_2 & & & = \ OA\sin(\varphi)\omega_0, \\
AB\cos(\varphi_1)\,\omega_1 & -O_1B\cos(\varphi_2)\,\omega_2 & & & = -OA\cos(\varphi)\,\omega_0, \\
 & -O_1C\sin(\varphi_2)\,\omega_2 & -CD\sin(\varphi_3)\,\omega_3 & & = 0, \\
 & O_1C\cos(\varphi_2)\,\omega_2 & +CD\cos(\varphi_3)\,\omega_3 & -v_D & = 0.
\end{array} \tag{9}$$

Система уравнений (9) является линейной относительно неизвестных уг-

ловых и линейных скоростей звеньев, поэтому ее можно представить в матричной форме

$$A \cdot X_V = B\,, \tag{10}$$

где A – матрица коэффициентов левых частей уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} -AB\sin(\varphi_1) & O_1B\sin(\varphi_2) & 0 & 0 \\ AB\cos(\varphi_1) & -O_1B\cos(\varphi_2) & 0 & 0 \\ 0 & -O_1C\ \sin(\varphi_2) & -CD\ \sin(\varphi_3) & 0 \\ 0 & O_1C\cos(\varphi_2) & CD\cos(\varphi_3) & -1 \end{pmatrix},$$

X_V – вектор неизвестных угловых и линейных скоростей звеньев, B – вектор правых частей уравнений:

$$X_V = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_D \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} OA\ \sin(\varphi)\,\omega_0 \\ -OA\cos(\varphi)\,\omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение уравнений (10) будет иметь вид

$$X_V = A^{-1} \cdot B\,. \tag{11}$$

Заметим, что система уравнений (9) легко распадается на две части: систему трех уравнений относительно угловых скоростей ведомых звеньев $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и уравнение, позволяющее определить скорость ползуна $D-\ v_D$. В этом случае, задача определения неизвестных угловых скоростей упрощается. Неизвестные угловые скорости, в этом случае, можно определить из решения

$$X_\omega = \tilde{A}^{-1} \cdot \tilde{B} \tag{11'}$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -AB\sin(\varphi_1) & O_1B\sin(\varphi_2) & 0 \\ AB\cos(\varphi_1) & -O_1B\cos(\varphi_2) & 0 \\ 0 & -O_1C\ \sin(\varphi_2) & -CD\ \sin(\varphi_3) \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} OA\ \sin(\varphi)\,\omega_0 \\ -OA\cos(\varphi)\,\omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X_\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ – вектор, составленный из неизвестных угловых скоростей;

а скорость ползуна D из соотношения

$$v_D = O_1C\cos(\varphi_2)\,\omega_2 + CD\cos(\varphi_3)\,\omega_3 \qquad (11'')$$

Определение угловых и линейных ускорений звеньев

Для определения угловых и линейных ускорений звеньев механизма дважды продифференцируем по времени уравнения геометрических связей (3) или один раз уравнения (9). Представляя, как и ранее, линейную относительно угловых и линейных ускорений звеньев, систему уравнений в матричной форме, получим

$$A \cdot X_a = C\,, \qquad (12)$$

где C – вектор правых частей уравнений:

$$C = \begin{pmatrix} AB\cos(\varphi_2)\,\omega_1^{\,2} - O_1B\cos(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} + OA\cos(\varphi)\,\omega_0^{\,2} \\ AB\ \sin(\varphi_2)\,\omega_1^{\,2} - O_1B\sin(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} - OA\ \sin(\varphi)\,\omega_0^{\,2} \\ O_1C\cos(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} + CD\cos(\varphi_3)\,\omega_3^{\,2} \\ O_1C\ \sin(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} + CD\sin(\varphi_3)\,\omega_3^{\,2} \end{pmatrix},$$

$X_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ a_D \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных угловых и линейных ускорений звеньев.

Решение уравнений (12) будет иметь вид

$$X_a = A^{-1} \cdot C\,. \qquad (13)$$

По аналогии с (11') и (11'') решение (13) можно записать следующим образом. Неизвестные угловые ускорения определятся из решения

$$X_\varepsilon = \tilde{A}^{-1} \cdot \tilde{C} \qquad (13')$$

где $\tilde{C} = \begin{pmatrix} AB\cos(\varphi_2)\,\omega_1^{\,2} - O_1B\cos(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} + OA\cos(\varphi)\,\omega_0^{\,2} \\ AB\ \sin(\varphi_2)\,\omega_1^{\,2} - O_1B\sin(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} - OA\ \sin(\varphi)\,\omega_0^{\,2} \\ O_1C\cos(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} + CD\cos(\varphi_3)\,\omega_3^{\,2} \end{pmatrix}$, $X_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$,

а ускорение ползуна D из соотношения

$$a_D = O_1C\cos(\varphi_2)\,\varepsilon_2 + CD\cos(\varphi_3)\,\varepsilon_3 - O_1C\sin(\varphi_2)\,\omega_2^{\,2} - CD\sin(\varphi_3)\,\omega_3^{\,2}. \qquad (13'')$$

Таким образом, решения (11) позволяют определить угловые и линейные скорости всех звеньев механизма, а решения (13) – угловые и линейные ускорения всех звеньев.

Определение скоростей и ускорений узловых точек

Узловыми и задаваемыми точками многозвенного шарнирного механизма являются точки: A, B, C, D, M и K. Законы движения, угловые скорости и ускорения звеньев, а также закон движения, скорость и ускорение точки D определены ранее из уравнений (5) – (8), (11) и (13). Для остальных точек законы движения запишем в векторной форме.

$$\begin{aligned} &\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{\rho}_{AB} = \overline{r}_{O_1} + \overline{\rho}_B, \quad \overline{r}_C = \overline{r}_{O_1} + \overline{\rho}_C, \\ &\overline{r}_M = \overline{r}_A + \overline{\rho}_{AM}, \qquad\qquad \overline{r}_K = \overline{r}_C + \overline{\rho}_{CK}. \end{aligned} \tag{14}$$

Для определения скоростей и ускорений точек, учтем, что модули векторов $\overline{r}_A, \overline{\rho}_{AB}, \overline{\rho}_B, \overline{\rho}_C, \overline{\rho}_{AM}$ и $\overline{\rho}_{CK}$ постоянны и их производные по времени определяются по формуле Эйлера $\dot{\overline{r}} = \overline{\omega} \times \overline{r}$. Тогда, дифференцируя по времени выражения (14), найдем скорости соответствующих точек

$$\begin{aligned} &\overline{v}_A = \overline{\omega}_0 \times \overline{r}_A, \qquad \overline{v}_B = \overline{\omega}_2 \times \overline{\rho}_B, \qquad \overline{v}_C = \overline{\omega}_2 \times \overline{\rho}_C, \\ &\overline{v}_M = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{\rho}_{AM}, \quad \overline{v}_K = \overline{v}_C + \overline{\omega}_3 \times \overline{\rho}_{CK}. \end{aligned} \tag{15}$$

Для нахождения ускорений точек механизма продифференцируем по времени выражения (15). Тогда, учитывая, что $\overline{\omega}_0 = \overline{const}$:

$$\begin{aligned} &\overline{a}_A = \overline{\omega}_0 \times \left(\overline{\omega}_0 \times \overline{r}_A\right), \\ &\overline{a}_B = \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{\rho}_B + \overline{\omega}_2 \times \left(\overline{\omega}_2 \times \overline{\rho}_B\right), \qquad \overline{a}_C = \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{\rho}_C + \overline{\omega}_2 \times \left(\overline{\omega}_2 \times \overline{\rho}_C\right), \\ &\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{\rho}_{AM} + \overline{\omega}_1 \times \left(\overline{\omega}_1 \times \overline{\rho}_{AM}\right), \quad \overline{a}_K = \overline{a}_C + \overline{\varepsilon}_3 \times \overline{\rho}_{CK} + \overline{\omega}_3 \times \left(\overline{\omega}_3 \times \overline{\rho}_{CK}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

Соотношения (5) – (8), (11), (13) – (16) представляют математическую модель кинематического поведения механизма, которая позволяет определить законы движения всех звеньев механизма, координаты узловых точек, а также скорости и ускорения звеньев и узловых точек.

2. Результаты расчетов

Ниже представлен общий вид документа Mathcad, в котором производится кинематический расчет плоского механизма методами кинематики точки. В документе присутствуют скрытые зоны $(Area)$. Внутри каждой расположены необходимые формулы для расчета. Все скрытые зоны имеют названия, соответствующие тем процедурам, по которым производится расчет кинематических характеристик механизма. К большинству процедур в документе даны необходимые пояснения.

Осуществление подключения документа "user_fun.mcd", в котором содержатся созданные ранее функции пользователя [1].

Reference:C:\Program Files\Mathsoft\user_fun.mcd

Ввод исходных данных

$a := 50$ $b := 37$ $OA := 15$ $AB := 97$ $O1C := 45$ $O1B := 60$

$CB := O1B - O1C$ $CD := 86$ $AM := 42$ $CK := 47$

$\omega_o := \frac{\pi}{18}$ $T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_o}$ $N := 360$ $\Delta := \frac{T}{N}$

Создание элемента управления "Slider" для отображения механизма при различных значениях угла поворота ведущего звена.

$\tau :=$



$T := 0.5\tau$ Задание момента времени, для которого производится расчет

В скрытой области "Расчет механизма" содержатся все формулы математической модели

Расчет механизма

$m_V := 10$ $m_a := 60$ Задаются масштабы для отображения векторов скоростей и ускорений на графике.

В скрытой области "Формирование механизма и векторов" содержатся формулы позволяющие отобразить механизм и искомые векторы на графике.

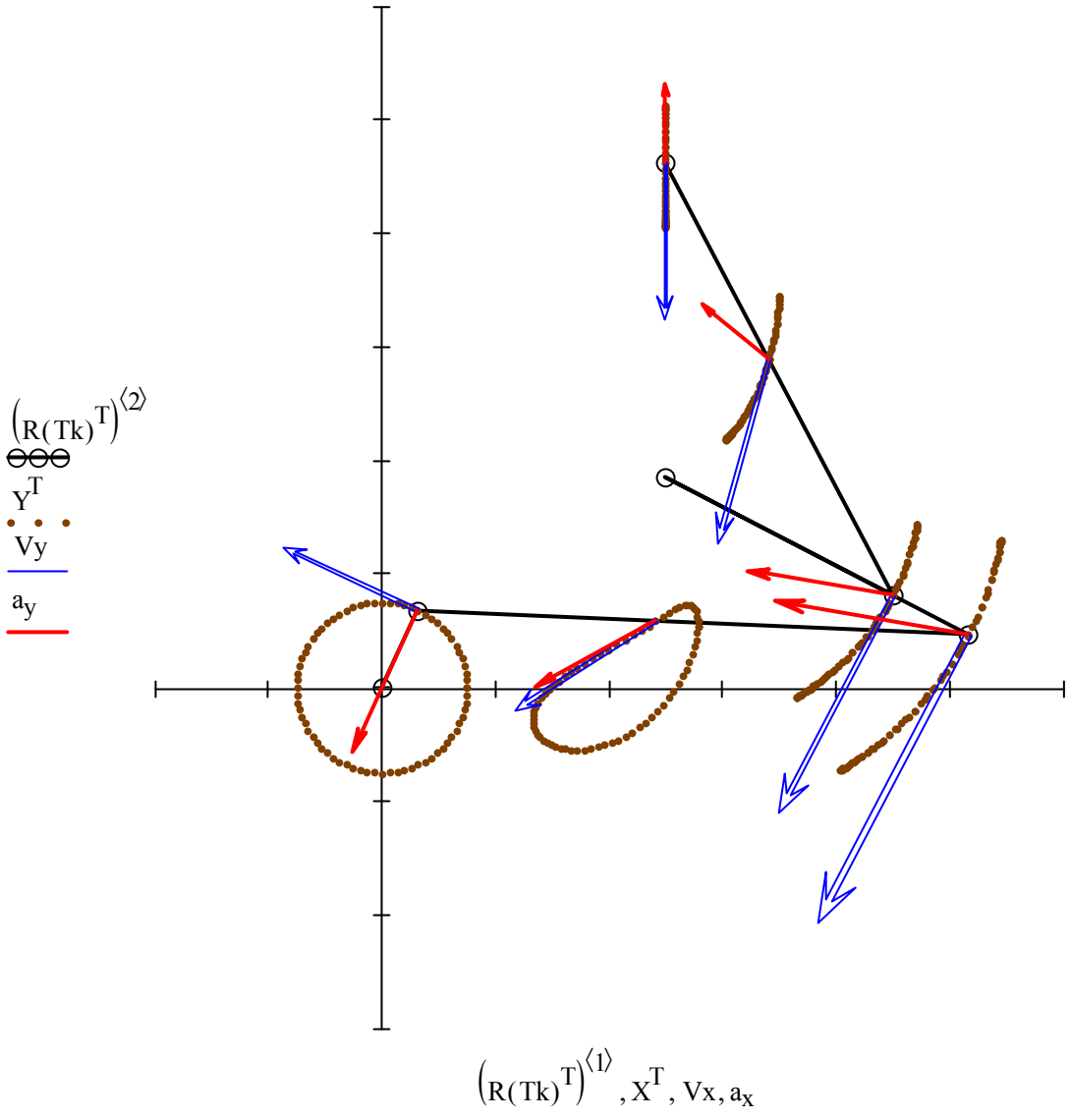
Форм-ние механизма и векторов

Вывод значений угловых и линейных координат звеньев

$$\frac{\phi_0(Tk)}{deg} = 65$$

$$\frac{\phi_1(Tk)}{deg} = 357.4885 \qquad \frac{\phi_2(Tk)}{deg} = 332.5527 \qquad \frac{\phi_3(Tk)}{deg} = 117.6685 \qquad y_D(Tk) = 92.4238$$

Отображение механизма, траекторий узловых точек, векторов скоростей и ускорений.



Результаты расчетов

Планы скоростей, ускорений

Расчет механизма

ORIGIN := 1

Задание закона движения ведущего звена OA $\phi_0(t) := \omega_o \cdot t$

Вычисление вспомогательных величин

$$\beta := \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad O1A(t) := \sqrt{a^2 + b^2 + OA^2 - 2 \cdot OA \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos\left(\phi_0(t) - \beta\right)}$$

$$\alpha(t) := \operatorname{angle}\left(OA \cdot \cos\left(\phi_0(t)\right) - a, OA \cdot \sin\left(\phi_0(t)\right) - b\right)$$

Вычисление угловых и линейных координат ведомых звеньев

$$\phi_1(t) := \alpha(t) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1B^2 - AB^2 - O1A(t)^2}{2 \cdot O1A(t) \cdot AB}\right)$$

$$\phi_2(t) := \alpha(t) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1A(t)^2 + O1B^2 - AB^2}{2 \cdot O1A(t) \cdot O1B}\right)$$

$$\phi_3(t) := \operatorname{acos}\left(-\frac{O1C}{CD} \cdot \cos\left(\phi_2(t)\right)\right)$$

$$y_D(t) := b + O1C \cdot \sin\left(\phi_2(t)\right) + CD \cdot \sin\left(\phi_3(t)\right)$$

Задание рассчитываемого момента времени $T := 0.5\tau$ $Tk := T$

Вычисление вспомогательных угловых координат

$$\phi(t) := \frac{\phi_0(t)}{deg} \qquad \psi_1(t) := \phi_1(t) - 2\pi \qquad \psi_2(t) := \phi_2(t) - 2\pi \qquad \psi_3(t) := \phi_3(t) - \frac{\pi}{2}$$

Задание векторов определяющих положение узловых точек на плоскости

$$R_A(t) := \begin{pmatrix} OA \cdot \cos\left(\phi_0(t)\right) \\ OA \cdot \sin\left(\phi_0(t)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_{O1}(t) := \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{AM}(t) := \begin{pmatrix} AM \cdot \cos\left(\phi_1(t)\right) \\ AM \cdot \sin\left(\phi_1(t)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_B(t) := \begin{pmatrix} O1B \cdot \cos\left(\phi_2(t)\right) \\ O1B \cdot \sin\left(\phi_2(t)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_C(t) := \begin{pmatrix} O1C \cdot \cos\left(\phi_2(t)\right) \\ O1C \cdot \sin\left(\phi_2(t)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{AB}(t) := \begin{pmatrix} AB \cdot \cos\left(\phi_1(t)\right) \\ AB \cdot \sin\left(\phi_1(t)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{CK}(t) := \begin{pmatrix} CK\cdot\cos(\phi_3(t)) \\ CK\cdot\sin(\phi_3(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_D(t) := \begin{pmatrix} a \\ y_D(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{CD}(t) := \begin{pmatrix} CD\cdot\cos(\phi_3(t)) \\ CD\cdot\sin(\phi_3(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_B(t) := R_{O1}(t) + \rho_B(t) \qquad R_C(t) := R_{O1}(t) + \rho_C(t)$$

$$R_M(t) := R_A(t) + \rho_{AM}(t) \qquad R_K(t) := R_C(t) + \rho_{CK}(t)$$

Формирование массива данных для отображения траекторий узловых точек механизма

$$Rt(t) := \text{stack}\left(R_A(t)^T, R_M(t)^T, R_B(t)^T, R_C(t)^T, R_K(t)^T, R_D(t)^T\right)$$

$$i := 1..73 \qquad tt_i := 0.5\cdot(i-1) \qquad X^{\langle i\rangle} := Rt(tt_i)^{\langle 1\rangle} \qquad Y^{\langle i\rangle} := Rt(tt_i)^{\langle 2\rangle}$$

Формирование матрицы коэффициентов и вектора правых частей для определения угловых и линейных скоростей звеньев механизма

$$\underset{\sim}{A}(t) := \begin{pmatrix} -AB\cdot\sin(\phi_1(t)) & O1B\cdot\sin(\phi_2(t)) & 0 & 0 \\ AB\cdot\cos(\phi_1(t)) & -O1B\cdot\cos(\phi_2(t)) & 0 & 0 \\ 0 & -O1C\cdot\sin(\phi_2(t)) & -CD\cdot\sin(\phi_3(t)) & 0 \\ 0 & O1C\cdot\cos(\phi_2(t)) & CD\cdot\cos(\phi_3(t)) & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}(t) := \begin{pmatrix} OA\cdot\sin(\phi_0(t))\cdot\omega_o \\ -OA\cdot\cos(\phi_0(t))\cdot\omega_o \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление угловых и линейных скоростей звеньев механизма

$$\omega(t) := A(t)^{-1}\cdot B(t)$$

Формирование векторов скоростей звеньев механизма

$$\omega_0(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_o \end{pmatrix}$$

$$\omega_1(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t)_1 \end{pmatrix} \qquad \omega_2(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t)_2 \end{pmatrix} \qquad \omega_3(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t)_3 \end{pmatrix} \qquad V_D(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(t)_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление скоростей узловых точек механизма

$$V_A(t) := \omega_0(t) \times R_A(t)$$

$$V_M(t) := V_A(t) + \omega_1(t) \times \rho_{AM}(t)$$

$$V_B(t) := \omega_2(t) \times \rho_B(t) \qquad V_{B\tau}(t) := V_B(t) \cdot \mathrm{Tau1}(R_B, t)$$

$$V_C(t) := \omega_2(t) \times \rho_C(t)$$

$$V_K(t) := V_C(t) + \omega_3(t) \times \rho_{CK}(t) \qquad V_{K\tau}(t) := V_K(t) \cdot \mathrm{Tau1}(R_K, t)$$

$$V(t) := \mathrm{augment}(V_A(t), V_M(t), V_B(t), V_C(t), V_K(t), V_D(t))$$

Формирование матрицы коэффициентов и вектора правых частей для определения угловых и линейных ускорений звеньев механизма

$$C(t) := \begin{bmatrix} OA \cdot \cos(\phi_0(t)) \cdot {\omega_o}^2 + AB \cdot \cos(\phi_1(t)) \cdot (\omega(t)_1)^2 - O1B \cdot \cos(\phi_2(t)) \cdot (\omega(t)_2)^2 \\ OA \cdot \sin(\phi_0(t)) \cdot {\omega_o}^2 + AB \cdot \sin(\phi_1(t)) \cdot (\omega(t)_1)^2 - O1B \cdot \sin(\phi_2(t)) \cdot (\omega(t)_2)^2 \\ O1C \cdot \cos(\phi_2(t)) \cdot (\omega(t)_2)^2 + CD \cdot \cos(\phi_3(t)) \cdot (\omega(t)_3)^2 \\ O1C \cdot \sin(\phi_2(t)) \cdot (\omega(t)_2)^2 + CD \cdot \sin(\phi_3(t)) \cdot (\omega(t)_3)^2 \end{bmatrix}$$

Вычисление угловых и линейных ускорений звеньев механизма

$$\varepsilon(t) := A(t)^{-1} \cdot C(t)$$

Формирование векторов ускорений звеньев механизма

$$\varepsilon_0(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon(t)_1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon(t)_2 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_3(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon(t)_3 \end{pmatrix} \qquad a_D(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon(t)_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление ускорений узловых точек механизма

$$a_A(t) := \varepsilon_0(t) \times R_A(t) + \omega_0(t) \times \left(\omega_0(t) \times R_A(t)\right)$$

$$a_M(t) := a_A(t) + \varepsilon_1(t) \times \rho_{AM}(t) + \omega_1(t) \times \left(\omega_1(t) \times \rho_{AM}(t)\right)$$

$$a_B(t) := \varepsilon_2(t) \times \rho_B(t) + \omega_2(t) \times \left(\omega_2(t) \times \rho_B(t)\right)$$

$$a_C(t) := \varepsilon_2(t) \times \rho_C(t) + \omega_2(t) \times \left(\omega_2(t) \times \rho_C(t)\right)$$

$$a_K(t) := a_C(t) + \varepsilon_3(t) \times \rho_{CK}(t) + \omega_3(t) \times \left(\omega_3(t) \times \rho_{CK}(t)\right)$$

$$a(t) := \text{augment}\left(a_A(t), a_M(t), a_B(t), a_C(t), a_K(t), a_D(t)\right)$$

Расчет механизма

Форм-ние механизма и векторов

Формирование векторов скоростей узловых точек для их отображения на графике с использованием функции пользователя, вычисляющей координаты шаблона вектора, рисуемого по 7 базовым точкам.

$$v_a(t) := \text{vector7}\left(R_A(t)_1, R_A(t)_2, V_A(t)_1, V_A(t)_2, m_V\right)$$

$$v_m(t) := \text{vector7}\left(R_M(t)_1, R_M(t)_2, V_M(t)_1, V_M(t)_2, m_V\right)$$

$$v_b(t) := \text{vector7}\left(R_B(t)_1, R_B(t)_2, V_B(t)_1, V_B(t)_2, m_V\right)$$

$$v_c(t) := \text{vector7}\left(R_C(t)_1, R_C(t)_2, V_C(t)_1, V_C(t)_2, m_V\right)$$

$$v_k(t) := \text{vector7}\left(R_K(t)_1, R_K(t)_2, V_K(t)_1, V_K(t)_2, m_V\right)$$

$$v_d(t) := \text{vector7}\left(R_D(t)_1, R_D(t)_2, V_D(t)_1, V_D(t)_2, m_V\right)$$

Формирование массива данных для отображения векторов скоростей

$$Vx := \text{augment}\left(v_a(Tk)^{\langle 1 \rangle}, v_b(Tk)^{\langle 1 \rangle}, v_c(Tk)^{\langle 1 \rangle}, v_m(Tk)^{\langle 1 \rangle}, v_k(Tk)^{\langle 1 \rangle}, v_d(Tk)^{\langle 1 \rangle}\right)$$

$$Vy := \text{augment}\left(v_a(Tk)^{\langle 2 \rangle}, v_b(Tk)^{\langle 2 \rangle}, v_c(Tk)^{\langle 2 \rangle}, v_m(Tk)^{\langle 2 \rangle}, v_k(Tk)^{\langle 2 \rangle}, v_d(Tk)^{\langle 2 \rangle}\right)$$

Формирование векторов ускорений узловых точек для их отображения на графике с использованием функции пользователя, вычисляющей координаты шаблона вектора, рисуемого по 5 базовым точкам.

$a_a(t) := \text{vector5}\left(R_A(t)_1, R_A(t)_2, a_A(t)_1, a_A(t)_2, m_a\right)$

$a_m(t) := \text{vector5}\left(R_M(t)_1, R_M(t)_2, a_M(t)_1, a_M(t)_2, m_a\right)$

$a_b(t) := \text{vector5}\left(R_B(t)_1, R_B(t)_2, a_B(t)_1, a_B(t)_2, m_a\right)$

$a_c(t) := \text{vector5}\left(R_C(t)_1, R_C(t)_2, a_C(t)_1, a_C(t)_2, m_a\right)$

$a_k(t) := \text{vector5}\left(R_K(t)_1, R_K(t)_2, a_K(t)_1, a_K(t)_2, m_a\right)$

$a_d(t) := \text{vector5}\left(R_D(t)_1, R_D(t)_2, a_D(t)_1, a_D(t)_2, m_a\right)$

Формирование массива данных для отображения векторов ускорений

$a_x := \text{augment}\left(a_a(Tk)^{\langle 1\rangle}, a_b(Tk)^{\langle 1\rangle}, a_c(Tk)^{\langle 1\rangle}, a_m(Tk)^{\langle 1\rangle}, a_k(Tk)^{\langle 1\rangle}, a_d(Tk)^{\langle 1\rangle}\right)$

$a_y := \text{augment}\left(a_a(Tk)^{\langle 2\rangle}, a_b(Tk)^{\langle 2\rangle}, a_c(Tk)^{\langle 2\rangle}, a_m(Tk)^{\langle 2\rangle}, a_k(Tk)^{\langle 2\rangle}, a_d(Tk)^{\langle 2\rangle}\right)$

Формирование массива данных для отображения механизма на графике

$$R(t) := \text{augment}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, R_A(t), R_B(t), R_{O1}(t), R_C(t), R_D(t)\right]$$

Форм-ние механизма и векторов

Результаты расчетов

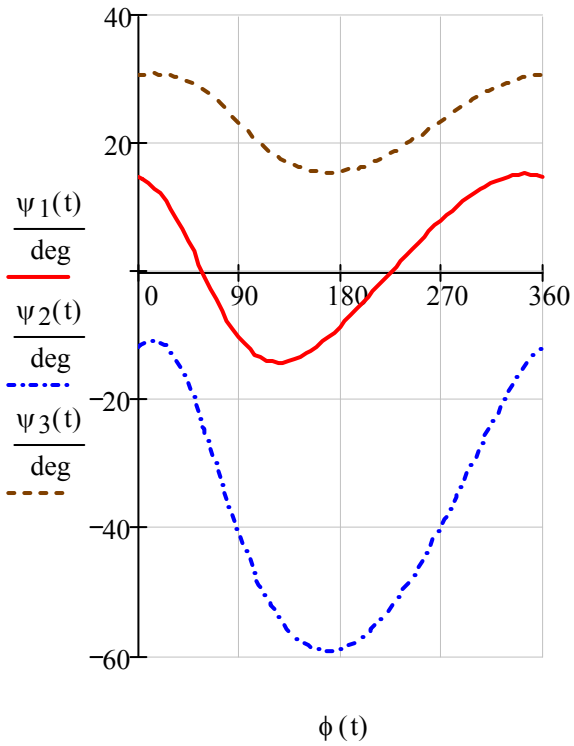
Значения координат звеньев и узловых точек в момент времени $Tk = 6.5$

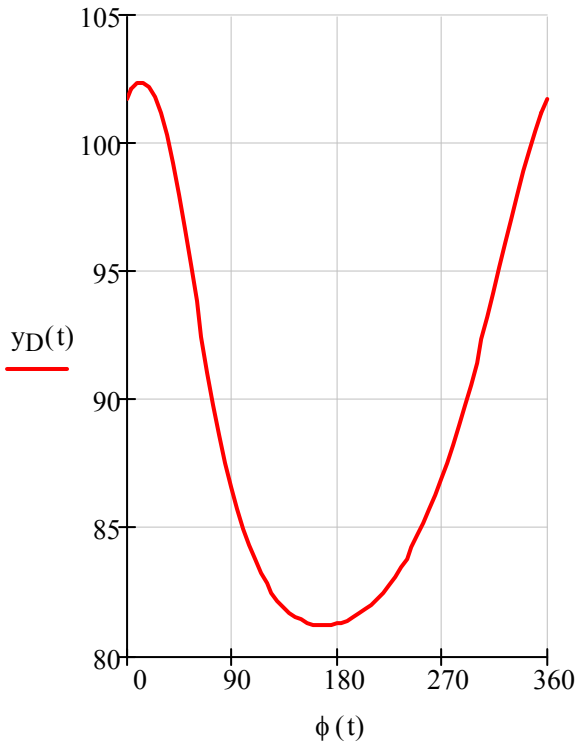
$\frac{\phi_0(Tk)}{\text{deg}} = 65$

$\frac{\psi_2(Tk)}{\text{deg}} = -27.4473$ $\frac{\psi_3(Tk)}{\text{deg}} = 27.6685$ $\frac{\psi_1(Tk)}{\text{deg}} = -2.5115$ $y_D(Tk) = 92.4238$

$t := 0, 0.5 .. 36$

Графики изменения координат звеньев механизма.





Значения угловых скоростей звеньев в момент времени Tk = 6.5

$\omega(Tk)_1 = -0.064$ $\omega(Tk)_2 = -0.0956$ $\omega(Tk)_3 = -0.026$

Значения скоростей узловых точек в момент времени Tk = 6.5

$$V_A(Tk) = \begin{pmatrix} -2.3727 \\ 1.1064 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V_A(Tk)| = 2.618 \quad \frac{V_A(Tk)}{|V_A(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.9063 \\ 0.4226 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_M(Tk) = \begin{pmatrix} -2.4904 \\ -1.5773 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V_M(Tk)| = 2.9479 \quad \frac{V_M(Tk)}{|V_M(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.8448 \\ -0.5351 \\ 0 \end{pmatrix}$$

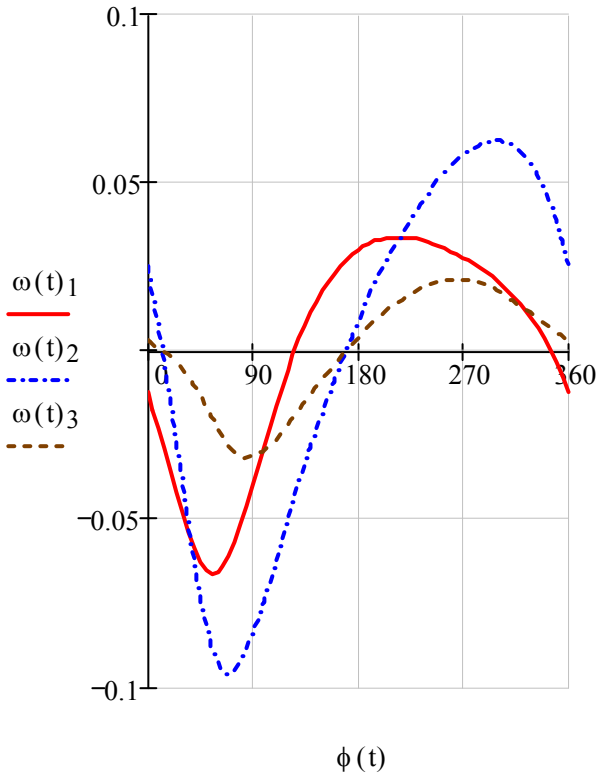
$$V_B(Tk) = \begin{pmatrix} -2.6446 \\ -5.0916 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V_B(Tk)| = 5.7374 \quad \frac{V_B(Tk)}{|V_B(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.4609 \\ -0.8874 \\ 0 \end{pmatrix}$$

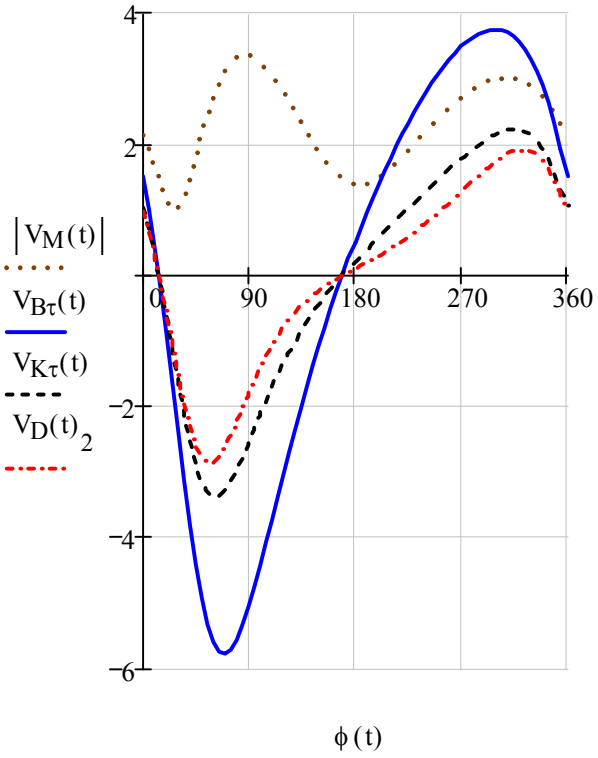
$$V_C(Tk) = \begin{pmatrix} -1.9834 \\ -3.8187 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V_C(Tk)| = 4.3031 \quad \frac{V_C(Tk)}{|V_C(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.4609 \\ -0.8874 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_K(Tk) = \begin{pmatrix} -0.8995 \\ -3.2504 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |V_K(Tk)| = 3.3725 \qquad \frac{V_K(Tk)}{|V_K(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.2667 \\ -0.9638 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_D(Tk) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.7788 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |V_D(Tk)| = 2.7788 \qquad \frac{V_D(Tk)}{|V_D(Tk)|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графики изменения скоростей звеньев и точек механизма.





Значения угловых ускорений звеньев в момент времени Tk = 6.5

$\varepsilon(Tk)_1 = 0.0051$ $\varepsilon(Tk)_2 = -0.0029$ $\varepsilon(Tk)_3 = -0.0052$

Значения ускорений узловых точек в момент времени Tk = 6.5

$$a_A(Tk) = \begin{pmatrix} -0.1931 \\ -0.4141 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |a_A(Tk)| = 0.4569 \qquad \frac{a_A(Tk)}{|a_A(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.4226 \\ -0.9063 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_M(Tk) = \begin{pmatrix} -0.3554 \\ -0.1928 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |a_M(Tk)| = 0.4043 \qquad \frac{a_M(Tk)}{|a_M(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.8789 \\ -0.4769 \\ 0 \end{pmatrix}$$

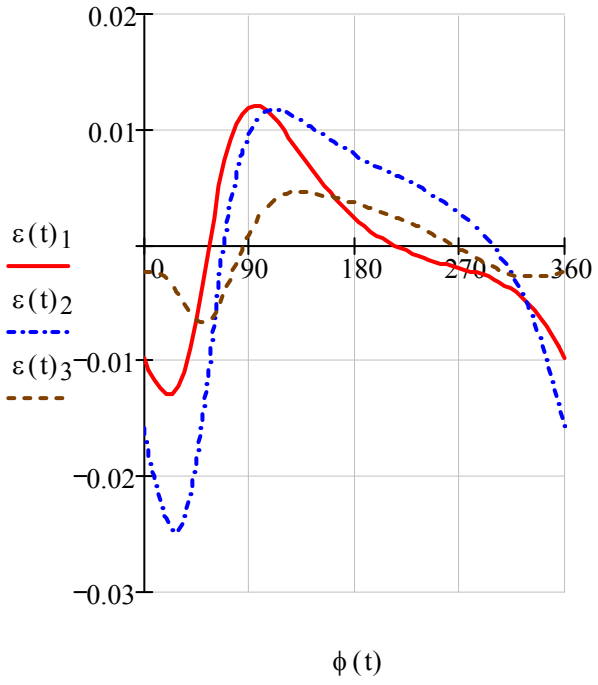
$$a_B(Tk) = \begin{pmatrix} -0.5679 \\ 0.097 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |a_B(Tk)| = 0.5761 \qquad \frac{a_B(Tk)}{|a_B(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.9857 \\ 0.1683 \\ 0 \end{pmatrix}$$

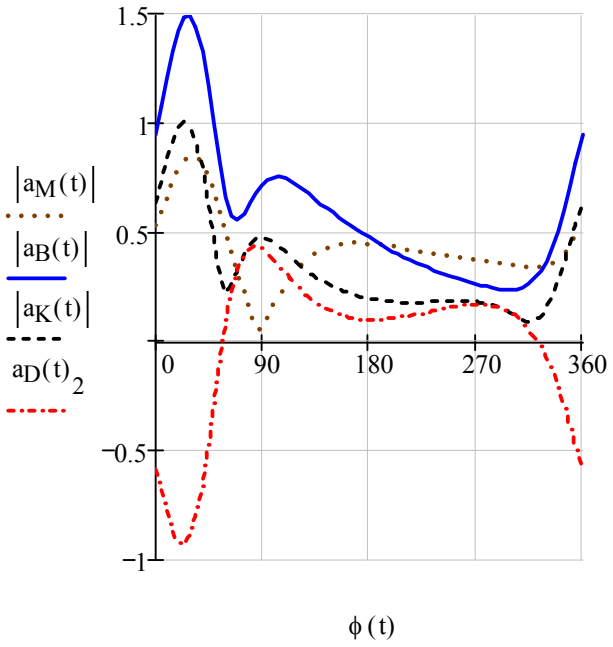
$$a_C(Tk) = \begin{pmatrix} -0.4259 \\ 0.0727 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |a_C(Tk)| = 0.4321 \qquad \frac{a_C(Tk)}{|a_C(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.9857 \\ 0.1683 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_K(Tk) = \begin{pmatrix} -0.1931 \\ 0.1588 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |a_K(Tk)| = 0.25 \qquad \frac{a_K(Tk)}{|a_K(Tk)|} = \begin{pmatrix} -0.7725 \\ 0.635 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_D(Tk) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2302 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |a_D(Tk)| = 0.2302 \qquad \frac{a_D(Tk)}{|a_D(Tk)|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графики изменения ускорений звеньев и точек механизма.





Результаты расчетов

3. Определение кинематических характеристик механизма в заданном положении с помощью теорем плоского движения твердого тела

Изобразим механизм в заданном положении (рис. 5), при значении угла поворота ведущего звена OA – $\varphi_k = 65°$, в выбранном масштабе длин – M_L.

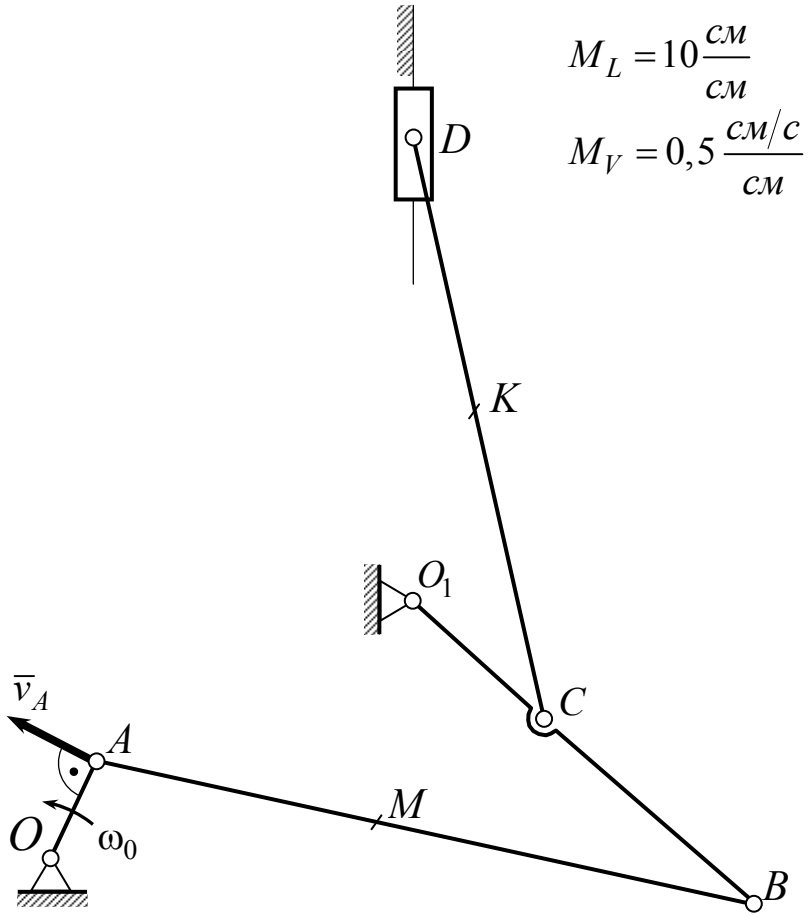


Рис. 5. Определение скоростей точек с помощью МЦС

Определим точки механизма, траектории и возможные направления скоростей которых известны.

Шарнир A принадлежит шатуну AB и кривошипу OA, совершающему вращательное движение вокруг центра O. Кривошип OA является ведущим звеном, угловая скорость которого известна. Следовательно, траектория шарнира A – окружность радиуса OA и его скорость равна

$$v_A = \omega_0 OA = \frac{\pi}{18} 15 = 2.62 \, {см}/{с}, \quad \bar{v}_A \perp OA. \tag{1}$$

Шарнир B принадлежит шатуну AB и кривошипу O_1B, совершающего вращательное движение вокруг подшипника O_1. Следовательно, траектория точки B – окружность радиуса O_1B и скорость шарнира $\overline{v}_B \perp O_1B$.

Шарнир C принадлежит шатуну CD и кривошипу O_1B, совершающего вращательное движение вокруг подшипника O_1. Следовательно, траектория точки C – окружность радиуса O_1C и скорость шарнира $\overline{v}_C \perp O_1B$.

Точка D принадлежит шатуну CD и ползуну D, совершающему возвратно поступательное движение вдоль вертикальной направляющей. Следовательно, траектория точки D – прямая линия и скорость ползуна $\overline{v}_D \parallel Oy$.

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью мгновенных центров скоростей (МЦС)

Определим положение МЦС для звеньев AB и CD, совершающих плоское движение (рис. 6). Для этого из точки A проведем перпендикуляр к скорости $\overline{v}_A$, а из точки B – перпендикуляр к возможному направлению скорости $\overline{v}_B$. Точка пересечения перпендикуляров – P_{AB} является МЦС звена AB для заданного положения механизма.

Аналогично определяем положение мгновенного центра скоростей для звена CD – P_{CD}.

Измеряем на чертеже расстояния от узловых точек механизма до МЦС соответствующего звена. В соответствие с выбранным масштабом длин эти расстояния равны

$$AP_{AB} = 48\ см, \qquad MP_{AB} = 55.5\ см, \qquad BP_{AB} = 99\ см,$$
$$CP_{CD} = 132.5\ см, \quad KP_{CD} = 102\ см, \qquad DP_{CD} = 85\ см$$

Так как скорость точки A известна (1), то мгновенную угловую скорость звена AB вычисляем согласно выражению

$$v_A = \omega_0 OA = \omega_{AB} AB.$$

Тогда $$\omega_{AB} = \omega_1 = \omega_0 \frac{OA}{AP_{AB}} = \frac{\pi}{18}\frac{15}{48} = 0.0545\, c^{-1}$$

Направление мгновенной угловой скорости звена определяем по направлению скорости точки A при мгновенном вращении звена вокруг МЦС P_{AB}.

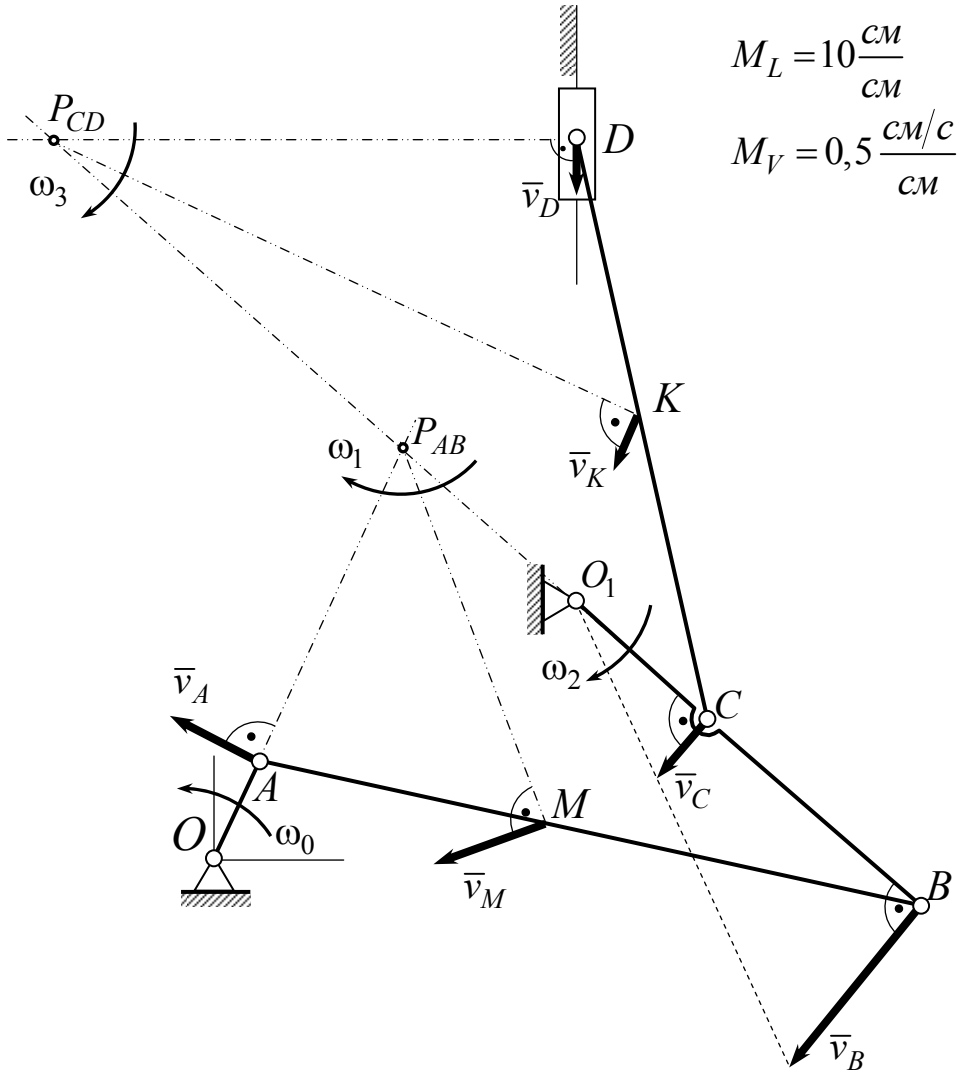


Рис. 6. Определение скоростей точек с помощью МЦС

Модули скоростей точек B и M равны

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = 0.0545 \cdot 99 = 5.400\ {см}/{с}, \quad \overline{v}_B \perp BP_{AB},$$
$$v_M = \omega_{AB} MP_{AB} = 0.0545 \cdot 55.5 = 3.027\ {см}/{с}, \quad \overline{v}_M \perp MP_{AB},$$

а направление скоростей определяется направлением вращения звена AB вокруг МЦС P_{AB}.

Угловую скорость звена O_1B вокруг подшипника O_1 определим из соот-

ношения

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{O_1B} O_1B \quad \Rightarrow \quad \omega_{O_1B} = \omega_2 = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{5.40}{66} = 0.0818\, c^{-1}$$

Скорость точки C равна

$$v_C = \omega_{O_1B}\, O_1B = 0.0818 \cdot 25 = 2.045\, c^{-1}, \quad \overline{v}_C \perp CP_{CD}$$

Мгновенную угловую скорость звена CD вокруг МЦС P_{CD} определим из соотношения

$$v_C = \omega_{CD} CP_{CD} = \omega_{O_1B}\, O_1C \quad \Rightarrow \quad \omega_{CD} = \omega_3 = \frac{v_C}{CP_{CD}} = \frac{2.045}{132.5} = 0.0154\, c^{-1},$$

а модули скоростей точек D и K выражениями

$$v_D = \omega_{CD} DP_{CD} = 0.0154 \cdot 85 = 1.309\, {см}/{c}, \quad \overline{v}_D \perp DP_{CD},$$
$$v_K = \omega_{CD} KP_{CD} = 0.0154 \cdot 102 = 1.571\, {см}/{c}, \quad \overline{v}_K \perp KP_{CD}$$

Направление скоростей точек $\overline{v}_D, \overline{v}_K$ определяется направлением мгновенного вращения звена CD вокруг МЦС – P_{CD}.

На рис. 6 изображены угловые скорости звеньев и векторы скоростей узловых точек в выбранном масштабе скоростей M_V.

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью теоремы о сложении скоростей

При неизвестной угловой скорости твердого тела совершающего плоскопараллельное движение теорему о сложении скоростей можно применять для тех точек звена, у которого известны: для одной – модуль и направление вектора скорости, а для другой – возможное направление вектора скорости, т.е. траектория движения.

Так как для звена AB вектор скорости шарнира A известен и по модулю и по направлению (1), а для шарнира B известна траектория движения, запишем теорему о сложении скоростей для точки B, приняв точку A за полюс:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}, \qquad (2)$$

где $v_A = \omega_0 OA = 2.62\ {см}/{с}$, $\overline{v}_A \perp OA.$ – скорость полюса,

$v_{BA} = \omega_{BA} AB = ?$ $\overline{v}_{BA} \perp AB$ – скорость точки B при вращательном движении звена AB вокруг полюса A. (относительная скорость точки B в поступательном переносном движении)

Изображаем в выбранном масштабе скоростей M_V (рис. 7) векторный треугольник скоростей, соответствующий уравнению (2).

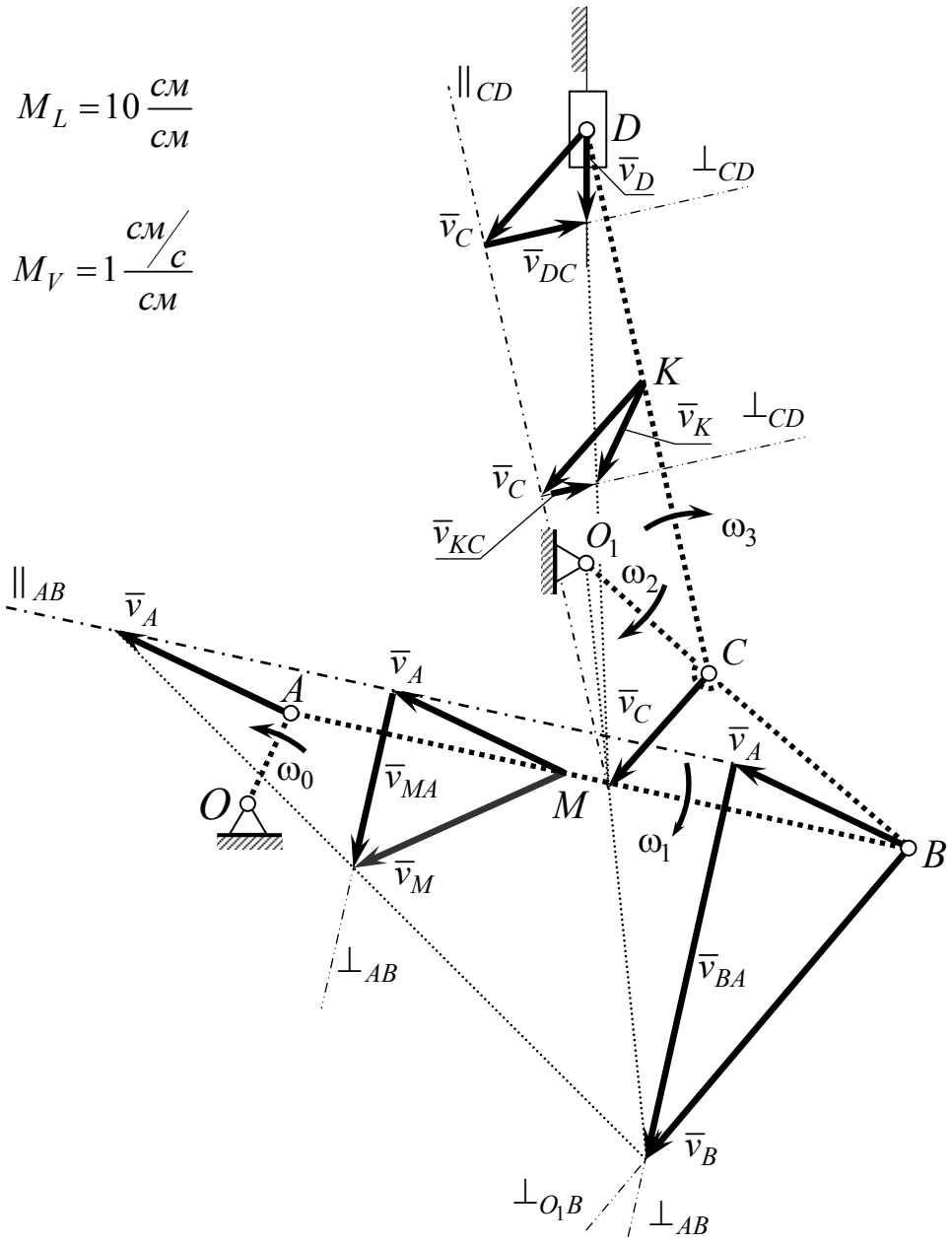


Рис. 7. Определение скоростей с помощью теоремы о сложении скоростей

Откладываем в точке B вектор скорости полюса – $\overline{v}_A$. Из конца вектора

$\overline{v}_A$ проводим возможное направление вектора $\overline{v}_{BA}$ – прямую, перпендикулярную звену AB. Из точки B проводим направление вектора $\overline{v}_B \perp O_1B$ до пересечения с прямой, определяющей направление вектора $\overline{v}_{BA}$. В точке пересечения данных прямых сходятся концы неизвестных векторов $\overline{v}_{BA}$ и $\overline{v}_B$.

Измеряя указанные векторы, в соответствии с выбранным масштабом скоростей, получаем

$$v_B = 5.53 \, {см}/{с}, \quad v_{BA} = 5.47 \, {см}/{с}$$

Угловая скорость звена AB равна

$$\omega_{AB} = \omega_1 = \frac{v_{BA}}{BA} = 0.0603 \, c^{-1}$$

Так как угловая скорость звена найдена, для точки M можно записать теорему о сложении скоростей, приняв точку A за полюс:

$$\overline{v}_M = \overline{v}_A + \overline{v}_{MA}$$

где

$$v_A = \omega_0 \, OA = 2.62 \, см/с, \qquad \overline{v}_A \perp OA,$$
$$v_{MA} = \omega_{AB} \, AM = 2.53 \, см/с, \quad \overline{v}_{MA} \perp AB.$$

Для нахождения скорости $\overline{v}_M$ изображаем в точке M вектор скорости полюса – $\overline{v}_A$, а из его конца проводим перпендикулярно AB вектор относительной скорости $\overline{v}_{MA}$ (рис. 7). Соединяя точку M с концом вектора $\overline{v}_{MA}$, находим вектор скорости точки M – $\overline{v}_M$. После измерения получим

$$v_M = 3.13 \ {см}/{с}.$$

Угловая скорость звена O_1B равна

$$\omega_{O_1B} = \omega_2 = \frac{v_B}{O_1B} = 0.0838 \, c^{-1},$$

Следовательно, скорость точки C равна

$$v_C = \omega_{O_1B} \, O_1C = 2.07 \, {см}/{с}, \qquad \overline{v}_C \perp O_1B \, .$$

Приняв точку C за полюс, применим теорему о сложении скоростей к

точке D звена CD, траектория которой известна

$$\overline{v}_D = \overline{v}_C + \overline{v}_{DC},$$

здесь $v_{DC} = \omega_{CD} CD = ?\, см/с$, $\overline{v}_{CD} \perp CD$ – относительная скорость точки D.

Скорости $\overline{v}_D, \overline{v}_{DC}$ определяем графически, аналогично методу, изложенному ранее, построив в масштабе треугольник скоростей (рис. 7)

$$v_D = 1.33 \, см/с, \quad v_{DC} = 1.33 \, см/с.$$

Следовательно, угловая скорость звена CD равна

$$\omega_{CD} = \omega_3 = \frac{v_{DC}}{CD} = 0.0155 \, с^{-1}.$$

Скорость точки K вычисляем по аналогии с определением скорости точки M

$$\overline{v}_K = \overline{v}_C + \overline{v}_{KC},$$

где

$$v_C = 2.067 \, см/с, \qquad \overline{v}_C \perp O_1B,$$
$$v_{KC} = \omega_{CD} CK = 0.73 \, см/с, \quad \overline{v}_{KC} \perp CD.$$

В этом случае (рис. 7) $v_K = 1.60 \, см/с$.

Следующий метод, являющийся графической интерпретацией теоремы о сложении скоростей, называется планом скоростей. Особенностью метода является возможность быстрого определения скорости любой точки механизма.

Построим план скоростей в масштабе M_V (рис. 8).

Из произвольно выбранного полюса O проводим луч "Oa", изображающий в выбранном масштабе скорость точки A – $\overline{v}_A$.

Для определения скорости точки B через полюс O проводим прямую, параллельную скорости $\overline{v}_B$ $\left(\overline{v}_B \perp O_1B\right)$, а через точку "$a$" – прямую, перпендикулярную AB, т. е. параллельно скорости $\overline{v}_{BA}$. Получаем точку "b": отрезок "Ob" определяет скорость точки B, а отрезок "ab" – скорость $\overline{v}_{BA}$. Измеряем длину лучей Ob, ab и, пользуясь масштабом скоростей находим

$$v_B = 5.30 \, {см}/{с}, \quad v_{BA} = 5.53 \, {см}/{с}.$$

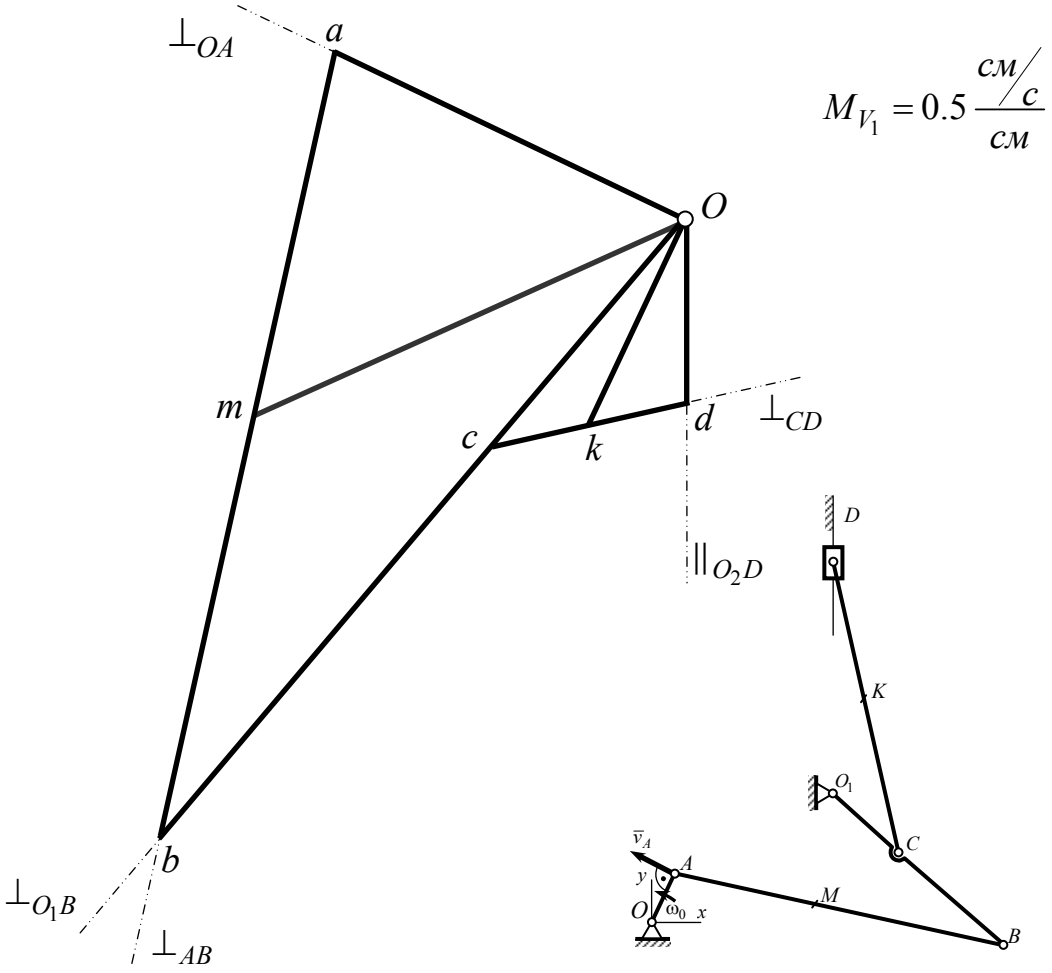


Рис. 8. План скоростей

Для определения угловой скорости звена AB найдем с учетом выбранного масштаба скоростей отношение

$$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB} = 0.057 \ \ c^{-1}.$$

Для определения скорости точки M делим отрезок ab плана скоростей в отношении $\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB}$

Луч Om изображает скорость точки M – $\overline{v}_M$, а отрезок am – относительную скорость $\overline{v}_{MA}$. Пользуясь масштабом скоростей, получаем

$$v_M = 3.00 \, {см}/{с}, \quad v_{MA} = 2.40 \, {см}/{с}.$$

Продолжая построение плана скоростей на рис. 8, находим скорости то-

чек $\overline{v}_A, \overline{v}_M, \overline{v}_B, \overline{v}_C, \overline{v}_K, \overline{v}_D$, а также угловые скорости звеньев $\omega_{AB} = \omega_1$, $\omega_{O_1B} = \omega_2$, $\omega_{CD} = \omega_3$:

$$v_C = 2.00 \, {см}/{с}, \quad \omega_{O_1B} = 0.08 \, с^{-1},$$
$$v_D = 1.30 \, {см}/{с}, \quad \omega_{CD} = 0.0151 \, с^{-1},$$
$$v_K = 1.53 \, {см}/{с}.$$

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев с помощью теоремы о сложении ускорений

Ускорения точек и угловые ускорения звеньев, совершающих плоскопараллельное движение, будем определять с использованием теоремы о сложениях ускорений в плоском движении. Данную теорему реализуем графически, в виде отдельных многоугольников ускорений на схеме механизма (рис. 9) и с помощью плана ускорений (рис. 10), построенных в масштабе ускорений M_a.

Вращение ведущего звена OA является равномерным с угловой скоростью $\omega_0 = \pi/18 \, с^{-1}$, поэтому полное ускорение точки A равно ее центростремительной составляющей

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{Ц}, \quad a_A^{Ц} = \omega_0^2 \, OA = \left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \cdot 15 = 0.4569 \, {см}/{с^2}, \quad \overline{a}_A^{Ц} \to (\cdot)O \qquad (3)$$

Определение ускорений начинаем с точки B, траектория которой известна. Взяв за полюс точку A, применим, с учетом (3), теорему о сложении ускорений к точке B звена AB:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A^{Ц} + \overline{a}_{BA}^{Ц} + \overline{a}_{BA}^{ВР}, \qquad (4)$$

где $\overline{a}_{BA}$ – ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг полюса A; $\overline{a}_{BA}^{Ц}$ – центростремительное ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг полюса A; $\overline{a}_{BA}^{ВР}$ – вращательное ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг полюса A.

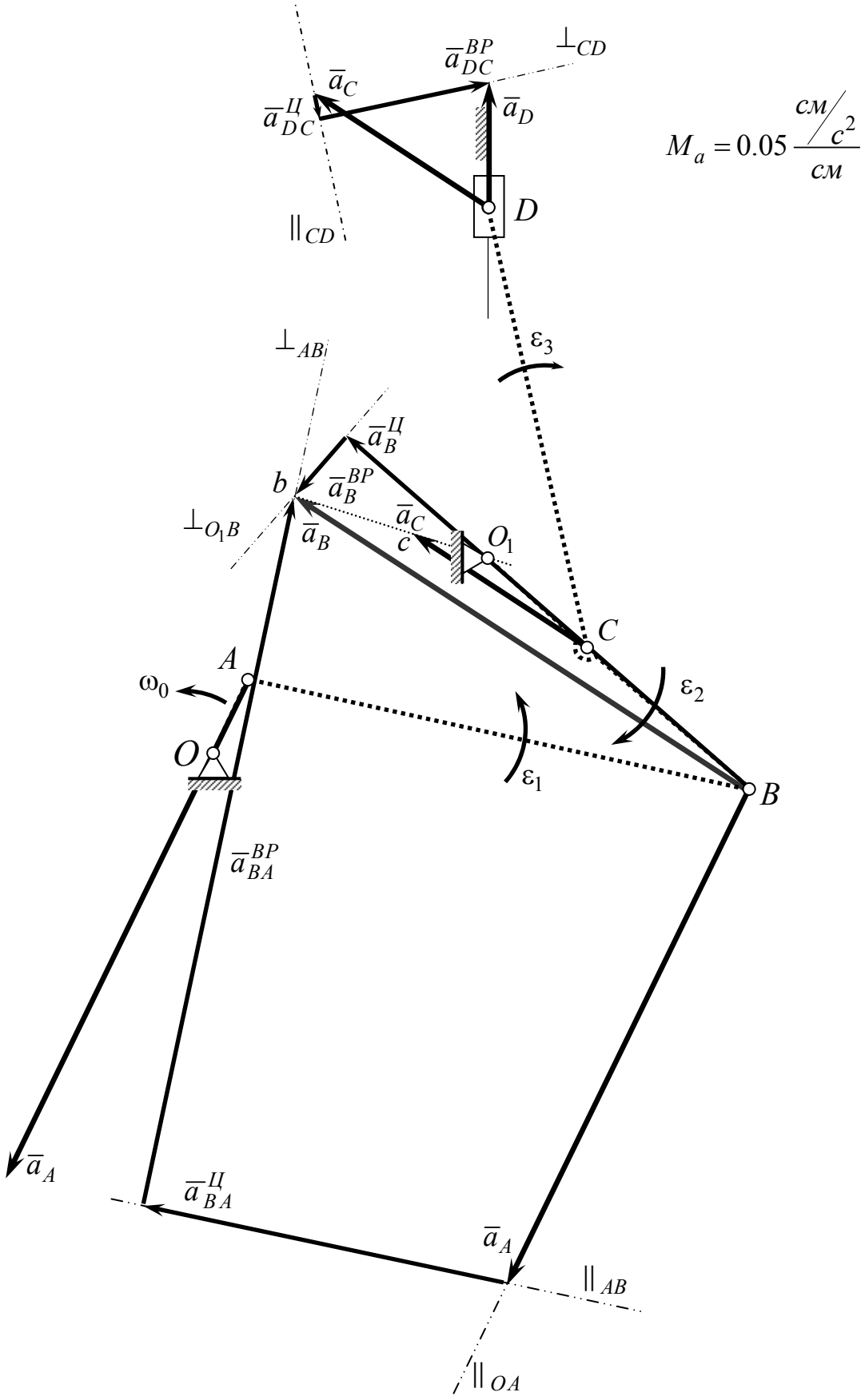


Рис. 9. Определение ускорений

Для точки B звена O_1B имеем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^{Ц} + \bar{a}_B^{BP}, \qquad (5)$$

где $\bar{a}_B^{Ц}$ – центростремительное ускорение точки B при вращательном движении звена O_1B; $\bar{a}_B^{BP}$ – вращательное ускорение точки B при вращательном движении звена O_1B.

Приравнивая (4) и (5), получим векторное уравнение, которое решаем графически с учетом выбранного масштаба ускорений (рис. 9):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^{Ц} + \bar{a}_B^{BP} = \bar{a}_A^{Ц} + \bar{a}_{BA}^{Ц} + \bar{a}_{BA}^{BP}.$$

Здесь

$$a_{BA}{}^{Ц} = \omega_{AB}{}^2\, AB = 0.3151\ {см}/{с^2}, \quad \bar{a}_{BA}{}^{Ц} \parallel AB \to (\cdot) A,$$

$$a_{BA}{}^{BP} = \varepsilon_{AB}\, AB = ?\ {см}/{с^2}, \quad \bar{a}_{BA}{}^{BP} \perp AB,$$

$$a_B{}^{Ц} = \omega_{O_1B}{}^2\, O_1B = 0.4255\ {см}/{с^2}, \quad \bar{a}_B{}^{Ц} \parallel O_1B \to (\cdot) O_1,$$

$$a_B{}^{BP} = \varepsilon_{O_1B}\, O_1B = ?\ {см}/{с^2}, \quad \bar{a}_B{}^{BP} \perp O_1B.$$

Построив в точке В механизма замкнутый многоугольник ускорений на рис. 9 в масштабе ускорений, измеряем значения неизвестных векторов:

$$a_B{}^{BP} = 0,0620\ {см}/{с^2};\ a_{BA}{}^{BP} = 0.6078\ {см}/{с^2};\ a_B = 0.4502\ {см}/{с^2}.$$

Построение многоугольника ускорений проводим следующим образом:

Из точки B проводим, в масштабе ускорений, вектор ускорения полюса $\bar{a}_A = \bar{a}_A{}^{Ц}$. Из конца вектора $\bar{a}_A{}^{Ц}$ откладываем параллельно BA вектор ускорения $\bar{a}_{BA}{}^{Ц}$, из конца которого проводим линию $\perp AB$, определяющую возможное направление вектора $\bar{a}_{BA}{}^{BP}$. Из точки B, в направлении прямой O_1B, откладываем вектор $\bar{a}_B{}^{Ц}$, а из его конца линию перпендикулярную O_1B, определяющую возможное направление вектора $\bar{a}_B{}^{BP}$.

Данная линия проводится до пересечения с прямой, перпендикулярной AB, характеризующей направление вектора $\bar{a}_{BA}{}^{BP}$.

Точка "b" пересечения этих прямых является точкой, в которой сходятся концы векторов $\overline{a}_{BA}{}^{BP}$, $\overline{a}_B{}^{BP}$ и $\overline{a}_B$.

Угловые ускорения звеньев определяем по формулам

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_1 = \frac{a_{BA}{}^{BP}}{AB} = 0.063 \ \ c^{-2},$$

$$\varepsilon_{O_1B} = \varepsilon_2 = \frac{a_B{}^{BP}}{O_1B} = 0.0009 \ \ c^{-2}.$$

Направления угловых ускорений, которые определяем по направлению векторов $\overline{a}_{BA}{}^{BP}$ и $\overline{a}_B{}^{BP}$ соответственно, показаны на рис. 9.

Полное ускорение точки C звена O_1B, совершающего вращательное движение, определим по формуле

$$\overline{a}_C = \overline{a}_C^{Ц} + \overline{a}_C^{BP},$$

где $a_C{}^{Ц} = \omega_{O_1B}{}^2 \, O_1C = 0.1612 \ см/c^2$, $\overline{a}_C{}^{Ц} \parallel O_1B \to (\cdot)O_1$,

$a_C{}^{BP} = \varepsilon_{O_1B} \, O_1C = 0.0225 \ см/c^2$, $\overline{a}_C{}^{BP} \perp O_1B$,

$a_C = O_1C \sqrt{\omega_{O_1B}{}^4 + \varepsilon_{O_1B}{}^2} = 0.1724 \ см/c^2$, $\gamma_2 = arctg\left(\dfrac{\varepsilon_{O_1B}}{\omega_{O_1B}{}^2}\right) = 8°$.

Изображаем вектор $\overline{a}_C$ в масштабе ускорений M_a на рис. 9.

Ускорение точки D звена CD определим с использованием теоремы о сложении ускорений, приняв точку C за полюс

$$\overline{a}_D = \overline{a}_C + \overline{a}_{DC} = \overline{a}_C^{Ц} + \overline{a}_C^{BP} + \overline{a}_{DC}^{Ц} + \overline{a}_{DC}^{BP},$$

где $a_{DC}{}^{Ц} = \omega_{CD}{}^2 \, CD = 0.0196 \ см/c^2$, $\overline{a}_{DC}{}^{Ц} \parallel CD \to (\cdot)C$,

$a_{DC}{}^{BP} = \varepsilon_{CD} \, CD = ? \ см/c^2$, $\overline{a}_{DC}{}^{BP} \perp CD$,

$a_D = ? \ см/c^2$, $\overline{a}_D \parallel Oy$.

Аналогично способу, изложенному ранее, изображаем многоугольник ускорений для точки D (рис. 9). Измеряя неизвестные векторы, получаем значе-

ния ускорений:

$$a_{DC}{}^{BP} = 0.1433 \ {см}/{с^2}; \ a_D = 0.1018 \ {см}/{с^2}.$$

Затем вычисляем угловое ускорение звена CD

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_3 = \frac{a_{DC}{}^{BP}}{CD} = 0.0017 \ c^{-2}$$

и изображаем его направление на рис. 9.

Для определения ускорений точек M и K строим план ускорений (рис. 10), который проводим следующим образом:

Из произвольной точки O проводим, в масштабе ускорений M_a, отрезок "Oa", определяющий модуль и направление вектора ускорения полюса $\bar{a}_A = \bar{a}_A{}^{Ц}$. Из конца вектора $\bar{a}_A{}^{Ц}$ откладываем вектор ускорения $\bar{a}_{BA}{}^{Ц}$, из конца которого проводим линию $\perp AB$, определяющую возможное направление вектора $\bar{a}_{BA}{}^{BP}$.

Из точки O, в направлении прямой O_1B, откладываем вектор $\bar{a}_B{}^{Ц}$, а из его конца линию, определяющую возможное направление вектора $\bar{a}_B{}^{BP}$. Данная линия проводится до пересечения с прямой, перпендикулярной AB, характеризующей направление вектора $\bar{a}_{BA}{}^{BP}$. Точка пересечения этих прямых "b" является точкой, в которой сходятся концы векторов $\bar{a}_{BA}{}^{BP}$, $\bar{a}_B{}^{BP}$ и $\bar{a}_B$. Отрезок "Ob" определяет модуль и направление вектора ускорения точки B.

Для нахождения ускорения точки M звена AB разделим отрезок "ab" точкой "m" в соотношении

$$\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB} = \frac{a_{MA}}{a_{BA}}.$$

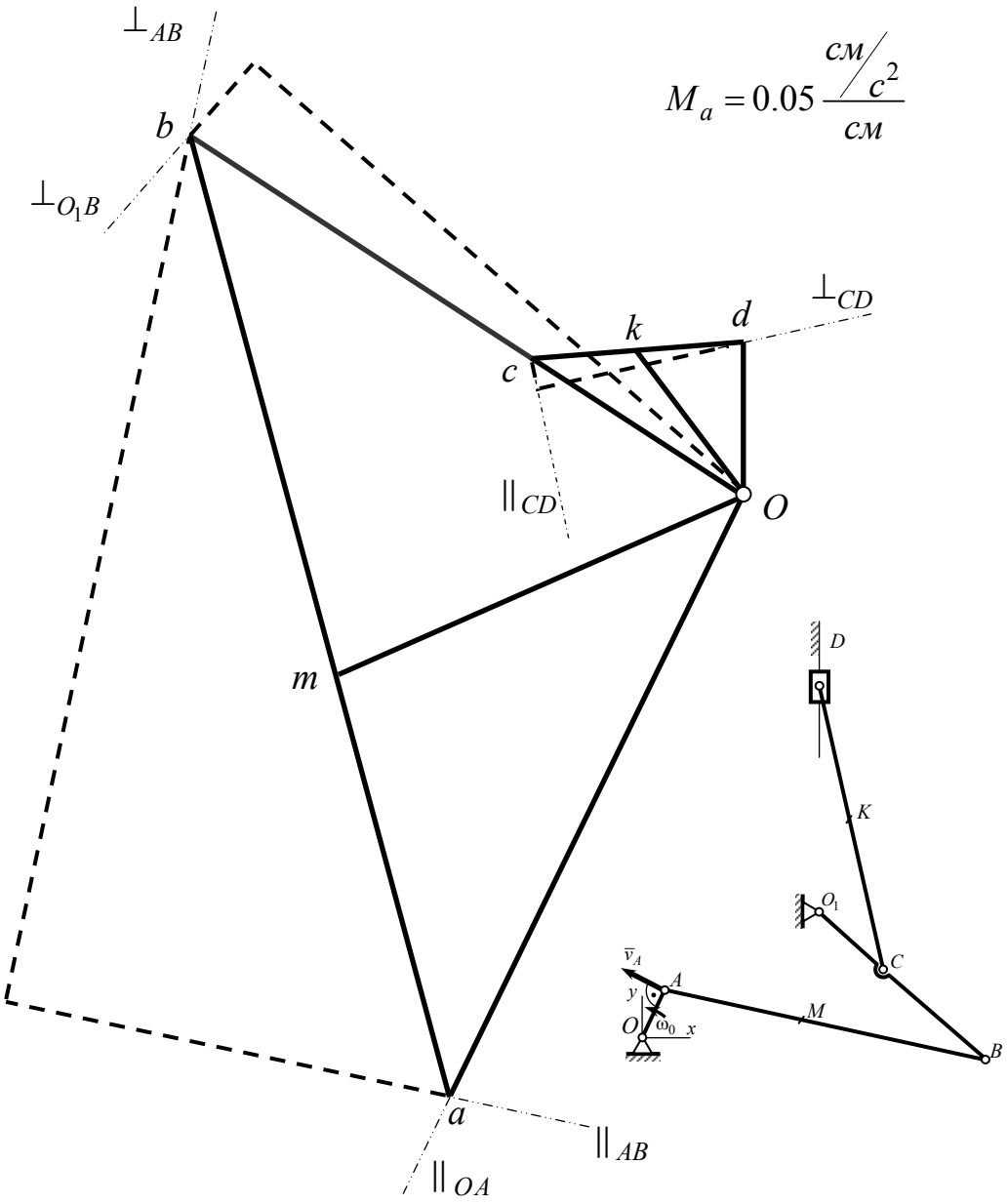


Рис. 10. План ускорений

Измеряя длины отрезков "am" и "Om", вычисляем, с использованием масштаба ускорений, ускорения

$$a_{MA} = M_a \cdot am = 0,2923 \, {см}/{с^2}, \quad a_M = M_a \cdot Om = 0,3029 \, {см}/{с^2}.$$

Треугольник oam на плане ускорений определяет теорему о сложении ускорений для точки M

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{Ц} + \bar{a}_{MA}^{ВР}.$$

Ускорение точки C определим, разделив отрезок "Ob" на плане ускоре-

ний в соотношении

$$\frac{Oc}{Ob} = \frac{O_1C}{O_1B} = \frac{a_C}{a_B}.$$

Измеряя длину отрезка "oc", получим

$$a_C = M_a \cdot Oc = 0{,}1667 \; {см}/{с^2}.$$

Для нахождения ускорения точки D проведем из точки C отрезок, задающий, в масштабе ускорений, модуль и направление вектора $\overline{a}_{DC}^{\,Ц}$, а из его конца линию, определяющую направление ускорения $\overline{a}_{DC}^{\,BP}$.

Поскольку траектория ползуна D – прямая параллельная оси Oy, ускорение точки D направлено вдоль траектории. Из точки O плана ускорений проводим линию, характеризующую направление ускорения ползуна D.

Точка "d", полученная в результате пересечения проведенных линий определяет концы векторов ускорений $\overline{a}_D$, $\overline{a}_{DC}^{\,BP}$ и $\overline{a}_{DC}$. Измеряя в масштабе ускорений, получим:

$$a_{DC} = M_A \cdot cd = 0{,}1387 \; {см}/{с^2}, \quad a_D = M_A \cdot od = 0{,}1008 \; {см}/{с^2},$$

$$a_{DC}^{\,BP} = 0{,}1373 \; {см}/{с^2}, \quad \varepsilon_{DC} = \varepsilon_3 = \frac{a_{DC}^{\,BP}}{CD} = 0.0016 \; c^{-2}.$$

Ускорение точки K получим по аналогии с определением ускорения точки М звена AB. Имеем

$$\frac{ck}{cd} = \frac{CK}{CD} = \frac{a_{KC}}{a_{DC}}.$$

Измеряя длины отрезков "ck" и "Ok", вычисляем, с использованием масштаба ускорений, ускорения

$$a_{KC} = M_a \cdot ck = 0{,}0758 \; {см}/{с^2}, \quad a_K = M_a \cdot Ok = 0{,}1167 \; {см}/{с^2}.$$

Построение плана скоростей и ускорений в пакете Mathcad

Приведем еще один способ построения планов скоростей и ускорений, который может быть использован и для визуализации схем рассчитываемых механизмов (рис. 11, 12). Данный метод подробно описан в работе [1], поэтому его реализацию в пакете Mathcad не приводим.

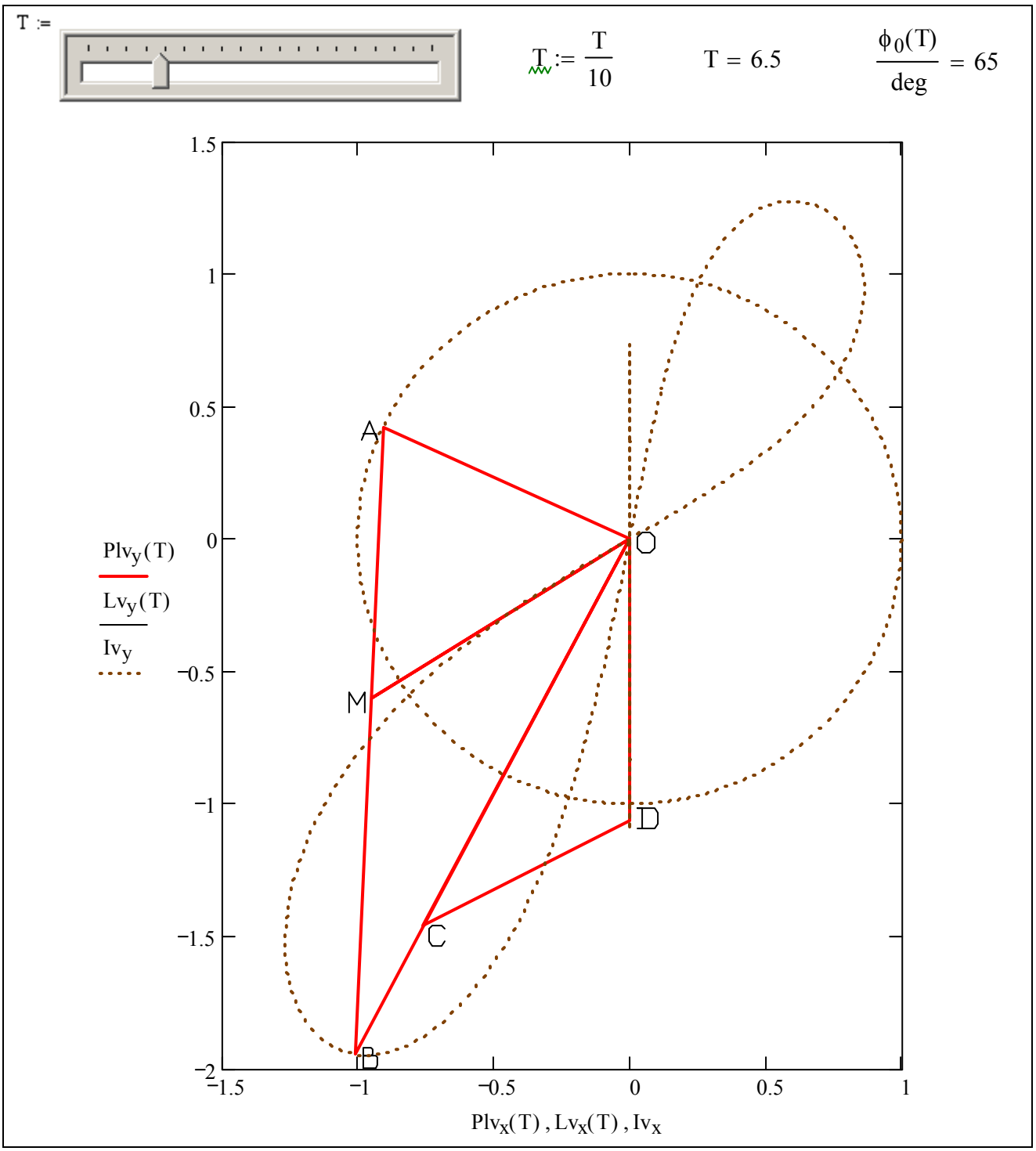


Рис. 11. План скоростей для механизма

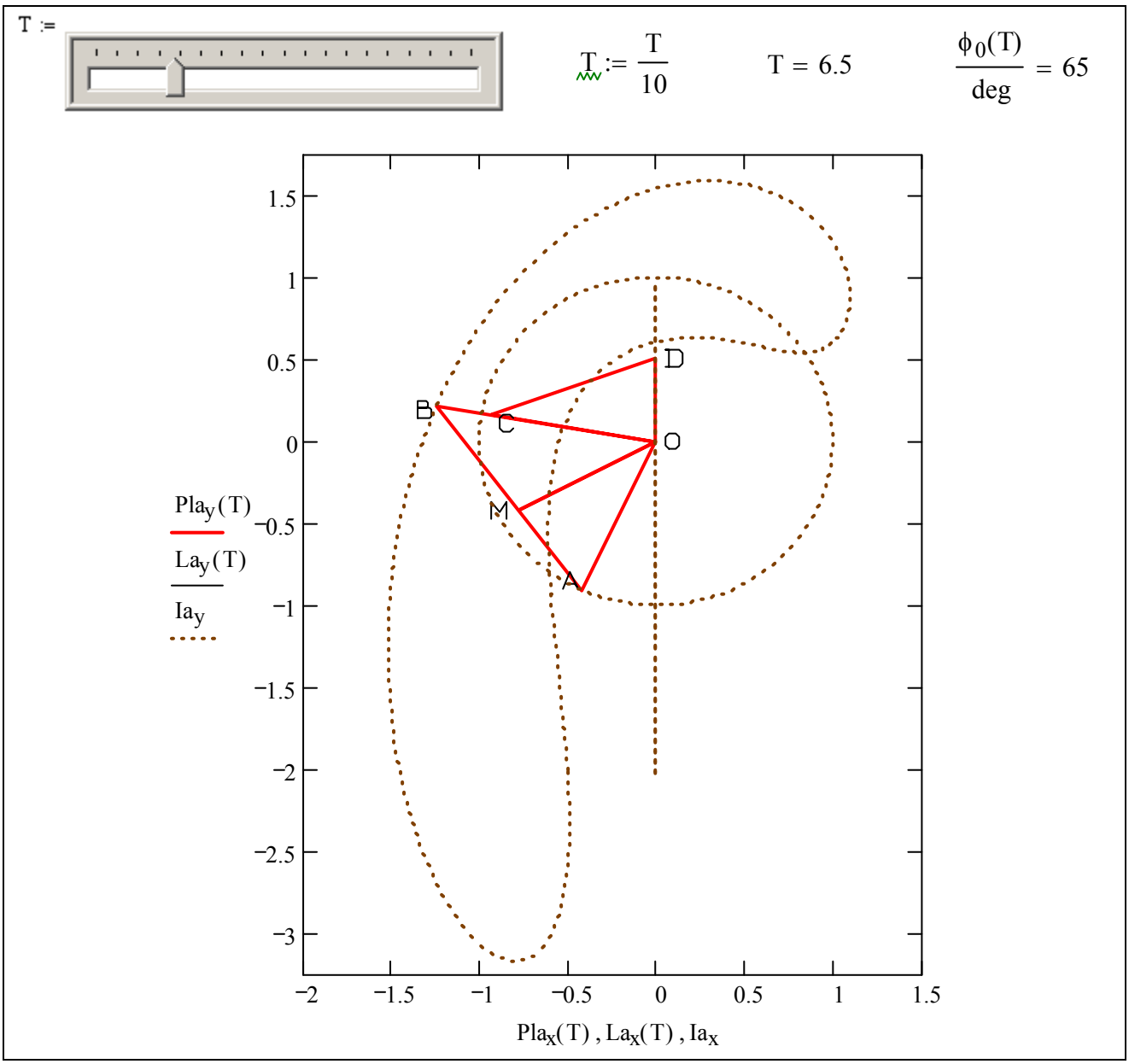


Рис. 12. План ускорений для механизма

Графические методы позволяют построить планы скоростей и ускорений только для заданного положения ведущего звена. Применение вычислительной техники позволило производить построение указанных планов для любого положения механизма. Это позволяет произвести качественную и количественную оценку полей скоростей и ускорений любых точек механизма, определить те положения механизма, в которых скорости и ускорения точек принимают экстремальные значения. А затем, при необходимости, изменить, соответствующим образом его геометрические размеры.

4. Определение кинематических характеристик механизма в заданном положении с помощью теорем сложного движения точки

Изобразим механизм в заданном положении (рис. 13), при значении угла поворота ведущего звена OA – $\varphi_k = 65°$, в выбранном масштабе длин – M_L. Изображенный на рисунке механизм составлен из двух базовых механизмов: шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ и кривошипно-шатунного механизма O_1CD, в каждом из которых шатуны AB и CD совершают плоское движение, а кривошипы OA и O_1C вращательное движение вокруг неподвижных осей Oz и O_1z соответственно.

Определим, измерив в масштабе длины M_L, положения узловых точек базовых механизмов:

$$OA = 15\,см, \quad OM = 48\,см, \qquad OB = 102\,см,$$
$$O_1C = 25\,см, \quad O_1K = 35.5\,см, \quad O_1D = 68\,см.$$

Для нахождения скоростей и ускорений этих точек, а также угловых скоростей и ускорений звеньев представим плоское движение шатунов AB и CD в виде двух вращений.

В качестве переносного вращения примем:

- для шатуна AB – вращение вместе с кривошипом OA вокруг неподвижной оси Oz с переносной угловой скоростью

$$\omega_{AB}^{\,e} = \omega_0 = \pi/18\, c^{-1};$$

- для шатуна CD – вращение вместе с кривошипом O_1C вокруг неподвижной оси O_1z с неизвестной пока переносной угловой скоростью

$$\omega_{CD}^{\,e} = \omega_2 .$$

Относительным вращением в этом случае является:

- для шатуна AB – вращение звена вокруг подвижной оси Az с относитель-

ной угловой скоростью $\omega_{AB}{}^{r}$;

- для шатуна CD – вращение звена вокруг подвижной оси Cz с относительной угловой скоростью $\omega_{CD}{}^{r}$;

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью теоремы о сложении скоростей при переносном вращательном движении

Так как закон движения кривошипа OA задан, а для шарнира B известна траектория движения, вычисление скоростей начинаем с точки B, вектор скорости которой, определим согласно теореме о сложении скоростей при составном движении:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_B{}^{e} + \overline{v}_B{}^{r} \qquad (1)$$

где $v_B{}^{e} = \omega_{AB}{}^{e}\, OB = \omega_0\, OB = 17.8\ {см}/{с}$, $\overline{v}_B{}^{e} \perp OB$ – переносная скорость точки B,

$v_B{}^{r} = \omega_{AB}{}^{r}\, OB = ?$, $\overline{v}_B{}^{r} \perp AB$ – относительная скорость точки B,

$v_B = ?$, $\overline{v}_B \perp O_1B$ – абсолютная скорость точки B.

Направление переносной скорости $\overline{v}_B{}^{e}$, определяется направлением угловой переносной скорости и показано на рис.13.

Решение уравнения (1) найдем графически, построив векторный треугольник скоростей (рис.13).

Для этого, из точки B проводим вектор переносной скорости – $\overline{v}_B{}^{e}$.

Из конца вектора $\overline{v}_B{}^{e}$ проводим линию, перпендикулярную звену AB, характеризующую возможное направление вектора относительной скорости $\overline{v}_B{}^{r}$.

Из точки B проводим перпендикуляр к кривошипу O_1B, который определяет возможное направление абсолютной скорости шарнира B, до пересече-

ния с прямой, характеризующей направление вектора $\overline{v}_B{}^r$.

Точка пересечения данных прямых определяет концы неизвестных векторов относительной $\overline{v}_B{}^r$ и абсолютной $\overline{v}_B$ скорости шарнира B.

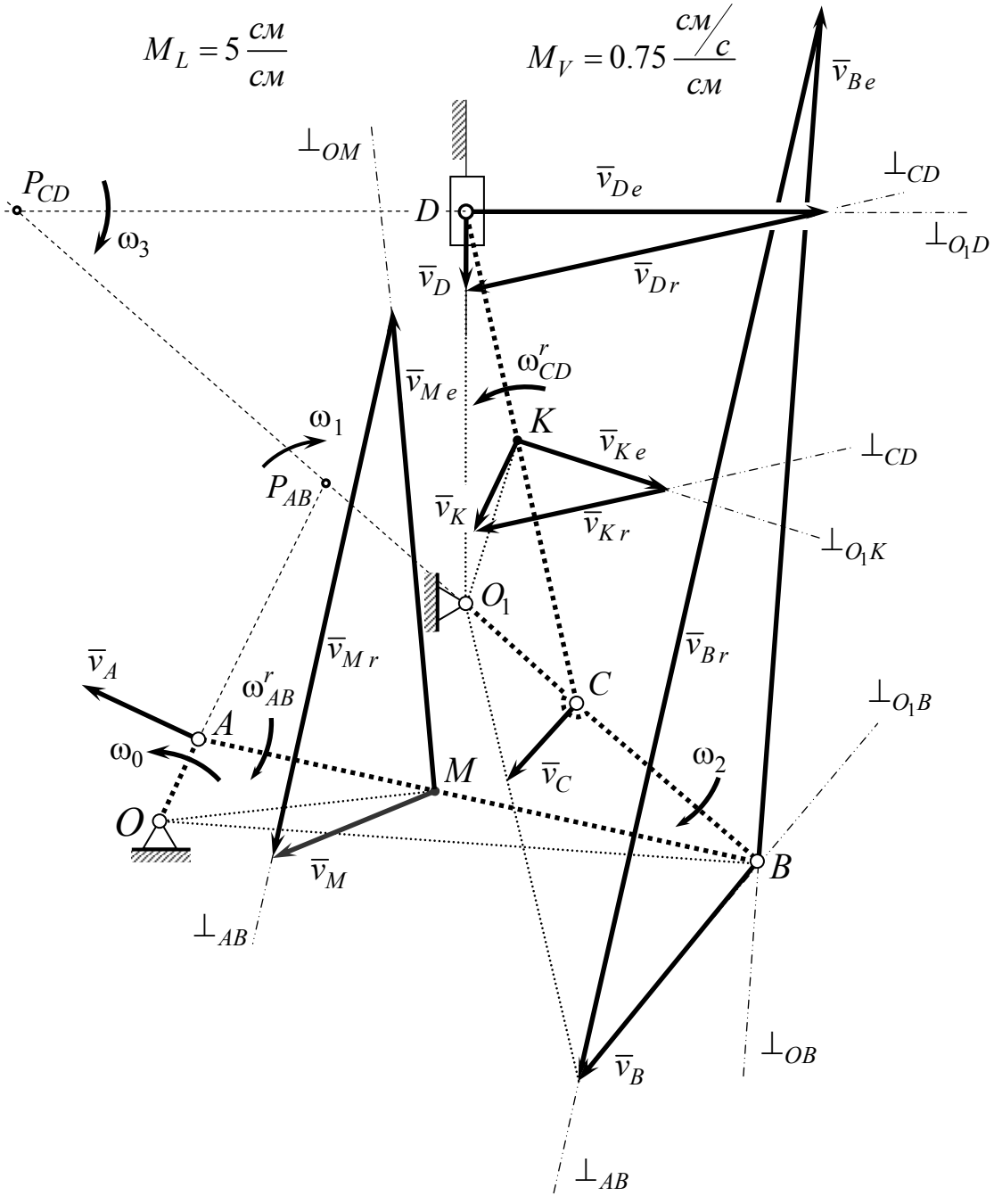


Рис. 13. Определение скоростей точек механизма

Измеряя указанные векторы, в соответствии с выбранным масштабом скоростей, получаем

$$v_B = 5.4\,{см}/{с}, \quad v_B{}^r = 22.4\,{см}/{с}, \quad \omega_{AB}{}^r = \frac{v_B{}^r}{AB} = 0.2306\,c^{-1}.$$

Направление относительной угловой скорости шатуна AB, определяемое направлением относительной скорости точки B – $\overline{v}_B{}^r$, показано на рис. 13. Так как относительная $\omega_{AB}{}^r$ и переносная $\omega_{AB}{}^e$ угловые скорости направлены в разные стороны, то абсолютная угловая скорость ω_{AB} звена AB равна

$$\omega_{AB} = \omega_1 = \omega_{AB}{}^e - \omega_{AB}{}^r = -0.056\, c^{-1}.$$

Знак "–" у величины угловой скорости шатуна AB показывает, что ω_{AB} направлено по часовой стрелке. Мгновенный центр вращения звена AB лежит на прямой OA и его положение определяется соотношением

$$OP \cdot \omega_{AB}{}^e = \left(OA + AP_{AB}\right) \cdot \omega_{AB}{}^e = AP_{AB} \cdot \omega_{AB}{}^r.$$

Разрешая данное уравнение относительно неизвестной AP, получим

$$AP_{AB} = \frac{OA}{\frac{\omega_{AB}{}^r}{\omega_{AB}{}^e} - 1} = 47\ см.$$

Величина AP_{AB} определяет положение мгновенного центра вращения звена AB при заданном положении механизма.

Зная величину и направление относительной угловой скорости звена AB, скорость точки M найдем из уравнения

$$\overline{v}_M = \overline{v}_M{}^e + \overline{v}_M{}^r \qquad (2)$$

где $v_M{}^e = \omega_{AB}{}^e\, OM = 8.38\ см/с$, $\overline{v}_M{}^e \perp OM$ – переносная скорость,

$v_M{}^r = \omega_{AB}{}^r\, AM = 9.68\ см/с$, $\overline{v}_M{}^r \perp AM$ – относительная скорость,

$\overline{v}_M = ?$, – абсолютная скорость.

Направление векторов переносной $\overline{v}_M{}^e$ и относительной $\overline{v}_M{}^r$ скоростей точки M показано на рис. 13. Решение уравнения (2) найдем, построив векторный треугольник скоростей. Измерением получено

$$v_M = 3.05\ см/с.$$

Угловую скорость звена O_1B найдем по формуле

$$\omega_2 = \omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B} = 0.0819\ c^{-1}.$$

Скорости точек D и K, а также относительную и абсолютную угловые скорости звена CD найдем аналогично. Построив треугольники скоростей для этих точек (рис.13) и измеряя неизвестные векторы, получим

$$v_D{}^r = 5.74\ см/с, \quad v_D{}^e = 5.59\ см/с, \quad v_D = 1.31\ см/с,$$
$$\omega_{CD}{}^r = 0.0667\ c^{-1},$$
$$v_K{}^r = 2.58\ см/с, \quad v_K{}^e = 3.14\ см/с, \quad v_K = 1.55\ см/с,$$
$$\omega_3 = \omega_{CD} = \omega_{CD}{}^e - \omega_{CD}{}^r = -0.0152\ c^{-1}$$

Знак "–" у величины угловой скорости шатуна CD показывает, что ω_{CD} направлено по часовой стрелке. Мгновенный центр вращения звена CD лежит на прямой O_1C и его положение определяется соотношением

$$O_1P_{CD} \cdot \omega_{CD}{}^e = CP_{CD} \cdot \omega_{CD}{}^r = \left(O_1C + O_1P_{CD}\right) \cdot \omega_{CD}{}^r.$$

Разрешая данное уравнение относительно неизвестной O_1P, получим

$$O_1P_{CD} = O_1C \frac{\omega_{CD}{}^r}{\omega_{CD}{}^e - \omega_{CD}{}^r} = 109.7\ см.$$

Величина O_1P_{CD} определяет положение мгновенного центра вращения звена CD при заданном положении механизма.

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев с помощью теоремы о сложении ускорений при переносном вращательном движении

Так как для шарнира B известна траектория движения, а закон движения кривошипа OA задан, вычисление ускорений начинаем с точки B. Абсолютное ускорение точки B определим согласно теореме о сложении ускорений при непоступательном переносном движении:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B{}^e + \bar{a}_B{}^r + \bar{a}_B{}^c = \bar{a}_B{}^{e\,Ц} + \bar{a}_B{}^{e\,ВР} + \bar{a}_B{}^{r\,Ц} + \bar{a}_B{}^{r\,ВР} + \bar{a}_B{}^c \qquad (3)$$

где $\bar{a}_B{}^e = \bar{a}_B{}^{e\,Ц} + \bar{a}_B{}^{e\,ВР}$ – переносное ускорение точки,

$\bar{a}_B{}^r = \bar{a}_B{}^{r\,Ц} + \bar{a}_B{}^{r\,ВР}$ – относительное ускорение точки,

$\bar{a}_B{}^c = 2\,\bar{\omega}_{AB}{}^e \times \bar{v}_B{}^r$ $\quad \bar{a}_B{}^c \perp \bar{v}_B{}^r$ – ускорение Кориолиса,

$$a_B{}^c = 2\,\omega_{AB}{}^e\, v_B{}^r = 7.81\ {см}/{с^2},$$

$a_B{}^{e\,Ц} = \left(\omega_{AB}{}^e\right)^2 OB = 3.10\ {см}/{с^2}$ $\quad \bar{a}_B{}^{e\,Ц} \Rightarrow (\cdot)O \parallel OB$ – переносное центростремительное ускорение точки,

$a_B{}^{e\,ВР} = \varepsilon_{AB}{}^e\, OB = 0$, т.к. $\quad \omega_{AB}{}^e = const$ – переносное вращательное ускорение точки,

$a_B{}^{r\,Ц} = \left(\omega_{AB}{}^r\right)^2 AB = 5.16\ {см}/{с^2}$ $\quad \bar{a}_B{}^{r\,Ц} \Rightarrow (\cdot)A \parallel AB$ – относительное центростремительное ускорение точки,

$a_B{}^{r\,ВР} = \varepsilon_{AB}{}^r\, AB = ?$ $\quad \bar{a}_B{}^{r\,ВР} \perp AB$ – относительное вращательное ускорение точки.

Направление ускорения Кориолиса $\bar{a}_B{}^c$, которое можно определить по правилу векторного произведения векторов или методом Жуковского, показано на рис.14.

В уравнении (3) учтено, что переносное и относительное движения шатуна AB являются вращениями вокруг осей Oz и Az соответственно.

Поскольку абсолютное движение кривошипа O_1B – вращение вокруг оси O_1z, то абсолютное ускорение точки B можно записать в виде

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B{}^{Ц} + \bar{a}_B{}^{ВР}, \qquad (4)$$

где $a_B{}^{Ц} = \omega_2{}^2\, O_1B = 0.443\ {см}/{с^2}$ $\quad \bar{a}_B{}^{Ц} \Rightarrow (\cdot)O_1 \parallel O_1B$

– центростремительная составляющая абсолютного ускорения точки,

$a_B{}^{ВР} = \varepsilon_2\, O_1B = ?$ $\quad \bar{a}_B{}^{ВР} \perp O_1B$

– вращательная составляющая абсолютного ускорения точки,

Приравняем правые части уравнений (3), (4) и учтем коммутативность векторов. Получим

$$\overline{a}_B{}^{Ц} + \overline{a}_B{}^{BP} = \overline{a}_B{}^{r\,Ц} + \overline{a}_B{}^{e\,Ц} + \overline{a}_B{}^{c} + \overline{a}_B{}^{r\,BP} \qquad (5)$$

Решение уравнения (5) найдем, построив векторный многоугольник ускорений (рис.14).

Для этого, из точки B проводим параллельно звену AB вектор относительного центростремительного ускорения – $\overline{a}_B{}^{r\,Ц}$.

Из конца вектора $\overline{a}_B{}^{r\,Ц}$ проводим параллельно отрезку OB по направлению к точке O, вектор переносного центростремительного ускорения – $\overline{a}_B{}^{e\,Ц}$.

Из конца вектора $\overline{a}_B{}^{e\,Ц}$ откладываем вектор ускорения Кориолиса $\overline{a}_B{}^{c}$, из конца которого проводим линию $\perp AB$, определяющую возможное направление вектора $\overline{a}_B{}^{r\,BP}$.

Из точки B, в направлении прямой O_1B, откладываем вектор $\overline{a}_B{}^{Ц}$, а из его конца линию, определяющую возможное направление вектора $\overline{a}_B{}^{BP}$, которая проводится до пересечения с прямой, характеризующей направление вектора $\overline{a}_B{}^{r\,BP}$.

В точке пересечения этих прямых сходятся концы векторов $\overline{a}_B{}^{r\,BP}$, $\overline{a}_B{}^{BP}$ и $\overline{a}_B$. Измеряя данные векторы в масштабе ускорений, получим

$$a_B{}^{r\,BP} = 0.597\ {см}/{с^2},\ a_B{}^{BP} = 0.06\ {см}/{с^2},\ a_B = 0.45\ {см}/{с^2}.$$

Угловые ускорения звеньев определяем по формулам

$$\varepsilon_{AB}{}^{r} = \varepsilon_1 = \frac{a_B{}^{r\,BP}}{AB} = 0.0063\ \ c^{-2},$$

$$\varepsilon_{O_1B} = \varepsilon_2 = \frac{a_B{}^{BP}}{O_1B} = 0.0009\ \ c^{-2}.$$

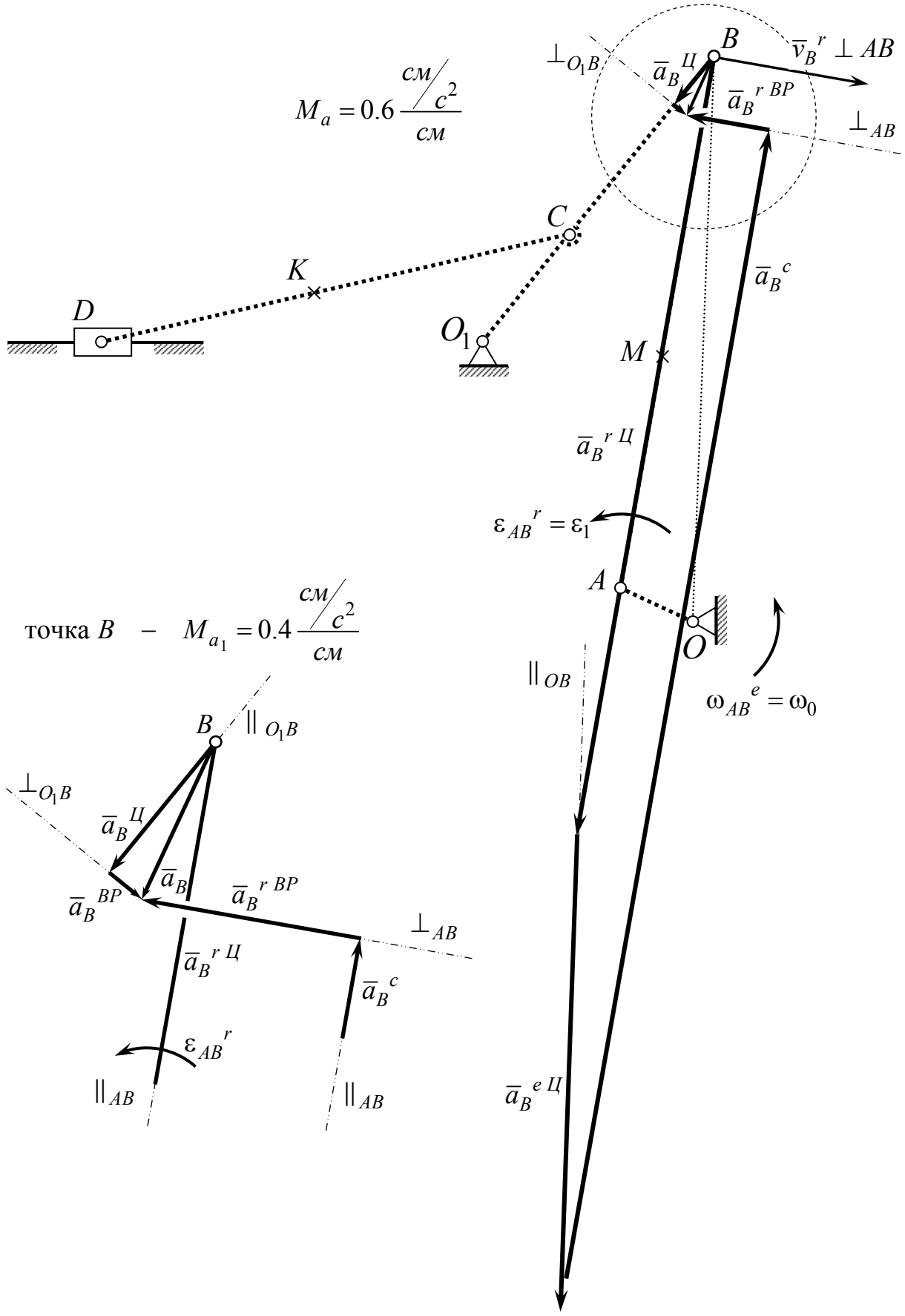


Рис. 14. Определение ускорений точки B

Направления угловых ускорений, которые определяем по направлению векторов $\bar{a}_B{}^{r\,BP}$ и $\bar{a}_B{}^{BP}$ соответственно, показаны на рис. 14.

Полное ускорение точки C звена O_1B, совершающего вращательное движение, определим из соотношения

$$\frac{a_B}{a_C}=\frac{O_1B}{O_1C},\ \text{тогда}\ a_C=a_B\frac{O_1C}{O_1B}=0.172\ {}^{см}\!/_{c^2}.$$

Изображаем вектор $\bar{a}_C$ параллельно вектору $\bar{a}_B$ в масштабе ускорений на рис.15.

Так как угловое относительное ускорение шатуна AB определено, найдем ускорение точки M.

$$\bar{a}_M=\bar{a}_M{}^{e\,Ц}+\bar{a}_M{}^{e\,BP}+\bar{a}_M{}^{r\,Ц}+\bar{a}_M{}^{r\,BP}+\bar{a}_M{}^{c}$$

где $a_M{}^{e\,Ц}=\left(\omega_{AB}{}^{e}\right)^2 OM=1.46\ {}^{см}\!/_{c^2}$ $\quad \bar{a}_M{}^{e\,Ц}\Rightarrow(\cdot)O\,||\,OM$ – переносное

центростремительное ускорение точки,

$a_M{}^{e\,BP}=\varepsilon_{AB}{}^{e}\,OM=0$ т.к. $\quad \omega_{AB}{}^{e}=const$ – переносное

вращательное ускорение точки,

$a_M{}^{r\,Ц}=\left(\omega_{AB}{}^{r}\right)^2 AM=2.23\ {}^{см}\!/_{c^2}$ $\quad \bar{a}_M{}^{r\,Ц}\Rightarrow(\cdot)A\,||\,AB$ – относительное

центростремительное ускорение точки,

$a_M{}^{r\,BP}=\varepsilon_{AB}{}^{r}\,AM=0.26\ {}^{см}\!/_{c^2}$ $\quad \bar{a}_M{}^{r\,BP}\perp AB$ – относительное

вращательное ускорение точки.

$\bar{a}_M{}^{c}=2\,\bar{\omega}_{AB}{}^{e}\times\bar{v}_M{}^{r}$ $\quad \bar{a}_B{}^{c}\perp\bar{v}_B{}^{r}$ – ускорение Кориолиса:

$a_M{}^{c}=2\,\omega_{AB}{}^{e}\,v_M{}^{r}=3.38\ {}^{см}\!/_{c^2}$

$\bar{a}_M=?$ – абсолютное ускорение точки

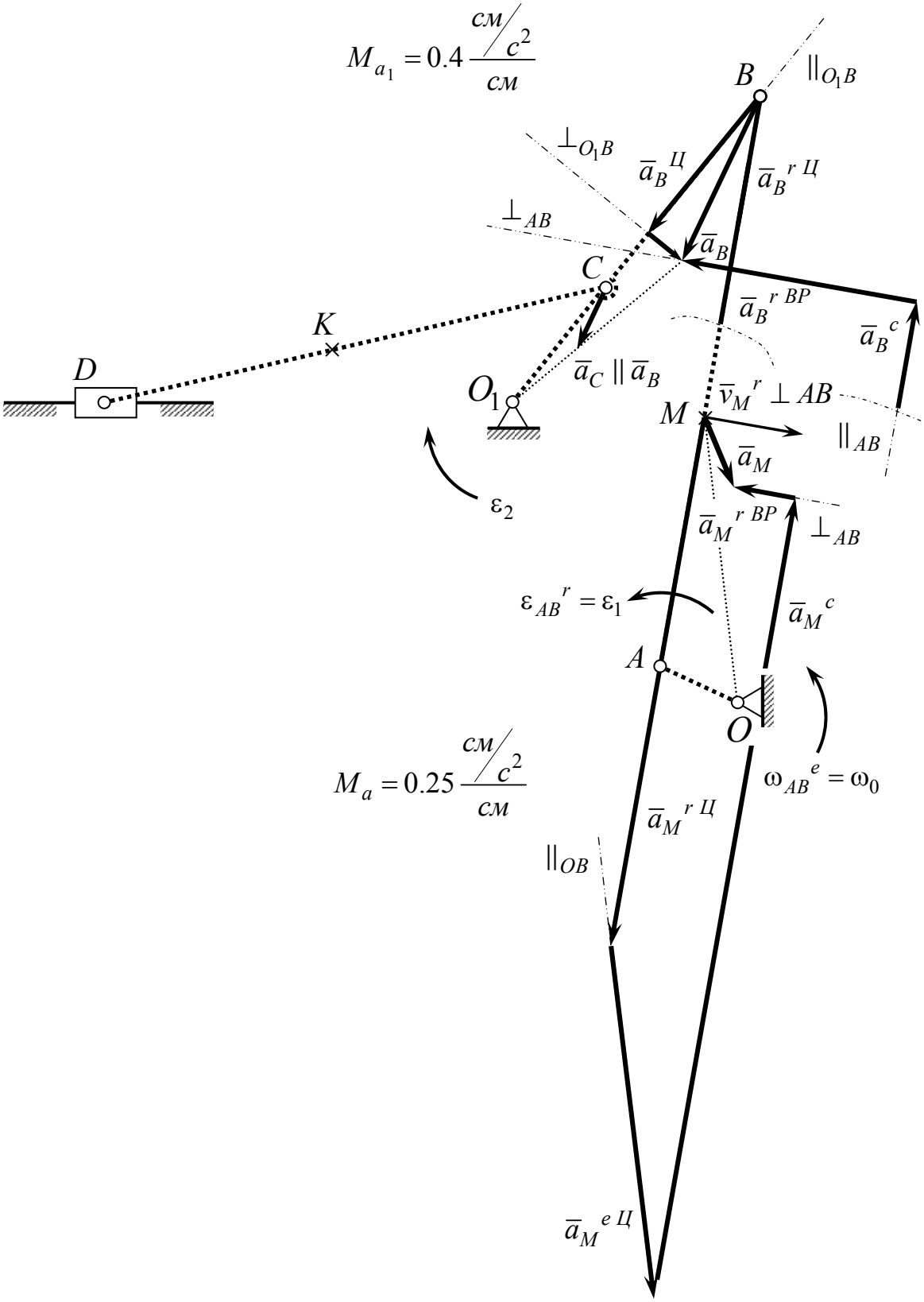


Рис. 15. Определение ускорений точек M и C

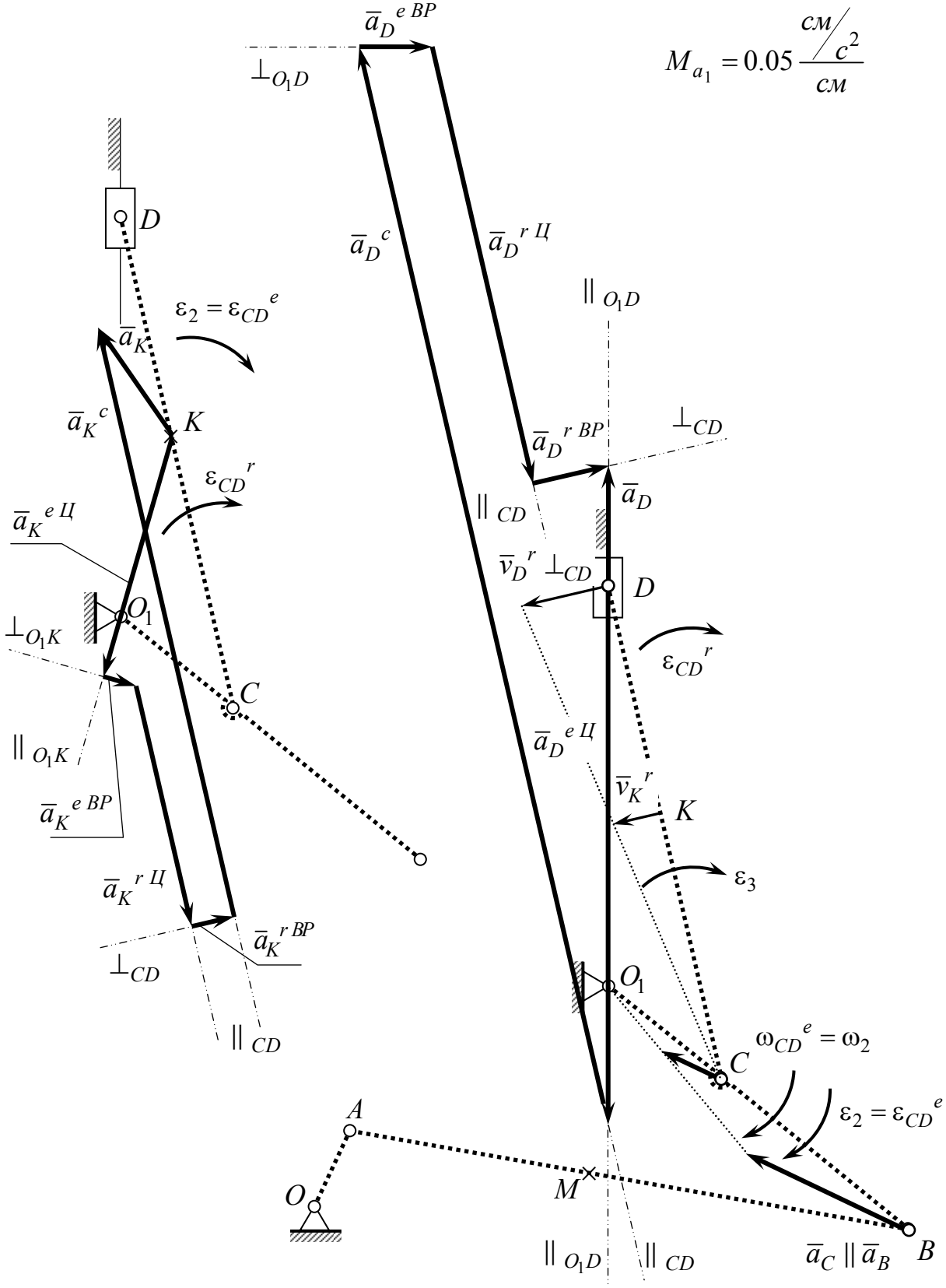


Рис. 16. Определение ускорений точек D и K

Изображаем многоугольник ускорений для точки M (рис.15). Измеряя неизвестный вектор ускорения $\overline{a}_M$, получим

$$a_M = 0.31 \, {см}/{с^2}.$$

Для определения ускорения точки D примем в качестве переносного движения вращение вместе с кривошипом O_1C. В этом случае имеем

$$\overline{a}_D = \overline{a}_D{}^{e\,Ц} + \overline{a}_D{}^{e\,ВР} + \overline{a}_D{}^{r\,Ц} + \overline{a}_D{}^{r\,ВР} + \overline{a}_D{}^{c}$$

где $a_D{}^{e\,Ц} = \left(\omega_{CD}{}^{e}\right)^2 O_1D = 0.458 \, {см}/{с^2}$ $\quad \overline{a}_D{}^{e\,Ц} \Rightarrow (\cdot)O_1 \parallel O_1D$ – переносное

центростремительное ускорение точки, $\omega_{CD}{}^{e} = \omega_2$,

$a_D{}^{e\,ВР} = \varepsilon_{CD}{}^{e} \, O_1D = 0.062 \, {см}/{с^2}$ $\quad \overline{a}_D{}^{e\,ВР} \perp O_1D$ – переносное

вращательное ускорение точки, $\varepsilon_{CD}{}^{e} = \varepsilon_2$,

$a_D{}^{r\,Ц} = \left(\omega_{CD}{}^{r}\right)^2 CD = 0.383 \, {см}/{с^2}$ $\quad \overline{a}_D{}^{r\,Ц} \Rightarrow (\cdot)C \parallel CD$ – относительное

центростремительное ускорение точки,

$a_D{}^{r\,ВР} = \varepsilon_{CD}{}^{r} \, CD = ?$ $\quad \overline{a}_D{}^{r\,ВР} \perp CD$ – относительное

вращательное ускорение точки.

$\overline{a}_D{}^{c} = 2 \, \overline{\omega}_{CD}{}^{e} \times \overline{v}_D{}^{r}$ $\quad \overline{a}_D{}^{c} \perp \overline{v}_D{}^{r}$ – ускорение Кориолиса

$a_D{}^{c} = 2 \, \omega_{CD}{}^{e} \, v_D{}^{r} = 0.940 \, {см}/{с^2}$

$a_D = ?$ $\quad \overline{a}_D \parallel O_1y$ – абсолютное ускорение точки

Аналогично способу, изложенному ранее, изображаем многоугольник ускорений для точки D (рис.16). Измеряя неизвестные векторы, получаем значения ускорений:

$$a_D{}^{r\,ВР} = 0.067 \ {см}/{с^2}; \ a_D = 0.105 \ {см}/{с^2}.$$

Затем вычисляем угловое относительное ускорение звена CD

$$\varepsilon_{CD}{}^{r} = \frac{a_D{}^{r\,BP}}{CD} = 0.00078\ \ c^{-2}.$$

Направление относительного углового ускорения определяем по направлению вектора $\overline{a}_D{}^{r\,BP}$ и изображаем его на рис.16 по часовой стрелке.

Так как относительное и переносное угловые ускорения шатуна CD направлены в одну сторону, направление абсолютного углового ускорения звена совпадает с переносным или относительным угловым ускорением, а его величина равна

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_3 = \varepsilon_{CD}{}^{e} + \varepsilon_{CD}{}^{r} = 0.00168\, c^{-2}$$

Ускорение точки K найдем аналогично определению ускорения точки M. Построив многоугольник ускорений для этой точки (рис.16)

$$\overline{a}_K = \overline{a}_K{}^{e\,Ц} + \overline{a}_K{}^{e\,BP} + \overline{a}_K{}^{r\,Ц} + \overline{a}_K{}^{r\,BP} + \overline{a}_K{}^{c}$$

где $a_K{}^{e\,Ц} = \left(\omega_{CD}{}^{e}\right)^2 O_1K = 0.212\ {см}/{c^2}$ $\qquad \overline{a}_K{}^{e\,Ц} \Rightarrow (\cdot)O_1 \parallel O_1K$

$a_K{}^{e\,BP} = \varepsilon_{CD}{}^{e}\, O_1K = 0.029\ {см}/{c^2}$ $\qquad \overline{a}_K{}^{e\,BP} \perp O_1K$

$a_K{}^{r\,Ц} = \left(\omega_{CD}{}^{r}\right)^2 CK = 0.209\ {см}/{c^2}$ $\qquad \overline{a}_K{}^{r\,Ц} \Rightarrow (\cdot)C \parallel CD$

$a_K{}^{r\,BP} = \varepsilon_{CD}{}^{r}\, CK = 0.037\ {см}/{c^2}$ $\qquad \overline{a}_K{}^{r\,BP} \perp CD$

$a_K{}^{c} = 2\,\omega_{CD}{}^{e}\, v_K{}^{r} = 0.514\ {см}/{c^2}$ $\qquad \overline{a}_D{}^{c} \perp \overline{v}_D{}^{r}$

$\overline{a}_K = ?$

измерением получим

$$a_K = 0.116\ {см}/{c^2}.$$

Анализ результатов вычислений

Сведем результаты вычислений, полученные разными методами в таблицы (см. табл. 1 – табл. 3). Точность вычислений проведенных графическими методами будем оценивать положительной величиной относительной погрешности δ, определяемой соотношением

$$\delta = \left| \frac{x - x_T}{x_T} \right|,$$

где x – исследуемая величина, полученная одним из графических методов;

x_T – точное значение исследуемой величины.

Величина	**Точное значение**	**Метод 1**	δ_1	**Метод 3**	δ_3
$AP_{AB}, см$	46,75	48,0	0,0267	47,0	0,0053
$CP_{CD}, см$	134,74	132,5	0,0169	134,7	0,0003
$\max(\delta)$			0,0267		0,0053

Табл. 1 Оценка точности определения МЦС

Величина	**Точное значение**	**Метод 1**	δ_1	**Метод 2**	δ_2	**Метод 3**	δ_3
ω_1, c^{-1}	0,0560	0,0545	0,0268	0,057	0,0179	0,0560	0,0000
ω_2, c^{-1}	0,0819	0,0818	0,0012	0,080	0,0232	0,0820	0,0012
ω_3, c^{-1}	0,0152	0,0154	0,0132	0,015	0,0132	0,0152	0,0000
$v_A, см/с$	2,6180	2,620	0,0008	2,62	0,0008	2,62	0,0008
$v_M, см/с$	3,0486	3,027	0,0071	3,00	0,0159	3,05	0,0005
$v_B, см/с$	5,4070	5,400	0,0013	5,30	0,0198	5,40	0,0013
$v_C, см/с$	2,0481	2,045	0,0015	2,00	0,0235	2,05	0,0009
$v_K, см/с$	1,5537	1,571	0,0113	1,53	0,0153	1,55	0,0024
$v_D, см/с$	1,3078	1,309	0,0009	1,30	0,0060	1,31	0,0017
$\max(\delta)$			0,0132		0,0235		0,0024

Табл. 2 Оценка точности определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев

Величина	**Точное значение**	**Метод 1**	δ_1	**Метод 2**	δ_2	**Метод 3**	δ_3
ε_1, c^{-2}	0,0062	0,0061	0,0161	0,0063	0,0161	0,0063	0,0161
ε_2, c^{-2}	0,0009	0,0009	0,0000	0,0009	0,0000	0,0009	0,0000
ε_3, c^{-2}	0,0017	0,0016	0,0588	0,0017	0,0000	0,0017	0,0000
$a_A, см/с^2$	0,4569	0,4569	0,0000	0,4569	0,0000	0,4569	0,0000
$a_M, см/с^2$	0,3076	0,3029	0,0153	–	–	0,310	0,0078
$a_B, см/с^2$	0,4470	0,4502	0,0072	0,4502	0,0072	0,450	0,0067
$a_C, см/с^2$	0,1693	0,1667	0,0154	0,1724	0,0183	0,170	0,0041
$a_K, см/с^2$	0,1148	0,1167	0,0166	–	–	0,116	0,0105
$a_D, см/с^2$	0,1001	0,1008	0,0070	0,1018	0,0170	0,105	0,0490
$\max(\delta)$			0,0588		0,0183		0,0490

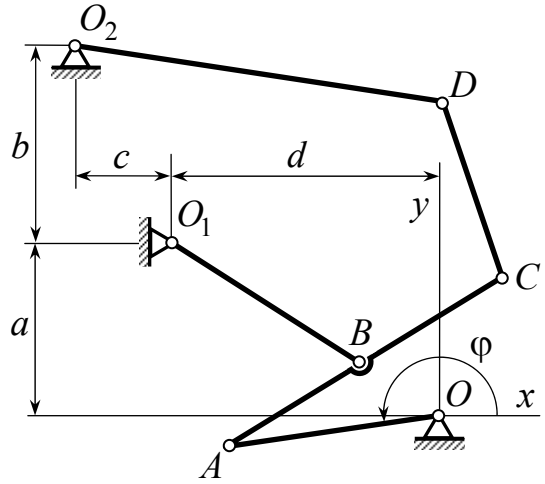
Табл. 3 Оценка точности определения ускорений точек и угловых ускорений звеньев

Анализ вычисленных значений кинематических параметров многозвенного шарнирного механизма позволяет сделать следующие выводы:

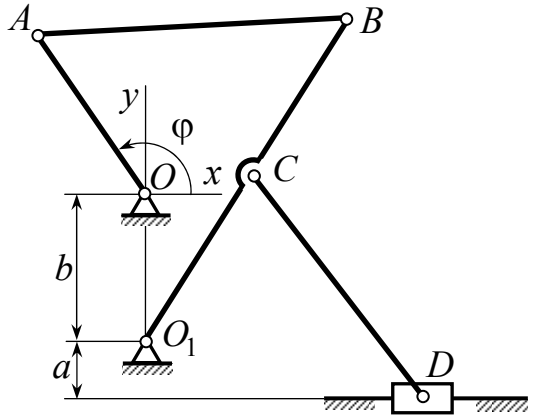
- Все три графических метода с допустимой степенью точности определяют кинематические параметры механизма;
- Увеличение погрешности при вычислении ускорений связано с накоплением ошибок графических методов при определении скоростей точек и угловых скоростей звеньев;
- Наиболее громоздкими и трудоемкими являются графоаналитические и графические методы при исследовании ряда различных положений механизма.
- Данные методы целесообразно использовать в качестве ориентировочных расчетов при отладке программ для численного моделирования системы.

АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

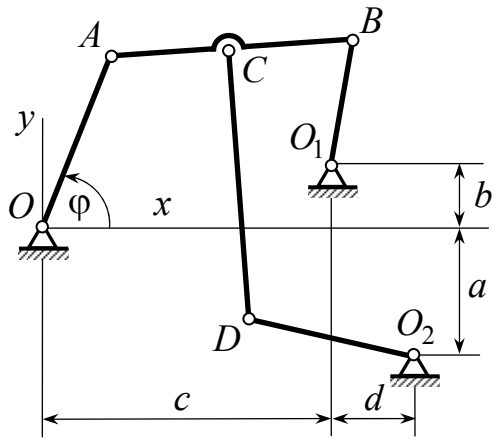
1



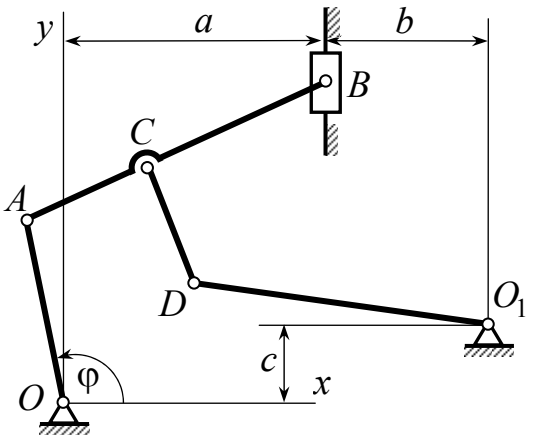
2



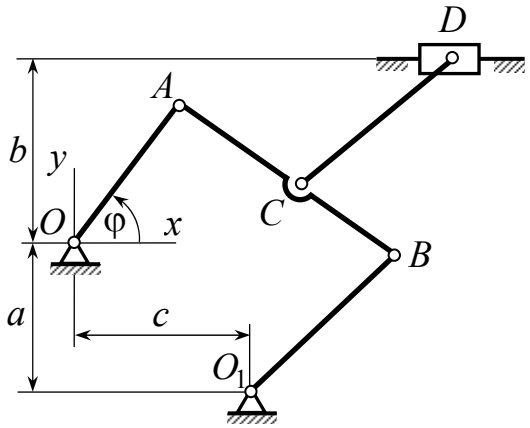
3



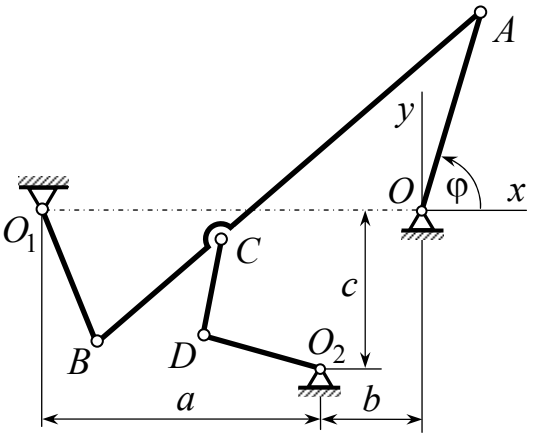
4



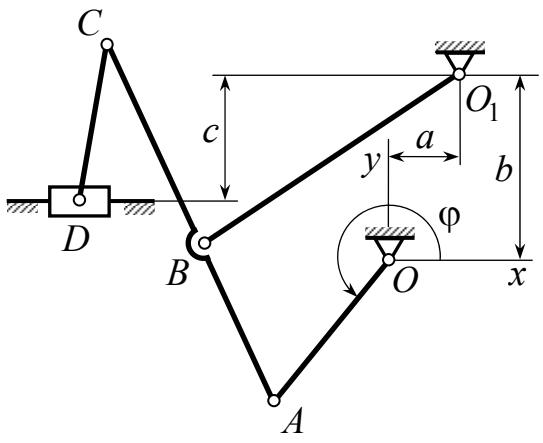
5



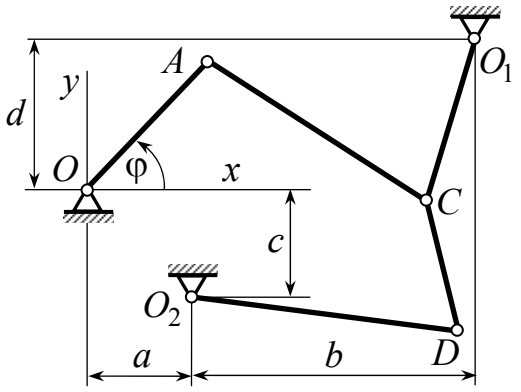
6



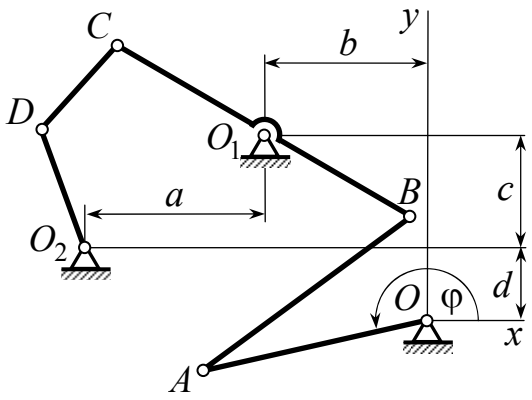
7


C
D
B
A
O
O1
c
a
y
b
φ
x

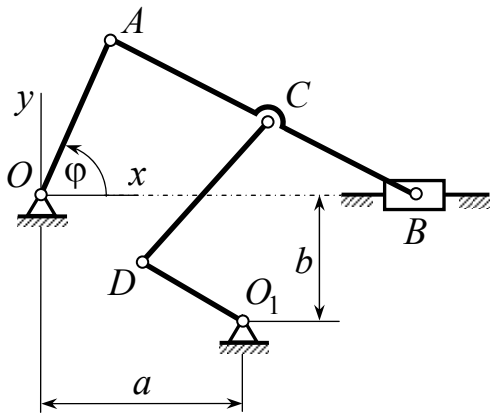
8


A
O1
y
d
O
φ
x
C
c
O2
a
b
D

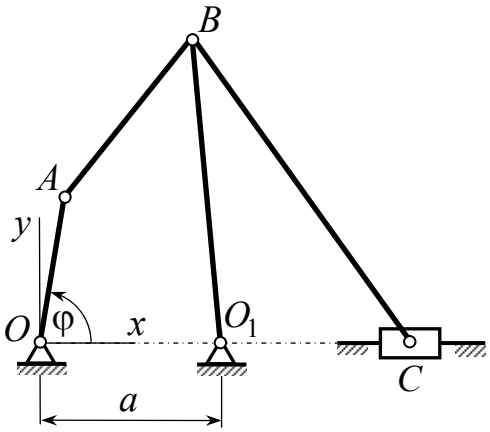
9


C
y
b
D
O1
a
B
c
O2
O
φ
d
x
A

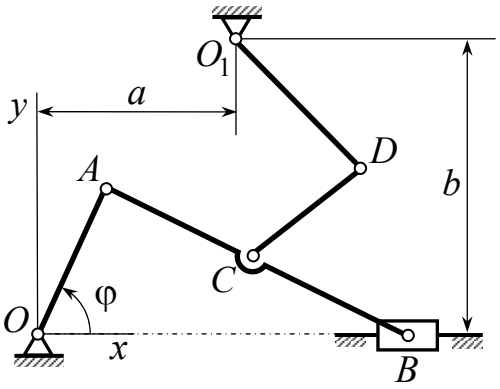
10


A
C
y
O
φ
x
B
b
D
O1
a

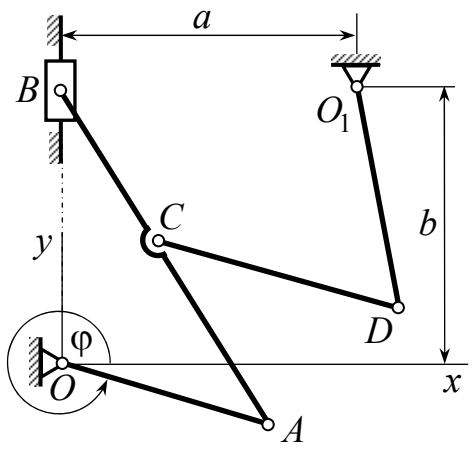
11


B
A
y
O
φ
x
O1
C
a

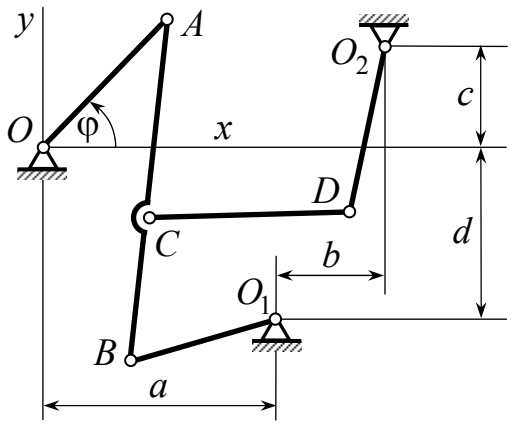
12


O1
a
y
D
A
b
C
O
φ
x
B

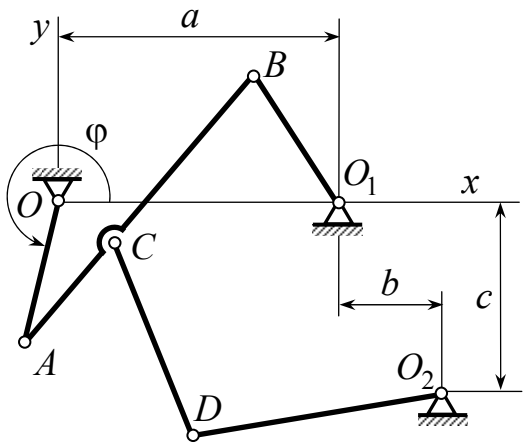
13



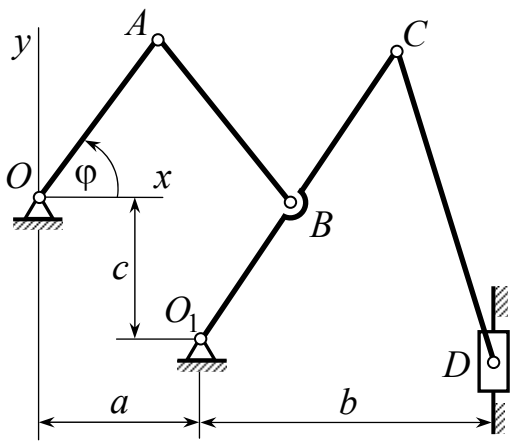
14



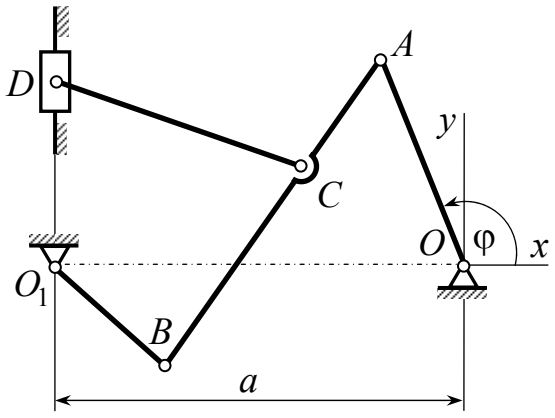
15



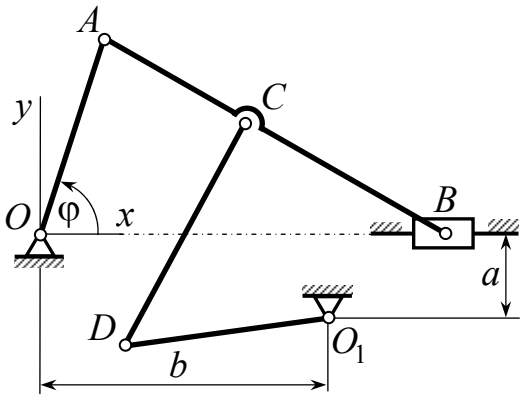
16



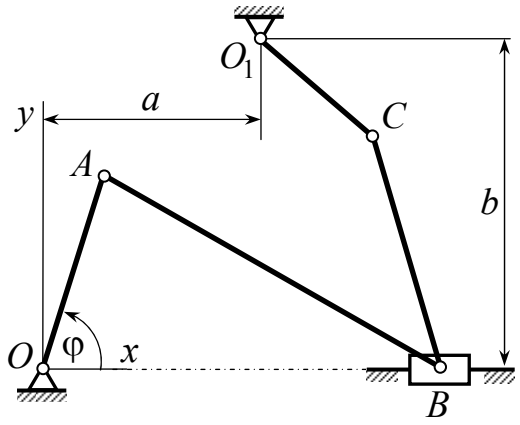
17



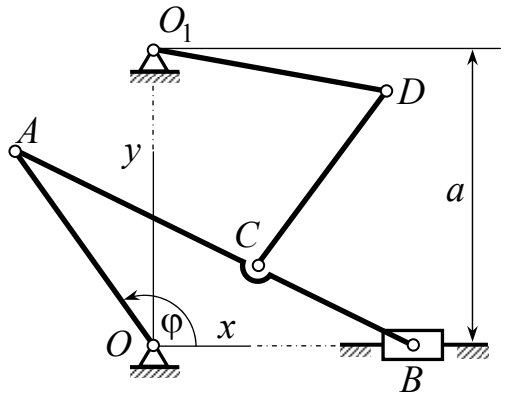
18



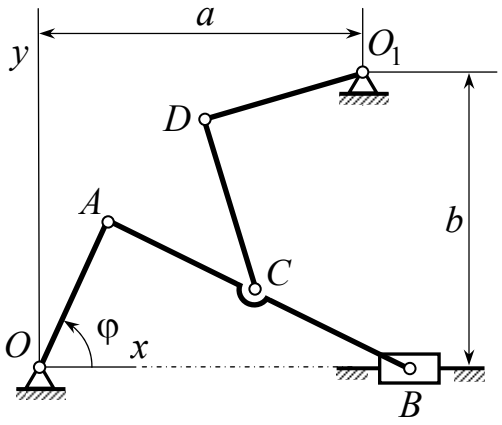
19



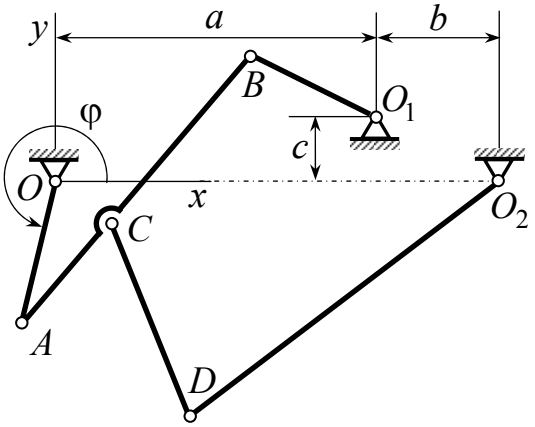
20



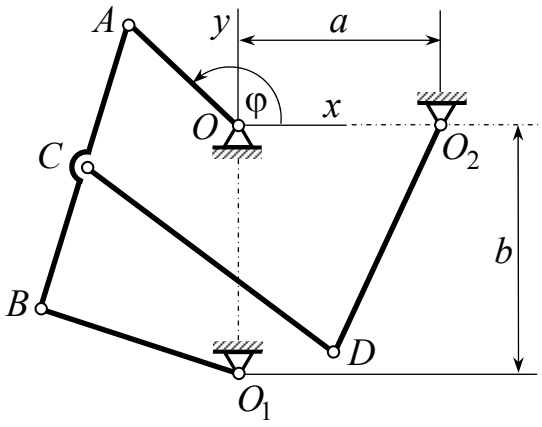
21



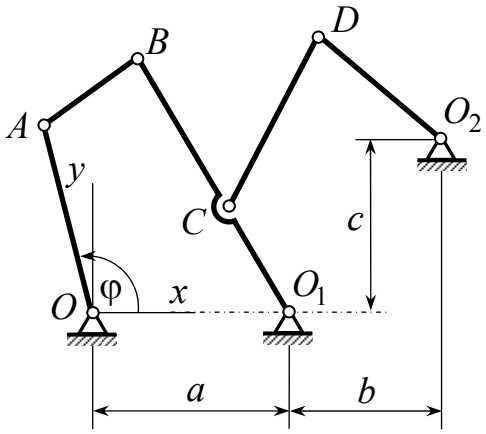
22



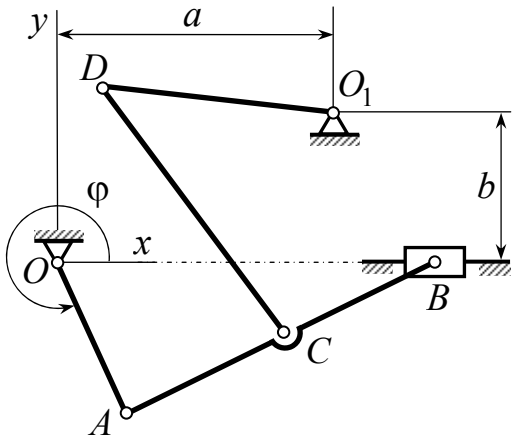
23



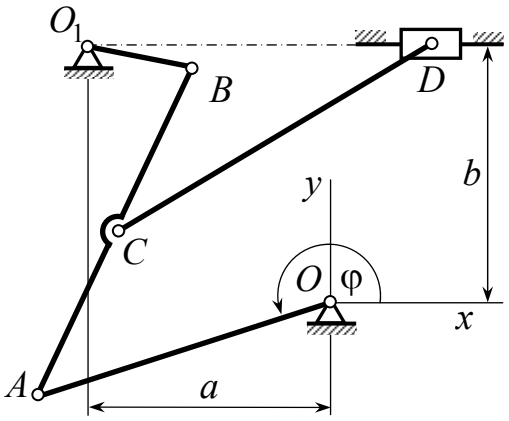
24



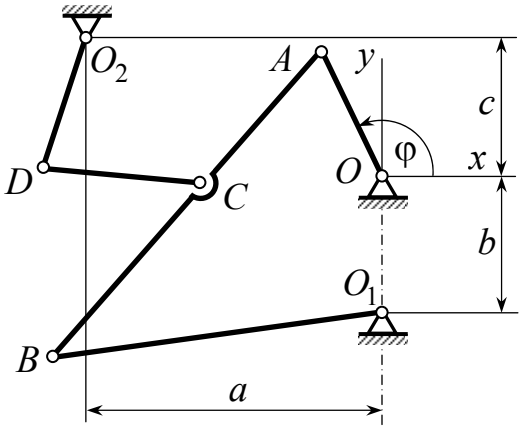
25



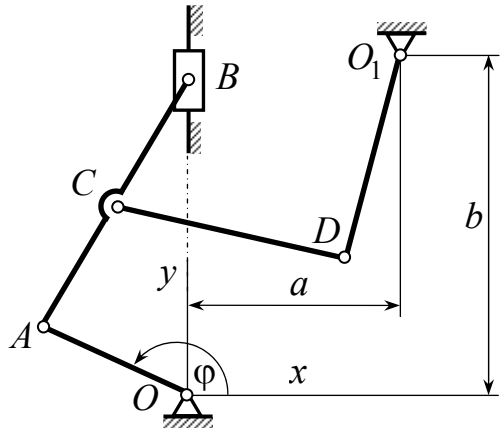
26



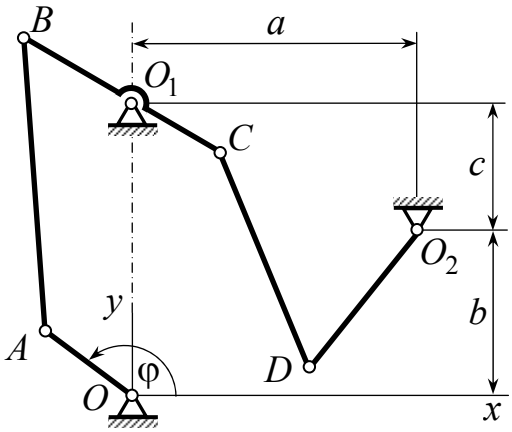
27



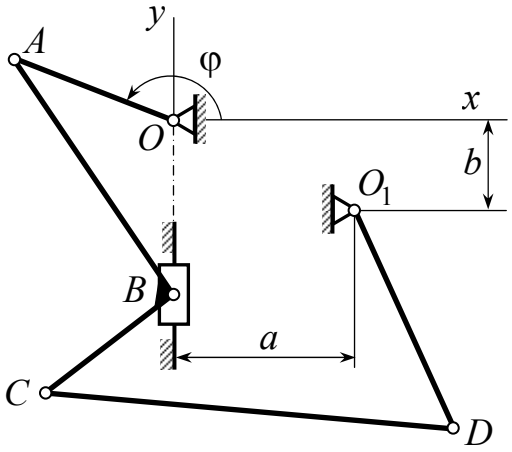
28



29



30



Значение угла поворота ведущего звена при $t = T_k - \varphi_k$, град.										
№	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	330	0	105	300	165	240	210	150	255	330
2	135	75	210	150	90	195	165	75	150	150
3	195	0	165	0	0	300	255	180	120	165
4	255	60	45	30	15	225	225	270	75	180
5	300	285	135	30	15	45	285	90	90	330
6	300	150	105	165	240	60	195	210	270	30
7	210	285	330	75	120	180	30	90	225	75
8	315	330	225	90	90	60	60	105	150	240
9	225	135	165	255	210	180	90	135	315	105
10	270	150	45	210	210	150	240	300	45	210
11	315	45	210	0	105	255	225	300	165	330
12	240	300	210	15	345	75	270	135	240	75
13	345	300	120	180	315	30	45	75	195	225
14	120	120	315	195	105	225	210	135	45	15
15	225	300	135	315	315	345	180	105	45	75
16	330	240	15	195	330	330	285	30	150	150
17	90	165	195	150	165	75	165	150	240	45
18	345	75	45	90	75	105	345	255	135	150
19	240	45	15	90	240	45	240	60	75	315
20	60	285	45	315	0	210	150	345	315	210
21	165	195	105	270	345	270	120	105	285	345
22	135	30	90	330	285	15	135	165	105	225
23	180	285	0	270	0	75	30	15	330	60
24	285	300	30	60	75	285	120	225	15	45
25	90	60	300	60	315	330	120	315	300	195
26	120	195	180	105	60	270	45	60	180	255
27	15	300	255	255	45	90	105	240	120	105
28	195	180	150	210	300	270	135	45	0	30
29	255	135	15	15	45	270	75	60	255	210
30	120	315	210	210	90	90	345	345	345	240

Геометрические размеры механизмов, [см]													
№	*a*	*b*	*c*	*d*	*OA*	*AB*	*CD*	O_1C	O_2D	*AC*	O_1B	O_1D	*BC*
1	18	45	18	23	14	21	46	–	32	42	28	–	–
2	15	38	–	–	15	51	60	33	–	19	66	–	–
3	10	15	40	54	15	42	70	–	32	21	28	–	–
4	20	20	22	–	12	76	25	–	–	38	–	20	–
5	25	15	50	–	20	60	70	–	–	30	30	–	–
6	65	10	40	–	10	80	50	–	25	25	30	–	–
7	10	50	10	–	16	50	60	–	–	80	35	–	30
8	27	18	30	30	14	–	63	20	25	55	–	–	–
9	19	20	28	21	10	40	30	31	25	–	–	–	62
10	55	25	–	–	15	70	33	–	–	35	–	24	35
11	50	–	–	–	15	50	–	–	–	–	30	–	60
12	15	60	–	–	20	60	60	–	–	15	–	35	45
13	17	54	–	–	15	50	40	–	–	15	–	24	–
14	42	20	40	10	10	50	60	–	20	25	20	–	–
15	50	10	30	–	12	50	45	–	20	30	20	–	–
16	36	22	15	–	10	45	60	40	–	–	20	–	20
17	96	–	–	–	15	90	75	–	–	42	28	–	48
18	40	70	–	–	20	78	40	–	–	40	–	30	–
19	42	40	–	–	17	70	–	30	–	–	–	–	40
20	40		–	–	22	60	50	–	–	30	–	20	–
21	20	60	–	–	20	80	50	–	–	40	–	30	–
22	50	25	10	–	15	47	35	–	45	22	20	–	–
23	60	50	–	–	12	50	60	–	32	30	30	–	–
24	36	40	10	–	16	50	50	15	20	–	26	–	–
25	55	22	–	–	20	40	42	–	–	15	–	30	25
26	50	40	–	–	25	70	60	–	–	35	30	–	–
27	35	45	20	–	10	50	54	–	28	–	23	–	22
28	70	30	–	–	30	55	70	–	–	30	–	25	25
29	55	20	30	–	13	60	70	14	33	–	–	–	39
30	70	20	–	–	19	47	81	–	–	–	–	36	30

2. СТАТИКА

Курсовые работы по статике посвящены применению основных теорем и методов статики к исследованию равновесия механических систем. Студенты, выполняя то или иное задание, должны получить навыки и умения: составления уравнений равновесия для рассматриваемых тел, нахождения реакций внешних и внутренних связей, анализа результатов расчета и исследования конструкций.

В данном разделе представлены три курсовых работы разной степени сложности:

- В 1-ой работе "Исследование равновесия плоских шарнирных ферм" рассматривается равновесие плоской шарнирной фермы. Составление уравнений равновесия и проверочные расчеты проводятся различными методами. Исследуется влияние вида и расположения опор на величины реакций внешних и внутренних связей.
- Во 2-ой работе "Равновесие тел под действием произвольной плоской системы сил" рассматривается равновесие плоских составных конструкций. Составление уравнений равновесия и проверочные расчеты проводятся различными методами. Исследуется влияние геометрических параметров на величины реакций связей, определяются области их допустимых значений.
- В 3-ей работе "Равновесие плоских шарнирных механизмов" изучается равновесие плоских многозвенных шарнирных механизмов. Совместно решается нелинейная система, в которую входят: система нелинейных уравнений геометрических связей и система уравнений равновесия. Исследуются факторы, обеспечивающие равновесие механизма в зависимости от положения ведущего звена.

С 1. ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ ФЕРМ

Фермой называется геометрически неизменяемая конструкция, образованная прямолинейными стержнями, соединенными друг с другом идеальными шарнирами, которые называются узлами фермы. Если стержни, образующие ферму, лежат в одной плоскости, то такая ферма называется плоской. Плоская ферма является статически определимой, если число узлов n и число стержней N удовлетворяют равенству

$$N = 2n - 3.$$

При $N > 2n - 3$, ферма является статически неопределимой, а при $N < 2n - 3$ ферма имеет дополнительные степени свободы, т.е. является механизмом.

При расчете ферм методами теоретической механики все действующие на ферму силы приводятся к ее узлам, а стержни считаются невесомыми и абсолютно жесткими. Тогда усилия в стержнях фермы будут направлены вдоль их осей, и стержни могут быть только сжаты или растянуты. Расчет статически определимых ферм сводится к определению усилий в стержнях фермы. В этом случае все активные силы и реакции опор являются внешними силами для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело; усилия в стержнях — внутренними силами (внутренними реакциями).

При проектировании ферм обычно задаются критические режимы внешних воздействий на них. Тогда внешние силы можно считать не изменяемыми. Конструктивные параметры ферм (их геометрические размеры) определяются условиями их функционирования и, следовательно, варьируются в очень узком диапазоне. Актуальной становится такая задача исследования фермы, при которой могут изменяться вид опор и место их расположения.

Цель курсовой работы

Целью курсовой работы является выработка навыков расчета и исследования равновесия плоских шарнирных ферм.

Содержание курсовой работы

Объектом исследования является плоская шарнирная ферма, представляющая собой совокупность прямолинейных стержней, соединенных друг с другом идеальными шарнирами. Схемы ферм и таблицы исходных данных приведены в альбоме заданий.

Задаваемыми параметрами являются:

- геометрические характеристики фермы;
- плоская система активных сил, приложенных узлам фермы.

При составлении математической модели принимаются следующие допущения:

- стержни, образующие ферму, являются невесомыми, абсолютно жесткими и прямолинейными;
- соединительные шарниры – идеальные (Трение в них отсутствует).

Требуется:

1. Сформировать систему уравнений для определения реакций внешних и внутренних связей.
2. Найти значения реакций внешних и внутренних связей.
3. Провести численный анализ полученного решения для разных видов опор и мест их расположения с использованием ЭВМ и выбрать оптимальный вариант.

Порядок выполнения работы

1. Выделить тело (элемент) или систему тел с заданными активными силами, равновесие которых будем рассматривать;
2. Используя аксиому освобождаемости от связей рассмотреть выбранное тело, как свободное, заменив действующие на него связи их реакциями;
3. Дать анализ полученной системы сил, выяснить статическую определимость

фермы;

4. Записать условия равновесия и составить уравнения равновесия:
   - с помощью метода вырезания узлов;
   - методом Риттера;
5. Определить реакции внешних и внутренних связей и осуществить проверку правильности составления уравнений равновесия.
6. Провести анализ и исследование полученного решения:
   - исследовать влияние вида опор и места их расположения на величины реакций внешних и внутренних связей.
   - выбрать такое расположение опор, при котором обеспечивается минимальное количество сжатых или растянутых стержней (по указанию преподавателя);
   - определить область допустимых значений ориентации опорной плоскости катковой опоры,

В процессе выполнения курсовой работы необходимо выработать следующие навыки и умения:

- определения связей, действующих на тело или систему тел;
- составления уравнений равновесия для произвольного тела, входящего в систему тел и нахождения реакций связей;
- решения поставленной задачи разными методами.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Мостовая ферма (рис. 1)находится в равновесии под действием сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_3$. Геометрические размеры фермы известны. Ферма опирается в точке A на катковую опору, а в точке B закреплена неподвижным шарниром.

Исследовать равновесие фермы. Определить реакции внешних и внутренних связей для разных видов опор и мест их расположения (схемы 1, 2, 3).

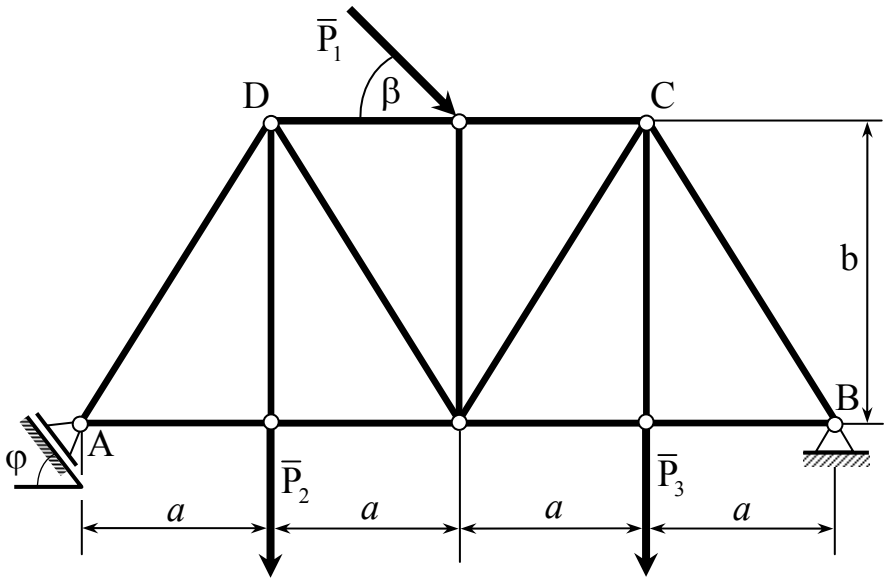


рис. 1. Рис. 1 Мостовая ферма (схема 1).

Исходные данные

$P_1 = 20\,кН$, $P_2 = 30\,кН$, $P_3 = 40\,кН$,

$a = 1\,м$, $b = \sqrt{3}\,м$, $\varphi = 45^\circ$ $\beta = 30^\circ$

Точка опоры	**A**	**B**	**C**
Схема № 1			
Схема № 2			
Схема № 3			

1. Определение реакций внешних связей

Для определения реакций внешних связей рассмотрим мостовую ферму $ABCD$ (рис. 2) содержащую 8 узлов, соединенных 13 стержнями. Ферма находится в равновесии под действием активных сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и связей приложенных в точках A и B.

Освободим ферму от опор, заменив их действие силами реакций связей $\overline{R}_A, \overline{R}_B$. Проведем систему координат xAy и изобразим действующие на нее внешние силы: активные $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и реакции связей (рис. 2).

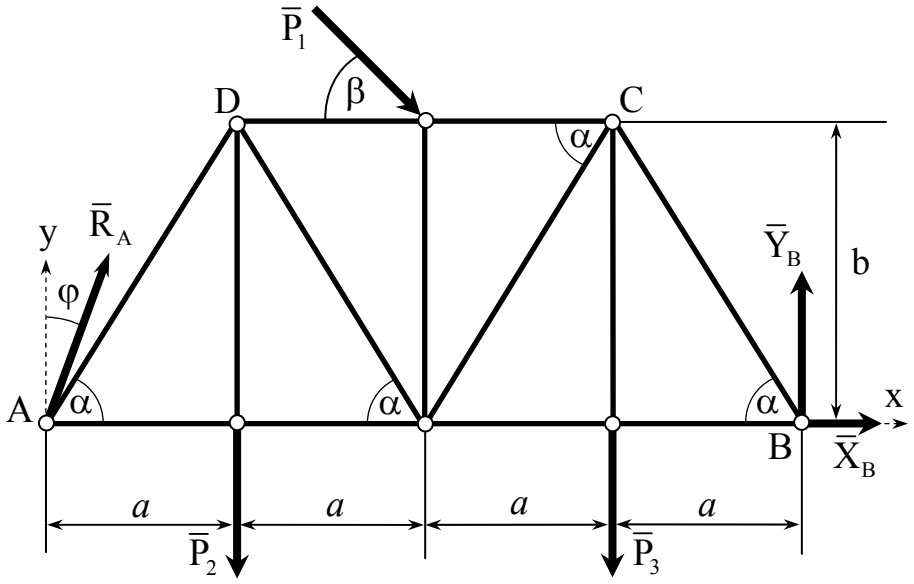


Рис. 2 Расчетная схема для определения реакций внешних связей.

Реакцию $\overline{R}_A$ катковой опоры направим перпендикулярно опорной плоскости, а реакцию неподвижной шарнирной опоры B – $\overline{R}_B$ изобразим двумя составляющими $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$, т. е. $\overline{R}_B = \overline{X}_B + \overline{Y}_B$, направив их в положительном направлении координатных осей. Так как все указанные силы расположены в плоскости xAy, то ферма находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил.

Условия равновесия фермы можно записать в виде

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 \text{ или}$$

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k M_A\left(\bar{F}_k\right) = 0, \quad \sum_k M_B\left(\bar{F}_k\right) = 0.$$

Так как на ферму действует произвольная плоская система сил и выполняется условие $N = 2n - 3\left(2 \times 8 - 3 \equiv 13\right)$, то ферма является статически определимой и расчет фермы можно осуществить методами теоретической механики.

Составим уравнения равновесия системы сил, действующих на ферму:

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = 0 \qquad & X_B + P_1 \cos\beta + R_A \sin\varphi = 0, \\ \sum_k M_A\left(\bar{F}_k\right) = 0 \qquad & Y_B\, 4a - P_3\, 3a - P_2\, a - P_1 \cos\beta\, b - P_1 \sin\beta\, 2a = 0, \\ \sum_k M_B\left(\bar{F}_k\right) = 0 \quad & P_3\, a + P_2\, 3a - R_A \cos\varphi\, 4a - P_1 \cos\beta\, b + P_1 \sin\beta\, 2a = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Последовательно решая систему уравнений (1), из третьего уравнения найдем реакцию R_A

$$R_A = \frac{1}{4\cos\varphi}\left(P_3 + 3P_2 + 2P_1 \sin\beta - P_1 \cos\beta \frac{b}{a}\right).$$

Из второго уравнения этой системы – Y_B

$$Y_B = \frac{1}{4}P_2 + \frac{3}{4}P_3 + \frac{1}{2}P_1 \sin\beta + P_1 \cos\beta \frac{b}{4a},$$

а из первого уравнения

$$X_B = -P_1 \cos\beta - R_A \sin\varphi.$$

Окончательно значение реакции X_B будет иметь вид

$$X_B = -P_1\left[\cos\beta + \frac{1}{4}tg\varphi\left(2\sin\beta - \frac{b}{a}\cos\beta\right)\right] - \frac{1}{4}tg\varphi\left(P_3 + 3P_2\right).$$

Подставив численные значения, получим

$$R_A = 30\sqrt{2}\ кН = 42.426\ кН, \quad X_B = -10\left(3 + \sqrt{3}\right) кН = -41.321\ кН, \quad Y_B = 50\ кН.$$

Так как значение X_B получилось отрицательным, реакция $\bar{X}_B$ направлена противоположно направлению, выбранному на расчетной схеме.

Проверить вычисления можно составлением уравнения моментов относи-

тельно какой-либо точки в плоскости действия сил (например, точки C)

$$\sum_k M_C\left(\overline{F}_k\right)=0 \quad X_B b+Y_B a+P_2 2a-R_A\cos\varphi\, 3a+R_A\sin\varphi\, b+P_1\sin\beta\, a=0.$$

Подставляя в данное уравнение величины найденных реакций, получим

$$-P_1\cos\beta\, b-\cancel{R_A\sin\varphi\, b}+\underline{P_1\sin\beta\, a}+\underline{\underline{P_2\, a}}+P_3\, a-\widehat{R_A\cos\varphi\, a}+\underline{\underline{P_2\, 2a}}-\widehat{R_A\cos\varphi\, 3a}+$$

$$+\cancel{R_A\sin\varphi\, b}+\underline{P_1\sin\beta\, a}=$$

$$-P_1\cos\beta\, b+2P_1\sin\beta\, a+3P_2\, a+P_3\, a-4R_A\, a\cos\varphi=$$

$$-P_1\cos\beta\, b+2P_1\sin\beta\, a+3P_2\, a+P_3\, a-a\left(P_3+3P_2+2P_1\sin\beta-P_1\cos\beta\frac{b}{a}\right)=$$

$$-P_1\cos\beta\, b+\cancel{2P_1\sin\beta a}+\cancel{3P_2 a}+\cancel{P_3 a}-\cancel{P_3 a}-\cancel{3P_2 a}-\cancel{2P_1 a\sin\beta}+P_1\, b\cos\beta\equiv 0.$$

Полученное тождество показывает, что система уравнений (1) составлена корректно.

Проведя анализ значений найденных реакций, укажем, что угол наклона опорной плоскости катковой опоры не может быть равен $\pi/2$, так как в данном случае реакции $\overline{R}_A, \overline{X}_B$ стремятся к бесконечности.

С физической точки зрения это означает, что у фермы появляется дополнительная степень свободы (возможность вращения вокруг шарнира B) и обеспечить ее равновесие, в этом случае, можно, добавив дополнительную связь.

2. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов

Метод вырезания узлов сводится к последовательному рассмотрению равновесия каждого узлового соединения фермы.

Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами, а стержни – арабскими (рис. 3). Стержни, сходящиеся в узлах, являются для каждого узлового соединения связями. Отбросим связи и заменим их действия реакциями – усилиями в стержнях, которые будем обозначать символом $\overline{S}_k$, $k=\overline{1,13}$. На рис. 3 показаны пронумерованные узлы фермы с приложенными к ним активными и реак-

тивными силами. Здесь учтена аксиома о равенстве сил действия и противодействия, т. е. $\overline{S}_k = -\overline{S}_k'$. Реактивные силы изображены на рис. 3 в предположении, что стержни растянуты, т. е. направлены от узлов. Тогда реакция будет положительной, если стержень растянут, и отрицательной, если он сжат.

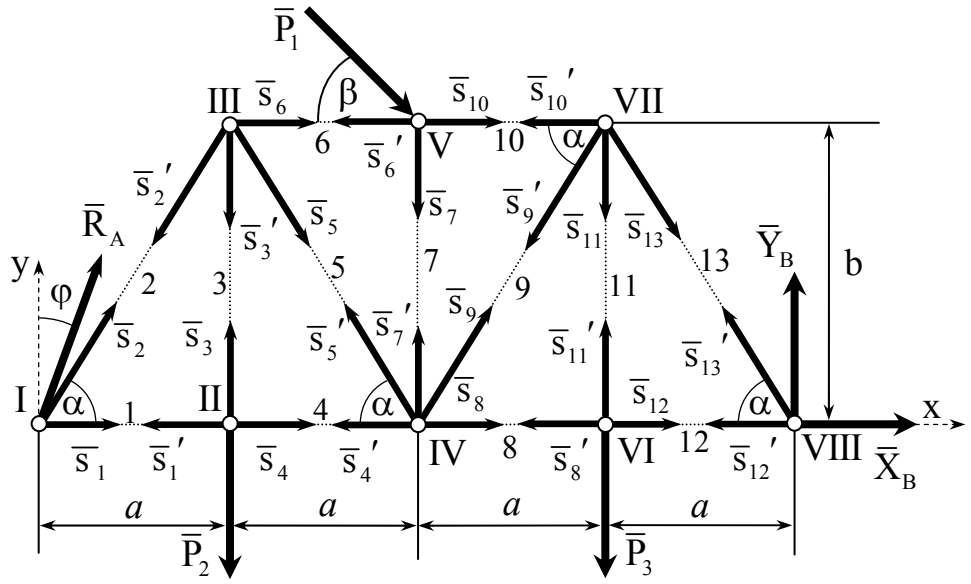


Рис. 3 Расчетная схема для нахождения усилий в стержнях фермы.

Рассмотрим теперь равновесие узлов фермы. Системы сил, действующие на каждый узел, являются сходящимися плоскими системами сил. Равновесие таких систем сил возможно, если их равнодействующая равна нулю. Это условие можно записать в виде

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0.$$

Так как в каждом рассматриваемом узле должно быть не более двух неизвестных реакций, выберем следующую последовательность решения

$$(I) \to (II) \to (III) \to (V) \to (IV) \to (VI) \to (VII) \to (VIII).$$

Составим уравнения равновесия для каждого из узлов и последовательно найдем реакции стержней фермы.

Узел I

$$\begin{aligned} &\sum_k F_{kx} = 0 \quad R_A \sin\varphi + S_1 + S_2 \cos\alpha = 0, \\ &\sum_k F_{ky} = 0 \qquad\quad R_A \cos\varphi + S_2 \sin\alpha = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Из уравнений (2) с учетом найденных ранее реакций внешних связей

найдем реакции S_1 и S_2:

$$S_1 = R_A \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha} = -10\left(3-\sqrt{3}\right) kH = -12.68\ kH,$$

$$S_2 = -R_A \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} = -20\sqrt{3}\ kH = -34.64\ kH.$$

Узел II

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = 0 \quad & -S_1 + S_4 = 0, \\ \sum_k F_{ky} = 0 \quad & S_3 - P_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Из уравнений (3), с учетом (2)

$$S_3 = P_2 = 30\ kH, \quad S_4 = S_1 = -10\left(3-\sqrt{3}\right) kH = -12.68\ kH.$$

Узел III

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = 0 \quad & -S_2\cos\alpha + S_5\cos\alpha + S_6 = 0, \\ \sum_k F_{ky} = 0 \quad & -S_2\sin\alpha - S_5\sin\alpha - S_3 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из уравнений (4), с учетом (2) и (3)

$$S_5 = -S_2 - S_3\frac{1}{\sin\alpha} = 0\ kH, \quad S_6 = \left(S_2 - S_5\right)\cos\alpha = -10\sqrt{3}\ kH = -17.32\ kH.$$

Узел V

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = 0 \quad & S_{10} - S_6 + P_1\cos\beta = 0, \\ \sum_k F_{ky} = 0 \quad & -S_7 - P_1\sin\beta = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

Из уравнений (5), с учетом (4)

$$S_7 = -P_1\sin\beta = -10\ kH,$$

$$S_{10} = S_6 - P_1\cos\beta = -20\sqrt{3}\ kH = -34.64\ kH.$$

Узел IV

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = 0 \quad & S_8 - S_4 - S_5\cos\alpha + S_9\cos\alpha = 0, \\ \sum_k F_{ky} = 0 \quad & S_7 + S_5\sin\alpha + S_9\sin\alpha = 0; \end{aligned} \tag{6}$$

Из уравнений (6), с учетом (5)

$$S_9 = -S_5 - S_7\frac{1}{\sin\alpha} = 20\frac{\sqrt{3}}{3}\ kH = 11.55\ kH,$$

$$S_8 = S_4 + \left(S_5 - S_9\right)\cos\alpha = 10\left(2\frac{\sqrt{3}}{3} - 3\right) kH = -18.45\ kH.$$

Узел VI
$$\sum_k F_{kx} = 0 \quad -S_8 + S_{12} = 0, \qquad (7)$$
$$\sum_k F_{ky} = 0 \qquad S_{11} - P_3 = 0;$$

Из уравнений (7), с учетом (6)

$$S_{11} = P_3 = 40\ kH,$$
$$S_{12} = S_8 = 10\left(2\frac{\sqrt{3}}{3} - 3\right) kH = -18.45\ kH.$$

Узел VII
$$\sum_k F_{kx} = 0 \quad -S_{10} + S_{13}\cos\alpha - S_9\cos\alpha = 0, \qquad (8)$$
$$\sum_k F_{ky} = 0 \quad -S_{11} - S_{13}\sin\alpha - S_9\sin\alpha = 0;$$

Из первого уравнения системы (8), с учетом (5) и (6)

$$S_{13} = S_9 + S_{10}\frac{1}{\cos\alpha} = -100\frac{\sqrt{3}}{3}\ kH = -57.74\ kH.$$

Узел VIII
$$\sum_k F_{kx} = 0 \quad -S_{12} - S_{13}\cos\alpha + X_B = 0, \qquad (9)$$
$$\sum_k F_{ky} = 0 \qquad S_{13}\sin\alpha + Y_B = 0;$$

Последнее уравнение системы (8) и уравнения (9) могут служить, при найденных ранее реакциях внешних связей, проверочными. Действительно

$$-S_{11} - S_{13}\sin\alpha - S_9\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad -40 + 100\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - 20\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv 0,$$
$$-S_{12} - S_{13}\cos\alpha + X_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -20\frac{\sqrt{3}}{3} + 30 + 100\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2} - 30 - 10\sqrt{3} \equiv 0,$$
$$S_{13}\sin\alpha + Y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -100\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + 50 \equiv 0.$$

Результаты расчета сведем в таблицу.

Реакция стержня	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
Значение реакции, *kH*	-12,68	-34,64	30,00	-12,68	0	-17,32	-10,00	-18,45	11,55	-34,64	40,00	-18,45	-57,74

Отрицательные значения реакций стержней $1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12$ и 13 показывают, что направления этих реакций противоположны принятым на расчетной схеме и, следовательно, они сжаты. Стержни при некоторых значениях сжимающих усилий могут потерять прямолинейную форму (изогнуться) и при дальнейших расчетах их необходимо проверять помимо прочности еще и на устойчивость. Значения реакций стержней 3, 9 и 11 положительны. Следовательно, эти стержни растянуты. Реакция стержня 5 равна нулю. Этот стержень ненагружен: он требуется для придания ферме необходимой жесткости – геометрической неизменяемости системы.

Выбор последовательности расчета, предложенной для нахождения искомых реакций, обусловлен тем, что решение уравнений равновесия (2) – (9) осуществлялось в зависимости от найденных на предыдущем этапе решений, т. е. «вручную». Такая последовательность неединственная. Можно указать и другие последовательности решения, например

$$(I) \to (II) \to (III) \to (V) \to (IV) \to (VII) \to (VI) \to (VIII)$$ и т. д.

При использовании метода вырезания узлов можно обойтись без предварительного нахождения реакций внешних связей (реакций опор фермы). Действительно, статически определенная и геометрически неизменяемая ферма содержит $2n-3$ стержня, где n – число узлов; так как три уравнения необходимы для нахождения реакций опор, то для вычисления всех неизвестных сил (реакций опор и реакций стержней) нужно $2n$ уравнений.

Применительно к рассматриваемой ферме имеем 8 узлов и 16 неизвестных величин $\left(S_k, k=\overline{1,13}; R_A, X_B, Y_B\right)$. Рассмотрев равновесие всех узлов фермы, получим замкнутую систему 16 линейных алгебраических уравнений (2) – (9), относительно 16 неизвестных величин (реакций внешних и внутренних связей).

Уравнения (1), в этом случае, могут служить для проверки расчета: при подстановке в них найденных значений реакций опор они должны обратиться в тождества.

Такой подход эффективен при использовании вычислительной техники, которая позволяет легко решать большие системы линейных алгебраических уравнений.

Поэтому в задачах нахождения реакций внешних и внутренних связей для ферм, выполненных по схемам 2 и 3, ограничимся составлением только уравнений равновесия, а их решение выполним с помощью пакета Mathcad (п. 4).

Схема №2

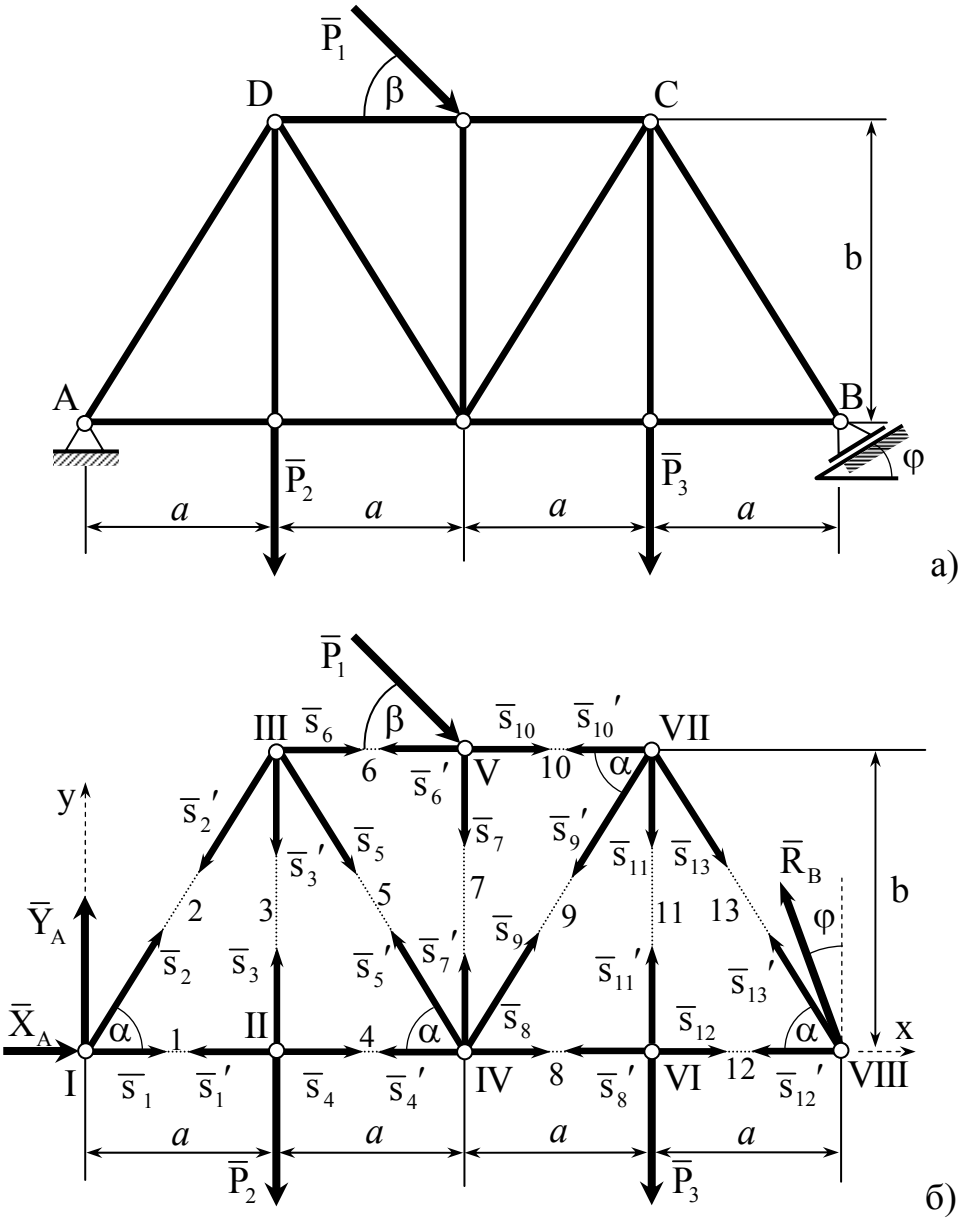


Рис. 4 Расчетная схема для фермы, выполненной по схеме № 2.

Рассмотрим мостовую ферму *ABCD* (рис. 4 а), которая находится в рав-

новесии под действием активных сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и связей приложенных в точках A и B. В точке A расположена неподвижная шарнирная опора, в точке B – катковая опора, угол наклона опорной плоскости которой равен φ.

Как и ранее, воспользуемся для нахождения реакций внешних и внутренних связей методом вырезания узлов. Рассмотрим равновесие каждого узла фермы. Отбросим связи и заменим их действия реакциями: внутренними – $\overline{S}_k$, $k=\overline{1,13}$ и внешними – $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ и $\overline{R}_B$ (рис. 4 б). Записывая уравнения равновесия для каждого узла, получим

Узел I
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & X_A+S_1+S_2\cos\alpha=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & Y_A+S_2\sin\alpha=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Узел II
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_1+S_4=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_3-P_2=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Узел III
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_2\cos\alpha+S_5\cos\alpha+S_6=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & -S_2\sin\alpha-S_5\sin\alpha-S_3=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Узел IV
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & S_8-S_4-S_5\cos\alpha+S_9\cos\alpha=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_7+S_5\sin\alpha+S_9\sin\alpha=0; \end{aligned} \tag{13}$$

Узел V
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & S_{10}-S_6+P_1\cos\beta=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & -S_7-P_1\sin\beta=0; \end{aligned} \tag{14}$$

Узел VI
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_8+S_{12}=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_{11}-P_3=0; \end{aligned} \tag{15}$$

Узел VII
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_{10}+S_{13}\cos\alpha-S_9\cos\alpha=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & -S_{11}-S_{13}\sin\alpha-S_9\sin\alpha=0; \end{aligned} \tag{16}$$

Узел VIII
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_{12}-S_{13}\cos\alpha-R_B\sin\varphi=0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_{13}\sin\alpha+R_B\cos\varphi=0; \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (10) – (17) является замкнутой системой 16 линейных алгебраических уравнений относительно 16 неизвестных реакций $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{R}_B$ и $\overline{S}_k$, $k = \overline{1,13}$.

Схема №3

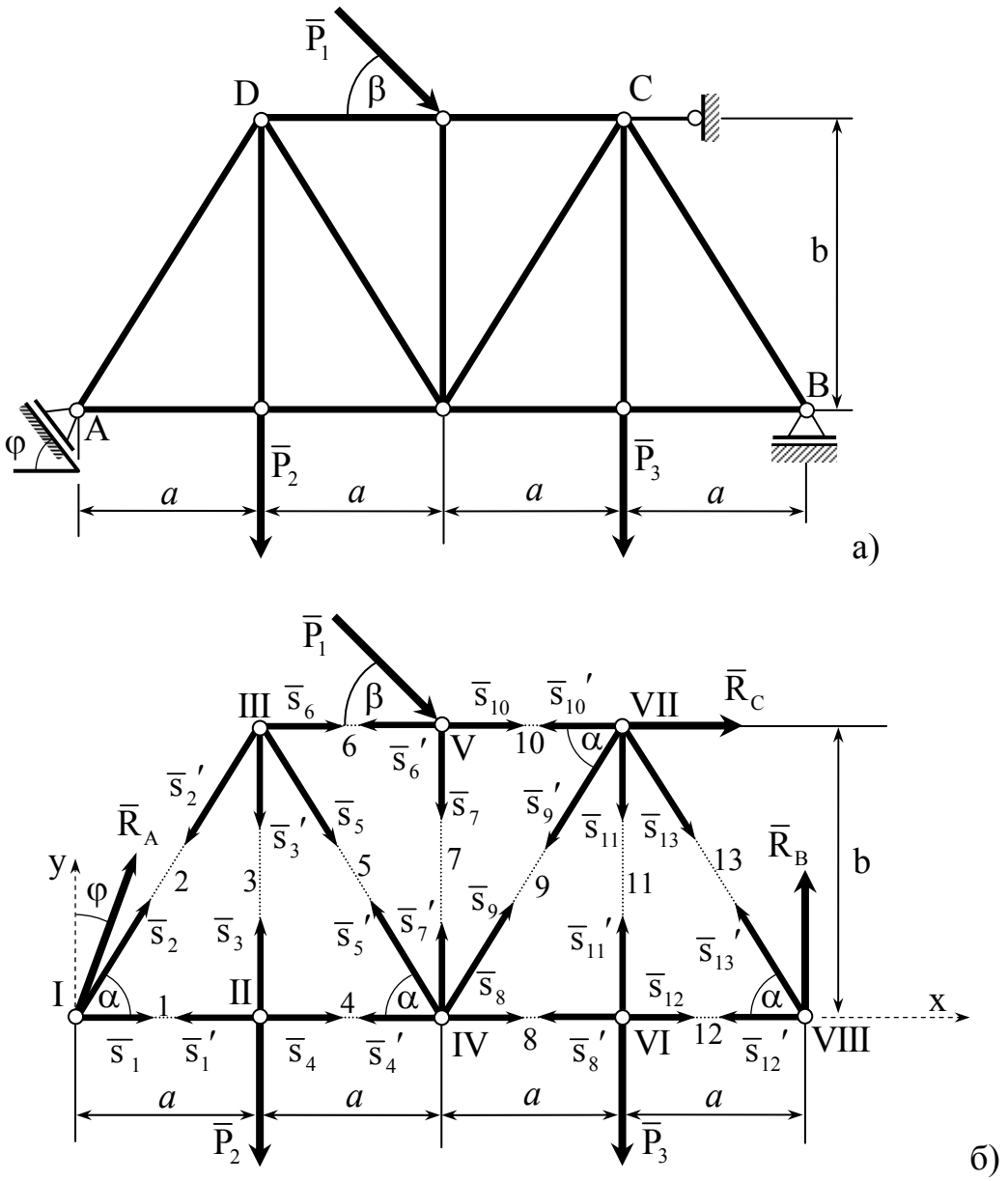


Рис. 5 Расчетная схема для фермы, выполненной по схеме № 3.

Рассмотрим мостовую ферму $ABCD$ (рис. 5 а), которая находится в равновесии под действием активных сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и связей приложенных в точках A, B и C. В точке A расположена катковая опора, угол наклона опорной плоскости которой равен φ, в точке B – горизонтальная катковая опора, а в точке C – невесомый стержень.

Воспользуемся для нахождения реакций внешних и внутренних связей методом вырезания узлов. Рассмотрим равновесие каждого узла фермы. Отбросим связи и заменим их действия реакциями: внутренними $-\overline{S}_k$, $k=\overline{1,13}$ и внешними – $\overline{R}_A, \overline{R}_B$ и $\overline{R}_C$ (рис. 5 б). Записывая уравнения равновесия для каждого узла, получим

Узел I
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & R_A\sin\varphi + S_1 + S_2\cos\alpha = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & R_A\cos\varphi + S_2\sin\alpha = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Узел II
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_1 + S_4 = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_3 - P_2 = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Узел III
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_2\cos\alpha + S_5\cos\alpha + S_6 = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & -S_2\sin\alpha - S_5\sin\alpha - S_3 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Узел IV
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & S_8 - S_4 - S_5\cos\alpha + S_9\cos\alpha = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_7 + S_5\sin\alpha + S_9\sin\alpha = 0; \end{aligned} \tag{21}$$

Узел V
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & S_{10} - S_6 + P_1\cos\beta = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & -S_7 - P_1\sin\beta = 0; \end{aligned} \tag{22}$$

Узел VI
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_8 + S_{12} = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_{11} - P_3 = 0; \end{aligned} \tag{23}$$

Узел VII
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_{10} + S_{13}\cos\alpha - S_9\cos\alpha + R_C = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & -S_{11} - S_{13}\sin\alpha - S_9\sin\alpha = 0; \end{aligned} \tag{24}$$

Узел VIII
$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx}=0 \quad & -S_{12} - S_{13}\cos\alpha = 0, \\ \sum_k F_{ky}=0 \quad & S_{13}\sin\alpha + R_B = 0; \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнения (18) –(25) является замкнутой системой 16 линейных алгебраических уравнений относительно 16 неизвестных реакций $\overline{R}_A, \overline{R}_B, \overline{R}_C$ и $\overline{S}_k$, $k=\overline{1,13}$.

3. Определение усилий методом Риттера

Метод Риттера (метод сечений) в общем случае предполагает предварительное определение реакций опор фермы. Этот метод позволяет оперативно найти реакцию конкретного стержня, не вычисляя реакции других стержней. При этом должна существовать возможность рассечения фермы на две части по трем стержням, среди которых находится искомый стержень. Отбросив ту часть фермы, на которую действует больше сил, рассматривают равновесие оставшейся части. Для произвольной плоской системы сил составляют такие уравнения равновесия, в которые входит только одна неизвестная реакция. Обычно, для этого используют третью основную форму условий равновесия: уравнения моментов сил относительно точек пересечения линий действия двух неизвестных сил (точки Риттера). В тех случаях, когда реакции двух стержней параллельны (точка Риттера находится в бесконечности) составляют уравнение равновесия в виде проекций сил на ось перпендикулярную этим стержням.

В качестве проверки найденного ранее решения, вычислим реакции в стержнях 4, 5, 6 (рис. 6), а также в стержнях 8, 11 и 13 (рис. 7).

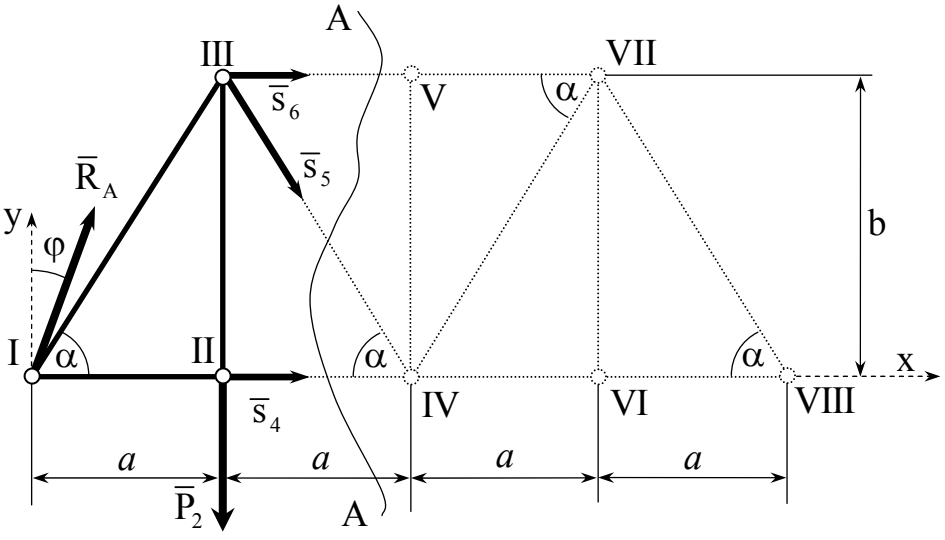


Рис. 6 Расчетная схема для определения реакций $\overline{S}_4, \overline{S}_5, \overline{S}_6$.

Для определения реакций стержней 4, 5 и 6 проведем сечение $A-A$ по этим стержням, и рассмотрим равновесие левой части фермы. Расчетная схема изображена на рис. 6. На левую часть фермы действуют известные силы $\overline{P}_2, \overline{R}_A$,

а также реакции отброшенной части $\overline{S}_4, \overline{S}_5, \overline{S}_6$.

Для нахождения реакции $\overline{S}_4$ составим уравнение моментов относительно узла III, в котором пересекаются линии действия сил $\overline{S}_5$ и $\overline{S}_6$ (точка Риттера):

$$\sum_k M_{III}\left(\overline{F}_k\right) = 0 \quad S_4 b - R_A \cos\varphi\, a + R_A \sin\varphi\, b = 0. \tag{26}$$

Стержни 4 и 6 параллельны. Поэтому для нахождения реакции $\overline{S}_5$ независимо от реакций $\overline{S}_4$ и $\overline{S}_6$ составим уравнение проекций сил на ось перпендикулярную параллельным стержням

$$\sum_k F_{ky} = 0 \quad R_A \cos\varphi - S_5 \sin\alpha - P_2 = 0. \tag{27}$$

Чтобы найти реакцию $\overline{S}_6$ независимо от реакций $\overline{S}_4$ и $\overline{S}_5$, составим уравнение моментов относительно узла IV, в котором пересекаются линии действия сил $\overline{S}_4$ и $\overline{S}_5$:

$$\sum_k M_{IV}\left(\overline{F}_k\right) = 0 \quad P_2 a - R_A \cos\varphi\, 2a - S_6 b = 0. \tag{28}$$

Из уравнения (26)

$$S_4 = R_A\left(\frac{a}{b}\cos\varphi - \sin\varphi\right) = 30\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = 10\left(\sqrt{3} - 3\right) kH = -12.68\ kH\,.$$

Из уравнения (27)

$$S_5 = \left(R_A \cos\varphi - P_2\right)\frac{1}{\sin\alpha} = \left(30\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 30\right)\frac{2}{\sqrt{3}} = 0\ kH$$

Из уравнения (28)

$$S_6 = \frac{a}{b}\left(P_2 - 2R_A \cos\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(30 - 2\cdot 30\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10\sqrt{3}\ kH = -17.32\ kH\,.$$

Для определения реакций стержней 8, 11 и 13 проведем сечение $Б - Б$, и рассмотрим равновесие правой части фермы. Расчетная схема изображена на рис. 7, левая часть отброшена. На правую часть фермы действуют известные силы $\overline{P}_3, \overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$, а также реакции отброшенной части $\overline{S}_8', \overline{S}_{11}', \overline{S}_{13}'$.

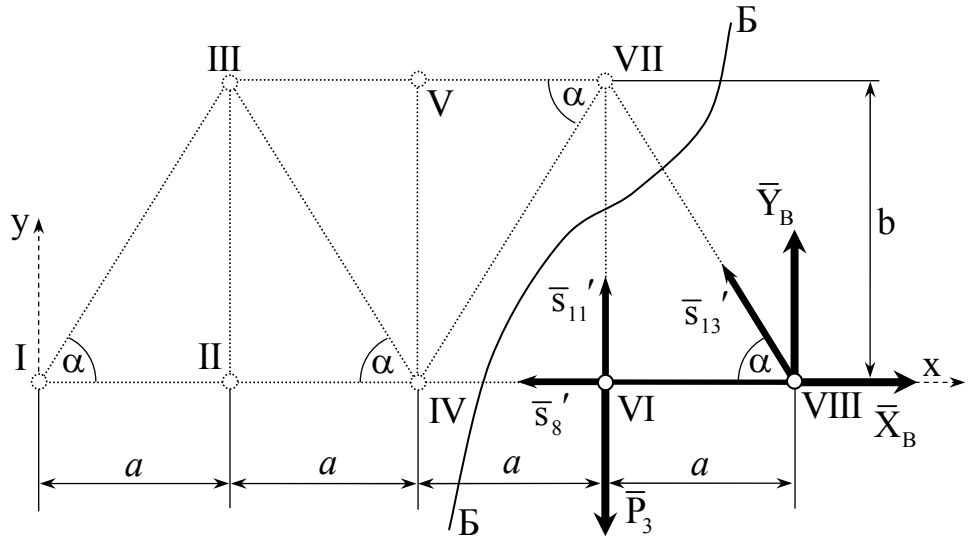


Рис. 7 Расчетная схема для определения реакций $\overline{S}_8, \overline{S}_{11}, \overline{S}_{13}$.

Для нахождения реакций $\overline{S}_8', \overline{S}_{11}', \overline{S}_{13}'$ составим уравнения моментов относительно точек Риттера VI, VII и $VIII$ соответственно:

$$\sum_k M_{VI}\left(\overline{F}_k\right) = 0 \quad S_{13}\, a \sin\alpha + Y_B\, a = 0\,, \tag{29}$$

$$\sum_k M_{VII}\left(\overline{F}_k\right) = 0 \quad X_B b + Y_B a - S_8 b = 0 \tag{30}$$

$$\sum_k M_{VIII}\left(\overline{F}_k\right) = 0 \quad P_3 a - S_{11} a = 0 \tag{31}$$

Из уравнения (29)

$$S_{13} = -\frac{Y_B}{\sin\alpha} = -50\frac{2}{\sqrt{3}}\, kH = -57.74\, kH\,.$$

Из уравнения (30)

$$S_8 = X_B + Y_B \frac{a}{b} = \frac{20 - 30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, kH = -18.45\, kH\,.$$

Из уравнения (31)

$$S_{11} = P_3 = 40\, kH\,.$$

Значения реакций стержней 4, 5, 6, 8, 11 и 13, полученные методом Риттера, полностью совпадают со значениями этих реакций полученных методом вырезания узлов.

4. Результаты расчетов

Решения систем линейных алгебраических уравнений (2) – (9), (10) – (17) или (18) – (25) можно легко реализовать в пакете Mathcad или других математически ориентированных пакетах. Для этого система уравнений приводится к матричной форме

$$A \cdot S = B,$$

где B – вектор правых частей, полностью определенный действующими на ферму активными силами;

S – вектор неизвестных реакций внешних и внутренних связей *S,* задающийся в соответствии с обозначениями, принятыми на рис. 3, рис. 4 или рис. 5;

A – матрица коэффициентов, которая формируется на основе двух матриц: постоянной AS – независящей от расположения опор фермы и переменной $AR(\varphi)$ – зависящей от их расположения.

Решение сформированной системы уравнений ищется в виде

$$S = A^{-1} \cdot B$$

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором реализована процедура вычисления реакций внешних и внутренних связей фермы с опорами расположенными по схемам 1, 2 и 3.

Расчет фермы выполненной по схеме №1 (рис. 3)

1. Ввод исходных данных

ORIGIN := 1

$P := (20 \quad 30 \quad 40)^T$ $a := 1$ $b := \sqrt{3}$ $\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$ * $\beta := \frac{\pi}{6}$*

2. Формирование вектора правых частей B и матрицы коэффициентов A

$B := \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad P_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -P_1 \cdot \cos(\beta) \quad P_1 \cdot \sin(\beta) \quad 0 \quad P_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)^T$

Формирование переменной части матрицы A - $AR(\varphi)$

$$AR1(\varphi) := \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T}$$

Формирование постоянной части матрицы A - AS

$$AS := \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & -1 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & -1 & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Формирование матрицы A, вычисление определителя матрицы, нахождение критических значений ориентации опорной плоскости из уравнения $\left|A\left(\varphi_{кр}\right)\right| = 0$

$$A1(\varphi) := \text{augment}(AS, AR1(\varphi))$$

$$\left|A1(\varphi)\right| \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)}{4}$$

$$\left|A1(\varphi)\right| \text{ solve } \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений $A \cdot S = B$

$$S1(\varphi) := A1(\varphi)^{-1}\cdot B \qquad S(\varphi) := S1(\varphi)$$

Формирование реакций внешних связей

$$R_A(\varphi) := S(\varphi)_{14} \qquad X_B(\varphi) := S(\varphi)_{15} \qquad Y_B(\varphi) := S(\varphi)_{16} \qquad R_B(\varphi) := \sqrt{X_B(\varphi)^2 + Y_B(\varphi)^2}$$

Вычисление реакций внутренних и внешних связей

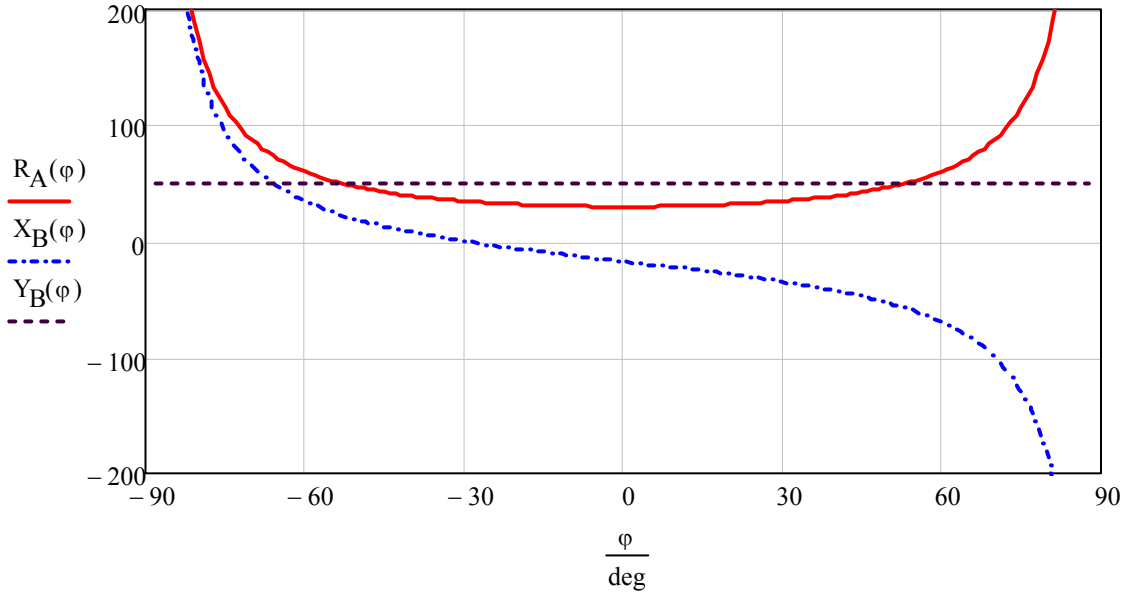
$$S(\varphi)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 10\cdot\sqrt{3} - 30\cdot\tan(\varphi) \\ -20\cdot\sqrt{3} \\ 30 \\ 10\cdot\sqrt{3} - 30\cdot\tan(\varphi) \\ 0 \\ -10\cdot\sqrt{3} \\ -10 \\ \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3} - 30\cdot\tan(\varphi) \\ \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3} \\ -20\cdot\sqrt{3} \\ 40 \\ \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3} - 30\cdot\tan(\varphi) \\ -\frac{100\cdot\sqrt{3}}{3} \\ \frac{30}{\cos(\varphi)} \\ -30\cdot\tan(\varphi) - 10\cdot\sqrt{3} \\ 50 \end{pmatrix}$$

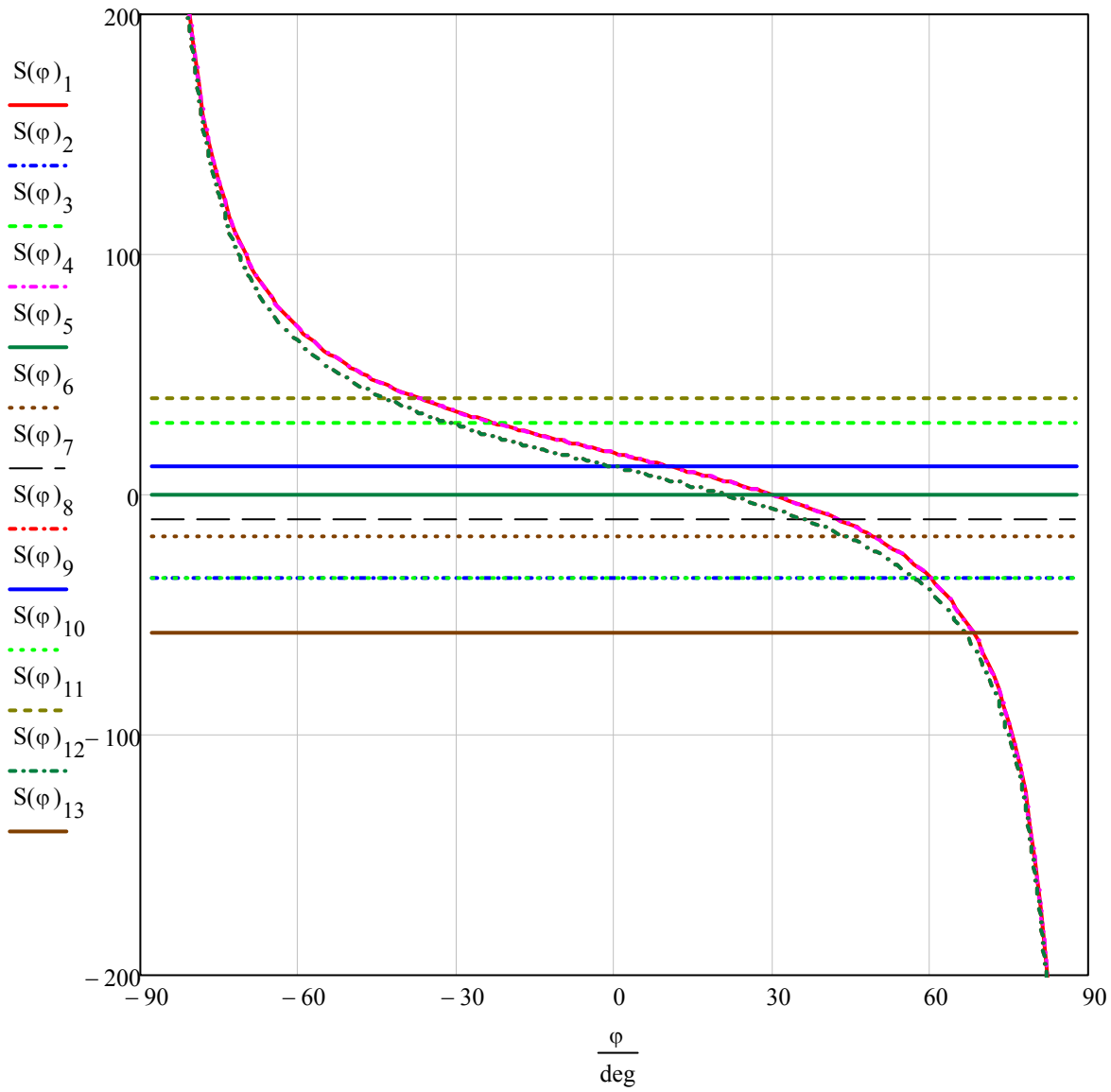
$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

	1
1	-12.679
2	-34.641
3	30
4	-12.679
5	$-5.329\cdot10^{-15}$
6	-17.321
7	-10
8	-18.453
9	11.547
10	-34.641
11	40
12	-18.453
13	-57.735
14	42.426
15	-47.321
16	50

4. Построение графиков функций реакций внешних и внутренних связей

$$\varphi := -\frac{88\pi}{180}, -\frac{87\cdot\pi}{180} .. \frac{88\pi}{180}$$





Расчет фермы выполненной по схеме № 2 (рис. 4)

1. Ввод исходных данных

.....

2. Формирование вектора правых частей B и матрицы коэффициентов A

.....

Формирование переменной части матрицы A - $AR(\varphi)$

$$AR2(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{T}$$ .....

Формирование матрицы A, вычисление определителя матрицы, нахождение критических значений ориентации опорной плоскости из уравнения $\left|A\left(\varphi_{кр}\right)\right| = 0$

$\mathrm{A2}(\varphi) := \mathrm{augment}(\mathrm{AS}, \mathrm{AR2}(\varphi))$ $\qquad$ $\left|\mathrm{A2}(\varphi)\right| \rightarrow -\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)}{4}$

$\left|\mathrm{A2}(\varphi)\right|\ \mathrm{solve} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений $A \cdot S = B$

$\mathrm{S2}(\varphi) := \mathrm{A2}(\varphi)^{-1} \cdot \mathrm{B}$ $\qquad$ $\mathrm{S}(\varphi) := \mathrm{S2}(\varphi)$

Формирование реакций внешних связей

$\mathrm{X_A}(\varphi) := \mathrm{S}(\varphi)_{14}$ $\quad$ $\mathrm{Y_A}(\varphi) := \mathrm{S}(\varphi)_{15}$ $\quad$ $\mathrm{R_A}(\varphi) := \sqrt{\mathrm{X_A}(\varphi)^2 + \mathrm{Y_A}(\varphi)^2}$ $\quad$ $\mathrm{R_B}(\varphi) := \mathrm{S}(\varphi)_{16}$

Вычисление реакций внутренних и внешних связей

$\mathrm{S}(\varphi)\ \mathrm{simplify} \rightarrow$

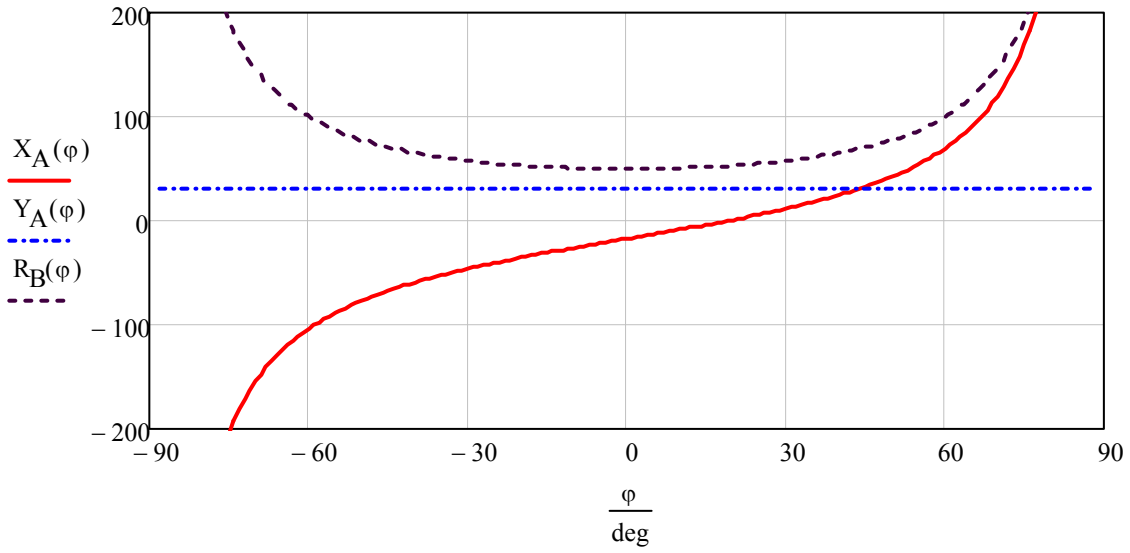
$$\begin{pmatrix} 20\cdot\sqrt{3} - 50\cdot\tan(\varphi) \\ -20\cdot\sqrt{3} \\ 30 \\ 20\cdot\sqrt{3} - 50\cdot\tan(\varphi) \\ 0 \\ -10\cdot\sqrt{3} \\ -10 \\ \frac{50\cdot\sqrt{3}}{3} - 50\cdot\tan(\varphi) \\ \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3} \\ -20\cdot\sqrt{3} \\ 40 \\ \frac{50\cdot\sqrt{3}}{3} - 50\cdot\tan(\varphi) \\ -\frac{100\cdot\sqrt{3}}{3} \\ 50\cdot\tan(\varphi) - 10\cdot\sqrt{3} \\ 30 \\ \frac{50}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix}$$

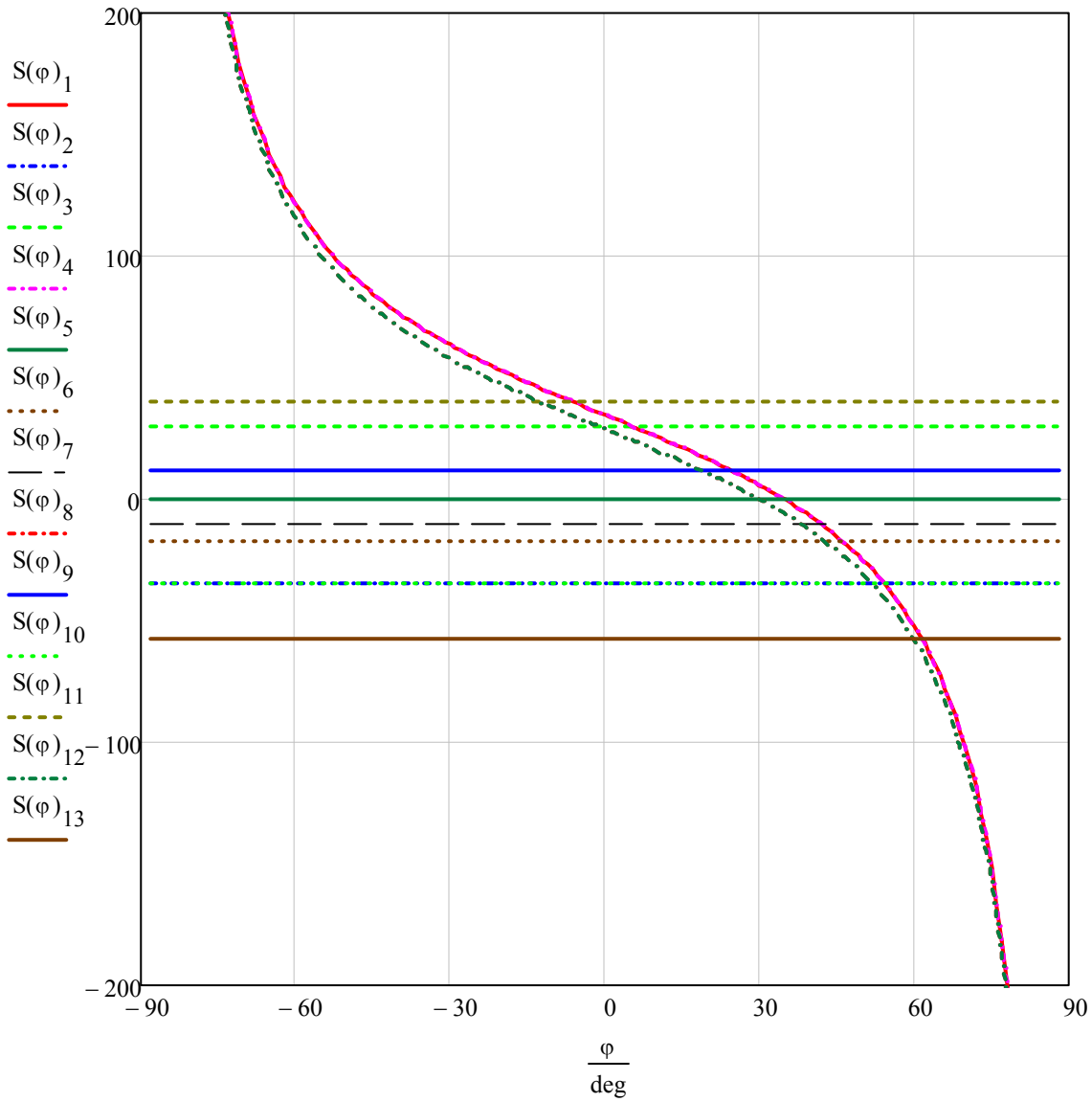
$\mathrm{S}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

	1
1	-15.359
2	-34.641
3	30
4	-15.359
5	$1.776\cdot10^{-15}$
6	-17.321
7	-10
8	-21.132
9	11.547
10	-34.641
11	40
12	-21.132
13	-57.735
14	32.679
15	30
16	70.711

4. Построение графиков функций реакций внешних и внутренних связей

$$\varphi := -\frac{88\pi}{180}, -\frac{87\cdot\pi}{180} .. \frac{88\pi}{180}$$





Расчет фермы выполненной по схеме № 3 (рис. 5)

1. Ввод исходных данных

.....

2. Формирование вектора правых частей B и матрицы коэффициентов A

.....

Формирование переменной части матрицы A - $AR(\varphi)$

$$AR3(\varphi) := \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T}$$

.....

Формирование матрицы A, вычисление определителя матрицы, нахождение критических значений ориентации опорной плоскости из уравнения $\left|A\left(\varphi_{кр}\right)\right| = 0$

$$A3(\varphi) := \text{augment}(AS, AR3(\varphi))$$

$$|A3(\varphi)| \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)}{4} - \frac{9\cdot\sin(\varphi)}{16}$$

$$\frac{\text{atan}\left(4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\text{deg}} = 66.587$$

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений $A\cdot S = B$

$$S3(\varphi) := A3(\varphi)^{-1}\cdot B \qquad S(\varphi) := S3(\varphi)$$

Формирование реакций внешних связей

$$R_A(\varphi) := S(\varphi)_{14} \quad R_B(\varphi) := S(\varphi)_{15} \qquad R_C(\varphi) := S(\varphi)_{16}$$

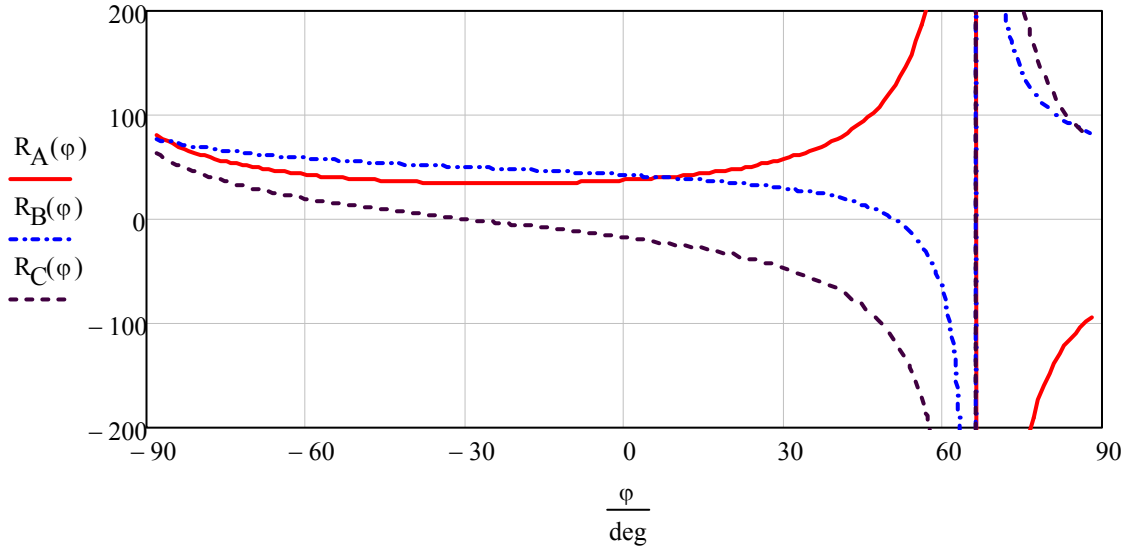
Вычисление реакций внутренних и внешних связей

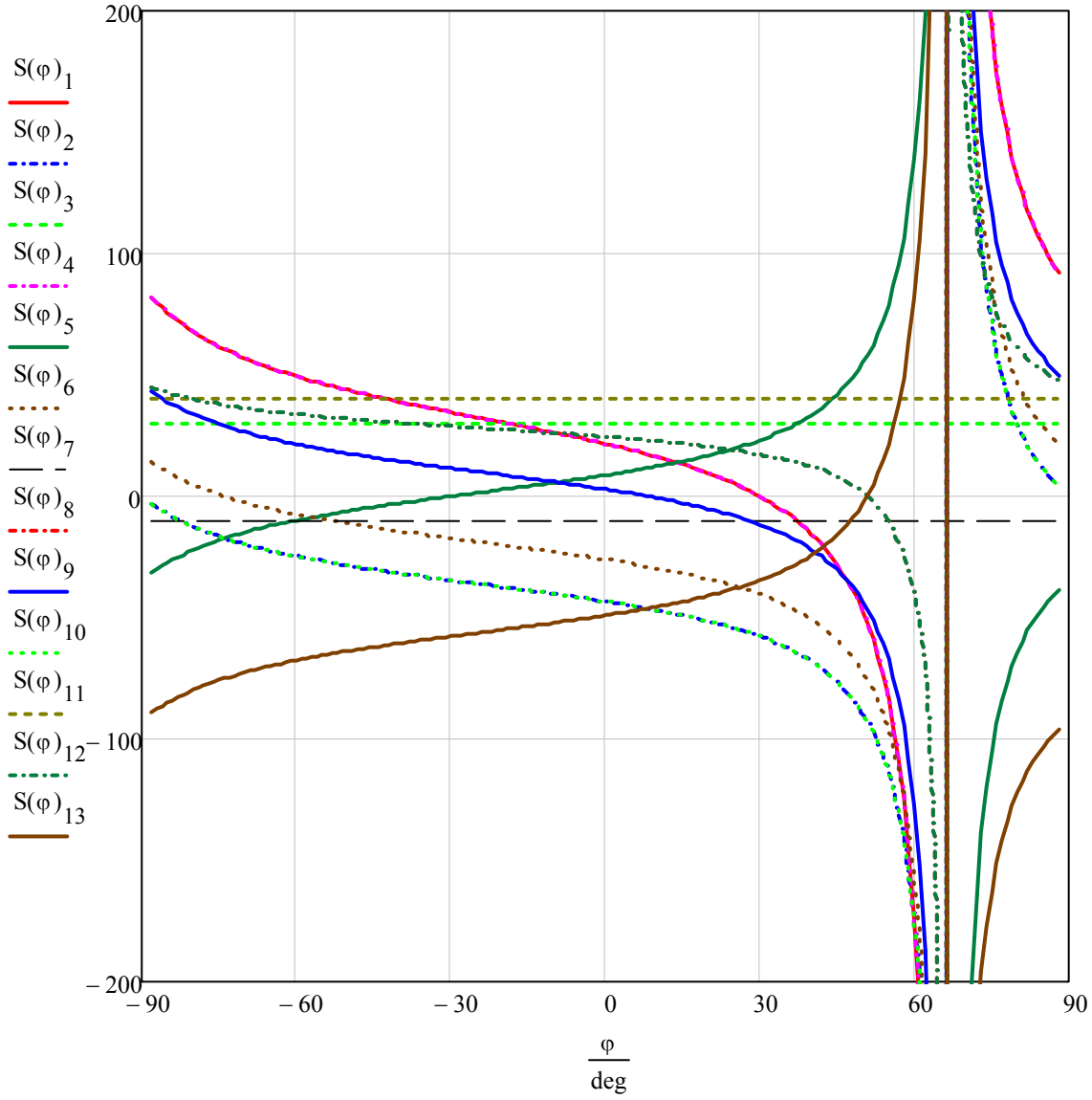
$$S(\varphi)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{150\cdot\cos(\varphi) - 150\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ \dfrac{300\cdot\cos(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ 30 \\ -\dfrac{150\cdot\cos(\varphi) - 150\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ -\dfrac{60\cdot\cos(\varphi) + 60\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ \dfrac{180\cdot\cos(\varphi) + 30\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ -10 \\ -\dfrac{170\cdot\cos(\varphi) - 80\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ -\dfrac{20\cdot\cos(\varphi) - 80\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ \dfrac{300\cdot\cos(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ 40 \\ -\dfrac{170\cdot\cos(\varphi) - 80\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ \dfrac{340\cdot\cos(\varphi) - 160\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ -\dfrac{150\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ \dfrac{120\cdot\cos(\varphi) + 120\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \\ \dfrac{240\cdot\sin(\varphi) - 170\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)}{3\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)} \end{pmatrix}$$

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

	1
1	-27.954
2	-76.371
3	30
4	-27.954
5	41.73
6	-59.05
7	-10
8	8.003
9	-30.183
10	-76.371
11	40
12	8.003
13	-16.005
14	93.535
15	-83.46
16	13.861

4. Построение графиков функций реакций внешних и внутренних связей





5. Анализ результатов вычислений

Методы теоретической механики при расчете ферм обычно применяются на этапе предварительного проектирования. Именно на этом этапе может быть поставлена задача выбора оптимального решения согласно одному или нескольким критериям.

Например, требуется обеспечить:

- минимальную силу давления на одну или все опоры;
- минимальное количество стержней, испытывающих сжимающие усилия;
- минимальное количество стержней, в которых сжимающие усилия не превышают некоторого предельного значения $S_{пр}$.

Также возможна комбинация этих критериев.

При такой постановке задачи расчет следует производить при экстремальных значениях действующих на ферму активных сил. В качестве влияющих параметров можно выбрать ориентацию опорной плоскости, характеризуемую углом φ, и (или) характерный размер фермы $(a \text{ или } b)$ (определяется преподавателем).

Рассмотрим задачу выбора схемы расположения внешних связей, действующих на ферму, при которых сжимающие усилия не превышают некоторого предельного значения $S_{пр}$, а количество сжатых стержней минимально. В качестве такого критерия примем максимальное значение, не зависящее от угла φ, сжимающего усилия в стержнях фермы.

При анализе следует учесть:

- свойства катковых опор. Катковая опора является неудерживающей связью и, следовательно, ее реакция может быть только положительной (если она направлена перпендикулярно опорной плоскости вверх).
- особенности мостовых ферм. Для них ориентация опорной плоскости катковой опоры может характеризоваться только положительными значениями углов φ.

Учет вышесказанного требует исключения таких состояний, при которых

- углы φ, характеризующие ориентацию опорных плоскостей, отрицательны;
- реакции катковых опор неположительны.

Иными словами, область допустимых значений указанных величин определяется неравенствами

$$0 \le \varphi < \pi/2, \quad R \ge 0.$$

В некоторых случаях, если это обосновано критериями выбора, катковую опору можно заменить двухсторонней (удерживающей) связью, например стержнем. Угол φ, определяющий его положение, может изменяться в интервале $0 \le \varphi \le \pi$ или $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

Для ускорения процедуры выбора значений углов φ, соответствующих принятым критериям, воспользуемся возможностью трассировки графиков функций (рис. 8), имеющейся в Mathcad.

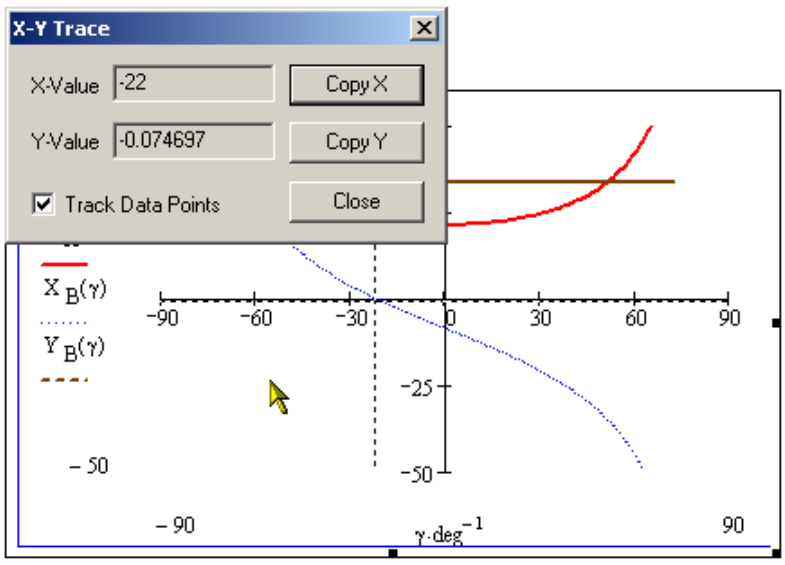


Рис. 8 Использование опции "Trace" для определения координат точек на графиках.

Значения аргумента φ функций $S_k(\varphi)$ в этом случае могут быть найдены с точностью ε, величина которой определяется заданием шага ранжированной переменной φ, при построении графиков функций [1]. В нашем случае $\varepsilon = 1^\circ$.

Для рассматриваемой фермы анализ результатов расчетов, проведенных в п. 4, дает следующее.

Схема 1

1. Реакция опорной плоскости R_A положительна при всех допустимых значениях ориентации опорной плоскости

$$R_A \geq 0 \quad \forall \varphi \in [0, \pi/2[$$

2. Количество стержней, реакция которых не зависит от φ – 9 (2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13), из них сжатых – 5 (2, 6, 7, 10, 13) (рис. 9).

3. Максимальное значение сжимающего усилия, величина которого не зависит от угла φ, равно $S_{пр} = |S_{13}| = 100\frac{\sqrt{3}}{3}\,kH = 57.735\,kH$ (рис. 9).

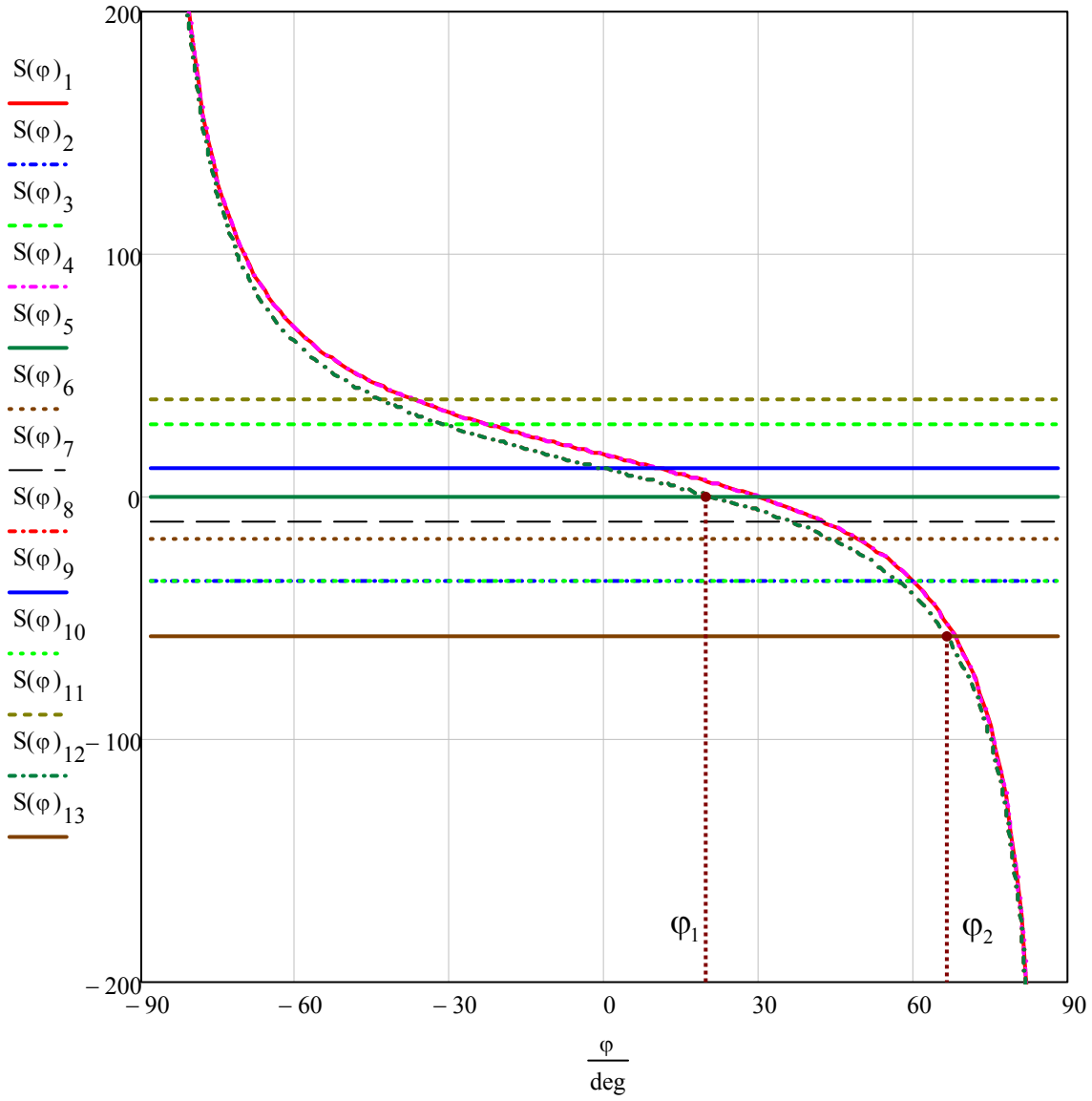


Рис. 9 Предельные значения углов φ.

4. Максимальное значение угла φ, при котором количество сжатых стержней минимально равно $\varphi_1 = 21^\circ$. Количество сжатых стержней в этом случае равно $N_1 = 5$ (2, 6, 7, 10, 13) см. рис. 10.

5. Максимальное значение угла φ, при котором сжимающие усилия не превышают предельного значения $|S_k| \le S_{np}$ равно $\varphi_2 = 66^\circ$. Количество сжатых стержней в этом случае равно $N_2 = 9$ (1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13) см. рис. 10

$S\left(\frac{21\pi}{180}\right) =$

	1
1	5.805
2	-34.641
3	30
4	5.805
5	$-3.553 \cdot 10^{-15}$
6	-17.321
7	-10
8	0.031
9	11.547
10	-34.641
11	40
12	0.031
13	-57.735
14	32.134
15	-28.836
16	50

а) $\varphi = 21^\circ$

$S\left(\frac{66\cdot\pi}{180}\right) =$

	1
1	-50.061
2	-34.641
3	30
4	-50.061
5	0
6	-17.321
7	-10
8	-55.834
9	11.547
10	-34.641
11	40
12	-55.834
13	-57.735
14	73.758
15	-84.702
16	50

б) $\varphi = 66^\circ$

Рис. 10 Реакции фермы при разных значениях φ.

6. Область допустимых значений для угла φ, при которой

- значения сжимающих усилий в стержнях фермы не превышает $S_{np}\left(N_2 = 9\right)$

$$0 \le \varphi \le \varphi_2 = 66^\circ;$$

- количество сжатых стержней минимально, а усилия в них не превышают предельное значение $S_{np}\left(N_1 = 5\right)$

$$0 \le \varphi \le \varphi_1 = 21^\circ.$$

Схема 2

1. Реакция опорной плоскости R_B положительна при всех допустимых значениях ориентации опорной плоскости

$$R_B \geq 0 \quad \forall \varphi \in [0, \pi/2[$$

2. Количество стержней, реакция которых не зависит от φ – 9 (2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13), из них сжатых – 5 (2, 6, 7, 10, 13) (рис. 11).

3. Максимальное значение сжимающего усилия, величина которого не зависит от угла φ, равно $S_{np} = |S_{13}| = 100\frac{\sqrt{3}}{3}\, kH = 57.735\, kH$ (рис. 11).

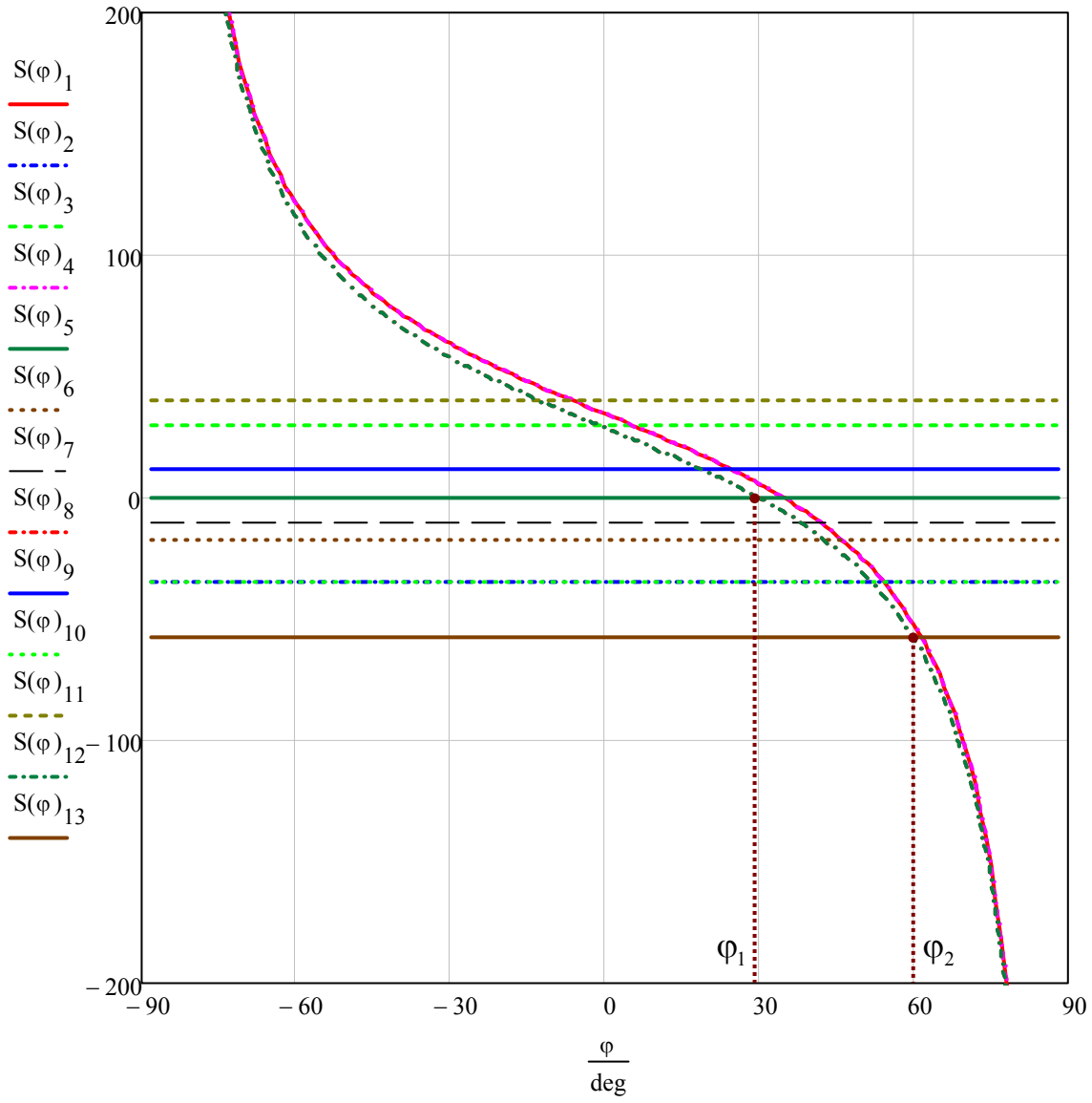


Рис. 11 Предельные значения углов φ.

4. Максимальное значение угла φ, при котором количество сжатых стержней минимально равно $\varphi_1 = 29^\circ$. Количество сжатых стержней в этом случае равно $N_1 = 5$ (2, 6, 7, 10, 13) см. рис. 12.

5. Максимальное значение угла φ, при котором сжимающие усилия не превышают предельного значения $|S_k| \le S_{np}$ равно $\varphi_2 = 60^\circ$. Количество сжатых стержней в этом случае равно $N_2 = 9$ (1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13) см. рис. 12

$S\left(\frac{29\pi}{180}\right) =$

	1
1	6.926
2	-34.641
3	30
4	6.926
5	$1.776 \cdot 10^{-15}$
6	-17.321
7	-10
8	1.152
9	11.547
10	-34.641
11	40
12	1.152
13	-57.735
14	10.395
15	30
16	57.168

а) $\varphi = 29^\circ$

$S\left(\frac{60\pi}{180}\right) =$

	1
1	-51.962
2	-34.641
3	30
4	-51.962
5	$-7.105 \cdot 10^{-15}$
6	-17.321
7	-10
8	-57.735
9	11.547
10	-34.641
11	40
12	-57.735
13	-57.735
14	69.282
15	30
16	100

б) $\varphi = 60^\circ$

Рис. 12 Реакции фермы при разных значениях φ.

6. Область допустимых значений для угла φ, в которой

- значения сжимающих усилий в стержнях фермы не превышает $S_{np}\left(N_2 = 9\right)$

$$0 \le \varphi \le \varphi_2 = 60^\circ;$$

- количество сжатых стержней минимально, а усилия в них не превышают предельное значение $S_{np}\left(N_1 = 5\right)$

$$0 \le \varphi \le \varphi_1 = 29^\circ.$$

Схема 3

1. Реакция опорной плоскости R_A положительна при всех допустимых значениях ориентации опорной плоскости (рис. 13)

$$R_A \geq 0 \quad \forall\, \varphi \in [0, \varphi_{кр}[\text{ и }]\varphi_{кр}, \pi/2[, \quad \varphi_{кр} = 66{,}587^\circ..$$

2. Реакция опорной плоскости R_B положительна при значениях угла φ не превышающих величину $\varphi^2_{пр}$ (рис. 13)

$$R_B \geq 0 \quad \forall\, \varphi \in [0, \varphi^2_{пр}], \quad \varphi^2_{пр} = 50^\circ.$$

При замене опоры B стержнем сжимающее усилие будет меньше $S_{пр}$ при

$$\varphi \leq \varphi^3_{пр} = 59^\circ.$$

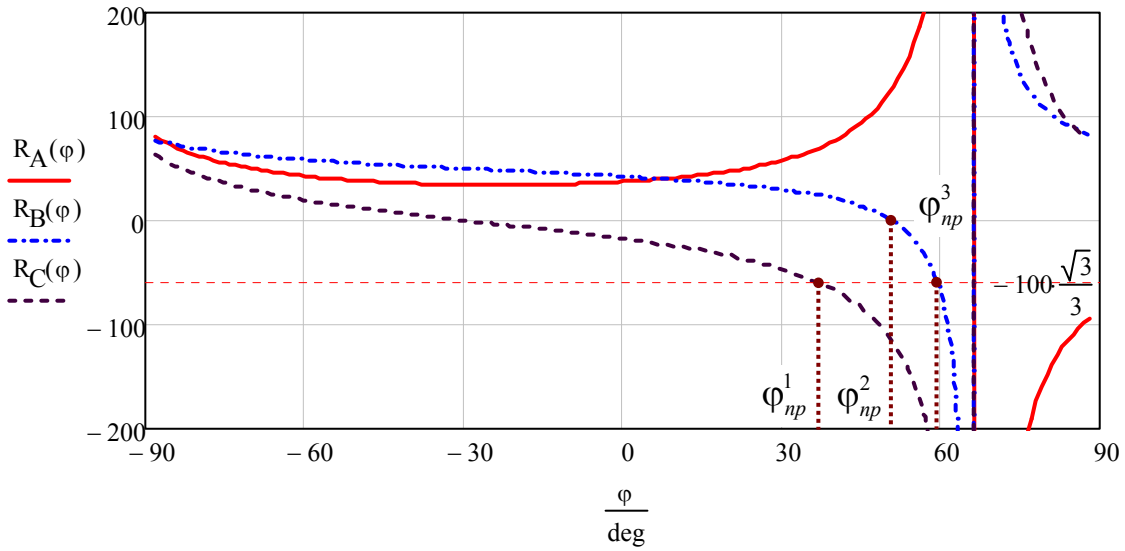


Рис. 13 Предельные значения углов φ.

3. Стержень C при разных значениях φ испытывает сжимающие и растягивающие усилия. В тоже время, сжимающее усилие в стержне R_C не будет превышать предельного значения $S_{пр}$ при значениях угла φ меньших величины $\varphi^1_{пр}$ (рис. 13)

$$R_C < 0, |R_C| < S_{пр} \quad \forall\, \varphi \in [0, \varphi^1_{пр}], \quad \varphi^1_{пр} = 36^\circ.$$

4. Количество стержней, реакция которых не зависит от φ – 3 (3, 7, 11),

из них сжатых – 1 (7) (рис. 14).

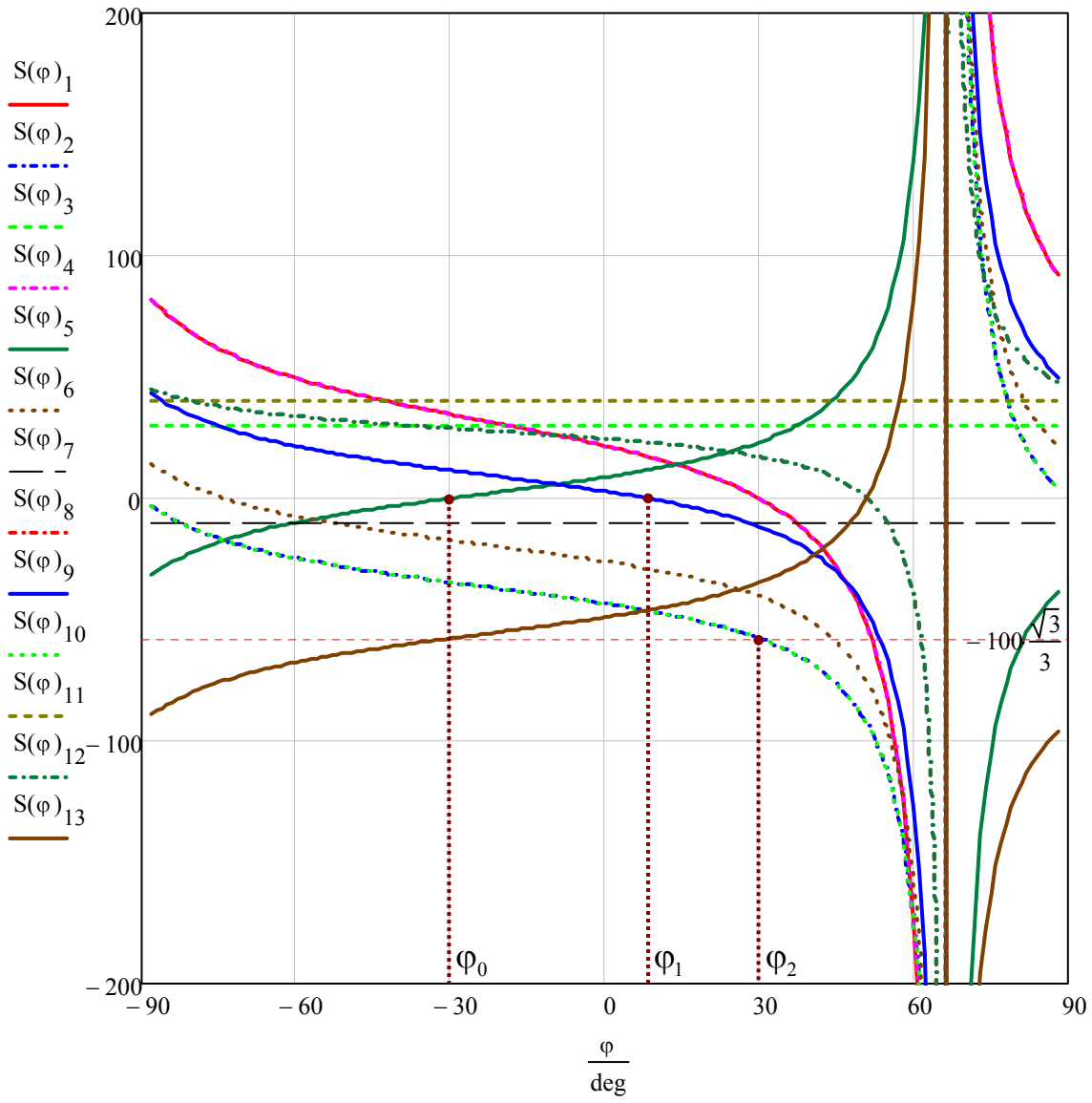


Рис. 14 Предельные значения углов φ.

5. Максимальное значение сжимающего усилия, величина которого не зависит от угла φ, равно $S = |S_{10}| = 10\,kH$ (рис. 14).

6. Максимальное значение угла φ, при котором количество сжатых стержней минимально равно $\varphi_1 = 8^\circ$. Количество сжатых стержней в этом случае равно $N_1 = 6$ (2, 6, 7, 10, 13, C) см. рис. 14, 15.

7. Минимальное значение угла φ, при котором количество сжатых стержней минимально равно $\varphi_0 = -30^\circ$.

8. Максимальное значение угла φ, при котором сжимающие усилия не

превышают предельного значения $|S_k| \le S_{np}$ равно $\varphi_2 = 30^\circ$. Количество сжатых стержней в этом случае равно $N_2 = 7$ (2, 6, 7, 9, 10, 13, C) см. рис. 14, 15.

$S(0) =$

	1
1	21.651
2	-43.301
3	30
4	21.651
5	8.66
6	-25.981
7	-10
8	24.537
9	2.887
10	-43.301
11	40
12	24.537
13	-49.075
14	37.5
15	-17.321
16	42.5

а) $\varphi_0 = 0^\circ$

$S\left(\frac{2\pi}{45}\right) =$

	1
1	17.442
2	-46.107
3	30
4	17.442
5	11.466
6	-28.787
7	-10
8	23.134
9	0.081
10	-46.107
11	40
12	23.134
13	-46.269
14	40.322
15	-22.932
16	40.07

б) $\varphi_2 = 8^\circ$

$S\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

	1
1	$1.711 \cdot 10^{-14}$
2	-57.735
3	30
4	$1.711 \cdot 10^{-14}$
5	23.094
6	-40.415
7	-10
8	17.321
9	-11.547
10	-57.735
11	40
12	17.321
13	-34.641
14	57.735
15	-46.188
16	30

в) $\varphi_2 = 30^\circ$

Рис. 15 Реакции фермы при разных значениях φ.

9. Область допустимых значений для угла φ, в которой

- значения сжимающих усилий в стержнях фермы не превышает S_{np} $(N_2 = 7)$

$$0 \le \varphi \le \varphi_2 = 30^\circ;$$

- количество сжатых стержней минимально, а усилия в них не превышают предельное значение S_{np} $(N_1 = 6)$

$$0 \le \varphi \le \varphi_1 = 8^\circ.$$

6. Выводы

Сведем результаты анализа в таблицу (табл. 1).

Ферма	$N_1 = \min(k)\ \forall \lvert S_k \rvert \le S_{np}, S_k < 0$		$N_2 = \max(k)\ \forall \lvert S_k \rvert \le S_{np}, S_k < 0$	
	$0 \le \varphi \le \varphi_1$	N_1	$0 \le \varphi \le \varphi_2$	N_2
Схема № 1	$0 \le \varphi \le 21^\circ$	5	$0 \le \varphi \le 66^\circ$	9
Схема № 2	$0 \le \varphi \le 29^\circ$	5	$0 \le \varphi \le 60^\circ$	9
Схема № 3	$0 \le \varphi \le 8^\circ$	6	$0 \le \varphi \le 30^\circ$	7

Табл. 1 Области допустимых значений φ *и количество сжатых стержней.*

Результаты анализа рассмотренных схем показывают, что при выполнении условия $\lvert S_k \rvert \le S_{np}, S_k < 0,$ количество стержней испытывающих сжимающие усилия близкие к предельному значению равно $\left(\text{усилия в } [kH]\right)$:

для схемы № 1 – 5 $\left(\lvert S_1 \rvert = \lvert S_4 \rvert = 50{,}061;\quad \lvert S_8 \rvert = \lvert S_{12} \rvert = 55{,}834;\quad \lvert S_{13} \rvert = S_{np} = 57{,}753\right)$;

для схемы № 2 – 5 $\left(\lvert S_1 \rvert = \lvert S_4 \rvert = 51{,}962;\quad \lvert S_8 \rvert = \lvert S_{12} \rvert = \lvert S_{13} \rvert = S_{np} = 57{,}753\right)$;

для схемы № 3 – 3 $\left(\lvert S_2 \rvert = \lvert S_{10} \rvert = S_{np} = 57{,}735;\quad \lvert R_C \rvert = 46{,}188\right)$.

При этом в условиях обеспечивающих минимальное число сжатых стержней, их количество равно:

для схемы № 1 – 1 $\left(\lvert S_{13} \rvert = S_{np} = 57{,}753\right)$;

для схемы № 2 – 1 $\left(\lvert S_{13} \rvert = S_{np} = 57{,}753\right)$;

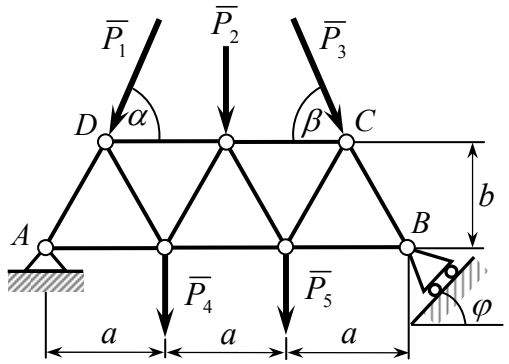
для схемы № 3 – 3 $\left(\lvert S_2 \rvert = \lvert S_{10} \rvert = 46{,}107;\quad \lvert S_{13} \rvert = 46{,}269\right)$.

Таким образом, оптимальной является схема 2, в которой при прочих равных условиях, область допустимых значений угла φ шире

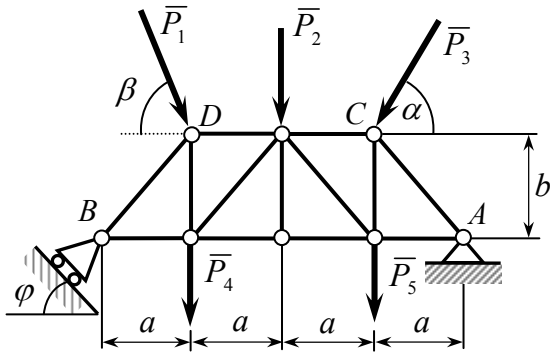
$$0 \le \varphi \le 29^\circ .$$

АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

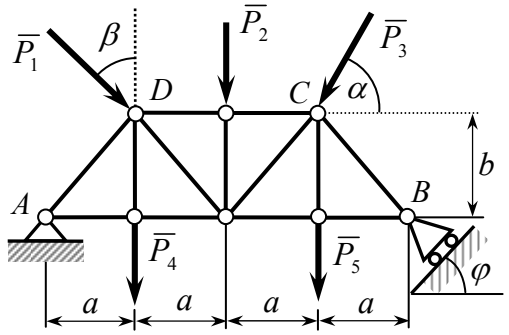
1



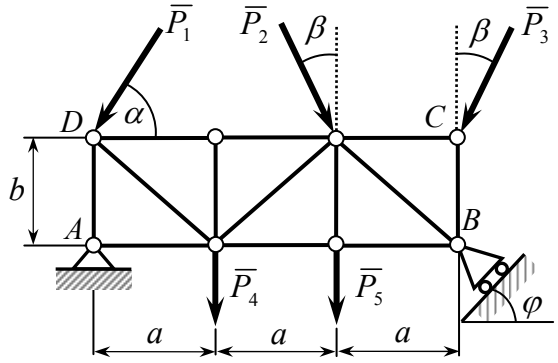
2



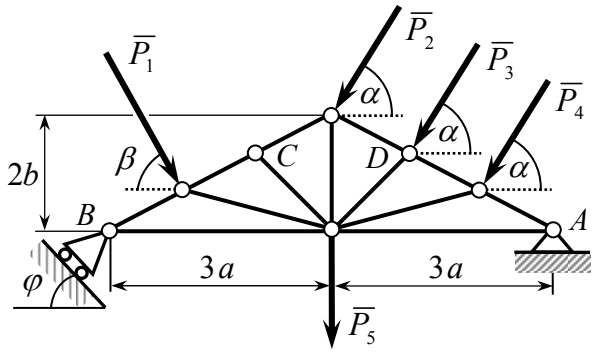
3



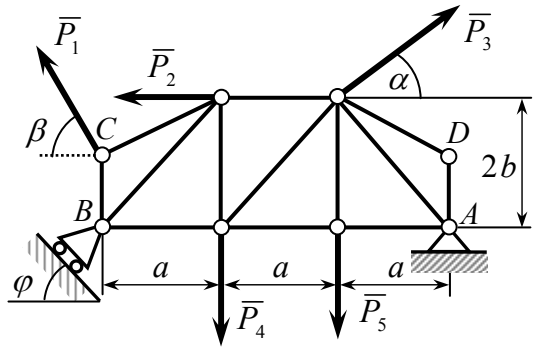
4



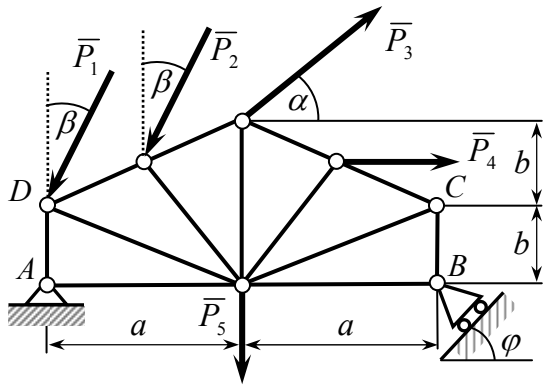
5



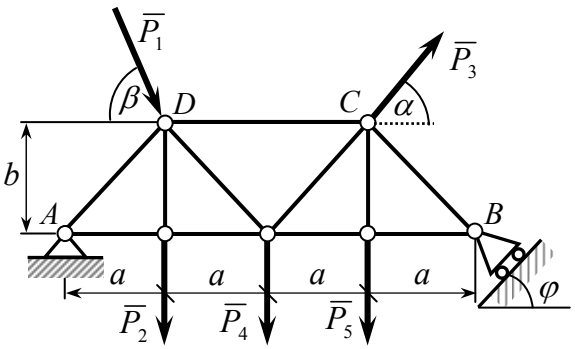
6



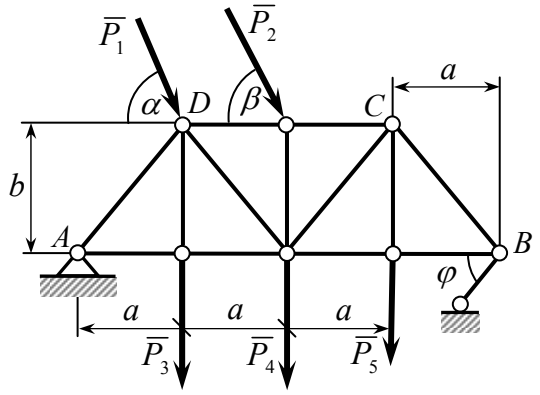
7


$\overline{P}_1$
$\overline{P}_2$
$\overline{P}_3$
$\overline{P}_4$
$\overline{P}_5$
β
α
φ
D
C
A
B
b
b
a
a

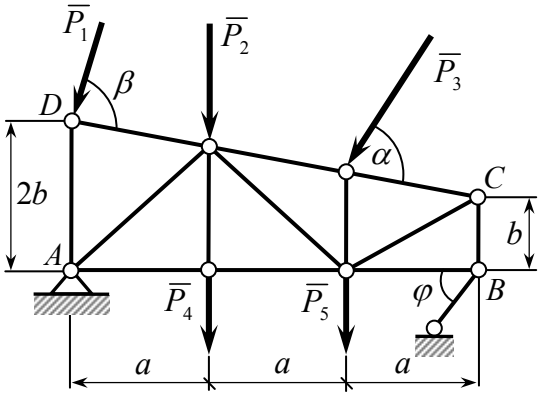
8


$\overline{P}_1$
$\overline{P}_2$
$\overline{P}_3$
$\overline{P}_4$
$\overline{P}_5$
β
α
φ
D
C
A
B
b
a
a
a
a

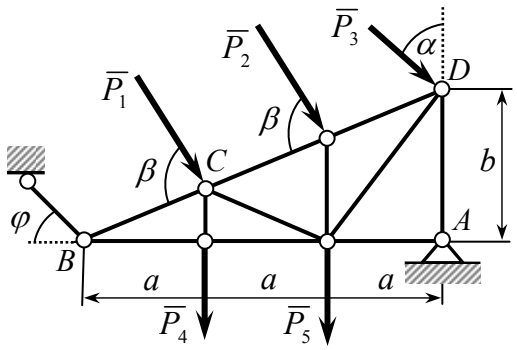
9


$\overline{P}_1$
$\overline{P}_2$
$\overline{P}_3$
$\overline{P}_4$
$\overline{P}_5$
α
β
φ
D
C
A
B
b
a
a
a
a

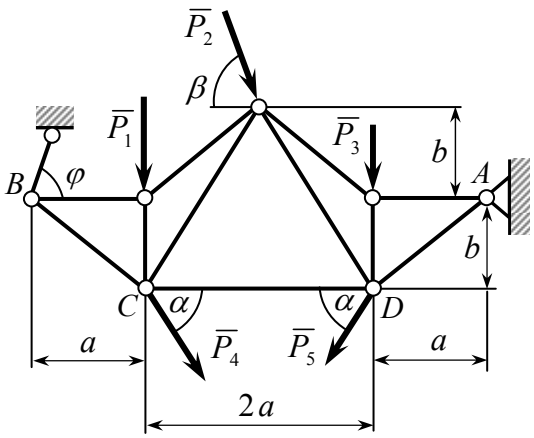
10


$\overline{P}_1$
$\overline{P}_2$
$\overline{P}_3$
$\overline{P}_4$
$\overline{P}_5$
β
α
φ
D
C
A
B
2b
b
a
a
a

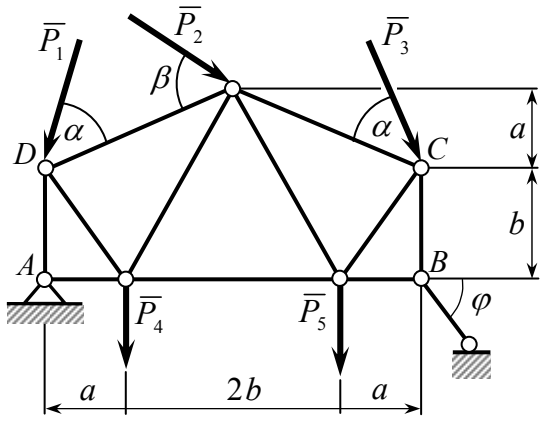
11


$\overline{P}_1$
$\overline{P}_2$
$\overline{P}_3$
$\overline{P}_4$
$\overline{P}_5$
α
β
φ
D
C
A
B
b
a
a
a

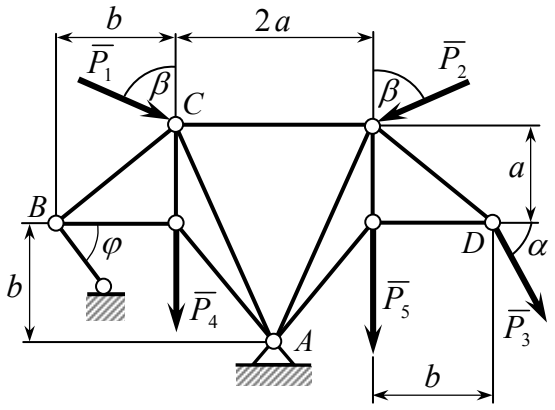
12


$\overline{P}_1$
$\overline{P}_2$
$\overline{P}_3$
$\overline{P}_4$
$\overline{P}_5$
β
α
φ
B
A
C
D
b
b
a
a
2a

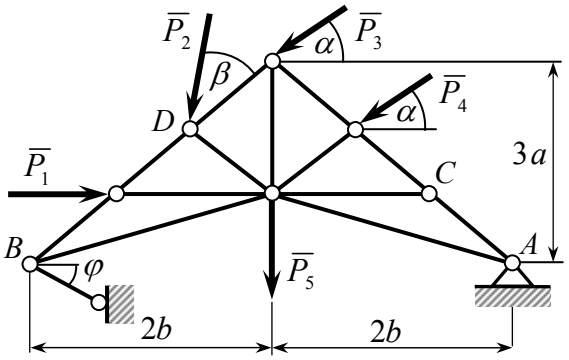
13



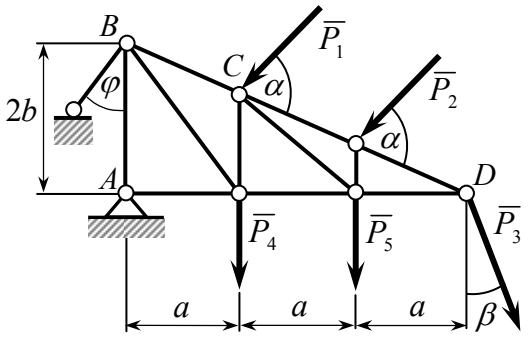
14



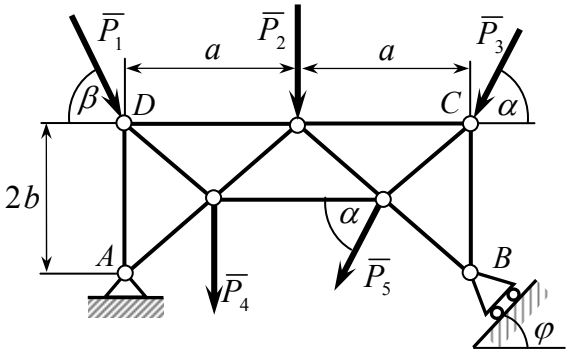
15



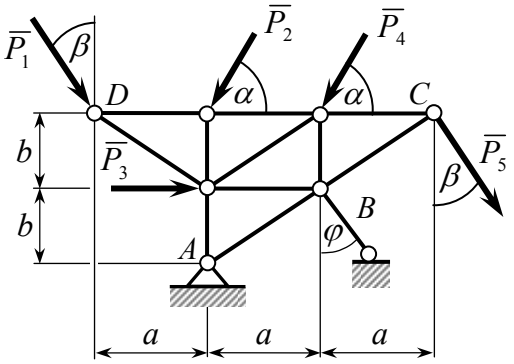
16



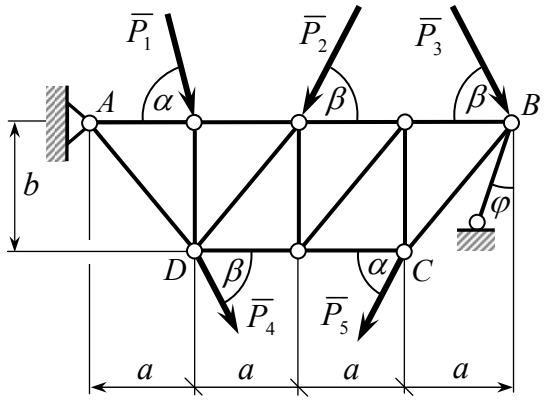
17



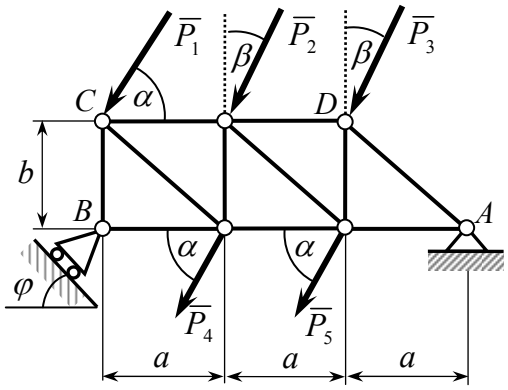
18



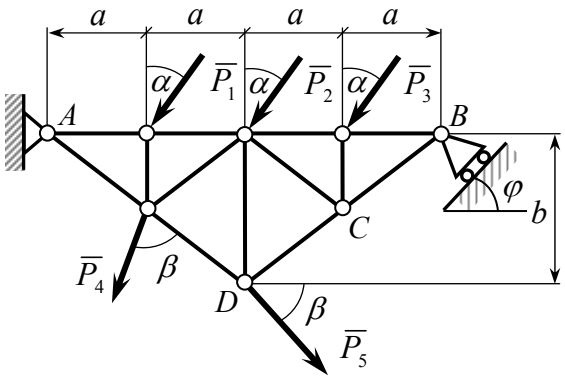
19



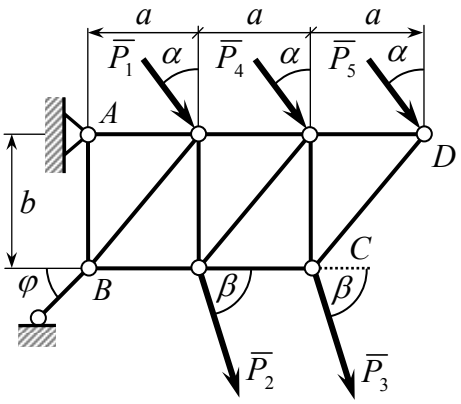
20



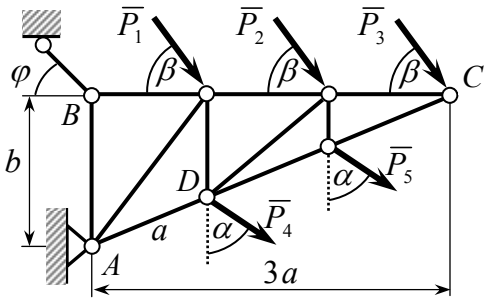
21



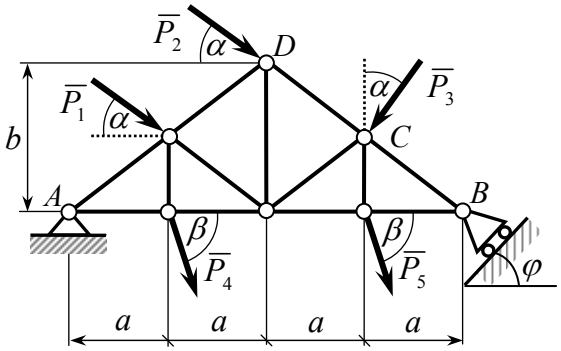
22



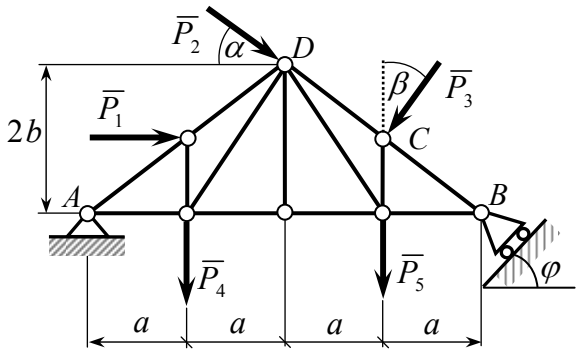
23



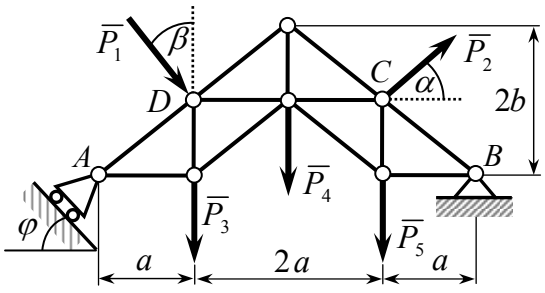
24



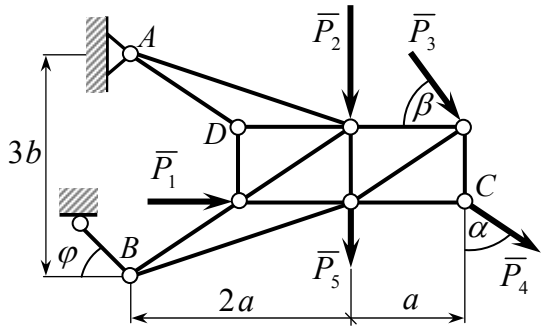
25



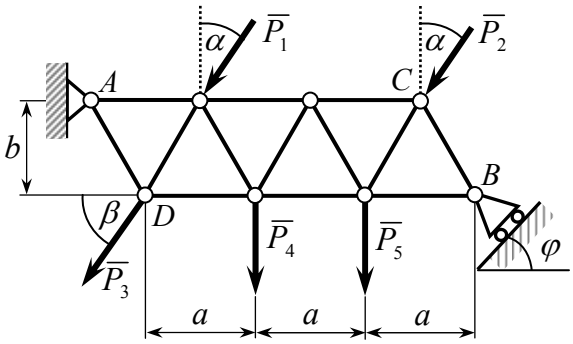
26



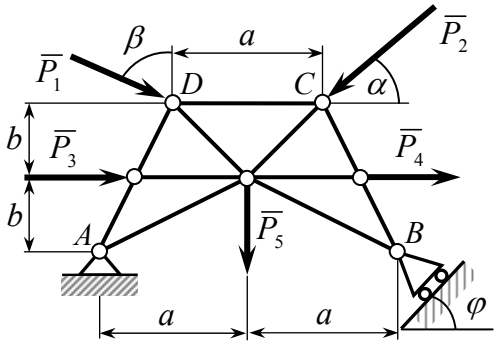
27



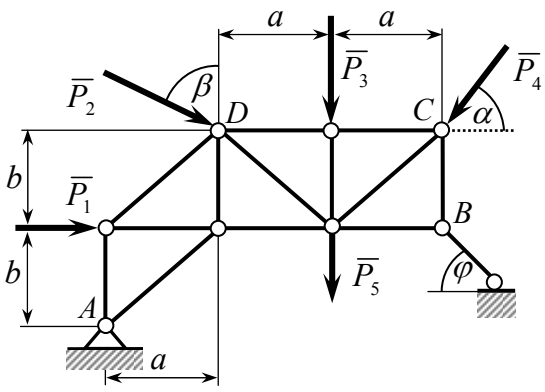
28

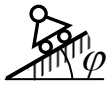


29



30



№	Схема № 2				Схема № 3			
	A	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								

№	Схема № 2				Схема № 3			
	A	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a,\ [м]$	0,2	0,3	0.5	0,4	1,1	0,6	0,9	0,7	1,0	0,8
$b,\ [м]$	0,3	0,4	0,6	0,5	1,3	0,9	1,3	1,1	1,5	1,0
$P_1,\ [кН]$	100	150	200	250	300	250	200	150	100	250
$P_2,\ [кН]$	150	200	250	300	100	300	200	100	150	100
$P_3,\ [кН]$	200	250	300	100	150	100	250	300	250	100
$P_4,\ [кН]$	250	300	100	150	250	150	150	100	150	200
$P_5,\ [кН]$	300	100	150	200	250	200	100	300	200	150
$\alpha,\ [^\circ]$	180	30	45	60	75	90	15	120	150	135
$\beta,\ [^\circ]$	15	45	60	135	90	150	120	75	180	30

С 2. РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В статике наряду с равновесием одного тела рассматриваются равновесие сочлененных систем тел, т.е. совокупности твердых тел касающихся друг друга своими поверхностями или соединенных друг с другом шарнирами, гибкими нитями или стержнями.

Важной задачей статики системы твердых тел является определение внешних и внутренних реакций связей. Основным способом их нахождения является способ расчленения, при котором рассматривается равновесие отдельных тел системы.

Цель курсовой работы

Целью курсовой работы является выработка навыков расчета и исследования равновесия плоских составных конструкций.

Содержание курсовой работы

Объектом исследования является плоская составная конструкция, представляющая собой совокупность абсолютно твердых тел, соединенных друг с другом идеальными связями. Схемы конструкций и таблицы исходных данных приведены в альбоме заданий.

Задаваемыми параметрами являются:

- геометрические характеристики конструкции;
- система активных сил, приложенных к ее телам.

Требуется:

1. Найти:
   - во всех конструкциях — реакции внешних и внутренних связей;
   - в одной конструкции — часть реакций, составляя для этого минимально необходимое число уравнений равновесия (по выбору преподавателя).

2. Исследовать влияние расположения опор внешних связей на величины реакции связей и выбрать вариант, в котором реакции внешних или внутренних связей минимальны (по выбору преподавателя).

Порядок выполнения работы

1. Выделить тело (элемент) или систему тел с заданными активными силами, равновесие которых будем рассматривать;

2. Используя аксиому освобождаемости от связей рассмотреть выбранное тело, как свободное, заменив действующие на него связи их реакциями;

3. Дать анализ действующей на тело или систему тел системы сил, выяснить статическую определимость задачи;

4. Записать условия равновесия и составить уравнения равновесия для вычисления:

- всех реакций внешних и внутренних связей;
- реакций указанных преподавателем (число уравнений равновесия должно быть равно числу вычисляемых реакций).

5. Найти реакции связей и осуществить проверку правильности составления уравнений равновесия.

6. Провести анализ и исследование полученного решения:

- исследовать влияние расположения опор внешних связей на величины реакций внешних и внутренних связей.
- выбрать такое расположение опор, при котором обеспечивается минимальные значения внешних или внутренних реакций.

В процессе выполнения курсовой работы необходимо выработать следующие навыки и умения:

- определения связей, действующих на тело или систему тел;
- составления уравнений равновесия для произвольного тела, входящего в систему тел и нахождения реакций связей;
- решения поставленной задачи разными методами.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Составная конструкция $ABCD$ (рис. 1) находится в равновесии под действием распределенной нагрузки изменяющейся по линейному закону $\overline{q}_{\max}$, сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, пар сил с моментами M_1 и M_2. Геометрические размеры всех звеньев известны. На конструкцию действуют внешние связи: в точке A – жесткая заделка, а в точке B – неподвижный шарнир. Внутренней связью является втулка, расположенная в точке C

Исследовать равновесие составной конструкции. Определить реакции внешних и внутренних связей, а также момент в заделке A и реакцию опоры B, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия.

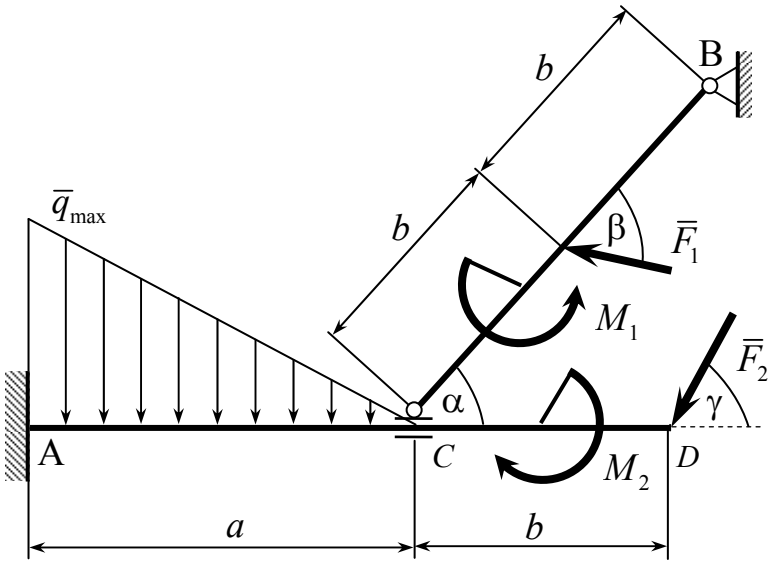


Рис. 1 Схема составной конструкции.

Исходные данные

$q_{\max} = 10\ kH/м$, $F_1 = 20\ kH$, $F_2 = 30\ kH$, $M_1 = 10\ kH\,м$, $M_2 = 15\ kH\,м$,

$a = 4\ м$, $b = 3\ м$,

$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

1. Определение реакций внешних и внутренних связей

Рассмотрим равновесие всей конструкции, освободив ее от связей в точках A и B (рис. 2).

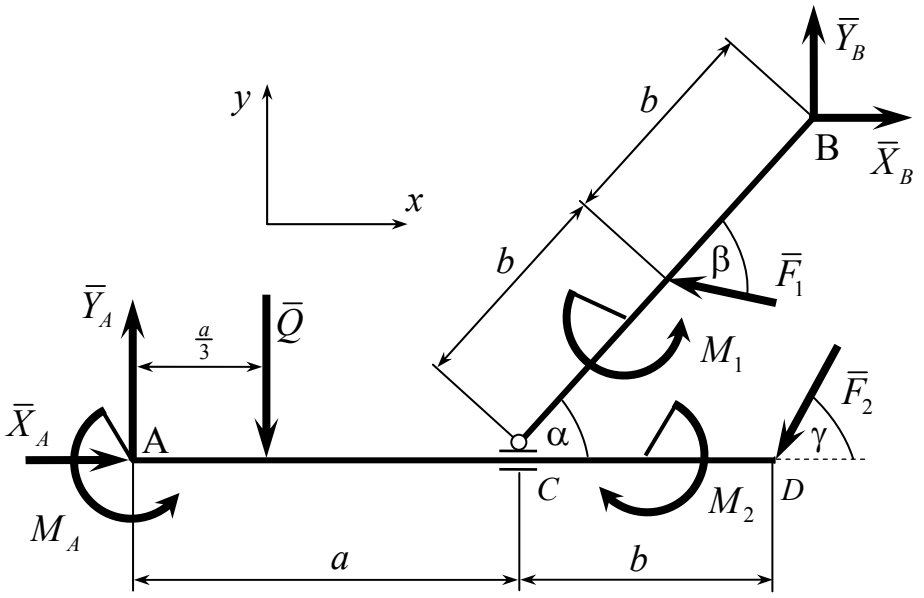


Рис. 2 Расчетная схема для всей конструкции.

На рис. 2 обозначено:

$\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ — составляющие реакции $\bar{R}_A$ заделки A $\left(R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}\right)$;

M_A — момент в заделке A;

$\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ — составляющие реакции $\bar{R}_B$ шарнира B $\left(R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}\right)$;

$\bar{Q}$ — равнодействующая распределенной нагрузки, модуль которой равен

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} a = 20\ kH.$$

Конструкция находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, для которой можно записать три независимых условия равновесия, например:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k M_A\left(\bar{F}_k\right) = 0. \tag{32}$$

Неизвестных реакций, действующих на конструкцию – 5 $\left(\bar{X}_B, \bar{Y}_B\right)$,

$\left(\overline{X}_A, \overline{Y}_A, M_A\right)$ и решить задачу определения реакций с помощью уравнений равновесия соответствующих условиям (32) невозможно. Поэтому расчленим конструкцию по внутренней связи в точке C и рассмотрим равновесие каждого тела (балка BC и балка ACD) отдельно. Расчетные схемы тел изображены на рис. 3. На балку ACD действует реакция внутренней связи $\overline{R}_C$ со стороны балки BC. На балку BC кроме активных сил и реакций внешних связей действует реакция внутренней связи $\overline{R}_C{}'$ со стороны балки $ACD\left(\overline{R}_C = -R_C{}'\right)$.

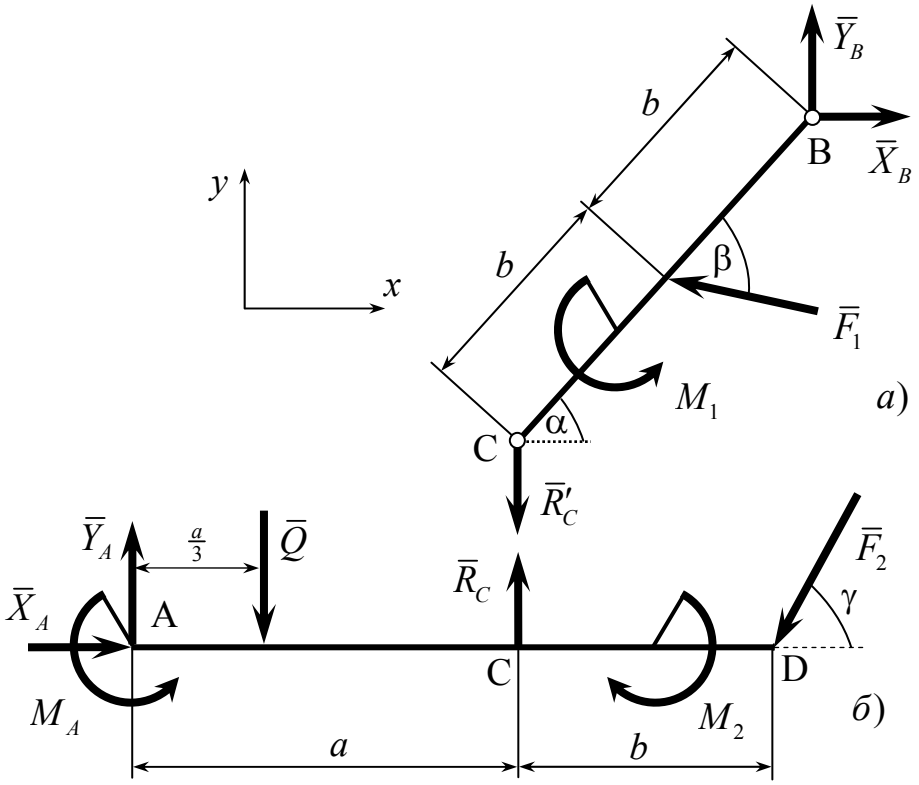


Рис. 3 Расчетная схема для звеньев конструкции:
а) балка BC, б) балка ACD.

Балка BC (рис. 3 а) находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. Для определения трех неизвестных реакций $\left(\overline{X}_B, \overline{Y}_B, \overline{R}'_C\right)$ можно записать три независимых условия равновесия, например:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0. \tag{33}$$

Балка ACD (рис. 3 б) находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. Для определения трех оставшихся неизвестных реак-

ций $\left(\overline{X}_A, \overline{Y}_A, M_A\right)$ можно также записать три независимых условия равновесия, например:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0. \tag{34}$$

Задача нахождения реакций связей в этом случае становится статически определимой и ее можно решить, составив 6 уравнений соответствующих условиям равновесия (33) и (34):

$$\begin{aligned}
&\text{Звено } BC \qquad \sum_k F_{kx} = 0 \quad X_B - F_1\cos(\beta-\alpha) = 0,\\
&\qquad\qquad\quad \sum_k F_{ky} = 0 \quad Y_B - R'_C + F_1\sin(\beta-\alpha),\\
&\qquad\quad \sum_k M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 \quad M_1 + R'_C\,2b\cos(\alpha) - F_1\sin(\beta)\,b = 0;\\
&\text{Звено } ACD \qquad \sum_k F_{kx} = 0 \quad X_A - F_2\cos(\gamma) = 0,\\
&\qquad\qquad\quad \sum_k F_{ky} = 0 \quad Y_A - Q + R_C - F_2\sin(\gamma) = 0,\\
&\qquad\quad \sum_k M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0 \quad M_A - Q\frac{a}{3} + R_C\,a - M_2 - F_2\sin(\gamma)(a+b) = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Решая систему уравнений (35) и учитывая, что значения $R_C = R'_C$, получим

$$\begin{aligned}
&R_C = F_1\frac{\sin\beta}{2\cos\alpha} - \frac{M_1}{2b\cos\alpha} = 11.925\ kH,\\
&X_B = F_1\cos(\beta-\alpha) = 17.321\ kH,\\
&Y_B = R_C - F_1\sin(\beta-\alpha) = F_1\frac{\sin(2\alpha-\beta)}{2\cos\alpha} - \frac{M_1}{2b\cos\alpha} = 1.925\ kH,\\
&X_A = F_2\cos\gamma = 21.213\ kH,\\
&Y_A = Q - R_C + F_2\sin\gamma = 29.289\ kH,\\
&M_A = Q\frac{a}{3} - R_C\,a + M_2 + F_2\sin\gamma(a+b) = 139.128\ kH\,м.
\end{aligned} \tag{36}$$

Кроме этих уравнений равновесия можно составить и другие 6 уравнений для условий равновесия (32) и (33) или (32) и (34), рассмотрев, например, схемы на рис. 2 и рис.3 а или рис. 2 и рис.3 б соответственно.

2. Определение $M_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ оптимальным способом

Для нахождения реакций $\bar{X}_B, Y_B$ и момента в заделке M_A оптимальным способом рассмотрим расчетные схемы, представленные на рис. 2 и рис. 3.

Расчетная схема, представленная на рис. 2, содержит все три неизвестных, подлежащих определению – момент в заделке M_A и реакции $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$. Однако только одно из уравнений равновесия составленных для конструкции $ABCD$ будет содержать искомые величины

$$\sum_k M_A\left(\bar{F}_k\right)=0 \quad M_A - Q\frac{a}{3} - M_2 - F_2\sin\gamma\left(a+b\right) - X_B\,2b\sin\alpha + \\ + Y_B\left(a+2b\cos\alpha\right) + F_1\cos\left(\beta-\alpha\right)b\sin\alpha + \\ + F_1\sin\left(\beta-\alpha\right)(a+b\cos\alpha)=0 \qquad (37)$$

Расчетная схема, представленная на рис. 3 а, содержит все две неизвестных, подлежащих определению – реакции $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$. Для балки BC можно составить два уравнения равновесия которые будут содержать искомые величины

$$\sum_k F_{kx}=0 \quad X_B - F_1\cos\left(\beta-\alpha\right)=0, \\ \sum_k M_C\left(\bar{F}_k\right)=0 \quad M_1 + F_1\sin\beta\, b - X_B\,2b\sin\alpha + Y_B\,2b\cos\alpha = 0. \qquad (38)$$

Система уравнений (37) – (38) содержит только те неизвестные, которые нужно определить. Из первого уравнения системы (38) найдем реакцию X_B

$$X_B = F_1\cos\left(\beta-\alpha\right)=17.321\,kH.$$

Из второго уравнения системы (38) – реакцию Y_A

$$Y_B = X_B\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - F_1\frac{\sin\beta}{2\cos\alpha} - \frac{M_1}{2b\cos\alpha} = F_1\frac{\sin\left(2\alpha-\beta\right)}{2\cos\alpha} - \frac{M_1}{2b\cos\alpha} = 1.925\,kH.$$

Из уравнения (37) – момент в заделке M_A

$$M_A = Q\frac{a}{3} + M_2 + F_2\sin\gamma\left(a+b\right) + X_B\,2b\sin\alpha - Y_B(a+2b\cos\alpha) \\ - F_1\left[b\sin\beta + a\sin\left(\beta-\alpha\right)\right]=139.128\,kH.$$

Расчетная схема, представленная на рис. 3 б, содержит только одну неизвестную, подлежащую определению – момент в заделке M_A. Любое из уравнений равновесия составленных для балки ACD будет содержать неизвестные, которые определять не нужно. Поэтому равновесие балки ACD рассматривать не требуется.

3. Альтернативное расположение опор внешних связей

Пусть в данной задаче требуется выбрать оптимальную схему расположения опор внешних связей, обеспечивающих минимальное значение реакции внутренней связи (втулка C).

Для исследования влияния расположения опор внешних связей на величины реакции внутренней связи рассмотрим равновесие конструкции $ABCD$ с другим расположением опор: в точке A – неподвижная шарнирная опора; в точке B – жесткая заделка (рис. 4).

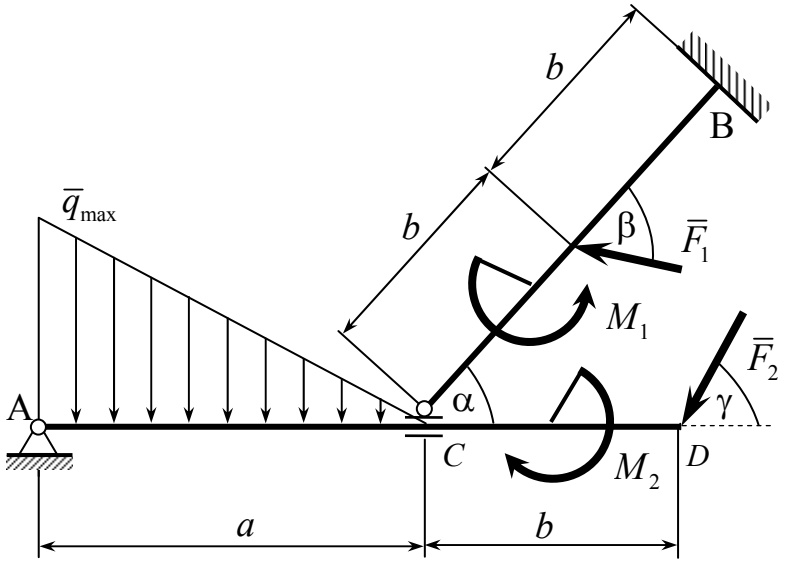


Рис. 4 Конструкция с альтернативным расположением опор внешних связей.

Расчленим конструкцию по внутренней связи в точке C и рассмотрим равновесие каждого тела (балка BC и балка ACD) отдельно. Расчетные схемы тел изображены на рис. 5.

На балку ACD (рис. 5 б) кроме активных сил: равнодействующей распределенной нагрузки $\overline{Q}$, силы $\overline{F}_2$ и пары сил с моментом M_2 действует реак-

ция $\overline{R}_C$ втулки C со стороны балки BC и реакции неподвижной шарнирной опоры $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$.

Балка ACD находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил и для ее равновесия можно записать три независимых условия равновесия, например:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0. \tag{39}$$

На балку BC (рис. 5 а) кроме активных сил: силы $\overline{F}_1$ и пары сил действует реакция $\overline{R}_C{}'$ втулки C со стороны балки $ACD\left(\overline{R}_C = -R_C{}'\right)$ и реакции жесткой заделки $\overline{X}_B, \overline{Y}_B, M_B$.

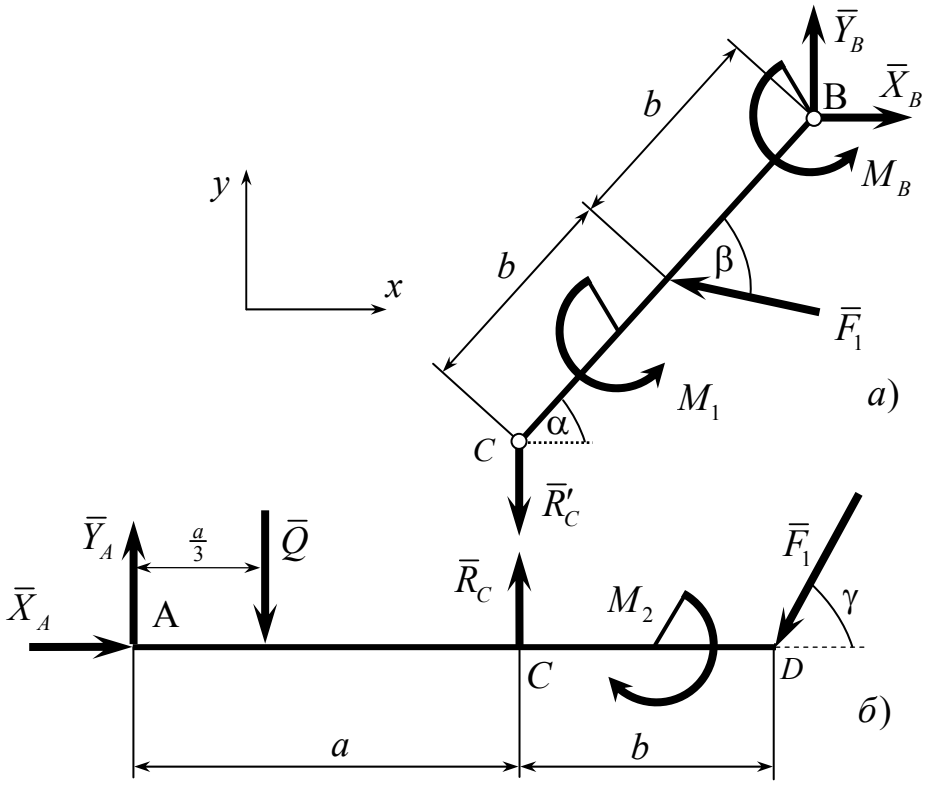


Рис. 5. Расчетная схема для звеньев конструкции.

Балка CB, как и балка ACD, находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил и для ее равновесия можно записать три независимых условия равновесия, например:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0. \tag{40}$$

Задача нахождения 6 реакций связей в этом случае становится статически определимой и ее можно решить, составив 6 уравнений соответствующих условиям равновесия (39) и (40):

$$
\begin{aligned}
&\text{Звено } ACD \qquad \sum_k F_{kx} = 0 \quad X_A - F_2\cos(\gamma) = 0,\\
&\qquad\qquad\quad \sum_k F_{ky} = 0 \quad Y_A - Q + R_C - F_2\sin(\gamma) = 0,\\
&\sum_k M_A(\bar{F}_k) = 0 \quad R'_C\,a - Q\frac{a}{3} - M_2 - F_2\sin(\gamma)(a+b) = 0;\\
&\text{Звено } BC \qquad \sum_k F_{kx} = 0 \quad X_B - F_1\cos(\beta-\alpha) = 0,\\
&\qquad\qquad\quad \sum_k F_{ky} = 0 \quad Y_B - R_C + F_1\sin(\beta-\alpha),\\
&\sum_k M_B(\bar{F}_k) = 0 \quad M_B + M_1 + R_C\,2b\cos(\alpha) - F_1\sin(\beta)\,b = 0.
\end{aligned}
\qquad (41)
$$

Окончательную проверку правильности составления уравнений равновесия (35) и (41), а также их решения осуществим далее с помощью пакета Mathcad.

При выполнении курсовой работы исследование влияния расположения опор внешних связей на значения реакций провести только для задач 1xx, 2xx и 3xx. Для задачи 4xx достаточно осуществить проверку составления уравнений равновесия и вычислить значения реакций связей.

4. Результаты расчетов

Решения систем линейных алгебраических уравнений (35) и (41) не сложно реализовать в пакете Mathcad, в котором для этого существует несколько способов [1, 10]. Так как кроме решения системы линейных алгебраических уравнений, требуется осуществить проверку их составления, воспользуемся возможностями символьных вычислений Mathcad. Численное решение полученных уравнений произведем с помощью блока решения *Given – Find* .

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором реализованы процедуры составления уравнений равновесия, а также вычисления реакций внешних и внутренних связей конструкции в символьном и численном виде.

Расчет составной конструкции согласно расчетной схеме представленной на рис. 3.

Символьное решение

1. Задание векторов, определяющих положения точек приложения сил

(Начало системы координат совмещаем с точкой A)

ORIGIN := 1

$$r_A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_Q := \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_C := \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_D := \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_F := \begin{pmatrix} a + b\cdot\cos(\alpha) \\ b\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_B := \begin{pmatrix} a + 2\cdot b\cdot\cos(\alpha) \\ 2\cdot b\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Задание векторов сил и моментов пар сил, действующих на конструкцию

$$Q_ := \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix} \quad F1 := \begin{pmatrix} -F_1\cdot\cos(\beta-\alpha) \\ F_1\cdot\sin(\beta-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad F2 := \begin{pmatrix} -F_2\cdot\cos(\gamma) \\ -F_2\cdot\sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \quad M1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_1 \end{pmatrix}$$

$$M2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad MA := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_A \end{pmatrix} \quad RA := \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \quad RB := \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$RC := \begin{pmatrix} 0 \\ R_C \\ 0 \end{pmatrix} \qquad RC' := \begin{pmatrix} 0 \\ -R_C \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Составление уравнений равновесия для звеньев конструкции

Формирование главного вектора и главного момента внешних сил:

для балки AD:

$P_AD := RA + Q_ + RC + F2$ $\qquad M_AD_A := MA + r_Q \times Q_ + r_C \times RC + M2 + r_D \times F2$

для балки BC:

$P_BC := RC' + F1 + RE$ $\qquad M_BC_C := M1 + (r_B - r_C) \times RB + (r_F - r_C) \times F1$

Составление уравнений равновесия:

для балки AD:

$P_AD_1 = 0 \text{ simplify } \rightarrow X_A - F_2 \cdot \cos(\gamma) = 0$

$P_AD_2 = 0 \text{ simplify } \rightarrow R_C - Q + Y_A - F_2 \cdot \sin(\gamma) = 0$

$M_AD_{A_3} = 0 \text{ simplify } \rightarrow M_2 + M_A - \frac{2 \cdot Q \cdot a}{3} + R_C \cdot a - F_2 \cdot a \cdot \sin(\gamma) - F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma) = 0$

для балки BC:

$P_BC_1 = 0 \text{ simplify } \rightarrow X_B - F_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$

$P_BC_2 = 0 \text{ simplify } \rightarrow Y_B - R_C + F_1 \cdot \sin(\beta - \alpha) = 0$

$M_BC_{C_3} = 0 \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot Y_B \cdot b \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot X_B \cdot b \cdot \sin(\alpha) - M_1 + F_1 \cdot b \cdot \sin(\beta) = 0$

4. Решение уравнений равновесия с помощью блока Given - Find

$(X_A \;\; Y_A \;\; M_A \;\; R_C \;\; X_B \;\; Y_B) := (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$

Given

$X_A - F_2 \cdot \cos(\gamma) = 0$ $\qquad R_C - Q + Y_A - F_2 \cdot \sin(\gamma) = 0$

$M_2 + M_A - \frac{2 \cdot Q \cdot a}{3} + R_C \cdot a - F_2 \cdot a \cdot \sin(\gamma) - F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma) = 0$

$X_B - F_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$ $\qquad Y_B - R_C + F_1 \cdot \sin(\beta - \alpha) = 0$

$2 \cdot Y_B \cdot b \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot X_B \cdot b \cdot \sin(\alpha) - M_1 + F_1 \cdot b \cdot \sin(\beta) = 0$

$$\text{Find}\left(\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix}\right) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} F_2\cdot\cos(\gamma) \\ Q + F_2\cdot\sin(\gamma) - \frac{F_1\cdot\sin(\beta)}{2\cdot\cos(\alpha)} - \frac{M_1}{2\cdot b\cdot\cos(\alpha)} \\ \frac{2\cdot Q\cdot a}{3} - M_2 + F_2\cdot a\cdot\sin(\gamma) + F_2\cdot b\cdot\sin(\gamma) - \frac{M_1\cdot a}{2\cdot b\cdot\cos(\alpha)} - \frac{F_1\cdot a\cdot\sin(\beta)}{2\cdot\cos(\alpha)} \\ \frac{M_1 + F_1\cdot b\cdot\sin(\beta)}{2\cdot b\cdot\cos(\alpha)} \\ F_1\cdot\cos(\beta - \alpha) \\ \frac{M_1 - F_1\cdot b\cdot\sin(\beta - 2\cdot\alpha)}{2\cdot b\cdot\cos(\alpha)} \end{pmatrix}$$

Численное решение

1. Ввод исходных данных

ORIGIN := 1

$q_{max} := 10$ $F_1 := 20$ $F_2 := 30$ $M_1 := 10$ $M_2 := 15$

$a := 4$ $b := 3$ $\alpha := \frac{\pi}{6}$ $\beta := \frac{\pi}{3}$ $\gamma := \frac{\pi}{4}$

$Q := \frac{1}{2}\cdot q_{max}\cdot a$

2. Решение уравнений равновесия с помощью блока Given - Find

Уравнения равновесия должны быть скопированы в блок Given

$\begin{pmatrix} X_A & Y_A & M_A & R_C & X_B & Y_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Given

$X_A - F_2\cdot\cos(\gamma) = 0$ $R_C - Q + Y_A - F_2\cdot\sin(\gamma) = 0$

$M_2 + M_A - \frac{2\cdot Q\cdot a}{3} + R_C\cdot a - F_2\cdot a\cdot\sin(\gamma) - F_2\cdot b\cdot\sin(\gamma) = 0$

$X_B - F_1\cdot\cos(\beta - \alpha) = 0$ $Y_B - R_C + F_1\cdot\sin(\beta - \alpha) = 0$

$2\cdot Y_B\cdot b\cdot\cos(\alpha) - 2\cdot X_B\cdot b\cdot\sin(\alpha) - M_1 + F_1\cdot b\cdot\sin(\beta) = 0$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find}\left(\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.213 \\ 29.289 \\ 139.128 \\ 11.925 \\ 17.321 \\ 1.925 \end{pmatrix}$$

$R_A := \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ $R_B := \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$

$R_A = 36.164$ $M_A = 139.128$ $R_B = 17.427$ $R_C = 11.925$

Расчет составной конструкции согласно расчетной схеме представленной на рис. 5.

Символьное решение

1. Задание векторов, определяющих положения точек приложения сил

.....

2. Задание векторов сил и моментов пар сил, действующих на конструкцию

.....

$$MB := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_B \end{pmatrix}$$ .....

3. Составление уравнений равновесия для звеньев конструкции

Формирование главного вектора и главного момента внешних сил:

для балки AD:

$P_AD := RA + Q_ + RC + F2$ $M_AD_A := r_Q \times Q_ + r_C \times RC + M2 + r_D \times F2$

для балки BC:

$P_BC := RC' + F1 + RE$ $M_BC_C := M1 + MB + (r_B - r_C) \times RB + (r_F - r_C) \times F1$

Составление уравнений равновесия:

для балки AD:

$P_AD_1 = 0 \text{ simplify } \rightarrow X_A - F_2 \cdot \cos(\gamma) = 0$

$P_AD_2 = 0 \text{ simplify } \rightarrow R_C - Q + Y_A - F_2 \cdot \sin(\gamma) = 0$

$M_AD_{A_3} = 0 \text{ simplify } \rightarrow M_2 - \frac{2 \cdot Q \cdot a}{3} + R_C \cdot a - F_2 \cdot a \cdot \sin(\gamma) - F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma) = 0$

для балки BC:

$P_BC_1 = 0$ simplify $\rightarrow X_B - F_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$

$P_BC_2 = 0$ simplify $\rightarrow Y_B - R_C + F_1 \cdot \sin(\beta - \alpha) = 0$

$M_BC_{C_3} = 0$ simplify $\rightarrow M_B - M_1 - 2 \cdot X_B \cdot b \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot Y_B \cdot b \cdot \cos(\alpha) + F_1 \cdot b \cdot \sin(\beta) = 0$

4. Решение уравнений равновесия с помощью блока Given - Find

$\left(X_A \; Y_A \; M_B \; R_C \; X_B \; Y_B\right) := (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$

Given

$X_A - F_2 \cdot \cos(\gamma) = 0$ $\qquad$ $R_C - Q + Y_A - F_2 \cdot \sin(\gamma) = 0$

$M_2 - \frac{2 \cdot Q \cdot a}{3} + R_C \cdot a - F_2 \cdot a \cdot \sin(\gamma) - F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma) = 0$

$X_B - F_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$ $\qquad$ $Y_B - R_C + F_1 \cdot \sin(\beta - \alpha) = 0$

$M_B - M_1 - 2 \cdot X_B \cdot b \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot Y_B \cdot b \cdot \cos(\alpha) + F_1 \cdot b \cdot \sin(\beta) = 0$

$\text{Find}\left(\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_B \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix}\right)$ simplify $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} F_2 \cdot \cos(\gamma) \\ \frac{M_2 + \frac{Q \cdot a}{3} - F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{a} \\ M_1 - \frac{4 \cdot Q \cdot b \cdot \cos(\alpha)}{3} + F_1 \cdot b \cdot \sin(\beta) - 2 \cdot F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha) + \frac{2 \cdot M_2 \cdot b \cdot \cos(\alpha)}{a} - \frac{2 \cdot F_2 \cdot b^2 \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{a} \\ \frac{\frac{2 \cdot Q \cdot a}{3} - M_2 + F_2 \cdot a \cdot \sin(\gamma) + F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{a} \\ F_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) \\ \frac{2 \cdot Q}{3} - \frac{M_2}{a} + F_2 \cdot \sin(\gamma) - F_1 \cdot \sin(\beta - \alpha) + \frac{F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{a} \end{pmatrix}$$

Численное решение

1. Ввод исходных данных

.....

2. Решение уравнений равновесия с помощью блока Given - Find

$\left(X_A \;\; Y_A \;\; M_B \;\; R_C \;\; X_B \;\; Y_B\right) := (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$

Given

$X_A - F_2 \cdot \cos(\gamma) = 0$ $\qquad$ $R_C - Q + Y_A - F_2 \cdot \sin(\gamma) = 0$

$M_2 - \frac{2 \cdot Q \cdot a}{3} + R_C \cdot a - F_2 \cdot a \cdot \sin(\gamma) - F_2 \cdot b \cdot \sin(\gamma) = 0$

$X_B - F_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$ $\qquad$ $Y_B - R_C + F_1 \cdot \sin(\beta - \alpha) = 0$

$M_B - M_1 - 2 \cdot X_B \cdot b \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot Y_B \cdot b \cdot \cos(\alpha) + F_1 \cdot b \cdot \sin(\beta) = 0$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_B \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find}\left(\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_B \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_B \\ R_C \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.213 \\ -5.493 \\ -180.732 \\ 46.706 \\ 17.321 \\ 36.706 \end{pmatrix}$$

$R_A := \sqrt{X_A^{\,2} + Y_A^{\,2}}$ $\qquad$ $R_B := \sqrt{X_B^{\,2} + Y_B^{\,2}}$

$R_A = 21.913$ $\qquad$ $R_B = 40.588$ $\qquad$ $M_B = -180.732$ $\qquad$ $R_C = 46.706$

5. Анализ результатов вычислений и выводы

Составные конструкции обычно применяются для проектирования арочных, мостовых конструкций и т.д. На этапе их предварительного проектирования может быть поставлена задача выбора оптимального решения согласно одному или нескольким критериям.

Например, требуется обеспечить:

- минимальную силу давления на одну или все опоры;
- минимальное значение реакции внутренней связи;
- минимальное значение реактивного момента и т.д.

В данной задаче требуется определить такое расположение опор внешних связей, при которых значение реакции внутренней связи минимально.

Сведем результаты расчетов в таблицу (табл. 1).

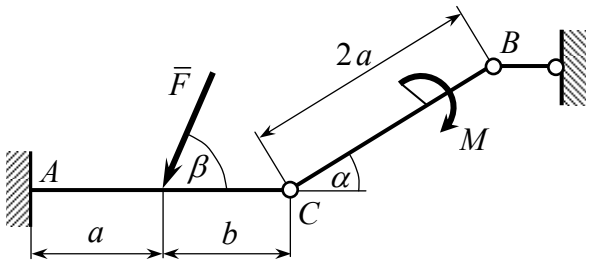
Схема	X_A, kH	Y_A, kH	R_A, kH	M_A, $kH\,м$	X_B, kH	Y_B, kH	R_B, kH	M_B, $kH\,м$	R_C, kH
Рис. 3	21,213	29,289	36,164	139,13	17,321	1,925	17,427	–	11,925
Рис. 5	21,213	-5,493	21,913	–	17,321	36,706	40,588	-180,73	46,706

Табл. 1 Значения модулей реакций внешних и внутренних связей.

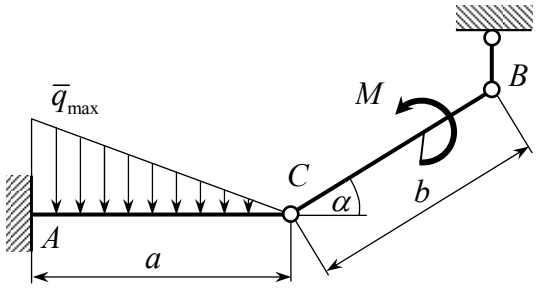
Анализ результатов расчета рассмотренных схем показывают, что оптимальной (по минимальному значению реакции втулки C) является схема, представленная на рис. 3, в которой, при прочих равных условиях, значение реакции $\overline{R}_C$ меньше.

АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

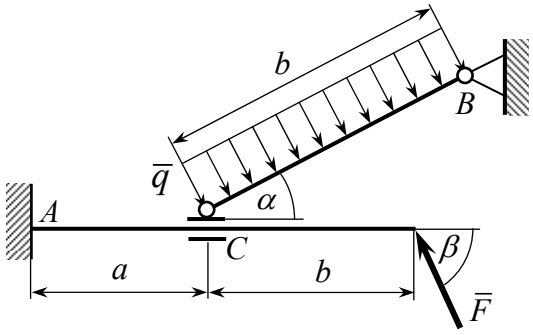
101



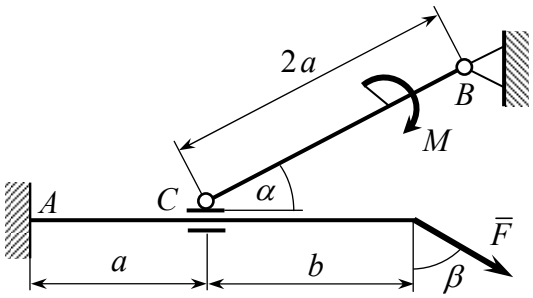
102



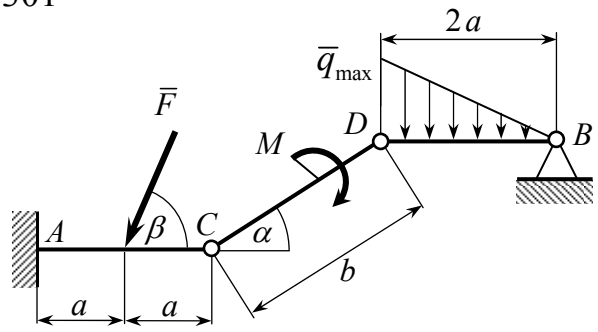
201



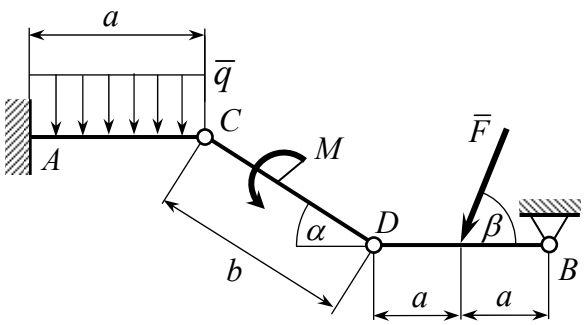
202



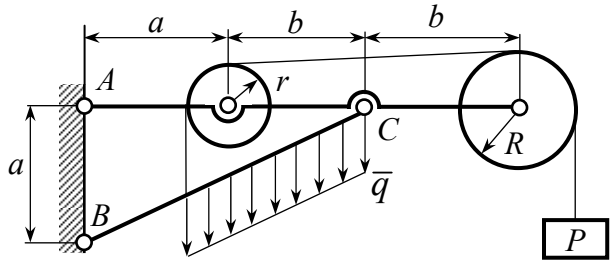
301



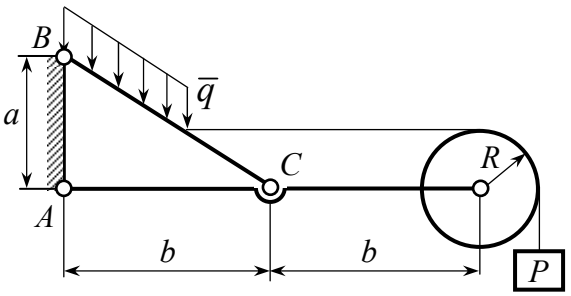
302



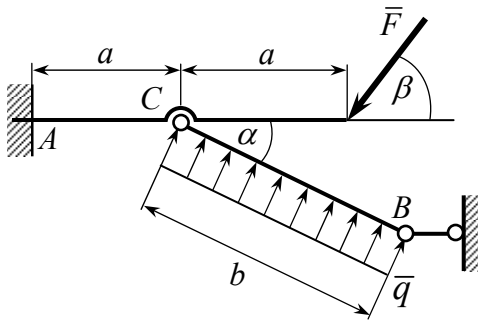
401



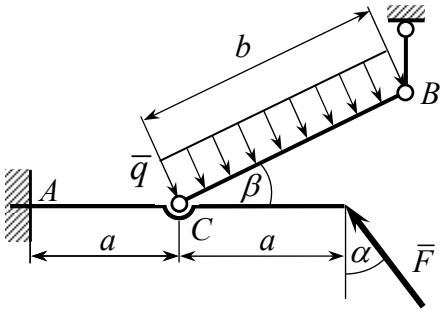
402



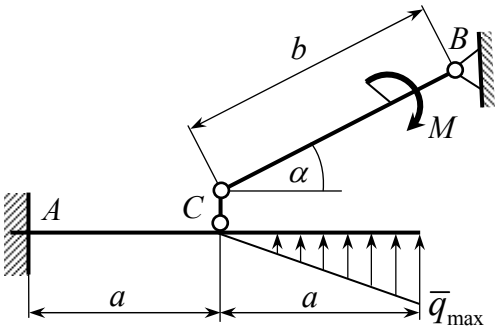
103



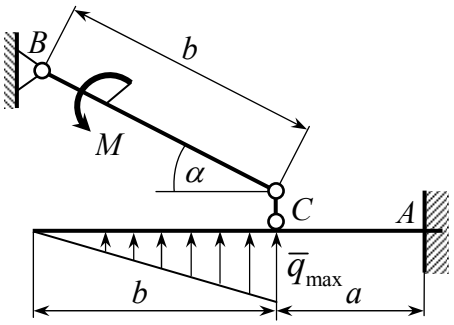
104



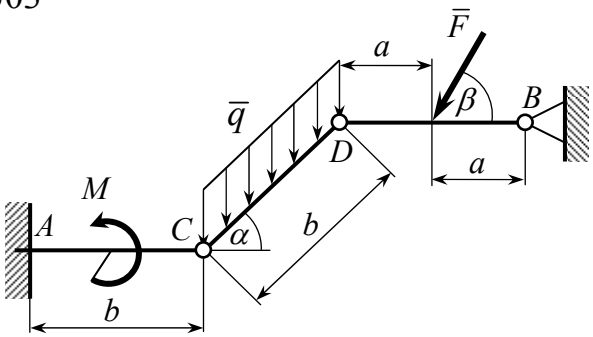
203



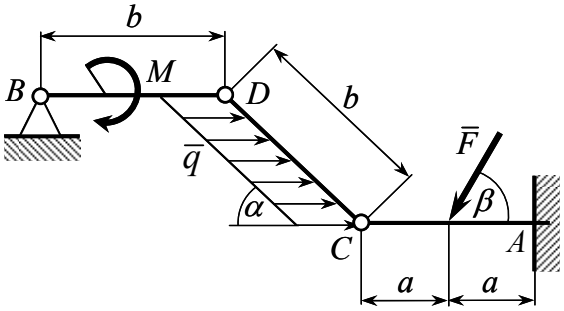
204



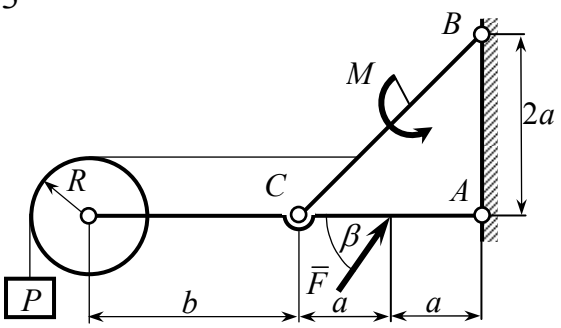
303



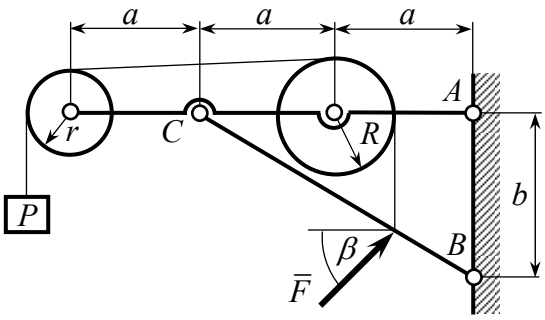
304



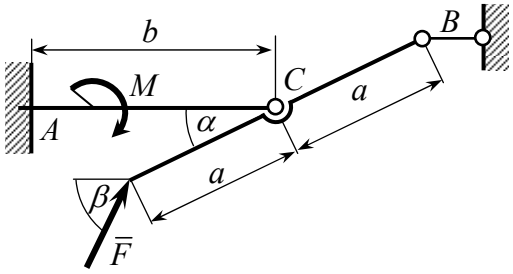
403



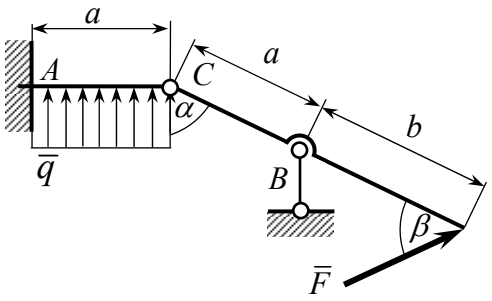
404



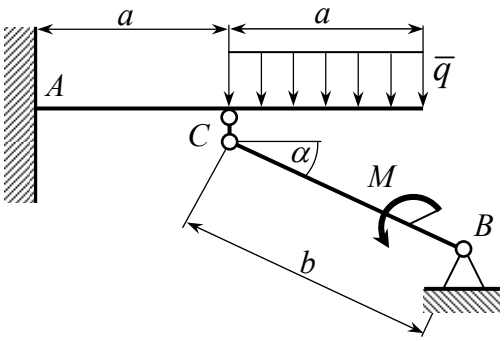
105



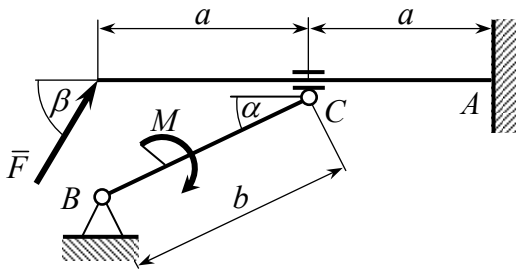
106



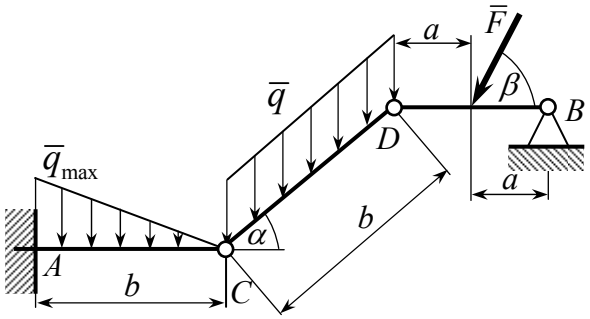
205



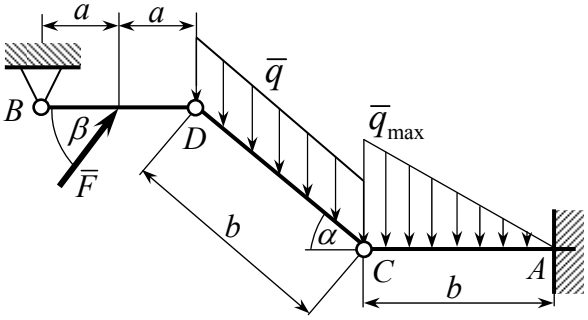
206



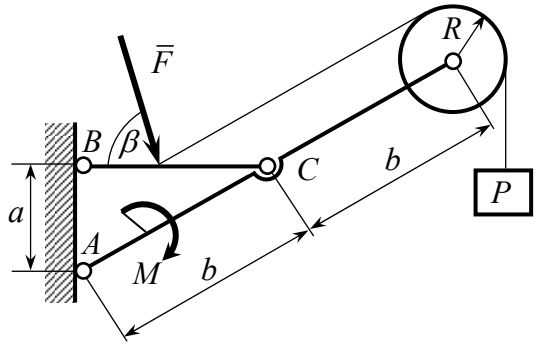
305



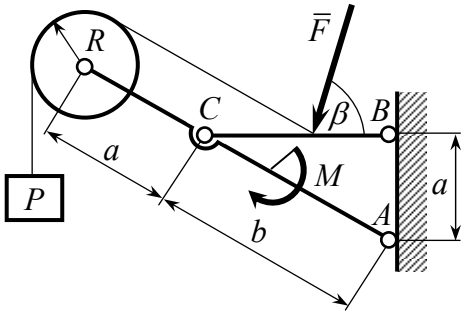
306



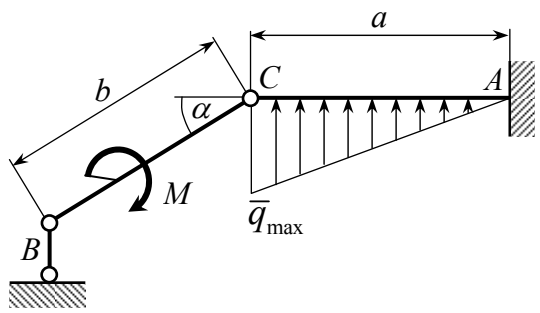
405



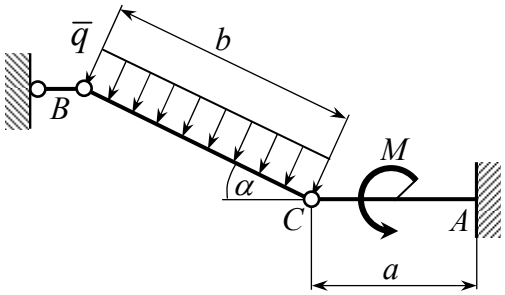
406



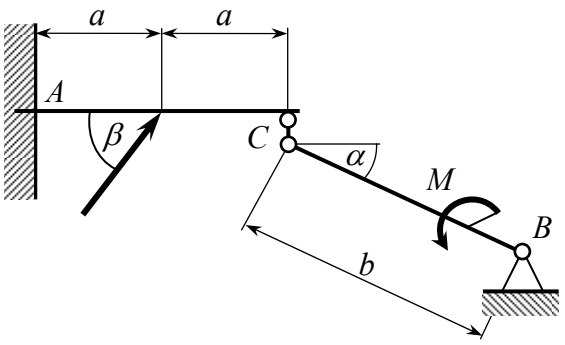
107



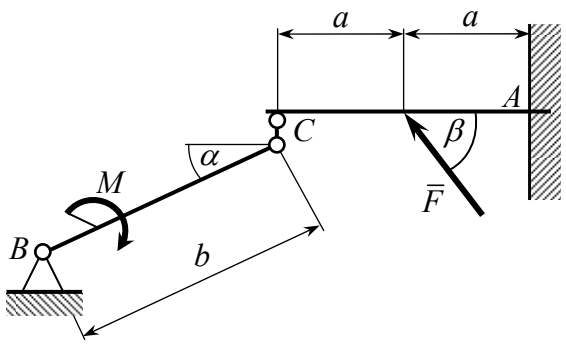
108



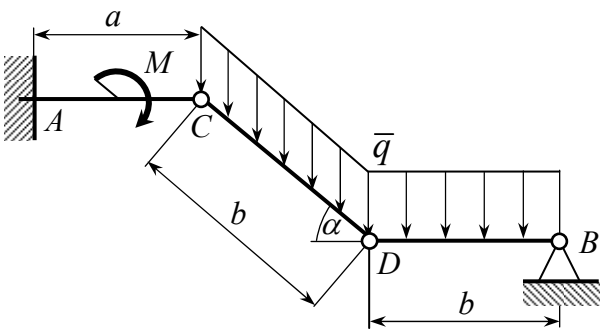
207



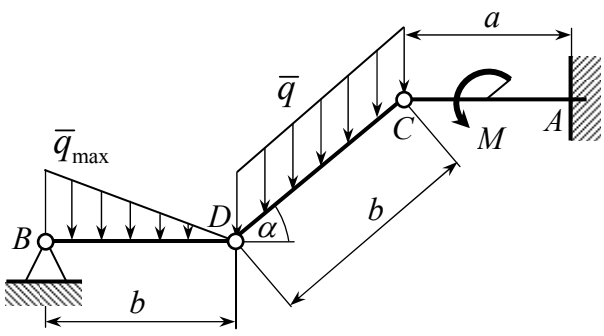
208



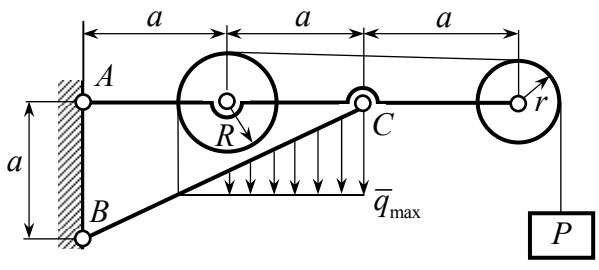
307



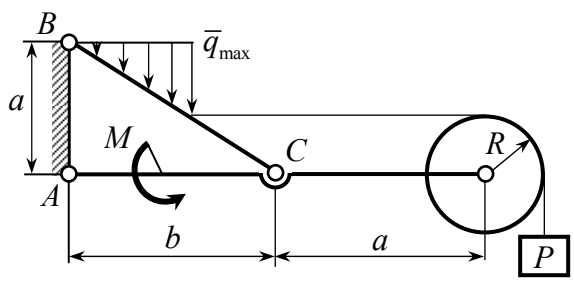
308



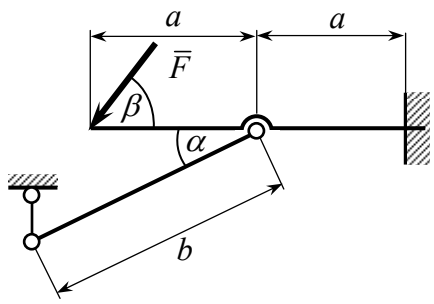
407



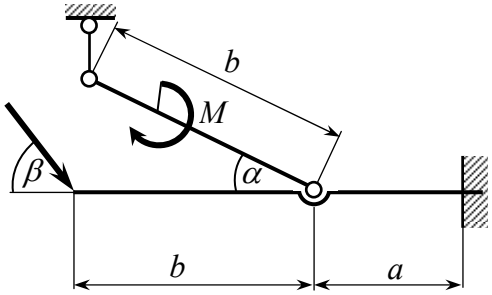
408



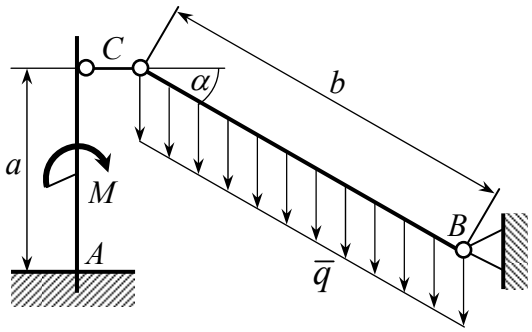
109



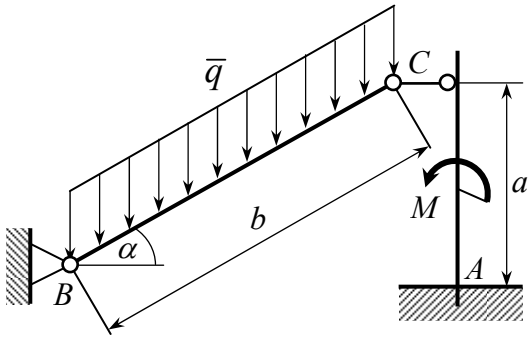
110



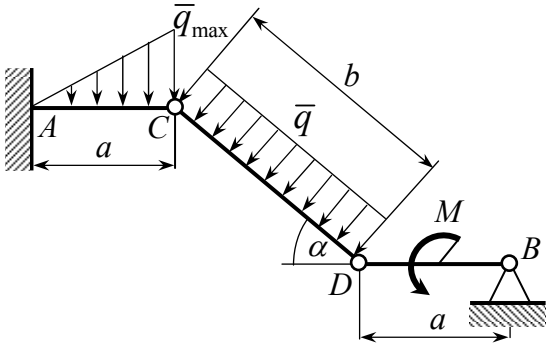
209



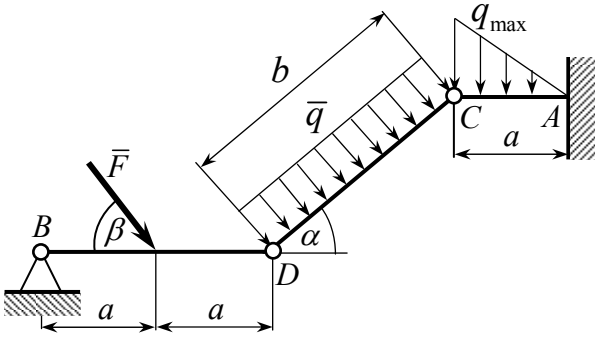
210



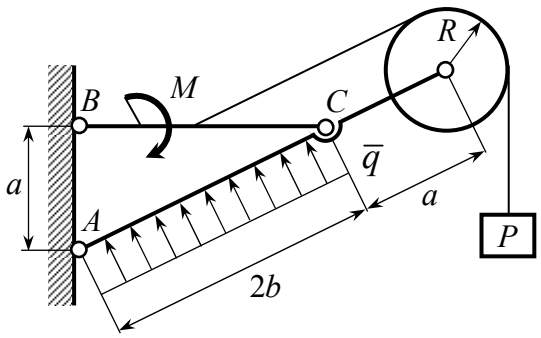
309



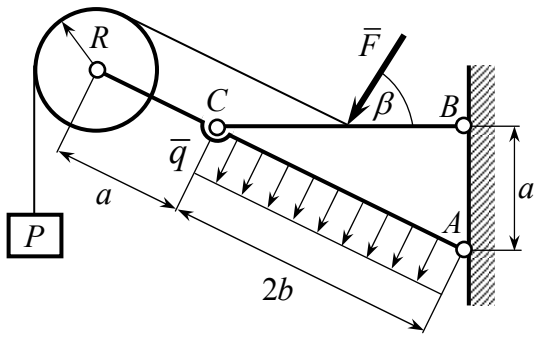
310



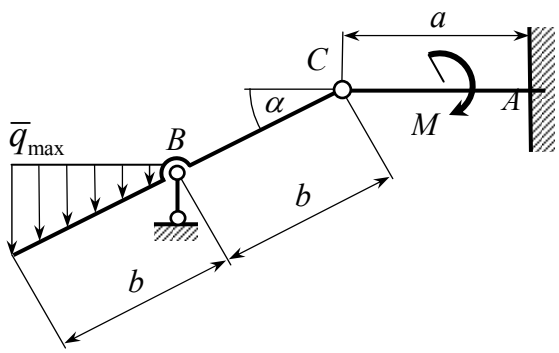
409



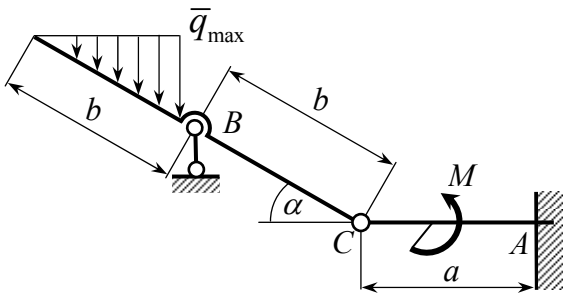
410



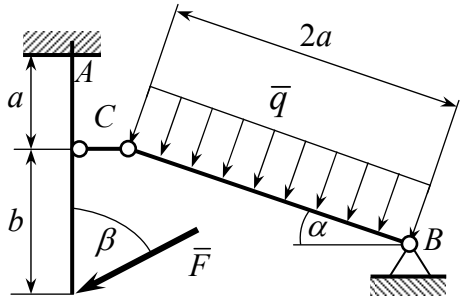
111



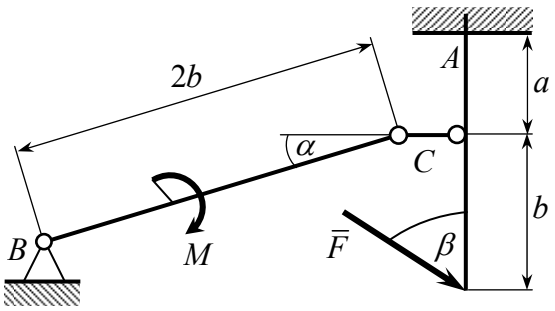
112



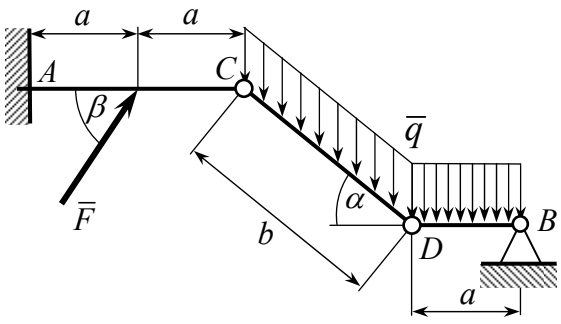
211



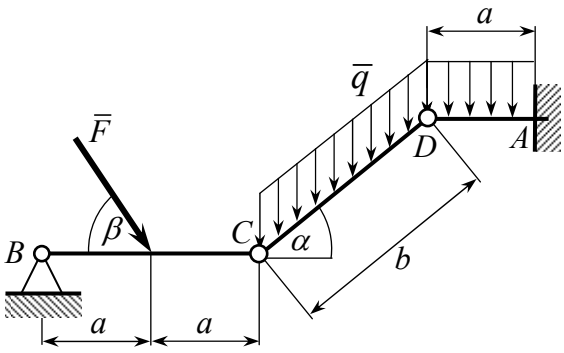
212



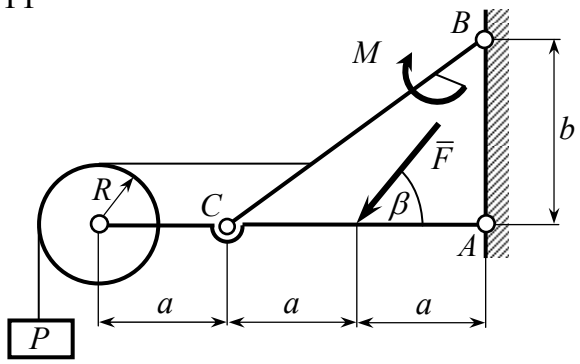
311



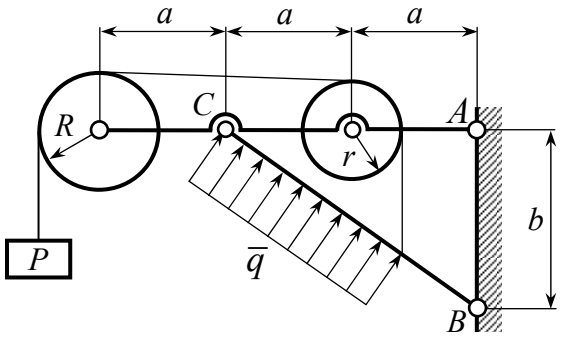
312



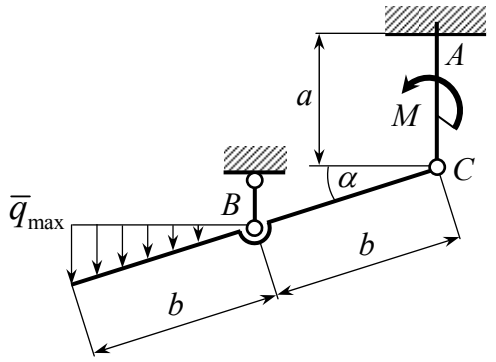
411



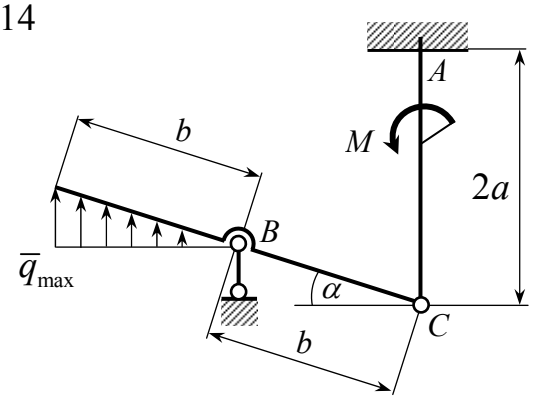
412



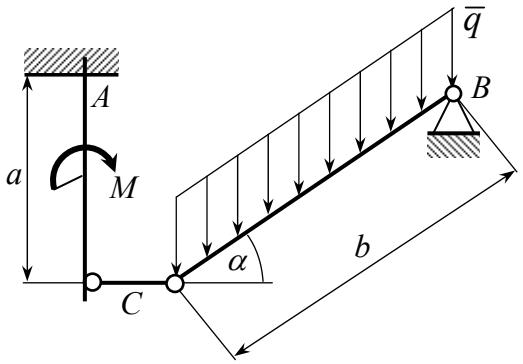
113



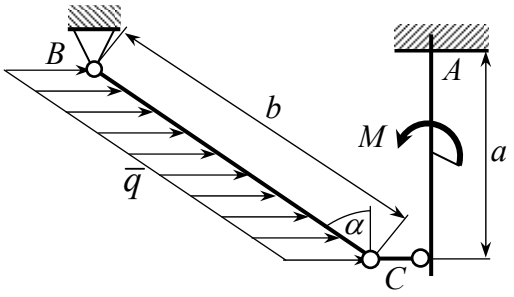
114



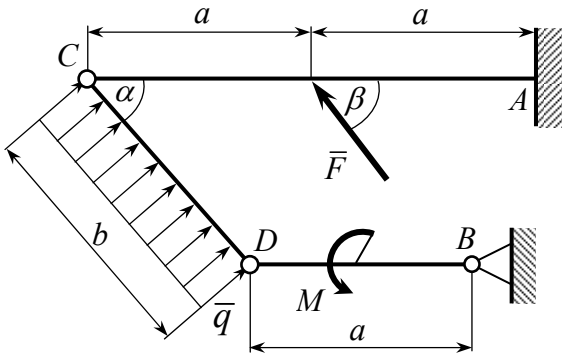
213



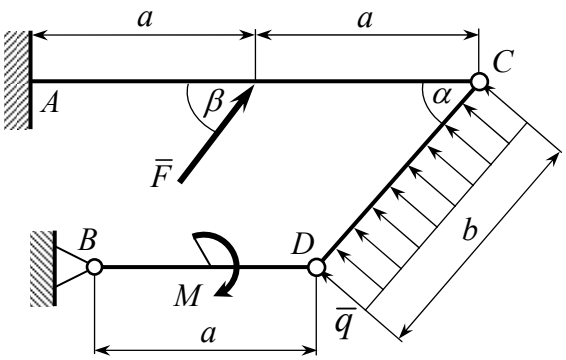
214



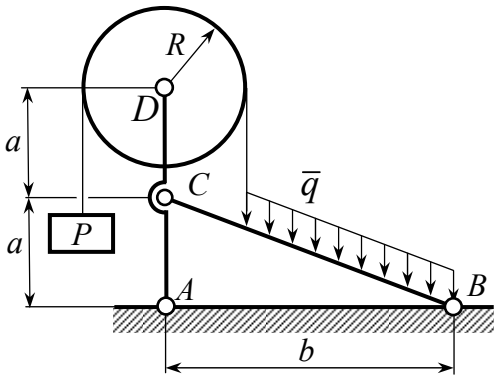
313



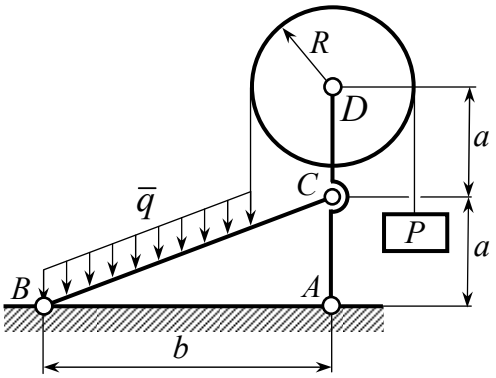
314



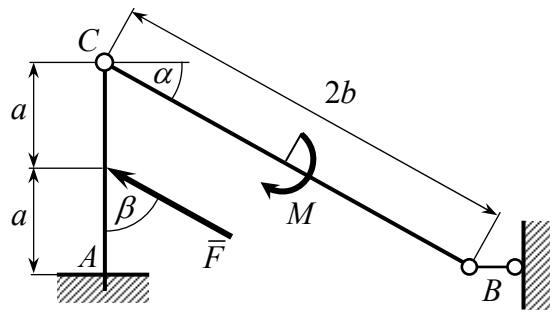
413



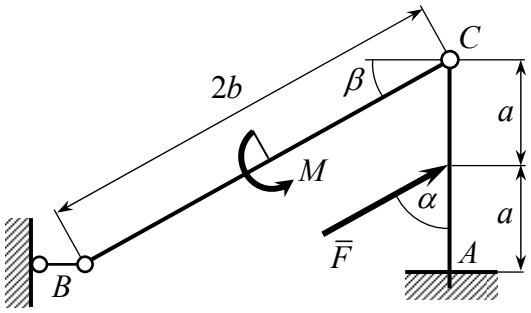
414



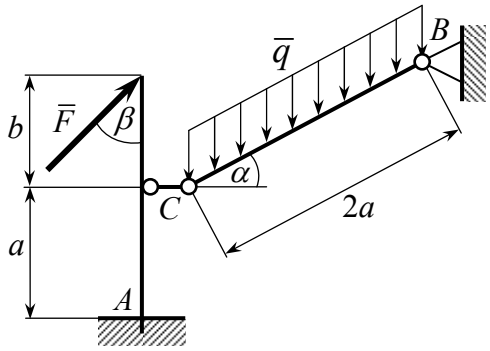
115



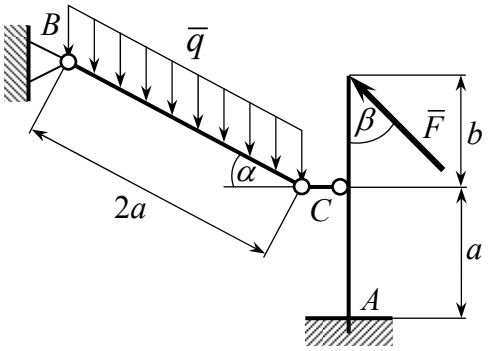
116



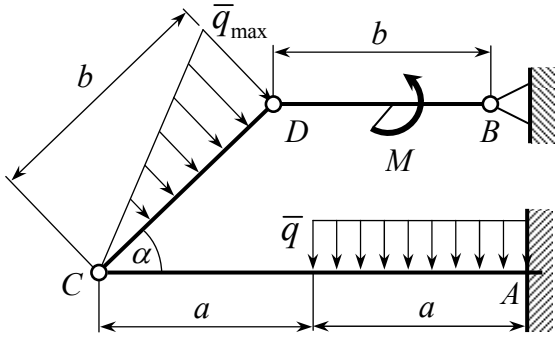
215



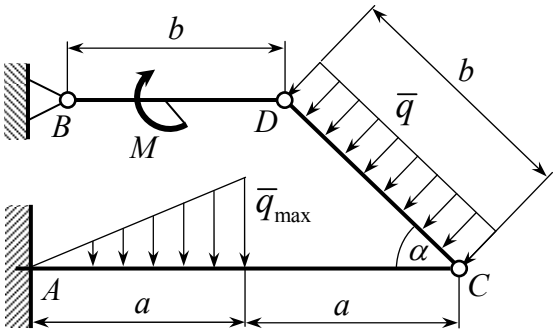
216



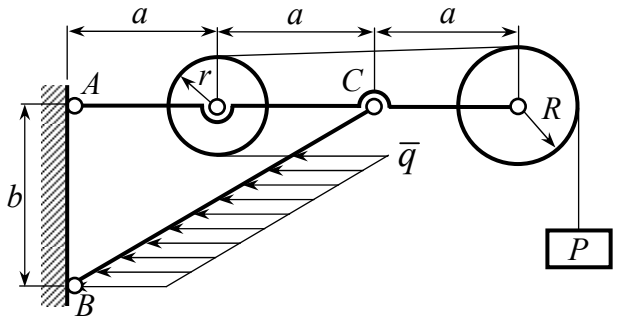
315



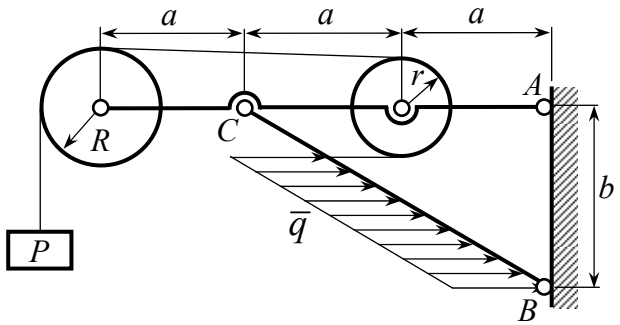
316



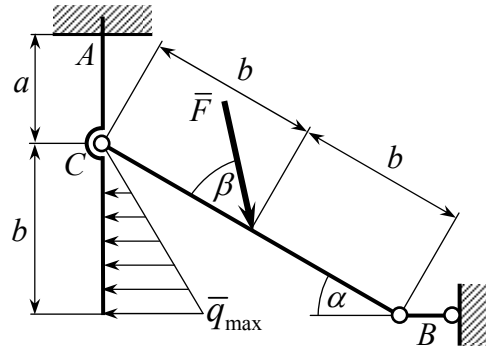
415



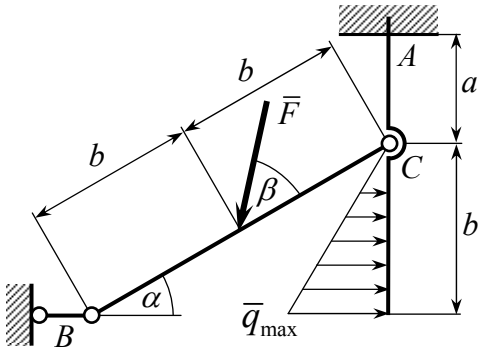
416



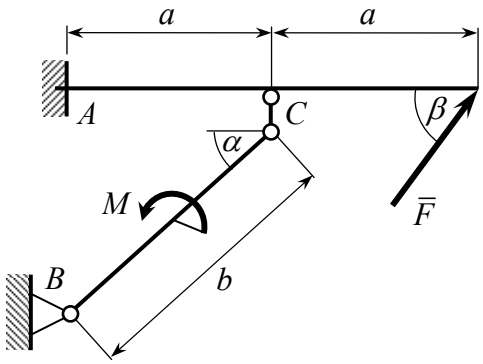
117



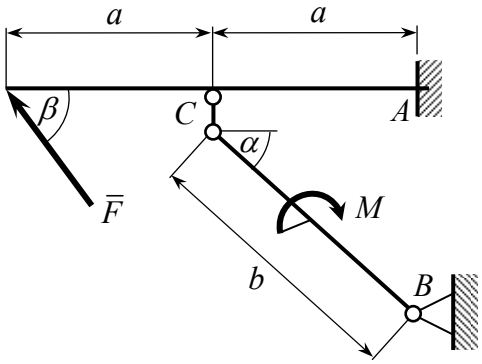
118



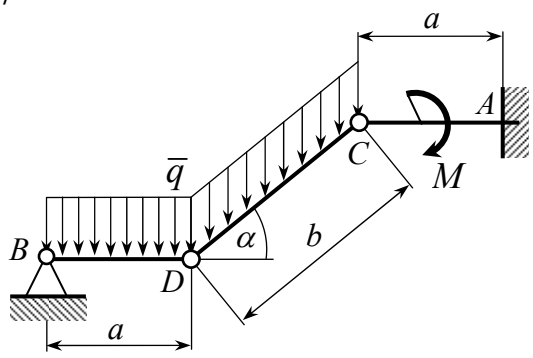
217



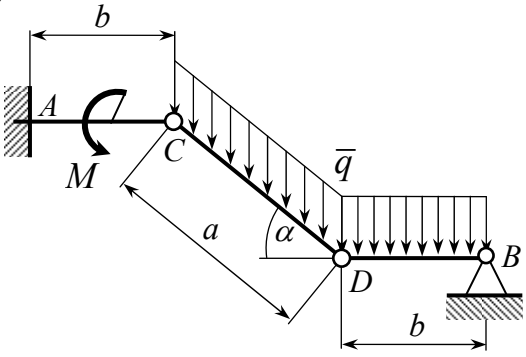
218



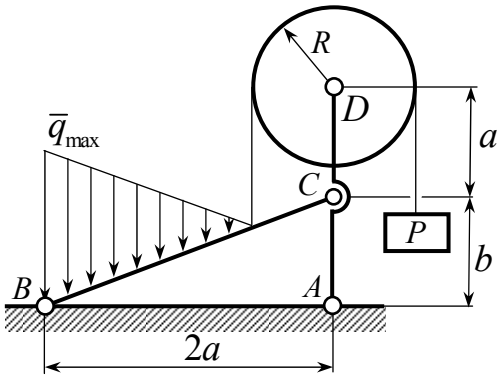
317



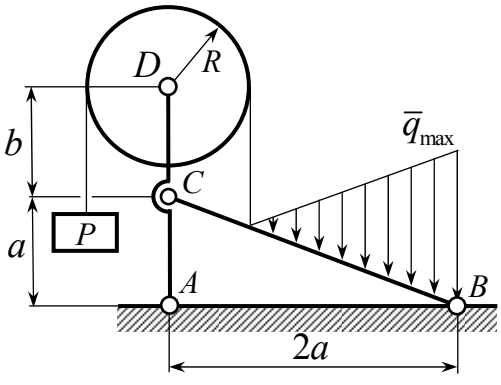
318



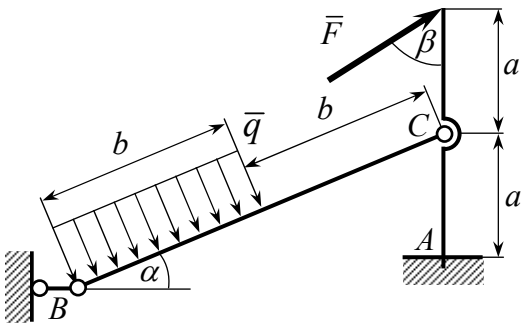
417



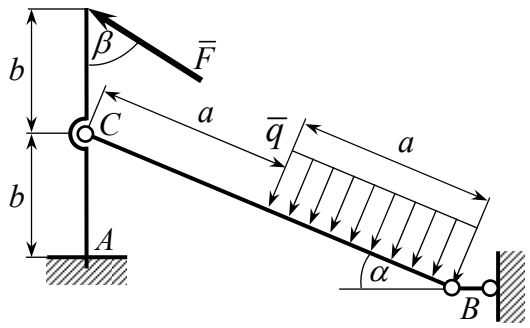
418



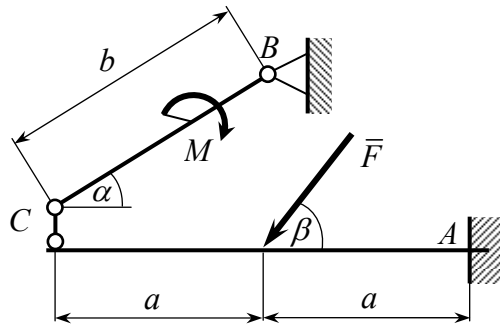
119



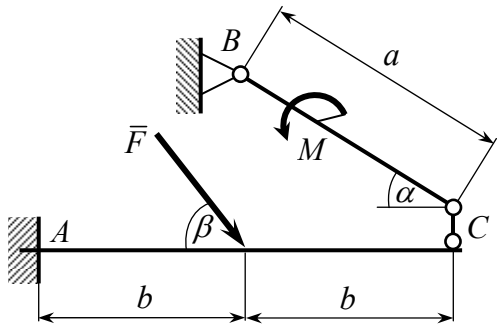
120



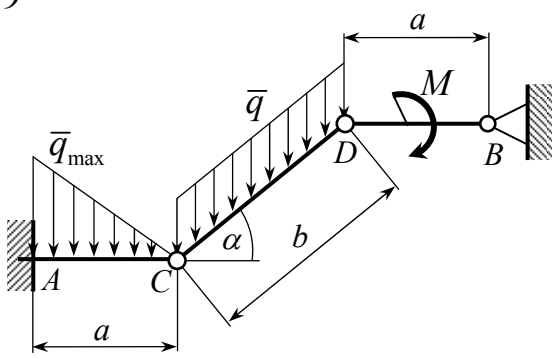
219



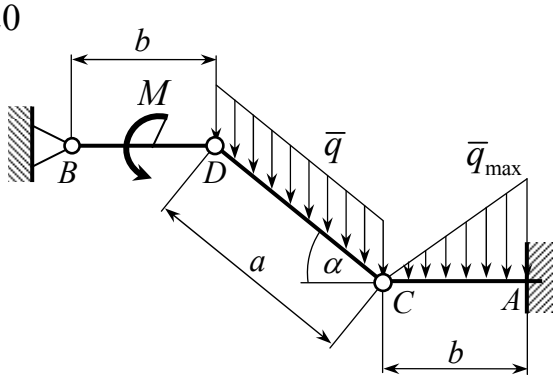
220



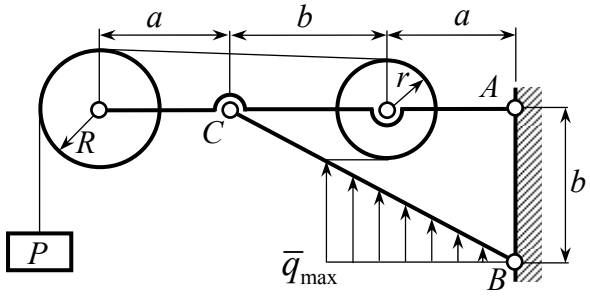
319



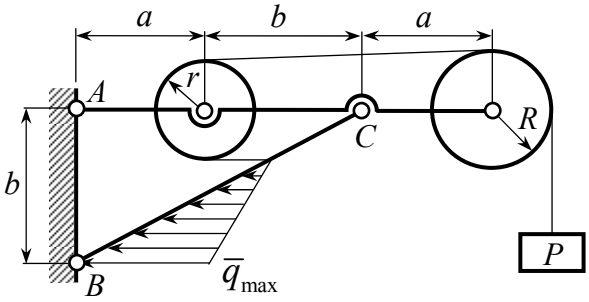
320



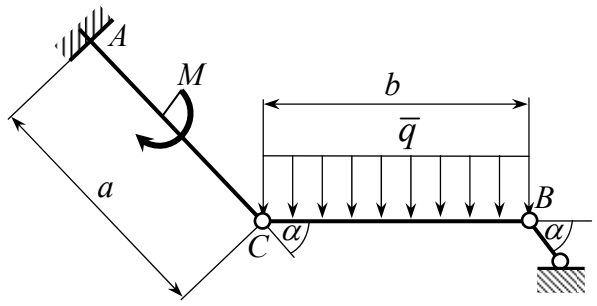
419



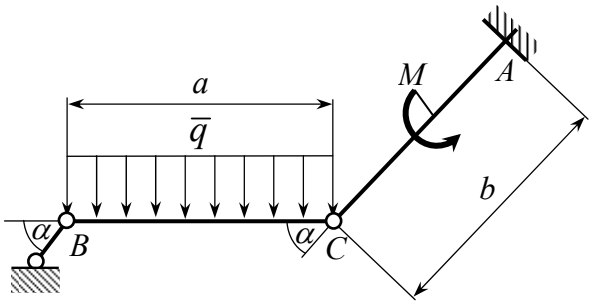
420



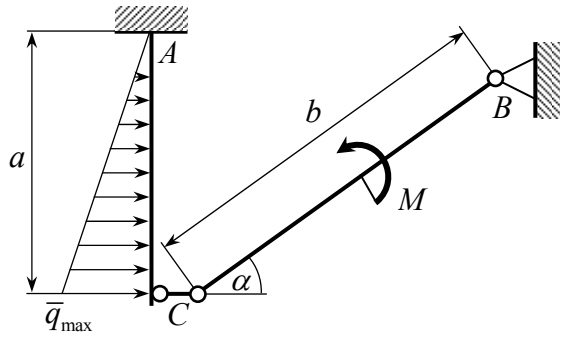
121



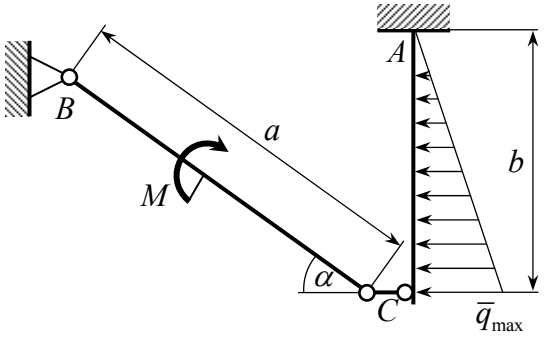
122



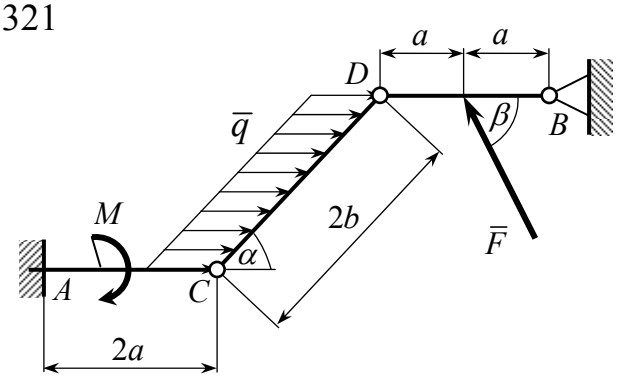
221



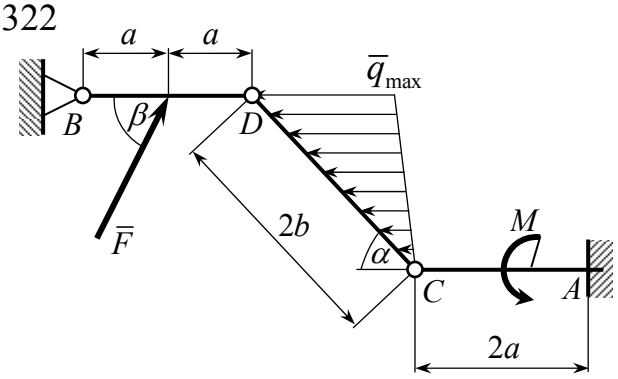
222



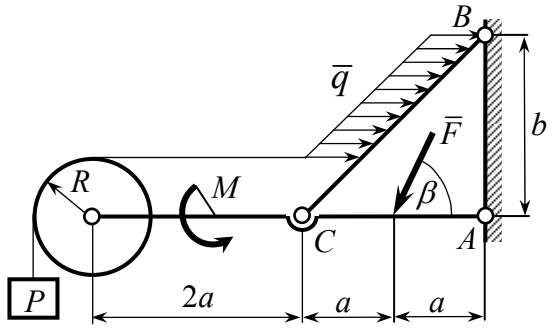
321



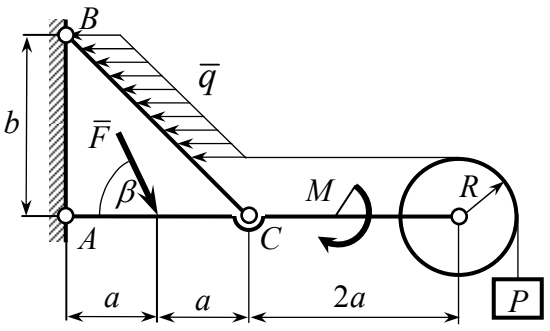
322



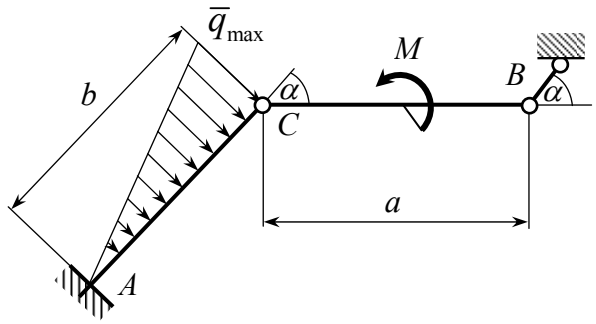
421



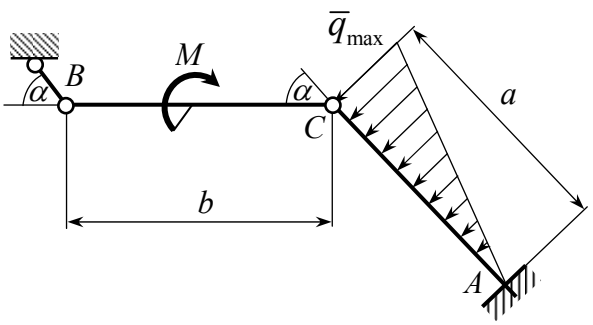
422



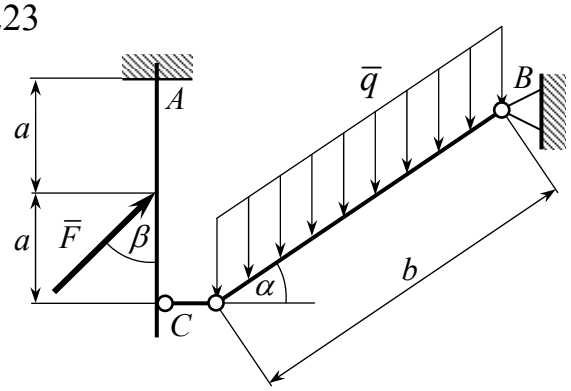
123



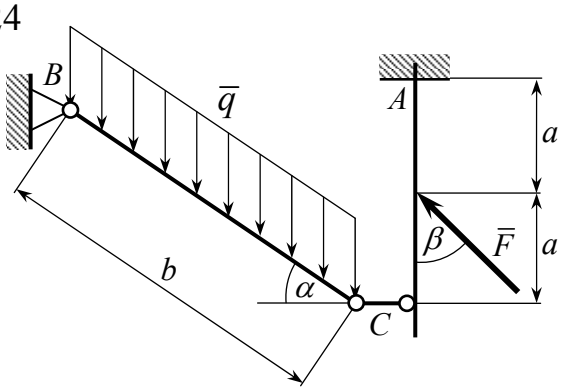
124



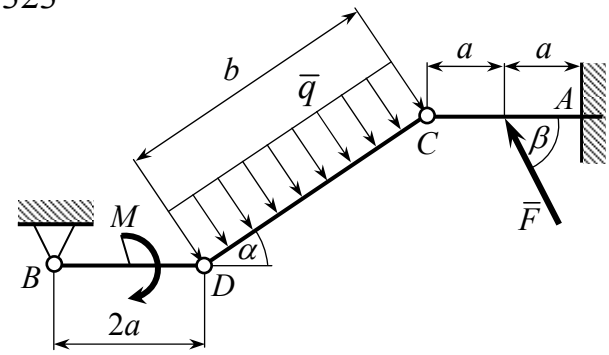
223



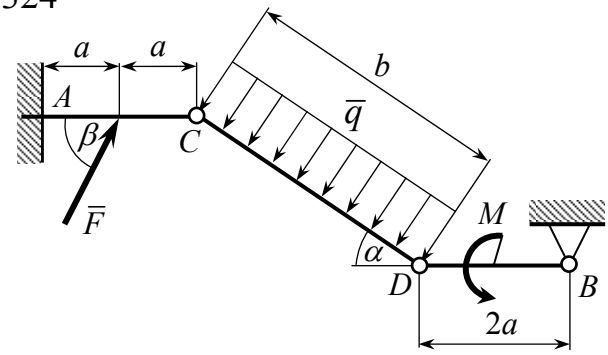
224



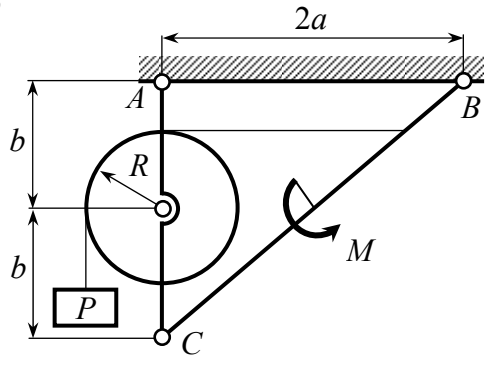
323



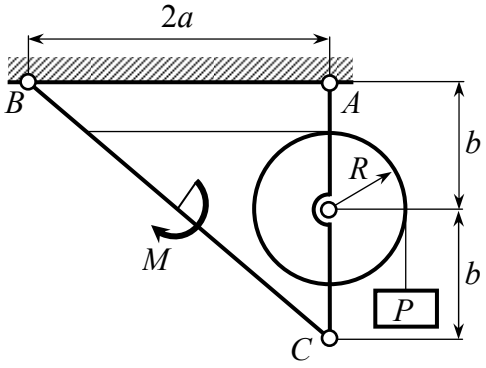
324



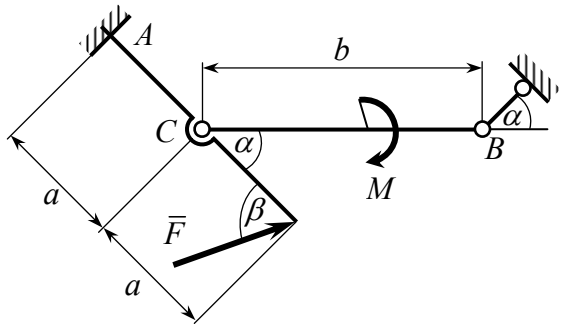
423



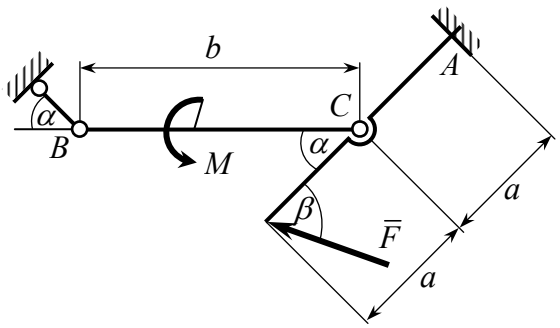
424



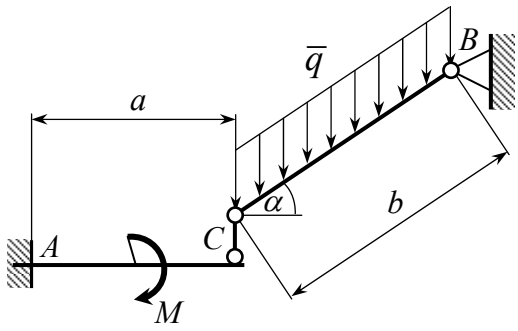
125



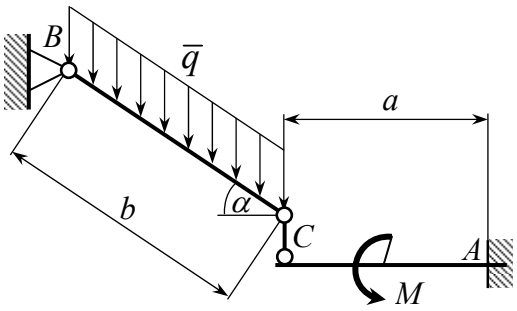
126



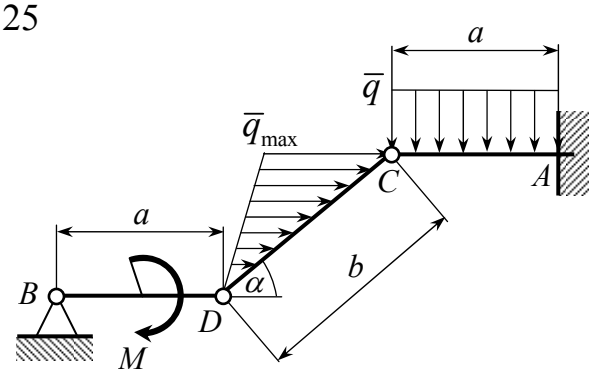
225



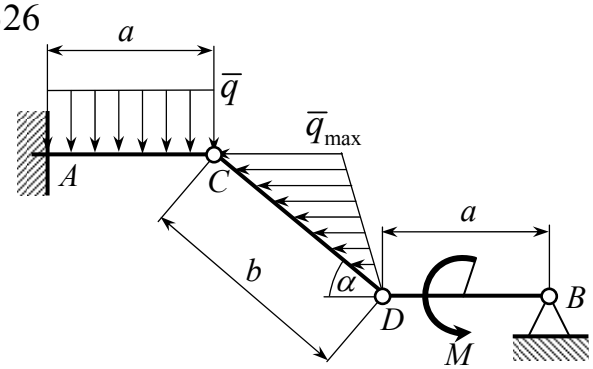
226



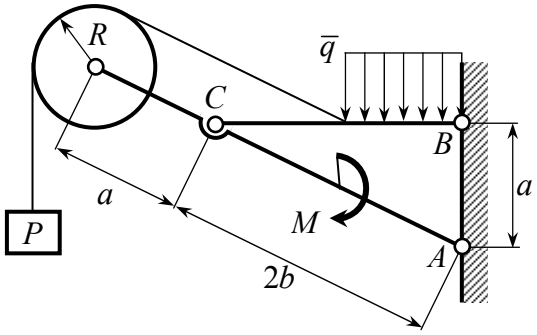
325



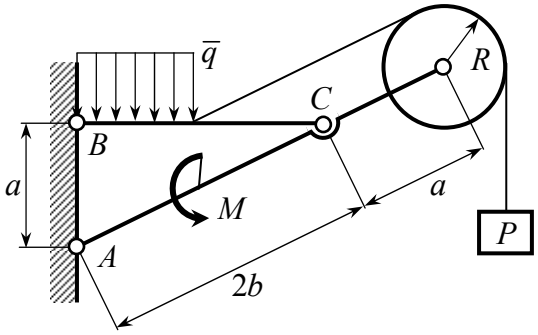
326



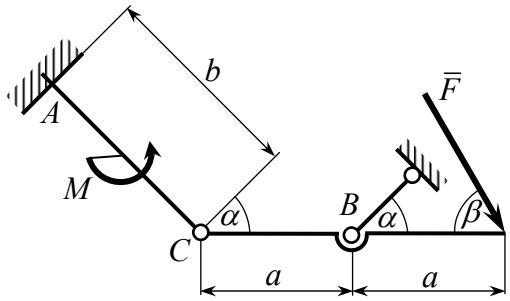
425



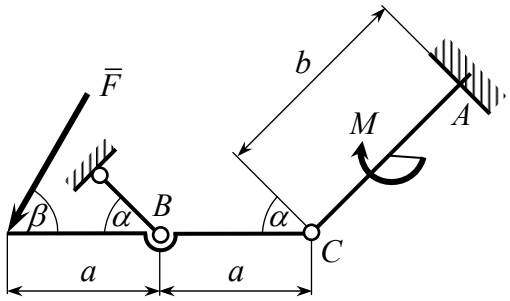
426



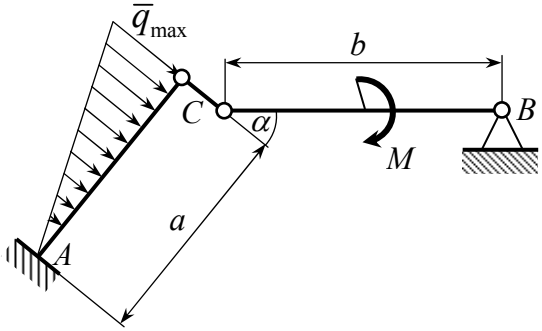
127



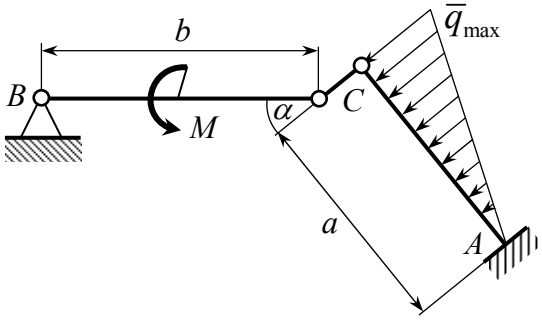
128



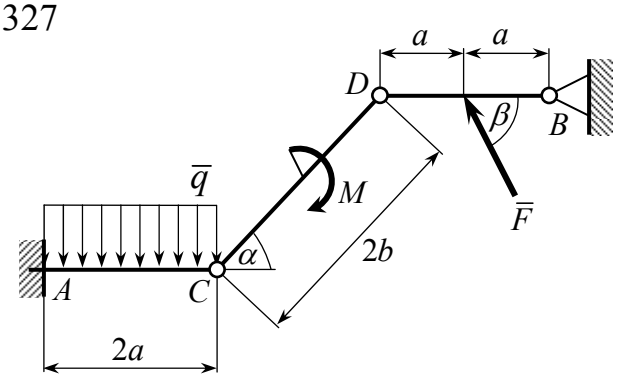
227



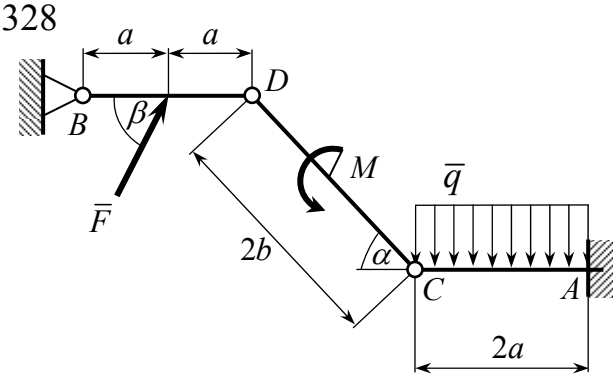
228



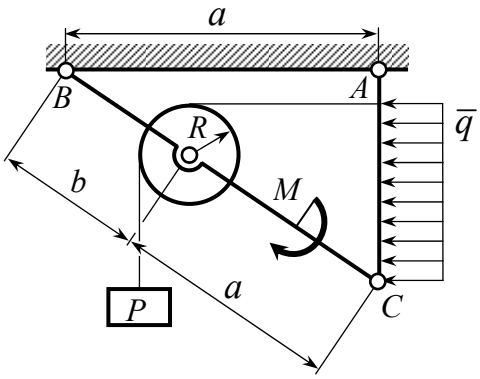
327



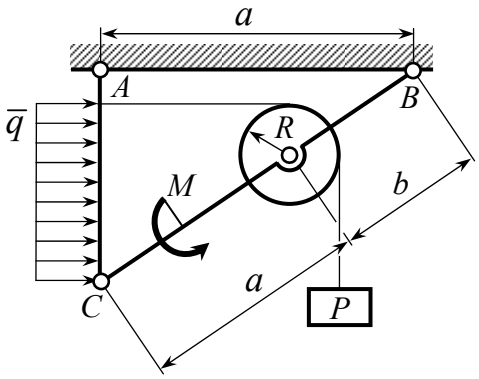
328



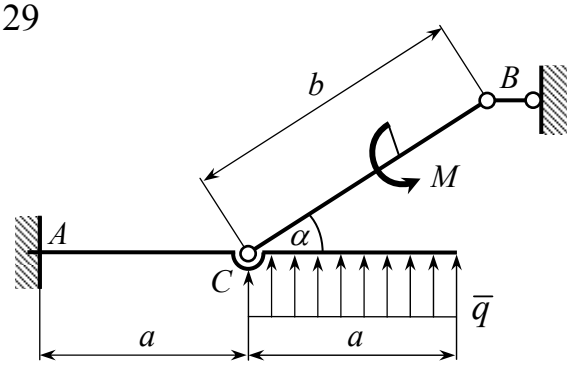
427



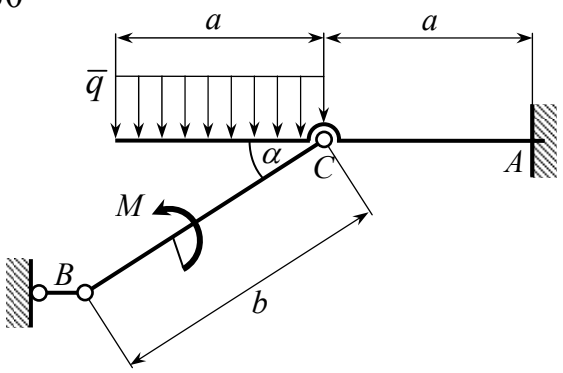
428



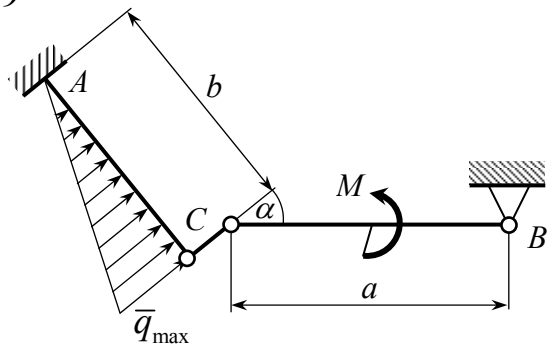
129



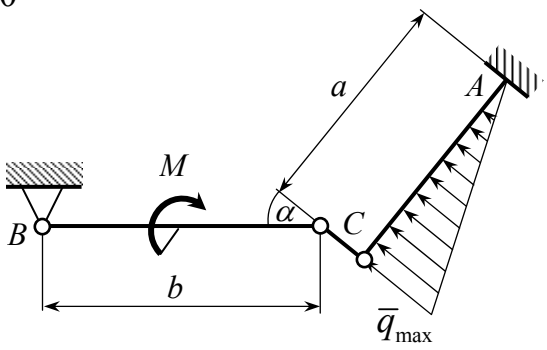
130



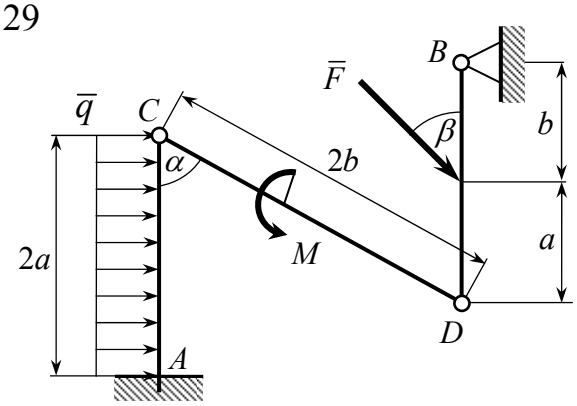
229



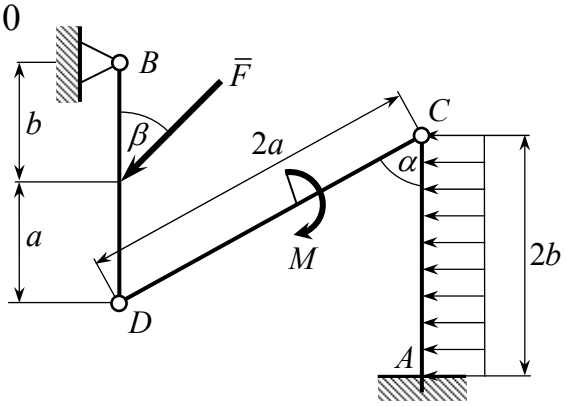
230



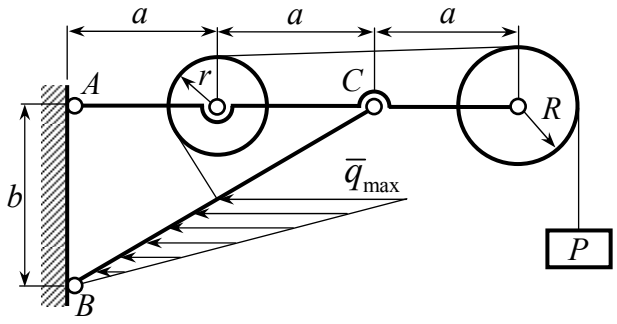
329



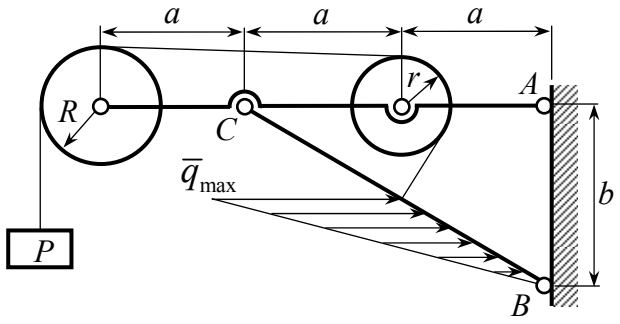
330



429



430



№	F *кН*	P *кН*	q $кН/м$	q_{max} $кН/м$	M *кН м*	a *м*	b *м*	r *м*	R *м*	α *град*	β *град*
1	14	11	4,0	9,0	21	1,5	1,8	0,20	0,90	30	90
2	16	14	2,0	7,5	23	1,2	1,9	0,30	0,95	15	135
3	13	15	5,2	8,0	23	1,3	1,1	0,30	0,55	60	30
4	18	13	3,6	6,5	18	1,2	1,0	0,15	0,80	75	90
5	16	12	2,8	7,0	25	1,4	1,0	0,15	0,85	45	150
6	12	10	5,2	8,0	22	1,1	1,1	0,15	0,90	30	75
7	15	14	4,4	9,5	25	1,1	1,5	0,15	1,00	60	60
8	13	8	4,0	5,5	16	1,3	1,8	0,15	0,80	15	15
9	13	14	5,6	9,5	22	1,4	1,2	0,20	0,90	30	135
10	16	13	5,2	5,5	16	1,4	1,2	0,25	0,90	45	150
11	18	8	4,4	6,0	20	1,0	1,4	0,25	0,55	45	150
12	16	6	2,4	9,5	21	1,3	1,9	0,25	0,70	45	135
13	16	7	2,8	8,5	21	1,3	1,5	0,25	0,55	30	75
14	18	8	4,0	7,0	16	1,5	1,5	0,10	0,70	30	15
15	13	14	5,2	9,0	19	1,0	1,3	0,15	0,95	30	30
16	13	11	3,6	9,5	25	1,4	1,0	0,10	0,85	60	135
17	13	11	3,2	9,0	20	1,3	1,4	0,20	1,00	45	45
18	10	14	3,2	5,0	20	1,5	1,0	0,30	0,50	75	120
19	19	7	4,4	9,0	17	1,4	1,8	0,20	0,75	30	30
20	14	12	2,8	5,5	23	1,1	1,8	0,15	0,60	60	45
21	18	7	5,2	7,0	21	1,2	1,1	0,15	0,70	60	60
22	17	8	6,0	6,0	21	1,1	2,0	0,25	0,70	45	135
23	11	9	4,8	9,5	23	1,2	1,0	0,10	0,65	60	45
24	17	13	5,6	7,5	20	1,1	1,1	0,20	0,65	60	60
25	18	13	4,4	6,0	25	1,2	1,9	0,15	0,55	60	150
26	17	6	5,6	8,0	23	1,3	1,6	0,25	0,75	45	60
27	19	11	2,4	8,5	21	1,3	1,2	0,25	0,75	45	150
28	20	8	4,8	5,5	22	1,2	1,1	0,10	0,80	60	150
29	13	8	3,2	9,5	18	1,1	1,6	0,25	0,60	60	75
30	12	6	4,8	7,5	24	1,0	1,8	0,20	0,90	45	150

С 3. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В статике наряду с равновесием составных конструкций, т. е. механических систем, у которых число степеней свободы равно нулю, рассматривается равновесие механизмов – систем, число степеней свободы, которых отлично от нуля. Среди них можно выделить класс плоских шарнирных механизмов с одной степенью свободы.

Важной задачей статики плоских шарнирных механизмов является определение не только реакций внешних и внутренних связей, но и нахождение систем сил обеспечивающих их равновесие. Основным способом их нахождения, как и ранее, является способ расчленения, при котором рассматривается равновесие отдельных звеньев механизма.

Цель курсовой работы

Целью курсовой работы является выработка навыков расчета и исследования равновесия плоских шарнирных механизмов.

Содержание курсовой работы

Объектом исследования является плоский шарнирный механизм, расположенный в вертикальной плоскости и представляющий собой совокупность абсолютно жестких стержневых звеньев, соединенных друг с другом идеальными шарнирами. Звенья механизма моделируются сплошными однородными стержнями, массы которых пропорциональны их длине. Погонная плотность каждого стержня равна ρ.

Схемы механизмов и таблицы исходных данных приведены в альбоме заданий, представленном в работе К1.

Задаваемыми параметрами являются:

- геометрические размеры звеньев механизма;
- массовые характеристики механизма.

Требуется:

1. Определить:

- условия равновесия механизма под действием системы внешних сил в произвольном положении;
- реакции внешних и внутренних связей;
- величину уравновешивающего момента пары сил M (уравновешивающей силы $\overline{P}$), обеспечивающую равновесие механизма в произвольном положении.

2. Исследовать влияние положения ведущего звена на величины:

- реакций внешних и внутренних связей,
- уравновешивающего момента M (уравновешивающей силы $\overline{P}$), действующего на произвольное звено

и выбрать оптимальный вариант его приложения

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работ аналогичен порядку работ на равновесие составных конструкций.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Плоский шарнирный механизм (рис. 1), расположенный в вертикальной плоскости, находится в равновесии под действием внешнего момента M (внешней силы $\overline{P}$), приложенного к произвольному звену.

Определить реакции внешних и внутренних связей, а также величину уравновешивающего момента M (внешней силы $\overline{P}$) в произвольном положении механизма. Рассмотреть следующие варианты приложения внешних сил: $M = M_{OA}$, $M = M_{AB}$, $M = M_{O_1B}$, $M = M_{KD}$, $P_y = P_D$.

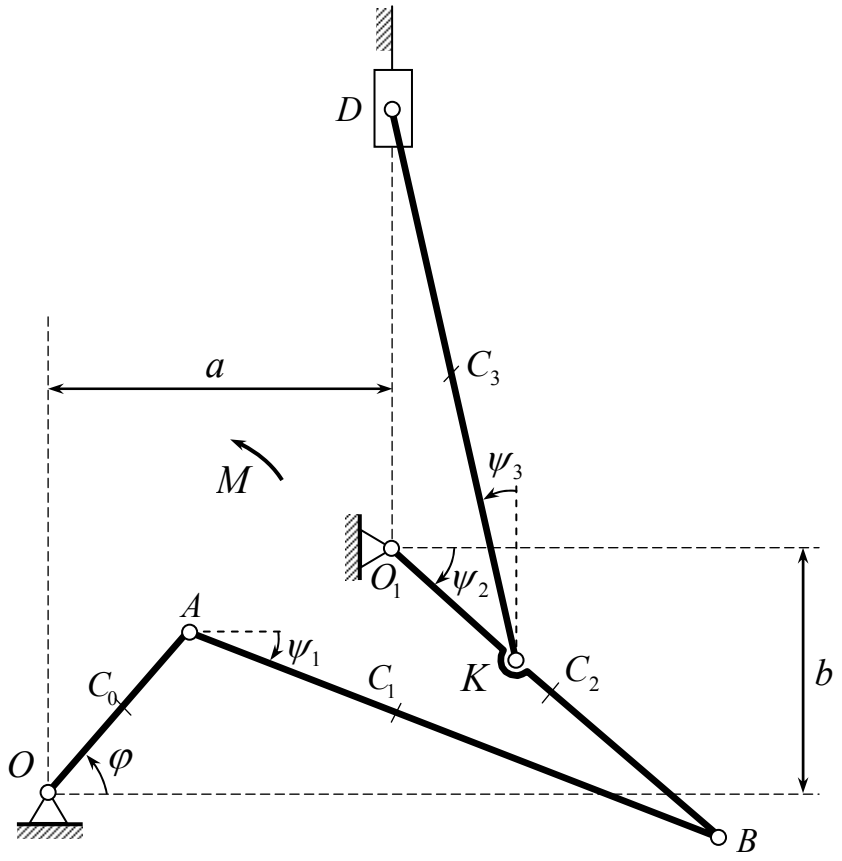


Рис. 1 Схема плоского механизма.

Исходные данные

$OA = l_0 = 15$ см, $AB = l_1 = 97$ см, $O_1B = l_2 = 66$ см, $O_1K = 25$ см,
$KD = l_3 = 86$ см, $a = 50$ см, $b = 37$ см,
$\rho = 10$ кг/м, $m_i = \rho\, l_i$, $i = \overline{0, 3}$, $m_4 = 20$ кг.

1. Составление уравнений равновесия

Для решения поставленной задачи выберем правую систему координат, начало которой расположим в подшипнике O. Рассмотрим механизм в произвольном положении и изобразим силы, действующие на него (рис. 2): $\bar{G}_0,\ \bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4$ — силы тяжести звеньев; $M = M_{OA}$ — уравновешивающий момент, приложенный к ведущему звену OA; $\bar{R}_O = \bar{X}_O + \bar{Y}_O, \bar{R}_{O_1} = \bar{X}_{O_1} + \bar{Y}_{O_1}$ — реакции шарнирных опор, $\bar{N}_4$ – нормальная реакция направляющих ползуна.

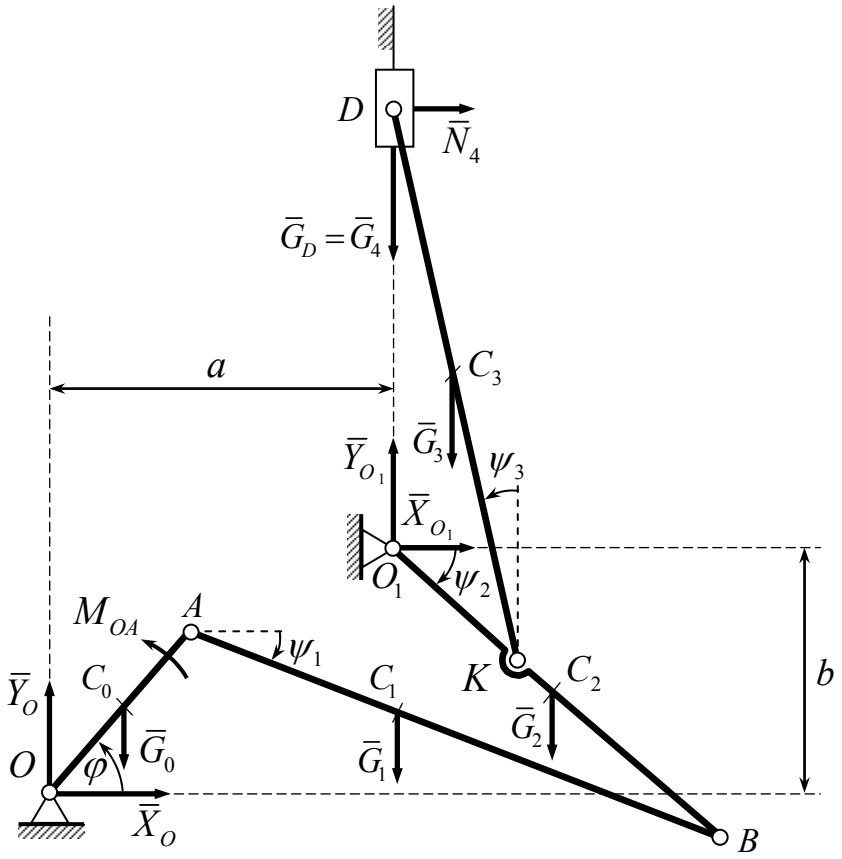


Рис. 2 Расчетная схема механизма.

На механизм действует произвольная плоская система сил, для которой можно записать не более трех условий равновесия. Неизвестных сил, действующих на механизм шесть: M_{OA}, $\bar{R}_O = \bar{X}_O + \bar{Y}_O, \bar{R}_{O_1} = \bar{X}_{O_1} + \bar{Y}_{O_1}$ и $\bar{N}_4$.

Расчленим плоский шарнирный механизм по шарнирам на отдельные звенья и изобразим реакции внешних и внутренних связей каждого звена и рассмотрим равновесие всех звеньев (рис. 3).

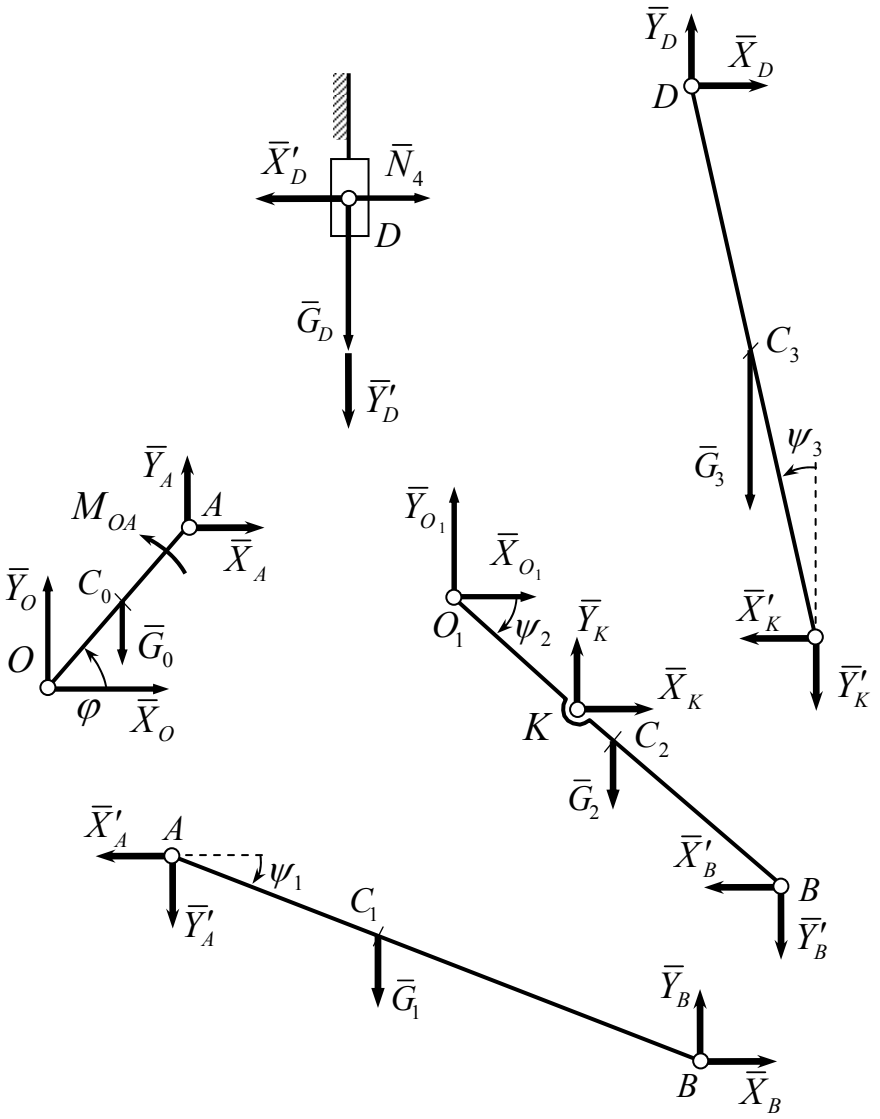


Рис. 3 Расчетные схемы звеньев плоского механизма.

На кривошип OA действуют внешние силы $\bar{R}_O = \bar{X}_O + \bar{Y}_O, \bar{G}_0$, пара сил с моментом M_{OA}, а также реакция шарнира A $-\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$.

На шатун AB кроме силы тяжести $\bar{G}_1$ действуют реакции $\bar{R}'_A = -\bar{R}_A$, $\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B$.

На кривошип O_1B действуют силы $\bar{R}_{O_1} = \bar{X}_{O_1} + \bar{Y}_{O_1}, \bar{G}_2$ и внутренние реакции $\bar{R}_K = \bar{X}_K + \bar{Y}_K, \bar{R}'_B = -\bar{R}_B$.

На шатун KD кроме силы тяжести $\bar{G}_3$ действуют реакции $\bar{R}'_K = -\bar{R}_K$, $\bar{R}_D = \bar{X}_D + \bar{Y}_D$.

На ползун действуют силы $\bar{G}_4, \bar{N}_4$ и реакция $\bar{R}'_D = -\bar{R}_D$.

Таким образом, на звенья механизма действует четырнадцать неизвестных сил: пара сил M_{OA}, а также реакции внешних и внутренних связей $\bar{R}_O = \bar{X}_O + \bar{Y}_O$, $\bar{R}_{O_1} = \bar{X}_{O_1} + \bar{Y}_{O_1}$, $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$, $\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B$, $\bar{R}_K = \bar{X}_K + \bar{Y}_K$, $\bar{R}_D = \bar{X}_D + \bar{Y}_D$ и $\bar{N}_4$.

Звенья OA, AB, O_1B и KD механизма находятся в равновесии под действием произвольных плоских систем сил, а ползун $D-$ под действием плоской сходящейся системы сил. Для каждого звена запишем следующие условия равновесия:

Кривошип OA $$\sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_O\left(\bar{F}_k\right) = 0; \tag{42}$$

Шатун AB $$\sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_A\left(\bar{F}_k\right) = 0; \tag{43}$$

Кривошип O_1B $$\sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_{O_1}\left(\bar{F}_k\right) = 0; \tag{44}$$

Шатун KD $$\sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_K\left(\bar{F}_k\right) = 0; \tag{45}$$

Ползун D $$\sum_k \bar{F}_k = 0. \tag{46}$$

Каждое из условий, обеспечивающее равенства нулю главного вектора системы сил $\sum_k \bar{F}_k = 0$, на плоскости эквивалентно двум уравнениям равновесия, а условия равновесия моментов $\sum_k \bar{M}_i\left(\bar{F}_k\right) = 0$, на плоскости эквивалентно одному уравнению равновесия. Таким образом, условиям равновесия в векторной форме (42) – (46) соответствуют 14 линейных алгебраических уравнений равновесия с 14-ю неизвестными, и задача является статически определимой.

Составляя уравнения равновесия, соответствующие условиям (42) – (46), в векторной форме получим:

Кривошип OA $$\begin{aligned} &\sum_k \bar{F}_k = 0; && \bar{R}_O + \bar{R}_A + \bar{G}_0 = 0, \\ &\sum_k \bar{M}_O\left(\bar{F}_k\right) = 0; && \bar{M}_{OA} + \bar{\rho}_{C_0} \times \bar{G}_0 + \bar{\rho}_A \times \bar{R}_A = 0; \end{aligned} \tag{47}$$

Шатун AB

$$\sum_k \bar{F}_k = 0; \qquad \bar{R}'_A + \bar{R}_B + \bar{G}_1 = 0, \tag{48}$$
$$\sum_k \bar{M}_A\left(\bar{F}_k\right) = 0; \quad \bar{\rho}_{C_1} \times \bar{G}_1 + \bar{\rho}_{AB} \times \bar{R}_B = 0;$$

Кривошип O_1B

$$\sum_k \bar{F}_k = 0; \qquad \bar{R}_{O_1} + \bar{R}_K + \bar{R}'_B + \bar{G}_2 = 0, \tag{49}$$
$$\sum_k \bar{M}_{O_1}\left(\bar{F}_k\right) = 0; \quad \bar{\rho}_{C_2} \times \bar{G}_2 + \bar{\rho}_K \times \bar{R}_K + \bar{\rho}_{O_1B} \times \bar{R}'_B = 0;$$

Шатун KD

$$\sum_k \bar{F}_k = 0; \qquad \bar{R}'_K + \bar{R}_D + \bar{G}_3 = 0, \tag{50}$$
$$\sum_k \bar{M}_K\left(\bar{F}_k\right) = 0; \quad \bar{\rho}_{C_3} \times \bar{G}_3 + \bar{\rho}_{KD} \times \bar{R}_D = 0;$$

Ползун D

$$\sum_k \bar{F}_k = 0; \qquad \bar{R}'_D + \bar{N}_4 + \bar{G}_4 = 0. \tag{51}$$

Здесь $\bar{\rho}_i$ – радиус-векторы, определяющие положения соответствующих точек механизма на плоскости.

Ориентация векторов $\bar{\rho}_i$ на плоскости задается с помощью углов φ и ψ_k $k = \overline{1,3}$, которые можно определить с помощью уравнений геометрических связей, записанных для узловых точек плоского механизма.

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором реализована процедура составления уравнений равновесия в символьном виде.

Составление уравнений равновесия звеньев плоского шарнирного механизма

Формирование радиус-векторов, определяющих точки приложения сил

$$r_A(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_0 \qquad r_{C0}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_0}{2} \qquad r_{O1}(\varphi) := \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{AB}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(\varphi)) \\ \sin(\varphi_1(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_1 \qquad \rho_{C1}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(\varphi)) \\ \sin(\varphi_1(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_1}{2} \qquad \rho_K(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2(\varphi)) \\ \sin(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot O1K$$

$$\rho_B(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2(\varphi)) \\ \sin(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_2 \qquad \rho_{C2}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2(\varphi)) \\ \sin(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_2}{2} \qquad \rho_{C3}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3(\varphi)) \\ \sin(\varphi_3(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_3}{2}$$

$$\rho_D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3(\varphi)) \\ \sin(\varphi_3(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_3 \qquad r_D(\varphi) := \begin{pmatrix} a \\ y_D(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Формирование векторов активных сил

$$G_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_0 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_3 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_4 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Формирование векторов неизвестных сил и реакций связей

$$R_O := \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_A := \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_{O1} := \begin{pmatrix} X_{O1} \\ Y_{O1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_B := \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_K := \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_D := \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N_4 := \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M_{OA} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \qquad R'_A := -R_A$$

$$R'_B := -R_B \qquad R'_K := -R_K \qquad R'_D := -R_D$$

Вычисление главных векторов и главных моментов внешних сил, действующих на звенья плоского механизма

Звено $\qquad \bar{P} = \sum_k \bar{F}_k \qquad\qquad \bar{M} = \sum_k \bar{M}\left(\bar{F}_k\right)$

OA	$P_{OA} := R_O + R_A + G_0$	$M_O := M_{OA} + r_A(\varphi) \times R_A + r_{C0}(\varphi) \times G_0$
AB	$P_{AB} := G_1 + R_B + R'_A$	$M_A := \rho_{C1}(\varphi) \times G_1 + \rho_{AB}(\varphi) \times R_B$
O_1B	$P_{O1B} := R_{O1} + R_K + G_2 + R'_B$	$M_{O1} := \rho_K(\varphi) \times R_K + \rho_{C2}(\varphi) \times G_2 + \rho_B(\varphi) \times R'_B$
KD	$P_{KD} := G_3 + R'_K + R_D$	$M_K := \rho_{C3}(\varphi) \times G_3 + \rho_D(\varphi) \times R_D$
D	$P_D := G_4 + R'_D + N_4$	

Формирование уравнений равновесия

$$UR := \left(P_{OA_1} \; P_{OA_2} \; M_{O_3} \; P_{AB_1} \; P_{AB_2} \; M_{A_3} \; P_{O1B_1} \; P_{O1B_2} \; M_{O1_3} \; P_{KD_1} \; P_{KD_2} \; M_{K_3} \; P_{D_1} \; P_{D_2}\right)$$

Формирование системы уравнений равновесия

$$UR^{T} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} X_A + X_O \\ Y_A + Y_O - g\cdot m_0 \\ M - L_0\cdot X_A\cdot\sin(\varphi) + L_0\cdot Y_A\cdot\cos(\varphi) - \frac{L_0\cdot g\cdot m_0\cdot\cos(\varphi)}{2} \\ X_B - X_A \\ Y_B - Y_A - g\cdot m_1 \\ L_1\cdot Y_B\cdot\cos(\varphi_1(\varphi)) - L_1\cdot X_B\cdot\sin(\varphi_1(\varphi)) - \frac{L_1\cdot g\cdot m_1\cdot\cos(\varphi_1(\varphi))}{2} \\ X_K - X_B + X_{O1} \\ Y_K - Y_B + Y_{O1} - g\cdot m_2 \\ L_2\cdot X_B\cdot\sin(\varphi_2(\varphi)) - L_2\cdot Y_B\cdot\cos(\varphi_2(\varphi)) - O1K\cdot X_K\cdot\sin(\varphi_2(\varphi)) + O1K\cdot Y_K\cdot\cos(\varphi_2(\varphi)) - \frac{L_2\cdot g\cdot m_2\cdot\cos(\varphi_2(\varphi))}{2} \\ X_D - X_K \\ Y_D - Y_K - g\cdot m_3 \\ L_3\cdot Y_D\cdot\cos(\varphi_3(\varphi)) - L_3\cdot X_D\cdot\sin(\varphi_3(\varphi)) - \frac{L_3\cdot g\cdot m_3\cdot\cos(\varphi_3(\varphi))}{2} \\ N - X_D \\ -Y_D - g\cdot m_4 \end{pmatrix}$$

Решение полученной системы уравнений может быть найдено в Mathcad с помощью блока решений *Given – Find* . Однако наиболее эффективным способом решения и анализа результатов вычислений систем линейных алгебраических уравнений является матричный метод. Для его применения представим уравнения равновесия в матричной форме:

$$A \cdot R = B,$$

где A – матрица коэффициентов при неизвестных величинах, R – вектор неизвестных, B – вектор правой части (известных слагаемых в уравнениях равновесия) системы алгебраических уравнений (рис. 4).

Этому уравнению соответствует решение вида $R = A^{-1} \cdot B.$

При этом определитель матрицы A не должен быть равен нулю

$$\det(A) \neq 0.$$

Уравнения равновесия для других вариантов приложения уравновешивающих сил составляются аналогично.

$$B(\varphi) := \left(0 \quad m_0 \cdot g \quad \frac{1}{2} \cdot L_0 \cdot g \cdot m_0 \cdot \cos(\varphi) \quad 0 \quad m_1 \cdot g \quad \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot g \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_1(\varphi)) \quad 0 \quad m_2 \cdot g \quad \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot g \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) \quad 0 \quad m_3 \cdot g \quad \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot g \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi)) \quad 0 \quad m_4 \cdot g \right)^T$$

$$A(\varphi) := \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -L_0 \cdot \sin(\varphi) & L_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -L_1 \cdot \sin(\varphi_1(\varphi)) & L_1 \cdot \cos(\varphi_1(\varphi)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & L_2 \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) & -L_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) & 0 & 0 & -O1K \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) & O1K \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi)) & L_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi)) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

рис. 2. Рис. 4. Матрица коэффициентов A и вектор правой части B.

2. Составление уравнений геометрических связей

Рассматриваемый механизм представляет собой механическую систему с одной степенью свободы. Положение его звеньев будем определять с помощью угла поворота ведущего звена φ. Углы, характеризующие ориентацию звеньев механизма на плоскости $\varphi_k\ (k=1,2,3)$, отсчитываемые от горизонтальной оси Ox в положительном направлении (см. задание К1 рис. 2 разд. 1), связаны с острыми углами ψ_k, изображенными на рисунках 1, 2 и 3, соотношениями

$$\varphi_1 = 2\pi + \psi_1, \quad \varphi_2 = 2\pi + \psi_2, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \psi_1.$$

Уравнения геометрических связей, позволяющие определить положение звеньев механизма на плоскости в зависимости от угла поворота ведущего звена имеют вид (см. задание К1, разд. 1):

$$\begin{aligned} &AB\cos(\varphi_1) - O_1B\cos(\varphi_2) = a - OA\cos(\varphi),\\ &AB\ \sin(\varphi_1) - O_1B\sin(\varphi_2) = b - OA\sin(\varphi),\\ &O_1K\cos(\varphi_2) + KD\cos(\varphi_3) = 0,\\ &O_1K\ \sin(\varphi_2) + KD\sin(\varphi_3) + b = y_D. \end{aligned} \tag{52}$$

Решение системы уравнений (52) было получено ранее (см. К1, разд. 1):

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 - O_1A^2 - AB^2}{2\ AB\ \ O_1A}\right), \quad \varphi_2 = \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 + O_1A^2 - AB^2}{2\ O_1B\ \ O_1A}\right),\\ &\varphi_3 = \arccos\left[-\frac{O_1K}{KD}\cos(\varphi_2)\right], \qquad y_D = b + O_1K\sin(\varphi_2) + KD\sin(\varphi_3). \end{aligned} \tag{53}$$

где $O_1A = \sqrt{O_1A^2 + OA^2 - 2\,OA\cdot OO_1\cos(\varphi_O - \beta)}$, $OO_1 = \sqrt{a^2+b^2}$, $\beta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$,

$$\cos\alpha = \frac{OA\cos(\varphi) - a}{O_1A}, \quad \sin\alpha = \frac{OA\sin(\varphi) - b}{O_1A}.$$

Выражения (53) позволяют определить положения всех узловых точек (шарнирных соединений) плоского механизма при произвольном значении угла поворота ведущего звена.

3. Результаты расчетов

Решение системы линейных алгебраических уравнений (47) – (51) совместно с выражениями (53) можно реализовать в пакете Mathcad, в котором для этого существует несколько способов [1, 10].

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором вычисления реакций внешних и внутренних связей механизма, а также величины уравновешивающего момента M (силы P), представлены матричным методом.

Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{OA}$ ***, приложенного к звену OA.***

Ввод исходных данных

$a := .50$ $b := .37$ $OA := .15$ $O1K := .25$ $O1B := .66$

$KB := O1B - O1K$ $KD := .86$ $AB := .97$

$L_0 := OA$ $L_1 := AB$ $L_2 := O1B$ $L_3 := KD$

$g := 9.81$ $\rho := 10$

$m_0 := \rho \cdot OA$ $m_1 := \rho \cdot AB$ $m_2 := \rho \cdot O1B$ $m_3 := \rho \cdot KD$ $m_4 := 20$

$ORIGIN := 1$

Вычисление вспомогательных функций

$$\beta := \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \alpha(\varphi) := \operatorname{angle}(OA \cdot \cos(\varphi) - a, OA \cdot \sin(\varphi) - b)$$

$$O1A(\varphi) := \sqrt{a^2 + b^2 + OA^2 - 2 \cdot OA \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\varphi - \beta)}$$

Решение уравнений геометрических связей

$$\varphi_1(\varphi) := \alpha(\varphi) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1B^2 - AB^2 - O1A(\varphi)^2}{2 \cdot O1A(\varphi) \cdot AB}\right)$$

$$\varphi_2(\varphi) := \alpha(\varphi) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1A(\varphi)^2 + O1B^2 - AB^2}{2 \cdot O1A(\varphi) \cdot O1B}\right)$$

$$\varphi_3(\varphi) := \operatorname{acos}\left(-\frac{O1K}{KD} \cdot \cos\left(\varphi_2(\varphi)\right)\right)$$

$$y_D(\varphi) := b + O1K \cdot \sin\left(\varphi_2(\varphi)\right) + KD \cdot \sin\left(\varphi_3(\varphi)\right)$$

Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0\cdot\sin(\varphi) & L_0\cdot\cos(\varphi) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3\cdot\cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B(\varphi) := \begin{pmatrix} 0 \\ g\cdot m_0 \\ \frac{1}{2}\cdot L_0\cdot g\cdot m_0\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \\ g\cdot m_1 \\ \frac{1}{2}\cdot L_1\cdot g\cdot m_1\cdot\cos(\varphi_1(\varphi)) \\ 0 \\ g\cdot m_2 \\ \frac{1}{2}\cdot L_2\cdot g\cdot m_2\cdot\cos(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \\ g\cdot m_3 \\ \frac{1}{2}\cdot L_3\cdot g\cdot m_3\cdot\cos(\varphi_3(\varphi)) \\ 0 \\ g\cdot m_4 \end{pmatrix}$$

$$|A| \text{ simplify}\rightarrow L_1\cdot L_2\cdot L_3\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\sin(\varphi_3)$$

$$R(\varphi) := A(\varphi)^{-1}\cdot B(\varphi)$$

Формирование реакций внешних и внутренних связей

$X_O(\varphi) := R(\varphi)_1$ $Y_O(\varphi) := R(\varphi)_2$ $X_A(\varphi) := R(\varphi)_3$ $Y_A(\varphi) := R(\varphi)_4$

$X_B(\varphi) := R(\varphi)_5$ $Y_B(\varphi) := R(\varphi)_6$ $X_K(\varphi) := R(\varphi)_9$ $Y_K(\varphi) := R(\varphi)_{10}$

$Y_{O1}(\varphi) := R(\varphi)_8$ $X_{O1}(\varphi) := R(\varphi)_7$ $X_D(\varphi) := R(\varphi)_{11}$ $Y_D(\varphi) := R(\varphi)_{12}$

$N(\varphi) := R(\varphi)_{13}$ $M(\varphi) := R(\varphi)_{14}$

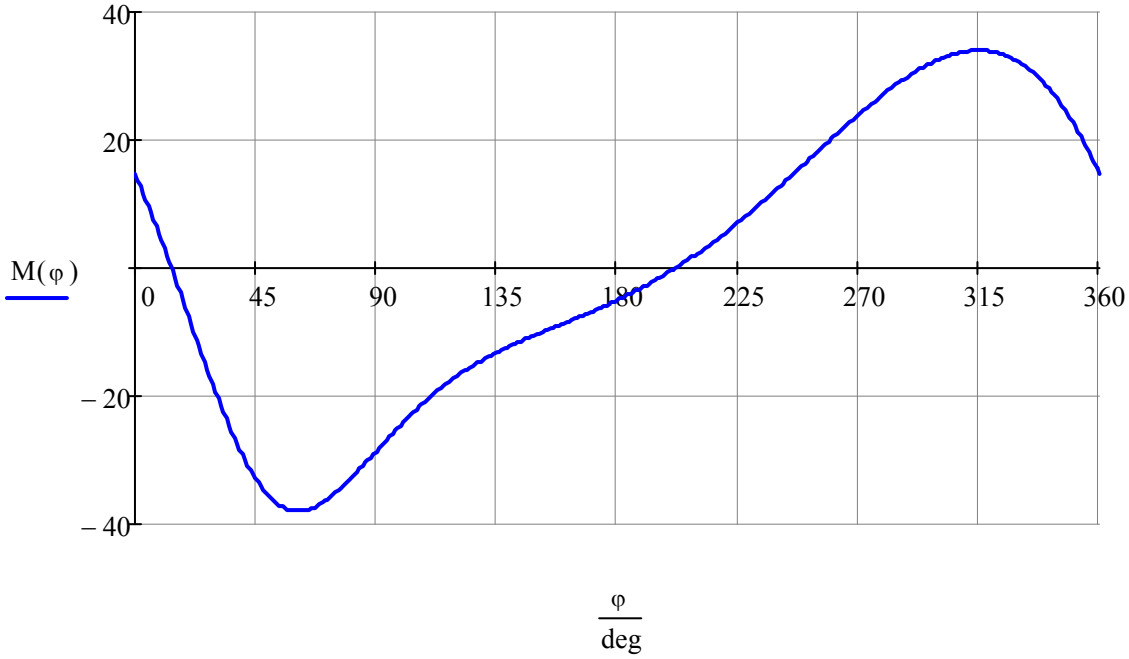
$$R_O(\varphi) := \begin{pmatrix} X_O(\varphi) \\ Y_O(\varphi) \end{pmatrix} \quad R_A(\varphi) := \begin{pmatrix} X_A(\varphi) \\ Y_A(\varphi) \end{pmatrix} \quad R_B(\varphi) := \begin{pmatrix} X_B(\varphi) \\ Y_B(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_K(\varphi) := \begin{pmatrix} X_K(\varphi) \\ Y_K(\varphi) \end{pmatrix} \quad R_{O1}(\varphi) := \begin{pmatrix} X_{O1}(\varphi) \\ Y_{O1}(\varphi) \end{pmatrix} \quad R_D(\varphi) := \begin{pmatrix} X_D(\varphi) \\ Y_D(\varphi) \end{pmatrix}$$

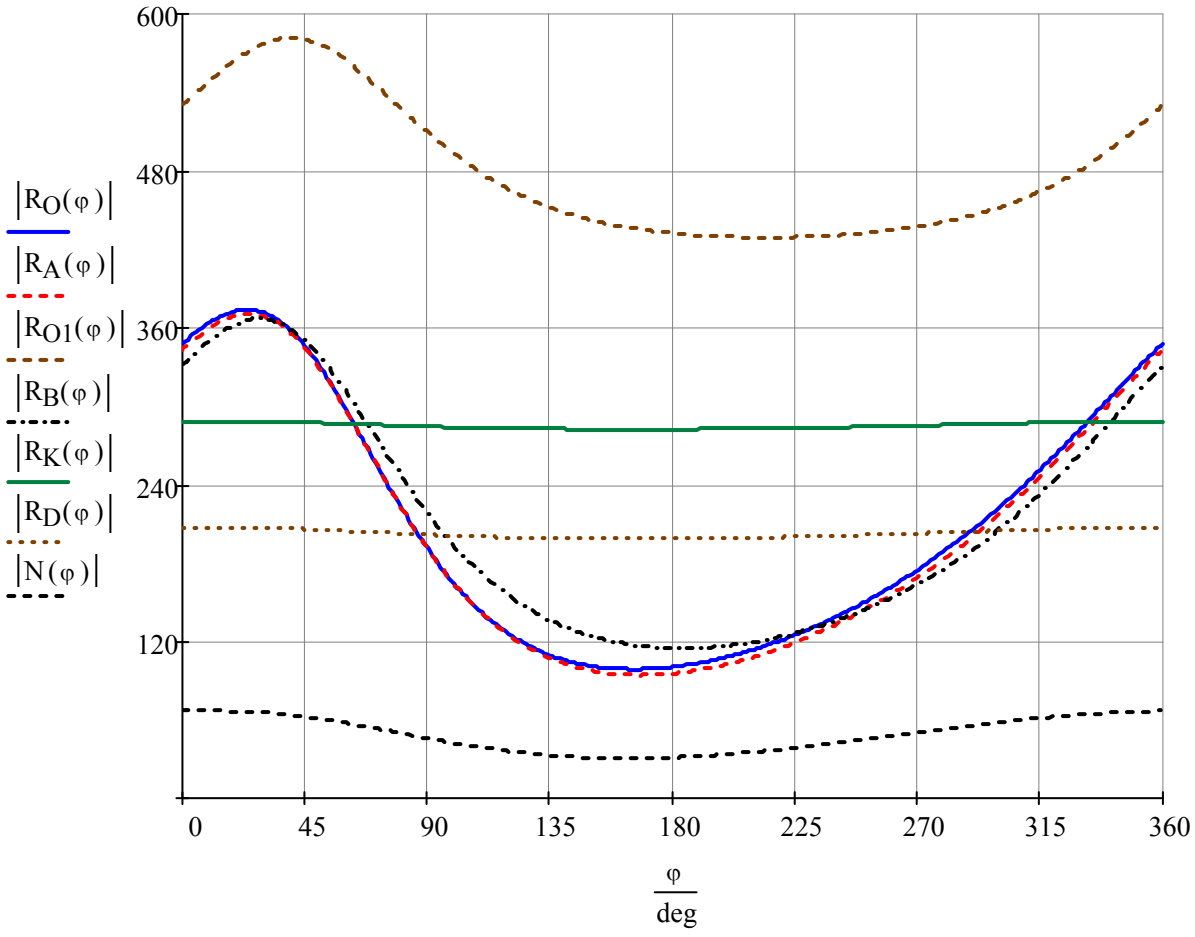
Построение графиков функций

$\varphi := 0, \frac{\pi}{180} .. 2 \cdot \pi$

Зависимость момента пары сил, обеспечивающего равновесие механизма, от угла поворота ведущего звена



Зависимость реакций внешних и внутренних связей от угла поворота ведущего звена



Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{AB}$ ***,***

приложенного к звену АВ.

Ввод исходных данных

… … …

Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0\cdot\sin(\varphi) & L_0\cdot\cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3\cdot\cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{mat

Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{O_1B}$ ***,***

приложенного к звену O_1B***.***

Ввод исходных данных

… … …

Решение системы уравнений равновесия

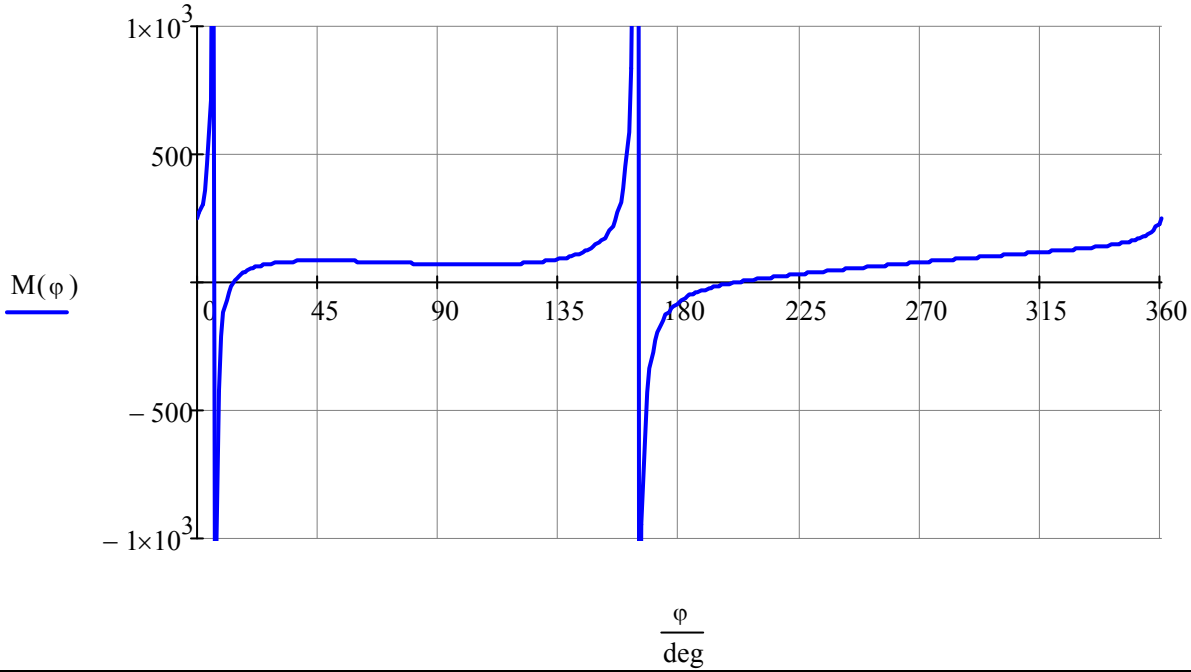
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0\cdot\sin(\varphi) & L_0\cdot\cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3\cdot\cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

… … … … …

$$|A(\varphi)| \text{ simplify} \rightarrow -L_0\cdot L_1\cdot L_3\cdot\sin(\varphi_3(\varphi))\cdot\sin(\varphi - \varphi_1(\varphi))$$

… … …

Зависимость момента пары сил, обеспечивающего равновесие механизма, от угла поворота ведущего звена



Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{KD}$ ***,***

приложенного к звену KD.

Ввод исходных данных

… … …

Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0\cdot\sin(\varphi) & L_0\cdot\cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3\cdot\cos(\varphi_3) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\

Расчет плоского механизма при действии силы $P = P_D$, приложенной к ползуну D.

Ввод исходных данных

… … …

Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0\cdot\sin(\varphi) & L_0\cdot\cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3\cdot\cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}

4. Анализ результатов вычислений и выводы

Плоские шарнирные механизмы широко используются при дискретном цикле осуществления различных операций, когда возникает необходимость возврата выходного звена в исходное положение после внешнего возмущения. Поэтому необходимо определить величину внешнего воздействия обеспечивающее требуемое положение выходного звена механизма. Также необходима предварительная оценка прочности шарнирных соединений.

Анализ результатов расчета рассмотренных схем приложения удерживающих пар сил с моментом M (силы P) показывает, что в некоторых положениях механизма величина внешнего воздействия, а также реакции внешних и внутренних связей становятся бесконечно большими. Данная ситуация возможна при равенстве нулю определителя матрицы коэффициентов A. Т.е. система линейных алгебраических уравнений становится вырожденной.

Сведем уравнения, обеспечивающие выполнение условия $\det A = 0$ и его возможные решения в таблицу.

Схема	$\det A = 0$	Решения
$M = M_{OA}$	$\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin(\varphi_3) = 0$	$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$
$M = M_{AB}$	$\sin(\varphi - \varphi_2)\sin(\varphi_3) = 0$	$\varphi_2 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$
$M = M_{O_1B}$	$\sin(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi_3) = 0$	$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$
$M = M_{KD}$	$\sin(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi_2) = 0$	$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n$
$P = P_D$	$\sin(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$	$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$

где $n = 1, 2, \ldots$

Возможные решения уравнения $\det A = 0$ изобразим на графиках (рис. 5, рис. 6) из которых следует, что решения

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n \quad n = 1, 2, \ldots$$

невозможны.

Таким образом, корни уравнения $\det A = 0$ имеют вид (рис. 6)

$$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n \quad n = 1, 2, \ldots$$

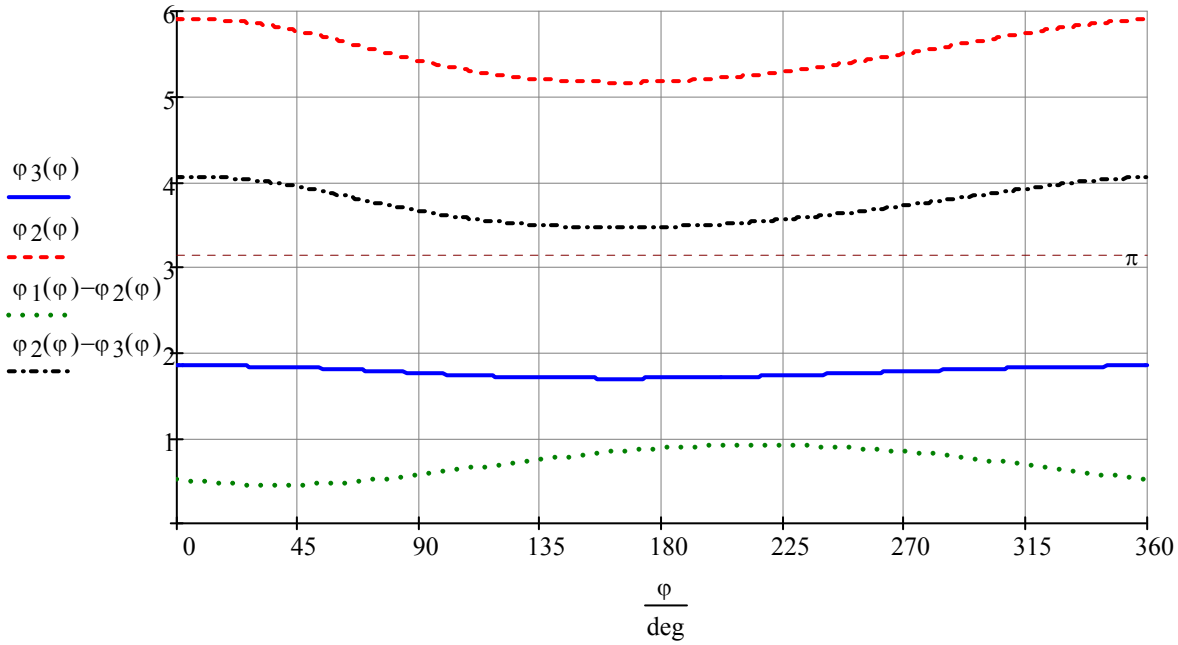


рис. 3. Рис. 5 Зависимость углов поворота φ_2, φ_3 *и разностей* $\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_2 - \varphi_3$ *от угла поворота ведущего звена.*

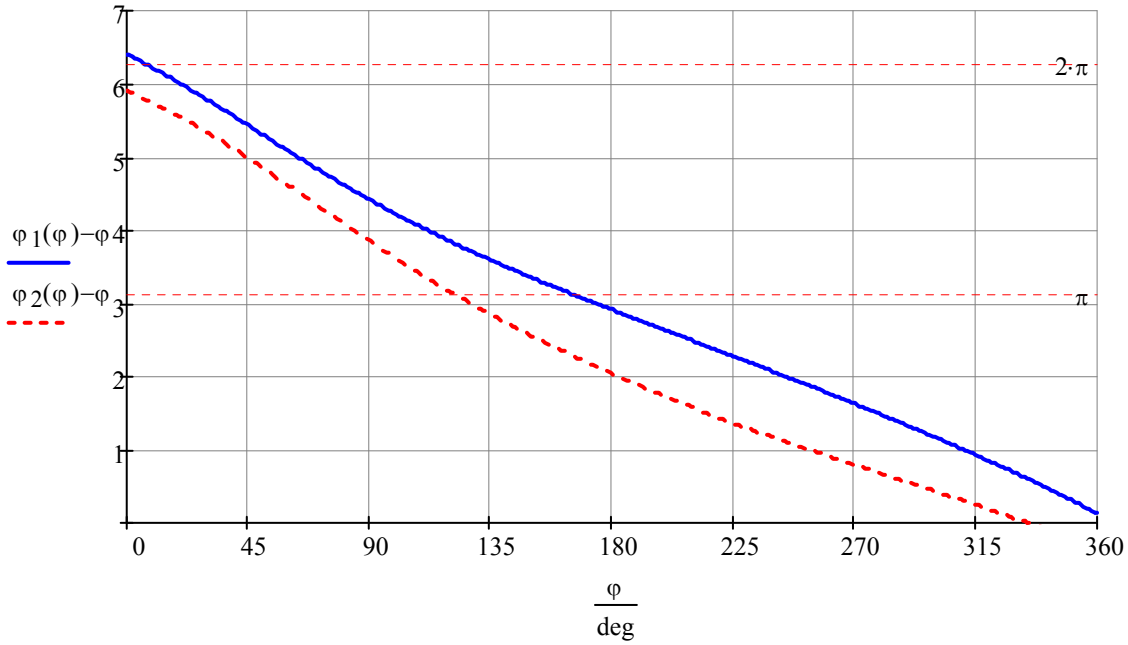


рис. 4. Рис. 6 Зависимость разностей $\varphi_1 - \varphi$, $\varphi_2 - \varphi$ *от угла поворота ведущего звена.*

При значениях угла поворота ведущего звена $0 \le \varphi \le 2\pi$, решения уравнения $\det A = 0$ имеют вид

$$\varphi_1 - \varphi = 2\pi, \quad \varphi_1 - \varphi = \pi,$$
$$\varphi_2 - \varphi = 0, \quad \varphi_2 - \varphi = \pi.$$

Найдем значения углов поворота ведущего звена, при которых $\det A = 0$

$$\varphi_{kp_1} := \text{root}\left(\varphi_1(\varphi) - \varphi - 2\cdot\pi, \varphi, 0, \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\text{deg}} = 6.424$$

$$\varphi_{kp_2} := \text{root}\left(\varphi_1(\varphi) - \varphi - \pi, \varphi, \frac{\pi}{2}, \pi\right)\cdot\frac{1}{\text{deg}} = 164.193$$

$$\varphi_{kp_3} := \text{root}\left(\varphi_2(\varphi) - \varphi - \pi, \varphi, \frac{\pi}{2}, \pi\right)\cdot\frac{1}{\text{deg}} = 120.686$$

$$\varphi_{kp_4} := \text{root}\left(\varphi_2(\varphi) - \varphi, \varphi, \pi, 2\pi\right)\cdot\frac{1}{\text{deg}} = 334.097$$

Таким образом, условия $\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n \quad n = 1, 2, \ldots$ не выполняются ни при каких значениях φ и, следовательно, значения момента пары сил, приложенного к ведущему звену, конечны при любых значениях φ.

Изобразим положения механизма при найденных значениях углов $\varphi_{кр}$ и рассмотрим физические причины обеспечивающие выполнение условия $\det A = 0$.

Для изображения механизма, воспользуемся результатами, приведенными в работе К1, позволяющими отобразить его положение при заданном угле поворота ведущего звена.

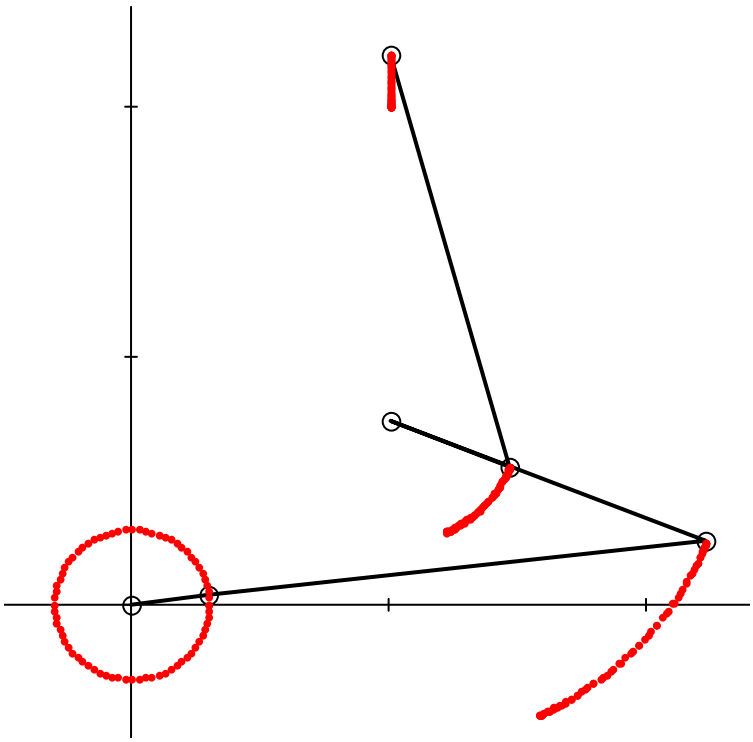
Для условий $\varphi_1 - \varphi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_{кр_1}, \quad \varphi_1 - \varphi = \pi, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_{кр_2}$.

При значении $\varphi = \varphi_{кр_1} = 6,424^\circ$ кривошип O_1B занимает крайнее верхнее положение; при значении $\varphi = \varphi_{кр_2} = 164,193^\circ$ кривошип O_1B занимает крайнее нижнее положение (в этих случаях в точке B расположен мгновенный центр вращений). Возможные угловые скорости звеньев O_1B, KD и скорость ползуна D одновременно равны нулю.

Для условий $\varphi_2 - \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_{кр_3}, \quad \varphi_2 - \varphi = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_{кр_4}$.

При значениях $\varphi = \varphi_{кр_3} = 120,686^\circ$ и $\varphi = \varphi_{кр_4} = 334,097^\circ$ мгновенный центр вращений звена AB находится в бесконечности. Возможная угловая скорость звена AB в этих случаях равна нулю.

$$M = M_{O_1B},\ M = M_{KD},\ P = P_D$$



$i := 1$ $\varphi_0 := \varphi kp_i \cdot deg$

$\frac{\varphi_0}{deg} = 6.424$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{deg} = 366.424$

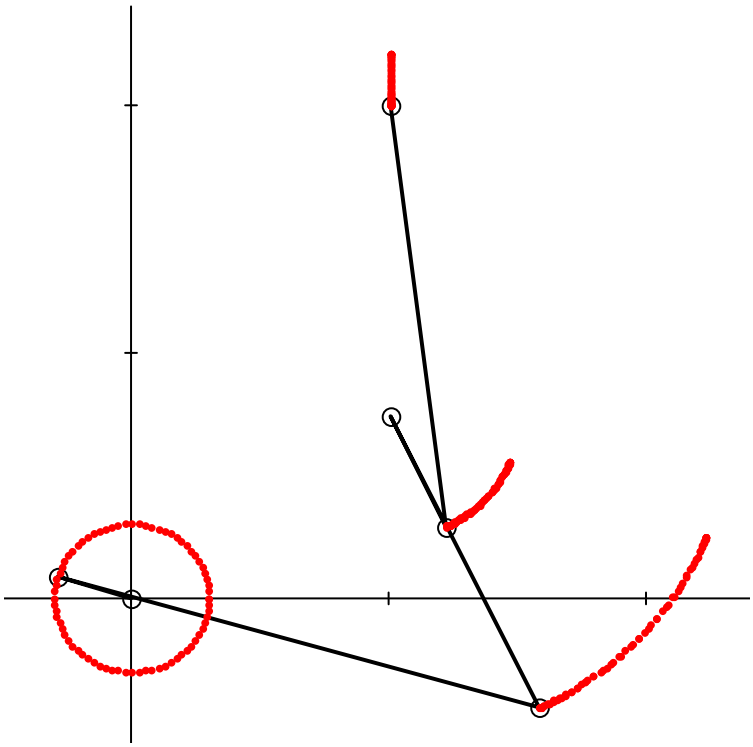
$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{deg} = 338.239$

$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{deg} = 105.663$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{deg} = 360$

$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{deg} = 331.815$

$$M = M_{O_1B},\ M = M_{KD},\ P = P_D$$



$i := 2$

$\frac{\varphi_0}{deg} = 164.193$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{deg} = 344.193$

$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{deg} = 295.968$

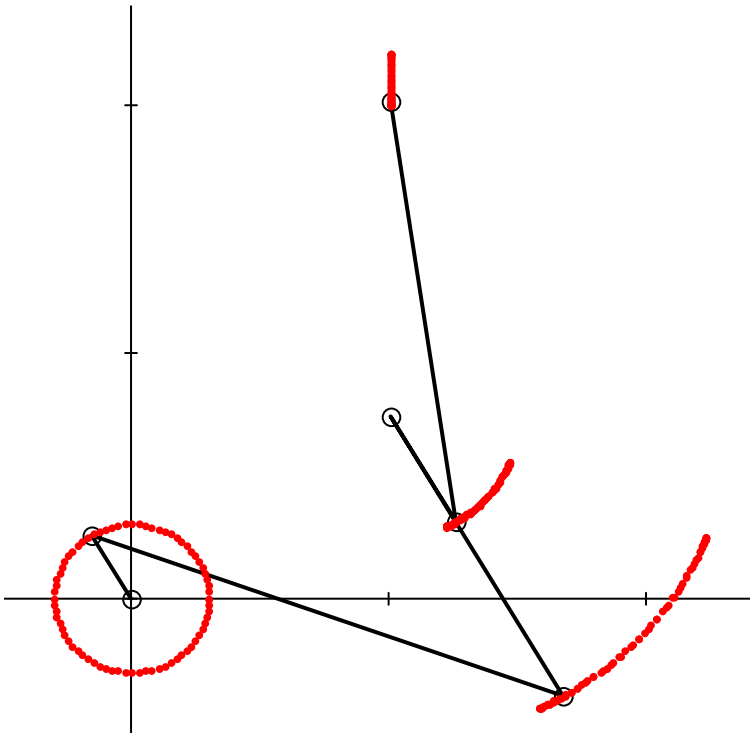
$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{deg} = 97.313$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{deg} = 180$

$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{deg} = 131.775$

В точке B расположен мгновенный центр вращений (крайнее положение кривошипа O_1B). Возможные угловые скорости звеньев O_1B, KD и скорость ползуна D равны нулю.

$M = M_{AB}$



i := 3

$\frac{\varphi_0}{\text{deg}} = 120.686$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{\text{deg}} = 340.325$

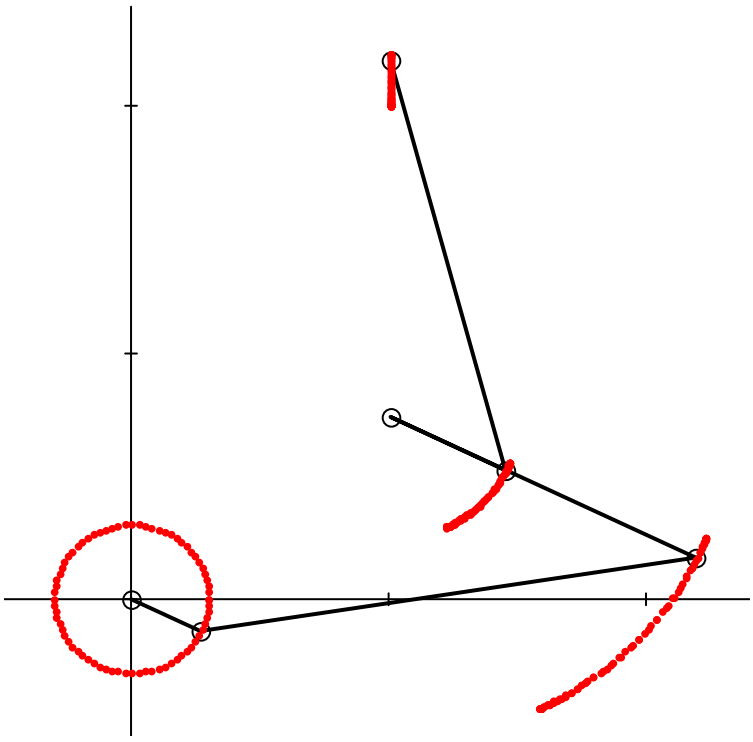
$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{\text{deg}} = 300.686$

$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{\text{deg}} = 98.531$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 219.639$

$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 180$

$M = M_{AB}$



i := 4

$\frac{\varphi_0}{\text{deg}} = 334.097$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{\text{deg}} = 368.729$

$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{\text{deg}} = 334.097$

$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{\text{deg}} = 105.159$

$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 34.632$

$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 0$

Мгновенный центр вращений звена AB находится в бесконечности. Возможная угловая скорость звена AB равна нулю.

5. Выводы

Результаты анализа рассмотренных схем приложения внешних сил, удерживающих механизм в положении равновесия, позволяют определить область допустимых значений углов поворота, при которых значения сил конечны. Результаты сведем в таблицу

Схема	Область допустимых значений для угла φ.
$M = M_{OA}$	$0 \le \varphi \le 2\pi(1+n), \quad n = 1, 2, \ldots$
$M = M_{AB}$	$\varphi \ne \varphi_{кр_3} + 2\pi n, \quad \varphi \ne \varphi_{кр_4} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots$
$M = M_{O_1B}$	$\varphi \ne \varphi_{кр_1} + 2\pi n, \quad \varphi \ne \varphi_{кр_2} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots$
$M = M_{KD}$	$\varphi \ne \varphi_{кр_1} + 2\pi n, \quad \varphi \ne \varphi_{кр_2} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots$
$P = P_D$	$\varphi \ne \varphi_{кр_1} + 2\pi n, \quad \varphi \ne \varphi_{кр_2} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, оптимальной является схема, в которой удерживающими механизм в положении равновесия силами является пара сил с моментом $M = M_{OA}$ приложенная к ведущему звену OA.

3. ДИНАМИКА

Курсовые работы по динамике посвящены применению основных теорем и принципов механики к исследованию материальных систем. Студенты, выполняя то или иное задание, должны получить навыки и умения: составления дифференциальных уравнений движения механической системы, нахождения динамических реакций внешних и внутренних связей, аналитического или численного интегрирования найденных уравнений движения, анализа результатов расчета и исследования механических систем.

В данном разделе представлены три курсовых работы разной степени сложности:

- В первой работе "Исследование механической системы с упругой связью" изучаются малые линейные колебания системы с одной степенью свободы. Дифференциальное уравнение движения интегрируется аналитическим способом. Проводится численное исследование влияния внутренних параметров системы на динамические реакции. Определяется область допустимых значений внутренних параметров системы, обеспечивающее соответствие движения принятым допущениям.
- Во второй работе "Исследование движения механизма с кулисным приводом" рассматривается нелинейная механическая система. Дифференциальное уравнение движения механизма интегрируется численными методами. Исследуется влияние конструктивных элементов на поведение механизма.
- В третьей работе "Динамика плоских шарнирных механизмов" изучается динамическое поведение многозвенных плоских шарнирных механизмов. Совместно решается система уравнений, в которую входят: нелинейное дифференциальное уравнение движения механизма и система нелинейных уравнений геометрических связей. Исследуются факторы, влияющие на неравномерность вращения ведущего звена.

Д 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ

Исследование динамического поведения механической системы начинается с выбора физической модели, для которой составляется математическая модель.

Наличие упругих связей в механической системе в сочетании с внешним периодическим воздействием может привести к дополнительным колебаниям ее элементов. Если задачу удается свести к малым колебаниям, то с высокой степенью точности математическая модель может быть представлена линейной моделью.

Выделение линейных моделей в особый класс вызывается рядом причин:

- с помощью линейных моделей исследуется широкий круг явлений, происходящих в различных механических системах;
- интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами хорошо отработано.

Поэтому инженер–исследователь стремится по возможности описать поведение системы с помощью линейной модели для облегчения процедуры анализа ее движения.

При проектировании механических систем обычно используют критические режимы внешних воздействий на них. В этом случае внешние факторы: ν – коэффициент демпфирования, F_0, p – амплитуда и частота возмущающей силы, изменяются незначительно. Конструктивные параметры механических систем (их геометрические размеры) определяются условиями их функционирования и, следовательно, могут изменяться в очень узком диапазоне. Актуальной становится такая задача исследования механической системы, при которой могут изменяться массовые параметры системы и жесткость упругого элемента.

Цель курсовой работы

Исследование и анализ динамического поведения механической системы с упругими связями с помощью основных теорем и принципов теоретической механики.

Содержание курсовой работы

Объектом исследования является механическая система с одной степенью свободы, представляющая собой совокупность тел, связанных друг с другом посредством нитей. Схемы заданий и исходные данные приведены в альбоме заданий.

Система снабжена упругой связью (пружиной) с коэффициентом жесткости c и демпфирующим устройством, в котором возникает сопротивление движению. В вариантах 1, 4 – 6, 8 – 16, 22, 25, 27, 29 демпфирующее устройство на схемах не показано, оно связано с телом 3, вращающимся вокруг неподвижной оси. Сопротивление движению в этих вариантах моделируется парой сил с моментом $\bar{M}_C = -\nu\bar{\omega}_3$, где ω_3 — угловая скорость вращения тела 3, ν — коэффициент сопротивления $(\nu > 0)$. В остальных вариантах демпфер на схемах показан, он связан с телом 2 (варианты 7, 18, 23, 26) или с телом 4 (варианты 2, 3, 17, 19 – 21, 28, 30). Сопротивление в этом случае моделируется силой $\bar{R}_C = -\mu\bar{v}$, где $\bar{v}$ - скорость точки крепления демпфера (скорость поршня демпфера) к телу 2 или 4 (в зависимости от варианта), μ — коэффициент сопротивления $(\mu > 0)$.

Во всех вариантах к грузу 1 приложена возмущающая гармоническая сила, проекция которой на касательную к траектории центра масс груза 1 равна

$$F_\tau(t) = F_0 \sin pt,$$

где F_0, p — амплитуда и круговая частота возмущающей силы.

При составлении математической модели принимаются следующие допущения:

- тела, входящие в систему, считаются абсолютно твердыми, нити – нерастя-

жимыми, идеально гибкими и безынерционными;

- проскальзывание нитей на блоках и катках отсутствует; катки движутся без скольжения;
- трение в подшипнике блока 3 не учитывается, сопротивление качению катка 4 отсутствует;
- реакция упругой связи подчиняется линейному закону: $F_{упр} = c\lambda$, где λ – удлинение пружины; масса пружины и демпфера не учитывается;
- массу пружины, поршня и штока демпфера не учитывать;
- во всех вариантах возникающие в системе колебания являются малыми.

Требуется:

1. Составить дифференциальное уравнение движения системы.

2. Сформировать систему уравнений для определения динамических реакций внешних и внутренних связей.

3. Найти закон движения системы, т. е. проинтегрировать дифференциальное уравнение движения при заданных начальных условиях.

4. Провести численный анализ полученного решения с использованием ЭВМ.

Порядок выполнения работы

1. Составить дифференциальное уравнение движения системы одним из следующих способов (по указанию преподавателя):

- с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме;
- методом общего уравнения динамики;
- с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

2. Определить динамические реакции внешних и внутренних связей и осуществить проверку правильности составления дифференциального уравнения движения. Для этого следует использовать (по указанию преподавателя):

- теорему об изменении количества движения и теорему об изменении кинетического момента в дифференциальных формах;
- дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоского

движений твердого тела;

- метод кинетостатики (принцип Даламбера).

3. Интегрируя дифференциальное уравнение движения системы при заданных начальных условиях, найти закон движения груза 1.

4. Провести анализ результатов расчета механической системы. Для этого

- проверить соответствие расчетов предположениям, принятым при построении математической модели;
- по указанию преподавателя исследовать влияние двух из основных внутренних параметров механической системы $\left(m_1, m_2, m_3, c\right)$ на динамические характеристики системы;
- определить область допустимых значений указанных параметров, обеспечивающих адекватность поведения системы ее математической модели.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Груз 1, расположенный на гладкой наклонной плоскости, прикреплен к нити, навитой на большую ступень блока 2 (рис. 1). Нить, намотанная на каток 3, навита на малую ступень блока. Каток расположен на шероховатой наклонной плоскости. Центр катка связан с пружиной, другой конец которой закреплен неподвижно. Нити и пружина, массы которых не учитываются, параллельны соответствующим плоскостям. Нити являются нерастяжимыми и абсолютно гибкими. Сопротивление, возникающее в подшипниках блока, пропорционально первой степени угловой скорости блока: $\bar{M}_C = -\nu\bar{\omega}_2$. Качение катка происходит без скольжения, сопротивление качению отсутствует. Каток — однородный круговой цилиндр. Центр масс блока расположен на оси его вращения. К грузу приложена возмущающая сила $F_\tau(t) = F_0 \sin pt$. При движении системы нити всегда натянуты.

Исследовать движение механической системы. Определить реакции внешних и внутренних связей, если

m_1, m_2, m_3 – массы груза, блока и катка,

c – коэффициент жесткости пружины,

ν – коэффициент демпфирования,

r_2, R_2, i_2 – радиусы ступеней блока 2 и его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс,

r_3 – радиус катка 3,

α, β – углы наклона опорных плоскостей к горизонту,

$f_{сц}$ – предельное значение коэффициента сцепления катка 3 и опорной плоскости,

$\lambda_{пр}$ – предельное значение удлинения пружины;

s_0, v_0 — начальная координата и начальная скорость груза.

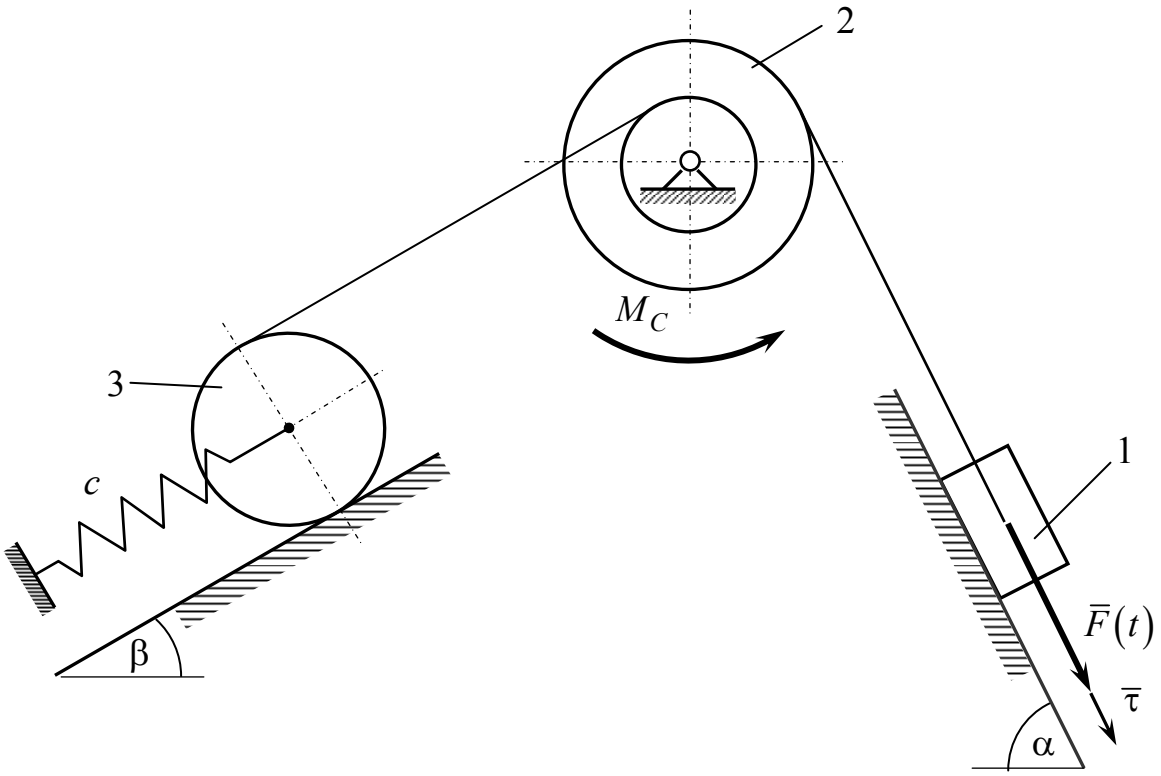


Рис. 1. Схема механизма

Исходные данные

$m_1 = 1\ кг,$

$m_2 = 2\ кг,$ $r_2 = 0.15\ м,$ $R_2 = 0.3\ м,$ $i_2 = 0.2\ м,$

$m_3 = 3\ кг,$ $r_3 = 0.2\ м,$

$\nu = 0.2\ Н \cdot м \cdot с,$ $c = 2000\ Н/м,$ $f_{сц} = 0{,}30,$ $\lambda_{пр} = 0{,}1\ м,,$

$F_0 = 10\ Н,$ $p = \frac{\pi}{2}\ рад/с,$

$s_0 = 0.03\ м,$ $v_0 = 0.04\ м/с,$ $\alpha = 60^\circ,$ $\beta = 30^\circ.$

1. Составление дифференциального уравнения движения механической системы.

Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы: это обеспечивается условиями, принятыми при формулировке задания, — тела являются абсолютно твердыми, нити — нерастяжимыми и всегда натянутыми, проскальзывание при движении катка отсутствует. Следовательно, для задания положения системы нужен один параметр. Будем определять положение системы с помощью координаты s, задающей положение центра масс груза (рис.2). Начало отсчета координаты s совместим с положением центра масс груза при равновесии системы. Углы поворота блока φ_2 и катка φ_3 отсчитываем по ходу часовой стрелки. Положение центра масс катка C_3 определяем координатой s_3, отсчитываемой от положения центра масс катка при равновесии системы: если $s>0$, то $\varphi_2>0$, $\varphi_3>0$ и $s_3>0$ и наоборот, причем нулевому значению координаты s соответствуют нулевые значения координат φ_2, φ_3 и s_3.

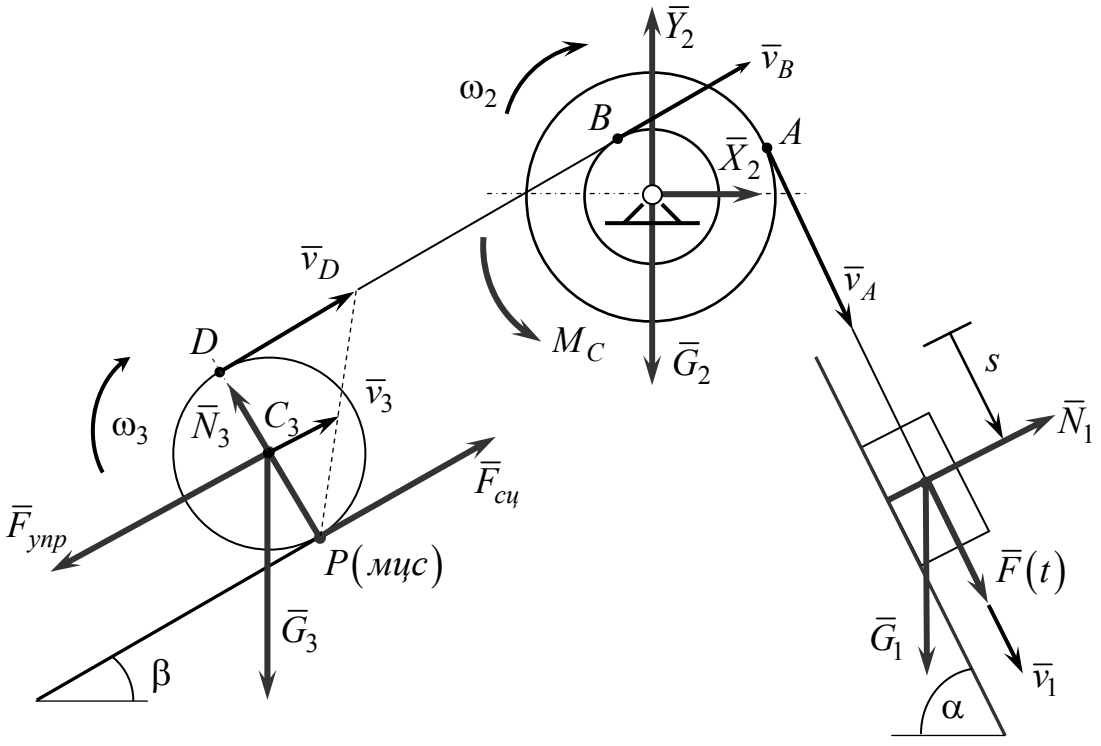


Рис. 2. Расчетная схема

Для составления дифференциального уравнения движения системы используем теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k N_k^e + \sum_k N_k^i, \qquad (1)$$

где: T — кинетическая энергия системы, $\sum_k N_k^e$ — сумма мощностей внешних сил, $\sum_k N_k^i$ — сумма мощностей внутренних сил.

Пусть в произвольный момент система занимает положение, в котором $s>0$, а скорость груза $\overline{v}_1$ направлена вдоль опорной плоскости в положительном направлении координаты s.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел, образующих механическую систему.

Груз 1 совершает поступательное движение. Его кинетическая энергия:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

Блок 2 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси. Его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{C_2} \omega_2^2,$$

где $I_{C_2} = m_2 i_2^2$ — момент инерции блока 2 относительно оси вращения, ω_2 — модуль угловой скорости.

Каток 3 совершают плоскопараллельное движение, поэтому его кинетическая энергия равна:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2,$$

где $I_{C_3} = m_3 r_3^2 / 2$ — момент инерции катка 3 относительно оси, проходящей через центр масс, v_3 — модуль скорости центра масс, ω_3 — модуль угловой

скорости катка.

Кинетическая энергия всего механизма в этом случае будет равна:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + I_{C_2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2. \qquad (2)$$

Так как система имеет одну степень свободы то величины ω_2, ω_3 и v_{C_3} легко выражаются через v_1. Нити, соединяющие тела системы нерастяжимы и натянуты, следовательно $v_1 = v_A$ и $v_B = v_D$. Тогда

$$\begin{aligned} v_1 = v_A &= \omega_2 O_2 A \equiv \omega_2 R_2; \\ \omega_2 r_2 \equiv \omega_2 O_2 B = \quad v_B = v_D &= \omega_3 PD \equiv \omega_3 2 r_3; \\ v_3 &= \omega_3 PC_3 \equiv \omega_3 r_3. \end{aligned}$$

Таким образом $v_1 = v = \dot{s}, \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2} v, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{2 R_2 r_3} v, \quad v_3 = \frac{r_2}{2 R_2} v.$ (3)

Подставляя (3) в выражение (2) и учитывая выражения для моментов инерции I_{C_2} и I_{C_3}, окончательно получим:

$$T = \frac{1}{2} m_{np} v^2 = \frac{1}{2} m_{np} \dot{s}^2 \qquad (4)$$

где величина $$m_{np} = m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{8} m_3 \frac{{r_2}^2}{R_2^2} = 2.17 \text{ кг} \qquad (5)$$

называется приведенной массой.

Теперь вычислим правую часть уравнения (1) – сумму мощностей внешних и внутренних сил, при этом учтем, что мощность силы равна скалярному произведению вектора силы на скорость точки приложения силы, а мощность пары сил – скалярному произведению вектора пары на угловую скорость твердого тела, к которому приложена пара:

$$N_F = \bar{F} \cdot \bar{v} = F v \cos\left(\bar{F}, \bar{v}\right) = F_v v,$$
$$N_M = \bar{M} \cdot \bar{\omega} = M \omega \cos\left(\bar{M}, \bar{\omega}\right) = M_\omega \omega.$$

Здесь F_v — проекции вектора силы $\bar{F}$ на направление скорости точки прило-

жения силы, а M_ω — проекции вектора пары сил $\bar{M}$ на направление угловой скорости твердого тела.

Вычислим сумму мощностей внутренних сил, учитывая, что рассматриваемая нами механическая система является неизменяемой, так как входящие в систему тела абсолютно твердые, а нити — абсолютно гибкие и нерастяжимые. Следовательно, скорости их точек относительно друг друга равны нулю и сумма мощностей внутренних сил также будет равна нулю

$$\sum_k N_k^i = 0. \tag{6}$$

Вычислим сумму мощностей внешних сил. Для этого изобразим их на расчетной схеме (рис. 2). Внешними силами являются: силы тяжести $\bar{G}_k = m_k\,\bar{g}, k = \overline{1,3}$, нормальные реакции опорных плоскостей $\bar{N}_1, \bar{N}_3$, сила сцепления $\bar{F}_{сц}$, упругая реакция пружины $\bar{F}_{упр}$, реакции подшипника блока 2 $\bar{X}_2, \bar{Y}_2$, силы сопротивления с моментом $\bar{M}_C = -\nu\,\bar{\omega}_2$ и возмущающая сила $\bar{F}(t)$.

Заметим, что мощности сил $\bar{N}_3, \bar{F}_{сц}, \bar{G}_2, \bar{X}_2, \bar{Y}_2$ равны нулю, так как эти силы приложены в точках, скорости которых равны нулю. Мощность силы $\bar{N}_1$ также равна нулю, так как $\bar{N}_1 \perp \bar{v}_1$.

Сумма мощностей остальных сил равна:

$$\begin{aligned}
N_{P_1} &= \bar{G}_1 \cdot \bar{v}_1 = m_1 g\, v \sin(\alpha),\\
N_{F(t)} &= \bar{F}(t) \cdot \bar{v}_1 = F(t)\, v,\\
N_{M_C} &= \bar{M}_C \cdot \bar{\omega}_2 = -\nu\,\omega_2^2,\\
N_{F_{упр}} &= \bar{F}_{упр} \cdot \bar{v}_3 = F_{упр_{v_3}} v_3,\\
N_{P_3} &= \bar{G}_3 \cdot \bar{v}_3 = -m_3 g\, v_3 \sin(\beta).
\end{aligned}$$

или $$\sum_k N_k^e = F_{упр_{v_3}}\, v_3 - \nu\,\omega_2^2 + m_1 g\, v \sin(\alpha) + F(t)\, v - m_3 g\, v_3 \sin(\beta).$$

С учетом кинематических соотношений (3) сумму мощностей внешних сил преобразуем к виду:

$$\sum_k N_k^e = F_{np}\, v = F_{np}\, \dot{s} \tag{7}$$

где $$F_{np} = \left[F_{упр_{v_3}} - m_3\, g \sin(\beta) \right] \frac{r_2}{2R_2} - \frac{\nu}{R_2^2} v + m_1\, g \sin(\alpha) + F(t)$$

называется приведенной силой.

Упругую силу считаем пропорциональной удлинению пружины. Полное удлинение пружины λ равно сумме статического $\lambda_{ст}$ и динамического s_3 удлинений $\lambda = \lambda_{ст} + s_3$.

Тогда $$F_{упр_{v_3}} = -c(\lambda_{ст} + s_3) = -c\left[\lambda_{ст} + \frac{r_2}{2R_2} s \right].$$

Приведенная сила в развернутой форме будет определяться выражением:

$$F_{np} = -\left[c\,\lambda_{ст} + m_3\, g \sin(\beta) \right] \frac{r_2}{2R_2} - c_{np} s - \nu_{np}\, \dot{s} + m_1\, g \sin(\alpha) + F(t) \tag{8}$$

где $c_{np} = c\left(\frac{r_2}{2R_2} \right)^2$ — приведенная жесткость, $\nu_{np} = \frac{\nu}{R_2{}^2}$ — приведенный коэффициент сопротивления.

Подставляя выражения (4), (6) и (7) в (1), получаем после сокращения на $\dot{s}$ дифференциальное уравнение движения системы

$$m_{np}\, \ddot{s} = F_{np}. \tag{9}$$

Учтем, что при равновесии системы (возмущающая сила отсутствует) скорость и ускорение груза равны нулю по определению $(\dot{s} = 0, \ddot{s} = 0)$, а координата груза равна нулю в силу постановки задачи (начало отсчета совпадает с положением равновесия груза 1 $s = 0$). В этом случае уравнение (9) приводится к виду $F_{np}\big|_{s=0,\ \dot{s}=0} = 0$, и условием равновесия системы будет служить уравнение

$$-\left[c\,\lambda_{ст} + m_3\, g \sin(\beta) \right] \frac{r_2}{2R_2} + m_1\, g \sin(\alpha) = 0,$$

из которого определяется статическое удлинение пружины

$$\lambda_{cm} = \frac{g}{c}\left[2\, m_1 \sin(\alpha)\frac{R_2}{r_2} - m_3 \sin(\beta) \right]. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в уравнение (9) и учитывая формулу (8) для приведенной силы, получаем дифференциальное уравнение движения системы

$$m_{np}\,\ddot{s} = F_0 \sin(p\,t) - c_{np}\,s - \nu_{np}\,\dot{s}.$$

Представим данное уравнение в виде:

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s = h_0 \sin(p\,t), \qquad (11)$$

где введены коэффициенты, имеющие определенный физический смысл:

$k = \sqrt{\frac{c_{np}}{m_{np}}} = \frac{r_2}{2\,R_2}\sqrt{\frac{c}{m_{np}}} = 7.589\ {}^{рад}\!/_{с}$ – частота собственных колебаний,

$n = \frac{\nu_{np}}{2m_{np}} = \frac{\nu}{2\,R_2{}^2\,m_{np}} = 0.512\ {}^{рад}\!/_{с}$ — показатель степени затухания колебаний.

$h_0 = \frac{F_0}{m_{np}} = 4.61\ {}^{м}\!/_{с^2}$ – относительная амплитуда возмущающей силы.

Начальные условия:

$$s\big|_{t=0} = s_0, \quad \dot{s}\big|_{t=0} = \dot{s}_0 = v_0 \qquad (12)$$

Уравнения (11), (12) представляют математическую модель для решения второй задачи динамики.

2. Определение реакций внешних и внутренних связей.

Для решения этой задачи расчленим механизм на отдельные части и построим расчетные схемы для каждого тела (рис.3). На расчетных схемах, помимо ранее введенных сил, показаны реакции (силы натяжения) нитей, связывающих груз и блок, блок и каток: $\overline{T}_{12} = -\overline{T}_{21}$, $\overline{T}_{23} = -\overline{T}_{32}$.

К каждому телу, изображенному на расчетной схеме (рис. 3), применим две основные теоремы механики материальной системы:

теорему об изменении количества движения

$$\frac{d\,m\bar{v}_C}{d\,t}=\sum_k \bar{F}_k^e \tag{13}$$

и теорему об изменении кинетического момента относительно оси z, проходящей через центр масс твердого тела

$$\frac{d\,L_{C_z}}{d\,t}=\sum_k M_{C_z}^e\left(\bar{F}_k^e\right). \tag{14}$$

Для каждого тела данные уравнения запишем в проекциях на оси координат соответственно схемам рис. 3:

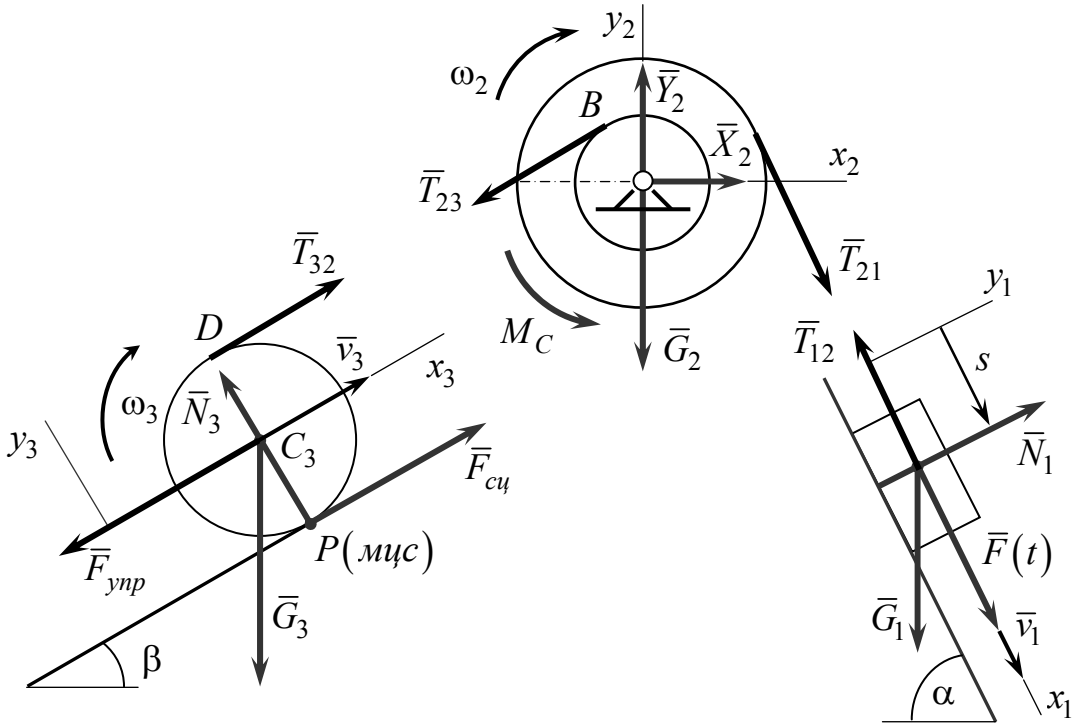


Рис. 3. Расчетные схемы каждого тела механизма

Тело 1 движется поступательно, поэтому уравнение (14) для него удовлетворяется тождественно $(0\equiv 0)$. Учитывая, что $\dot{x}_{C_1}=v_1,\ \dot{y}_{C_1}=0$, получим

$$\begin{gathered}\frac{d\,m_1 v_1}{d\,t}=-T_{12}+m_1 g\sin(\alpha)+F(t),\\ 0=N_1-m_1 g\cos(\alpha).\end{gathered} \tag{15}$$

Тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, причем $\bar{v}_{C_2}=0$, поэтому уравнения (13) и (14) примут вид:

$$
\begin{aligned}
0 &= Y_2 - m_2 g - T_{23}\sin(\beta) - T_{21}\sin(\alpha),\\
0 &= X_2 - T_{23}\cos(\beta) + T_{21}\cos(\alpha),\\
\frac{d J_{2_z}\omega_2}{d t} &= T_{21} R_2 - T_{23} r_2 - M_C,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Тело 3 совершает плоскопараллельное движение. Тогда, записывая уравнения (13) и (14) с учетом того, что $\dot{x}_{C_3} = v_3$, $\dot{y}_{C_3} = 0$, получаем:

$$
\begin{aligned}
\frac{d m_3 v_3}{d t} &= T_{32} - F_{упр} + F_{сц} - P_3\sin(\beta),\\
0 &= N_3 - m_3 g\cos(\beta),\\
\frac{d J_{C_{3z}}\omega_3}{d t} &= T_{32} r_3 - F_{сц} r_3.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Из системы уравнений (15) – (17) С учетом кинематических соотношений (3) можно получить формулы для реакций связей:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= m_1 g\cos\alpha,\\
T_{12} &= -m_1\ddot{s} + m_1 g\sin(\alpha) + F(t),\\
T_{23} &= T_{21}\frac{R_2}{r_2} + \frac{\nu}{r_2 R_2}\dot{s} - m_2\frac{{i_2}^2}{R_2 r_2}\ddot{s},\\
X_2 &= T_{23}\cos(\beta) - T_{21}\cos(\alpha),\\
Y_2 &= m_2 g + T_{23}\sin(\beta) + T_{21}\sin(\alpha),\\
F_{сц} &= T_{32} - \frac{1}{4} m_3\frac{r_2}{R_2}\ddot{s},\\
N_3 &= m_3 g\cos(\beta)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

и дифференциальное уравнение движения системы

$$
m_{пр}\ddot{s} = F(t) - c\left(\frac{r_2}{2 R_2}\right)^2 s - \frac{\nu}{{R_2}^2}\dot{s}.
\tag{19}
$$

Уравнение (19) полностью совпадает с дифференциальным уравнением (11), что подтверждает правильность решения данной задачи.

3. Определение закона движения системы

Дифференциальное уравнение (11)

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s = h_0 \sin(pt)$$

относится к классу линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (11) складывается из общего решения $\tilde{s}$ однородного уравнения

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s = 0. \tag{20}$$

соответствующего данному неоднородному уравнению, и частного решения s^*, зависящего от правой части уравнения (11), т.е.

$$s = \tilde{s} + s^* \tag{21}$$

Решение однородного уравнения (20) ищем в виде функции

$$s = A e^{\chi t}, \tag{22}$$

где A и χ — неопределенные постоянные величины.

Подставляя (22) в (20), получим:

$$\left(\chi^2 + 2n\chi + k^2\right) A e^{\chi t} = 0$$

Так как мы ищем нетривиальное решение, то $Ae^{\chi t} \neq 0$. Следовательно, должно выполняться условие

$$\chi^2 + 2n\chi + k^2 = 0$$

Данное уравнение (характеристическое уравнение) имеет два корня:

$$\chi_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Вид общего решения уравнения (20) зависит от типа корней его характеристического уравнения. Возможны следующие случаи:

1) $n < k$ – корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{s} = e^{-nt}\left[A_1\cos\left(k_1 t\right) + A_2\sin\left(k_1 t\right)\right], \qquad (23)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, а A_1, A_2 — постоянные интегрирования.

2) $n > k$ – корни характеристического уравнения действительные и различные.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{s} = e^{-nt}\left(A_1 e^{k_2 t} + A_2 e^{-k_2 t}\right).\ k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$$

3) $n = k$ – корни характеристического уравнения кратные.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{s} = e^{-nt}\left(A_1 + A_2 t\right).$$

В рассматриваемом случае $n = 0{,}512\ {}^{рад}\!/_{c}$, $k = 7{,}589\ {}^{рад}\!/_{c}$. Поскольку $n < k$, то общее решение однородного уравнения (20) имеет вид.

$$\tilde{s} = e^{-nt}\left[A_1\sin(k_1 t) + A_2\cos(k_1 t)\right] \text{ или } \tilde{s} = A_0\, e^{-nt}\sin\left(k_1 t + \alpha_0\right). \qquad (24)$$

Здесь $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 7.57\ c^{-1}$, а коэффициенты A_0, A_1, A_2, α_0 связаны между собой соотношениями

$$A_1 = A_0\cos\left(\alpha_0\right), \quad A_2 = A_0\sin\left(\alpha_0\right).$$

Определим частное решение неоднородного дифференциального уравнения (11). Данное решение ищем в виде правой части

$$s^* = B_1\sin\left(pt\right) + B_2\cos\left(pt\right) \text{ или } s^* = B_0\sin\left(p\,t - \beta_0\right), \qquad (25)$$

где коэффициенты B_0, B_1, B_2, β_0 связаны между собой соотношениями

$$B_0 = \sqrt{{B_1}^2 + {B_2}^2}, \quad \beta_0 = -arctg\left(B_2 / B_1\right).$$

Подставляя (25) в уравнение (11), найдем выражения для коэффициентов B_1, B_2, а также B_0, β_0:

$$B_1 = h_0\frac{k^2 - p^2}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2} = 0.084\ м, \quad B_2 = -h_0\frac{2n\,p}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2} = -0.002\ м,$$

$$B_0 = h_0 \sqrt{\frac{1}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2 p^2}} = 0.084 \text{ м}, \quad \beta_0 = arctg\left(\frac{2np}{k^2 - p^2}\right) = 0.029 \text{ рад}.$$

Общее решение неоднородного уравнения (11) запишем в виде

$$s = A_0 e^{-nt} \sin\left(k_1 t + \alpha_0\right) + B_1 \sin\left(pt\right) + B_2 \cos\left(pt\right). \tag{26}$$

Константы A_0 и α_0 определяются из начальных условий (12)

$$\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{\left(s_0 - B_2\right)^2 + \frac{1}{k_1^2}\left(\dot{s}_0 + n s_0 - n B_2 - B_1 p\right)^2} = 0.034 \text{ м} \\ \alpha_0 &= arctg \frac{k_1\left(s_0 - B_2\right)}{\dot{s}_0 + n s_0 - n B_2 - p B_1} = 1.866 \text{ рад}. \end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), получаем закон движения механизма, выраженный через перемещение груза

$$s(t) = 0.034\, e^{-0.512t} \sin\left(7.57t + 1.866\right) + 0.084 \sin\left(0.5\pi t + 0.029\right), \text{ м}.$$

Из последней формулы следует, что движение системы представляет собой наложение двух движений:

1) собственного движения (первое слагаемое справа), которое представляет собой затухающие колебания частоты $k_1 = 7.57\, {рад}/{с}$, так как множитель $e^{-0.512t} \to 0$ при $t \to \infty$;

2) вынужденных колебаний постоянной амплитуды $B_0 = 0{,}084 \text{ м}$ (второе слагаемое справа), происходящих с частотой возмущающей силы $p = 0.5\,\pi\, {рад}/{с}$, причем фаза вынужденных колебаний отстает от фазы возмущающей силы на величину $\beta_0 = 0{,}029$.

Поскольку по истечении некоторого промежутка времени собственное движение затухает, то определяющим движением системы являются вынужденные колебания.

4. Результаты расчетов

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором реализована процедура вычисления закона движения груза, его скорости и ускорения, а также динамических реакций внешних и внутренних связей.

Расчет механической системы с упругой связью

1. Ввод исходных данных

$c := 2000$ $\quad \nu := 0.2$ $\quad F_0 := 10$ $\quad p := \frac{\pi}{2}$

$f_{сц} := 0.3$ $\quad g := 9.81$ $\quad \lambda_{ПР} := 0.1$

$s_0 := 0.03$ $\quad v_0 := 0.04$ $\quad \alpha := \frac{\pi}{3}$ $\quad \beta := \frac{\pi}{6}$

$m_3 := 3$ $\quad r_3 := 0.2$

$m_2 := 2$ $\quad r_2 := 0.15$ $\quad R_2 := 0.3$ $\quad i_2 := 0.2$

$m_1 := 1$

2. Вычисление постоянных величин

$$m_{np} := m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{8} m_3 \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2$$

$$k := \frac{1}{2} \frac{r_2}{R_2} \sqrt{\frac{c}{m_{np}}} \qquad n := \frac{\nu}{2 R_2^2 m_{np}} \qquad k_1 := \sqrt{k^2 - n^2}$$

$$B_0 := \frac{F_0}{m_{np}} \sqrt{\frac{1}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + (2 n p)^2}} \qquad \beta_0 := \operatorname{atan2}\left(k^2 - p^2, 2 n p\right)$$

$$A_0 := \sqrt{\left(s_0 + B_0 \sin\left(\beta_0\right)\right)^2 + \frac{1}{k_1^2}\left[v_0 - B_0 \cos\left(\beta_0\right) p + n\left(s_0 + B_0 \sin\left(\beta_0\right)\right)\right]^2}$$

$$\alpha_0 := \operatorname{atan2}\left[v_0 - B_0 \cos\left(\beta_0\right) p + n\left(s_0 + B_0 \sin\left(\beta_0\right)\right), k_1\left(s_0 + B_0 \sin\left(\beta_0\right)\right)\right]$$

3. Определение функций

Кинематические соотношения

Закон движения груза 1 $\qquad s(t)$

$$s(t) := A_0 e^{-n t} \sin\left(k_1 t + \alpha_0\right) + B_0 \sin\left(p t - \beta_0\right)$$

Скорость груза 1 $v(t)$

$$v(t) := A_0\, e^{-n\,t}\left(k_1 \cos\left(k_1\, t + \alpha_0\right) - n \sin\left(k_1\, t + \alpha_0\right)\right) + B_0\, p \cos\left(p\, t - \beta_0\right)$$

Ускорение груза 1 $a(t)$

$$a(t) := \frac{F_0}{m_{np}} \sin(p\, t) - 2\, n\, v(t) - k^2\, s(t)$$

Реакции связей

Сила натяжения нити $T_{12}(t)$

$$T_{12}(t) := m_1\, g \sin(\alpha) + F_0 \sin(p\, t) - m_1\, a(t)$$

Сила натяжения нити $T_{23}(t)$

$$T_{23}(t) := T_{12}(t)\,\frac{R_2}{r_2} - \frac{\nu}{R_2\, r_2}\, v(t) - m_2\,\frac{i_2^{\,2}}{R_2\, r_2}\, a(t)$$

Сила сцепления $F_{СЦ}(t)$ и величина ее предельного значения

$$F_{сц}(t) := T_{23}(t) - m_3\,\frac{r_2}{4\, R_2}\, a(t)$$

$$F'_{сц} := f_{сц}\, m_3\, g \cos(\beta)$$

Реакции опоры блока 2 $X_2(t), Y_2(t)$

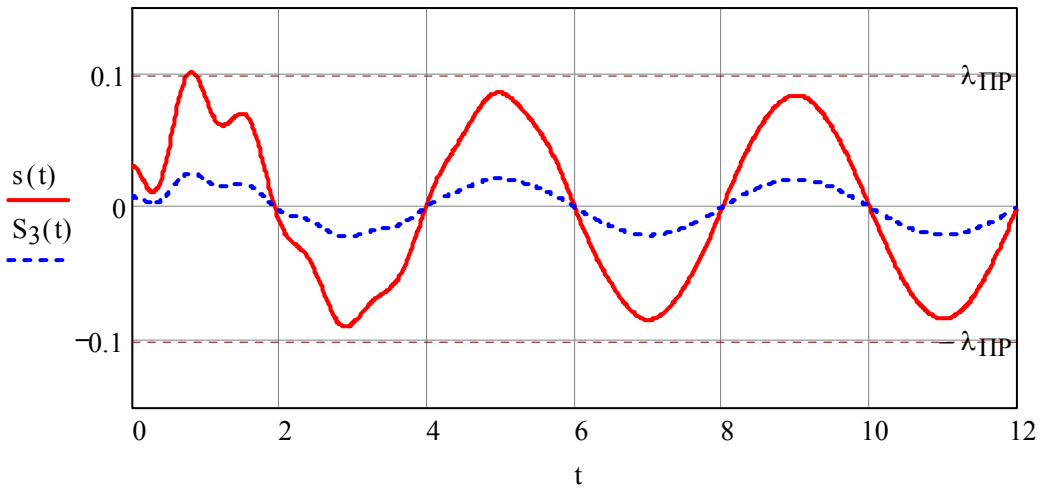
$$X_2(t) := T_{23}(t) \cos(\beta) - T_{12}(t) \cos(\alpha)$$

$$Y_2(t) := m_2\, g + T_{23}(t) \sin(\beta) + T_{12}(t) \sin(\alpha)$$

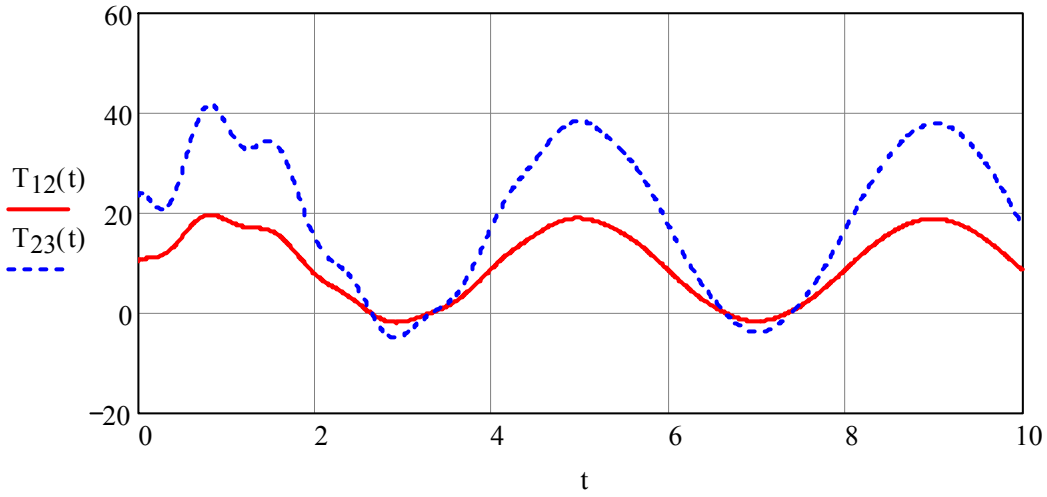
4. Результаты расчета

$m_{np} = 2.17$	$k = 7.589$	$n = 0.512$	$k_1 = 7.572$
		$A_0 = 0.034$	$\alpha_0 = 1.866$
		$B_0 = 0.084$	$\beta_0 = 0.029$
$z = 0.207$	$\lambda_{CT} = 0.01$	$F'_{сц} = 7.646$	

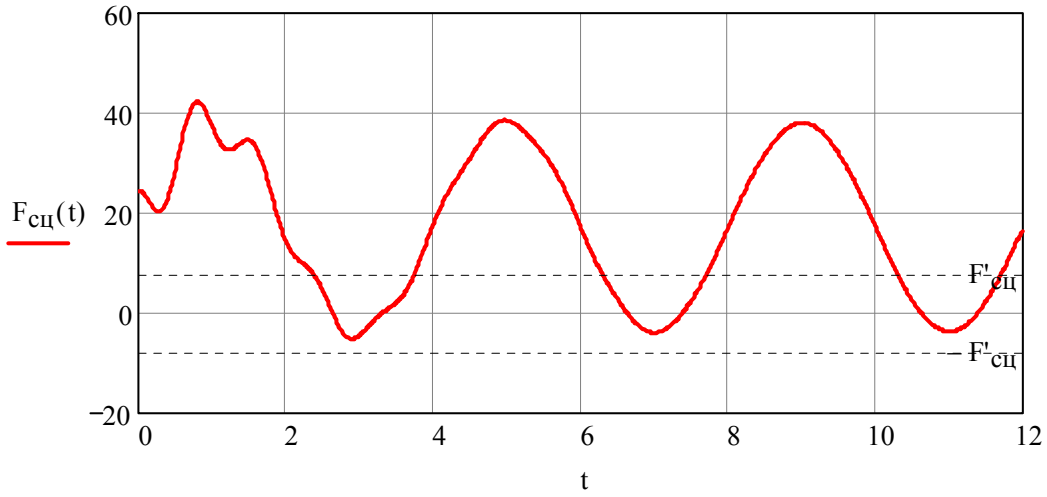
Графики движения груза 1 $s = s(t)$ и центра масс катка 3 $s_3 = s_3(t)$



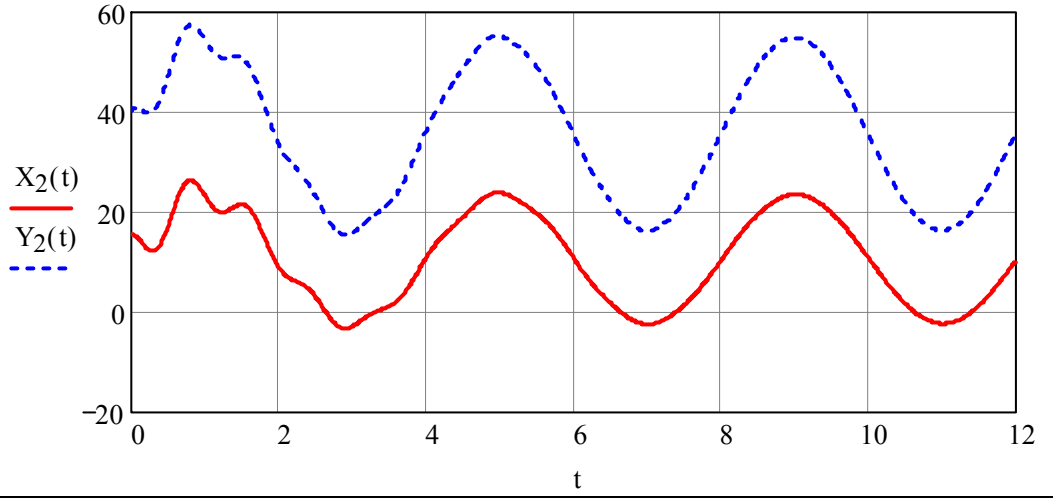
Графики сил натяжения нитей $T_{12} = T_{12}(t), T_{23} = T_{23}(t)$.



Графики силы сцепления $F_{сц} = F_{сц}(t)$



Графики реакций опор блока 2 $X_2 = X_2(t), Y_2 = Y_2(t)$.



5. Анализ результатов вычислений

Математическая модель, описывающая поведение исследуемой механической системы, построена при следующих основных допущениях:

- каток 3 движется без проскальзывания, т.е. модуль силы сцепления $F_{сц}$ подчинен следующему ограничению

$$\left|F_{сц}\right| \le F'_{сц} = f_{сц}\, N_3,$$

где $F'_{сц} = f_{сц}\, N_3 = f_{сц}\, m_3\, g \cos(\beta)$ — предельное значение силы сцепления; в нашем случае $F'_{сц} = 7.65\ H$;

- кинематические связи, наложенные систему, являются голономными (интегрируемыми), поэтому нити при движении системы всегда натянуты, т. е.

$$T_{12} \ge 0,\ T_{23} \ge 0;$$

- колебания системы являются линейными, т.е. предполагается, что удлинение пружины (перемещение центра масс катка 3) не превышает своего предельного значения

$$\left|s_3\right| \le \lambda_{пр}.$$

Анализ результатов расчета (в свете перечисленных требований к поведению механической системы) приводит к логическому выводу:

так как в некоторые моменты времени силы натяжения (реакции) нитей T_{12}, T_{23} ***становятся отрицательными, а сила сцепления*** $F_{сц}$ ***превышает свое предельное значение*** $F'_{сц}$, ***то математическая модель системы не соответствует ее реальному поведению, — нити провисают, тела движутся рывками, а каток – с проскальзыванием.***

Данное заключение позволяет сформулировать **задачу исследования**:

обеспечить соответствие математической модели реальному поведению системы.

Иными словами, необходимо удовлетворить следующим условиям:

9) нити должны быть натянутыми при движении системы;

10) величина силы сцепления должна обеспечивать движение катка без проскальзывания;

11) перемещение центра масс катка не должно превышать величины предельного значения удлинения пружины.

Данные условия представим в математическом виде

$$\begin{aligned} &\min\left(T_{12}\right)>0, \quad \min\left(F_{сц}\right)>-f_{сц}\,N_3, \quad \min\left(s_3\right)>-\lambda_{пр}, \\ &\min\left(T_{23}\right)>0, \quad \max\left(F_{сц}\right)< \ f_{сц}\,N_3, \quad \max\left(s_3\right)< \ \lambda_{пр}. \end{aligned} \tag{29}$$

Для определения значений внутренних параметров механической системы — масс тел m_1, m_2, m_3 и коэффициента жесткости пружины c, — обеспечивающих ее функционирование в соответствие с предложенной математической моделью, выберем в качестве анализируемых величин

- реакции нитей сил натяжения канатов T_{12}, T_{23},
- силу сцепления катка с опорной плоскостью $F_{сц}$,
- перемещение центра масс катка s_3.

Исследуем изменение этих функций, в зависимости от масс тел входящих в механическую систему, а также жесткости упругого элемента, т.е.

$$\begin{aligned} &T_{12}=T_{12}\left(m_1,m_2,m_3,c,t\right), \quad F_{сц}=F_{сц}\left(m_1,m_2,m_3,c,t\right), \\ &T_{23}=T_{23}\left(m_1,m_2,m_3,c,t\right), \quad s_3=s_3\left(m_1,m_2,m_3,c,t\right). \end{aligned}$$

Ограничимся состоянием установившегося движения. В этом случае закон движения груза, его скорость и ускорение имеют вид

$$\begin{aligned} &s_{уст}\left(t\right)=B_0\sin\left(pt-\beta_0\right)=B_1\sin\left(pt\right)+B_2\cos\left(pt\right), \\ &v_{уст}\left(t\right)=B_1\,p\cos\left(pt\right)-B_2\,p\sin\left(pt\right), \\ &a_{уст}\left(t\right)=-B_1\,p^2\sin\left(pt\right)-B_2\,p^2\cos\left(pt\right). \end{aligned}$$

Функции T_{12}, T_{23}, $F_{сц}$ представим в виде

$$\begin{aligned} T_{12} &= m_1 g \sin(\alpha) + C \sin(pt + \gamma), \\ T_{23} &= m_1 g \sin(\alpha) \frac{R_2}{r_2} + D \sin(pt + \delta), \\ F_{сц} &= m_1 g \sin(\alpha) \frac{R_2}{r_2} + E \sin(pt + \varphi) \end{aligned} \qquad (30)$$

где коэффициенты, входящие в эти выражения, равны:

$$C_1 = F_0 + m_1 p^2 B_1, \qquad C_2 = -m_1 p^2 B_2,$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \gamma = arctg\left(\frac{C_2}{C_1}\right),$$

$$D_1 = C_1 \frac{R_2}{r_2} + \nu \frac{p B_2}{R_2 r_2} + m_2 \frac{i_2^2}{R_2 r_2} p^2 B_1, \quad D_2 = C_1 \frac{R_2}{r_2} - \nu \frac{p B_1}{R_2 r_2} + m_2 \frac{i_2^2}{R_2 r_2} p^2 B_2,$$

$$D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \qquad \delta = arctg\left(\frac{D_2}{D_1}\right),$$

$$E_1 = D_1 + m_3 \frac{r_2}{4 R_2} p^2 B_1, \qquad E_2 = D_2 + m_3 \frac{r_2}{4 R_2} p^2 B_2,$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \qquad \varphi = arctg\left(\frac{E_2}{E_1}\right).$$

В качестве примера получим первую формулу – выражение для силы T_{12}:

$$\begin{aligned} T_{12} &= m_1 g \sin(\alpha) + F_0 \sin(pt) - m_1 a_{уст}(t) = \\ &= m_1 g \sin(\alpha) + F_0 \sin(pt) + m_1 p^2 \left[B_1 \sin(pt) + B_2 \cos(pt) \right] = \\ &= m_1 g \sin(\alpha) + \left(F_0 + m_1 p^2 B_1 \right) \sin(pt) + m_1 p^2 B_2 \cos(pt) = \\ &= m_1 g \sin(\alpha) + C_1 \sin(pt) + C_2 \cos(pt) = \\ &= m_1 g \sin(\alpha) + C \sin(pt + \gamma). \end{aligned}$$

Остальные формулы в соотношениях (30) определяются аналогично.

Условия (29), обеспечивающие адекватность движения системы математической модели (11), (12) можно теперь представить в виде

$$\min\left(T_{12}\right) = m_1 g \sin(\alpha) - C > 0, \quad \min\left(T_{23}\right) = m_1 g \sin(\alpha)\frac{R_2}{r_2} - D > 0,$$

$$\Delta F_{\max} = f_{сц}\, m_3 g \cos(\beta) - m_1 g \sin(\alpha)\frac{R_2}{r_2} - E > 0, \tag{31}$$

$$\Delta F_{\min} = f_{сц}\, m_3 g \cos(\beta) + m_1 g \sin(\alpha)\frac{R_2}{r_2} - E > 0, \quad \Delta S = \lambda_{пр} - \frac{1}{2}\frac{r_2}{R_2} B_0 > 0.$$

где $\Delta F_{\max} = f_{сц}\, N_3 - \max\left(F_{сц}\right)$, $\Delta F_{\min} = f_{сц}\, N_3 + \min\left(F_{сц}\right)$

Заметим, что оценка, определяемая неравенствами (31), является нижней оценкой для механической системы, так как в условиях неустановившегося режима движения возможны ситуации, когда

$$\min\left(T_{ij}\right) < \min\left(T_{ij_{уст}}\right), \qquad \min\left(T_{ij}\right) < \min\left(T_{ij_{уст}}\right),$$
$$\max\left(F_{сц}\right) > \max\left(F_{сц\ уст}\right), \quad \max\left(s_3\right) > \max\left(s_{3\ уст}\right).$$

Так как все коэффициенты, входящие в соотношения (31) являются функциями внутренних параметров механической системы m_1, m_2, m_3 и c, то вычисление зависимостей

$$\min\left[T_{12}\left(m_1, m_2, m_3, c\right)\right], \quad \min\left[T_{23}\left(m_1, m_2, m_3, c\right)\right],$$
$$\Delta F_{\min}\left(m_1, m_2, m_3, c\right), \qquad \Delta F_{\max}\left(m_1, m_2, m_3, c\right)$$

представим в виде процедуры $S\left(M_1, M_2, M_3, C\right)$ пакета Mathcad, приведенной на рис. 4. Выражение для функции $\Delta S\left(m_1, m_2, m_3, c\right)$, в силу несложности ее преобразования, получим позже.

В дальнейшем, ограничимся исследованием влияния масс m_1 и m_3. Установим интервалы их изменения. Для этого рассмотрим механическую систему в состоянии резонанса. Если $z = p/k = 1$, то $4R_2{}^2 p^2 m_{пр} = r_2{}^2 c$, и зависимость $m_{1рез} = m_{1рез}\left(m_3\right)$ имеет вид

$$m_{1рез} = \frac{1}{4}\frac{r_2{}^2}{R_2{}^2}\frac{c}{p^2} - m_2\frac{i_2{}^2}{R_2{}^2} - \frac{3}{8}m_3\frac{r_2{}^2}{R_2{}^2},$$

откуда следует: 1) если $m_3 = 0$, то $m_{1рез} = 49{,}49\ кг$; 2) если $m_{1рез} = 0$, то $m_3 = 530.9\ кг$. Поэтому ограничимся исследованием механической системы внутри интервала

$$0 \le m_1 \le \ \ 60 \div 100\ кг,$$
$$0 \le m_3 \le 550 \div 700\ кг.$$

$$
\begin{aligned}
&S(M_1, M_2, M_3, C) := \\
&\quad m_{pr} \leftarrow M_1 + M_2 \frac{i_2^{\,2}}{R_2^{\,2}} + \frac{3}{8} M_3 \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2 \\
&\quad (n \ \ k \ \ k_1) \leftarrow \left(\frac{\nu}{2 R_2^{\,2} m_{pr}} \ \ \frac{1}{2} \frac{r_2}{R_2} \sqrt{\frac{C}{m_{pr}}} \ \ \sqrt{k^2 - n^2} \right) \\
&\quad (B_1 \ \ B_2) \leftarrow \left[\frac{F_0}{m_{pr}} \frac{k^2 - p^2}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + (2\,n\,p)^2} \ \ -\frac{F_0}{m_{pr}} \frac{2\,n\,p}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + (2\,n\,p)^2} \right] \\
&\quad (C_1 \ \ C_2) \leftarrow \left(F_0 + M_1 p^2 B_1 \ \ M_1 p^2 B_2 \right) \\
&\quad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} C_1 \frac{R_2}{r_2} + \nu \frac{B_2\,p}{R_2\,r_2} + M_2 \frac{i_2^{\,2}}{R_2\,r_2} B_1 p^2 \\ C_2 \frac{R_2}{r_2} - \nu \frac{B_1\,p}{R_2\,r_2} + M_2 \frac{i_2^{\,2}}{R_2\,r_2} B_2 p^2 \end{pmatrix} \\
&\quad (E_1 \ \ E_2) \leftarrow \left(D_1 + M_3 \frac{r_2}{4 R_2} B_1 p^2 \ \ D_2 + M_3 \frac{r_2}{4 R_2} B_2 p^2 \right) \\
&\quad (C \ \ D \ \ E) \leftarrow \left(\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}} \ \ \sqrt{D_1^{\,2} + D_2^{\,2}} \ \ \sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2}} \right) \\
&\quad \begin{pmatrix} M_1\,g \sin(\alpha) - C \\ M_1\,g \frac{R_2}{r_2} \sin(\alpha) - D \\ f_{сц} M_3\,g \cos(\beta) - M_1\,g \frac{R_2}{r_2} \sin(\alpha) - E \\ f_{сц} M_3\,g \cos(\beta) + M_1\,g \frac{R_2}{r_2} \sin(\alpha) - E \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Рис. 4. Процедура вычисления функций, входящих в условия (31)

Рассмотрим теперь последнее неравенство в условиях (31) – $\Delta S > 0$. Учитывая выражение для амплитуды B_0 представим его в виде

$$m_{np}^2 s_{ПР}^2 \left[\left(k^2 - p^2 \right)^2 + 4 n^2 p^2 \right] > F_0^2,$$

где $S_{ПР} = 2\dfrac{R_2}{r_2}\lambda_{np}$ – предельное значение перемещения груза 1.

Подставляя вместо коэффициентов k и n их выражения, найдем, из уравнения $\Delta S = 0$, предельные значения массы груза 1

$$m_{1_{ПР}}\left(m_3\right) = m_{1_{РЕЗ}}\left(m_3\right) \pm \Delta m.$$

где $\Delta m = \dfrac{F_0}{s_{ПР} p^2}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\nu\, p\, s_{ПР}}{F_0\, R_2^2} \right)^2}$.

Рассматривая вновь неравенство $\Delta S > 0$, заключаем, что оно выполняется в двух случаях:

12) при $z < 1$, если $m_1\left(m_3\right) < m_{1_{РЕЗ}}\left(m_3\right) - \Delta m$;

13) при $z > 1$, если $m_1\left(m_3\right) > m_{1_{РЕЗ}}\left(m_3\right) + \Delta m$.

Тем самым из области допустимых значений внутренних параметров механической системы исключается околорезонансная зона, ширина которой равна $2\Delta m$, не зависящая от параметров m_1, m_2, m_3 и c.

Исследуем теперь зависимости $\min\left(T_{12}\right), \min\left(T_{23}\right), \Delta F_{\min}$ и $\Delta F_{\max}$. Для этого изобразим их на плоскости $\left(m_1, m_3\right)$ линиями уровня $f_i\left(m_1, m_3\right) = c_i$ (рис. 5 – рис. 8) и будем искать те из них, для которых выполняются условия $f_i\left(m_1, m_3\right) = 0$, т. е.:

$$\begin{aligned}
\min\left[T_{12}\left(m_1, m_3\right) \right] &= 0, \\
\min\left[T_{12}\left(m_1, m_3\right) \right] &= 0, \\
\Delta F_{\max}\left(m_1, m_3\right) &= 0, \\
\Delta F_{\min}\left(m_1, m_3\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Из графиков на рис. 5 – рис. 8 видно, что неравенства (31) выполняются при следующих значениях массы груза 1:

$$m_1 > m_{1_{\min}}^{*}\left(m_3\right);$$
$$m_1 > m_{1_{\min}}^{**}\left(m_3\right);$$
$$m_1 < m_{1_{\max}}\left(m_3\right),$$

где величины $m_{1_{\min}}^{*}\left(m_3\right), m_{1_{\min}}^{**}\left(m_3\right)$ и $m_{1_{\max}}\left(m_3\right)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
&\min\left[T_{12}\left(m_{1_{\min}}^{*}\left(m_3\right), m_3\right)\right] = 0 \quad (\text{рис. 5});\\
&\min\left[T_{23}\left(m_{1_{\min}}^{**}\left(m_3\right), m_3\right)\right] = 0 \quad (\text{рис. 6});\\
&\Delta F_{\max}\left[m_{1_{\max}}\left(m_3\right), m_3\right] = 0 \quad (\text{рис. 7}).
\end{aligned} \tag{32}$$

Из рис. 8 следует, что условие $\Delta F_{\min}\left(m_1, m_3\right) > 0$ выполняется всегда для рассматриваемых интервалов изменения масс m_1, m_3.

Зависимости $m_{1_{\min}}^{*}\left(m_3\right), m_{1_{\min}}^{**}\left(m_3\right)$ и $m_{1_{\max}}\left(m_3\right)$ являются нелинейными. Более того, вблизи резонансных состояний $\left(z \approx 1\right)$ два последних уравнения системы (32) имеют по три действительных корня (рис. 9).

Приведем фрагмент документа Mathcad, в котором проводится реализация описанного выше анализа.

```
. . .  . . .  . . .  . . .
Формирование функций (31), в зависимости от параметров m1 и m3
S12(M1,M3) := S(M1,m2,M3,c)0          S23(M1,M3) := S(M1,m2,M3,c)1
Δmax(M1,M3) := S(M1,m2,M3,c)2         Δmin(M1,M3) := S(M1,m2,M3,c)3
Формирование двумерных матриц для построения графиков функций
min[T12(m1,m3)], min[T23(m1,m3)], ΔFmax(m1,m3) и ΔFmin(m1,m3)
minT12 := CreateMesh(S12,0,60,0,550,120,1100)
minT23 := CreateMesh(S23,0,60,0,550,120,1100)
ΔFmax := CreateMesh(Δmax,0,100,0,550,150,1100)
ΔFmin := CreateMesh(Δmin,0,100,0,550,150,550)
```

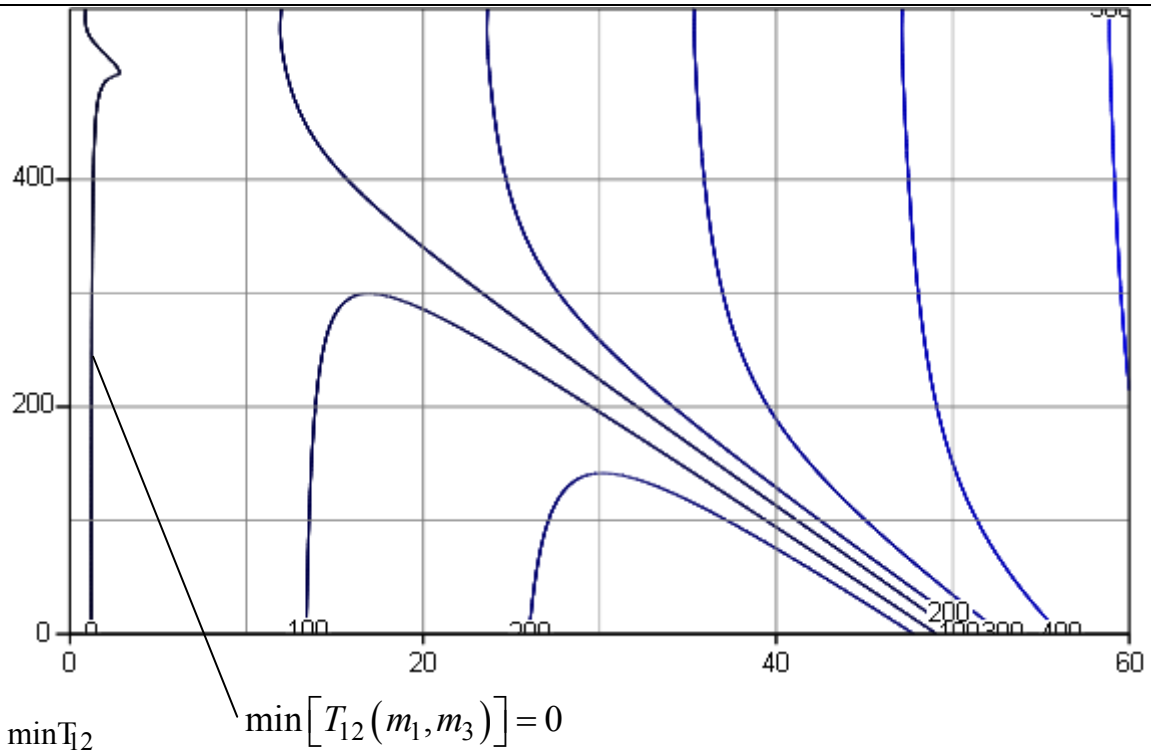


Рис. 5. График функции $\min\left[T_{12}\left(m_1,m_3\right)\right]$

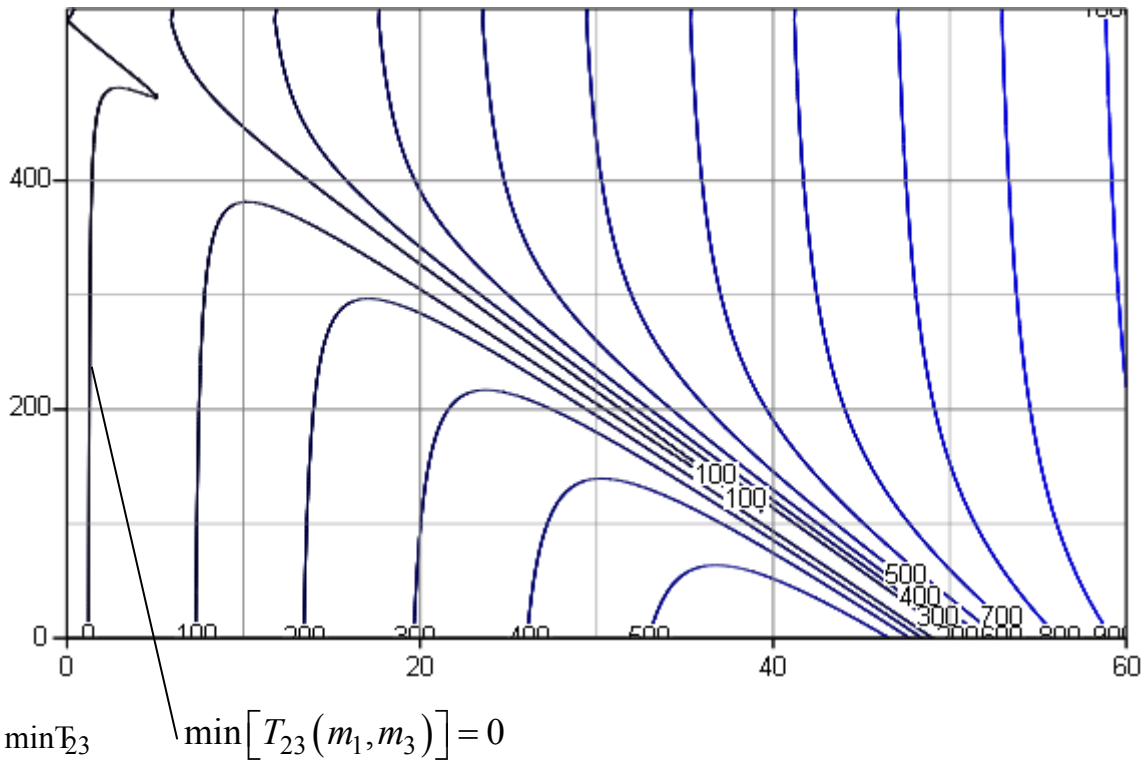


Рис. 6. График функции $\min\left[T_{23}\left(m_1,m_3\right)\right]$

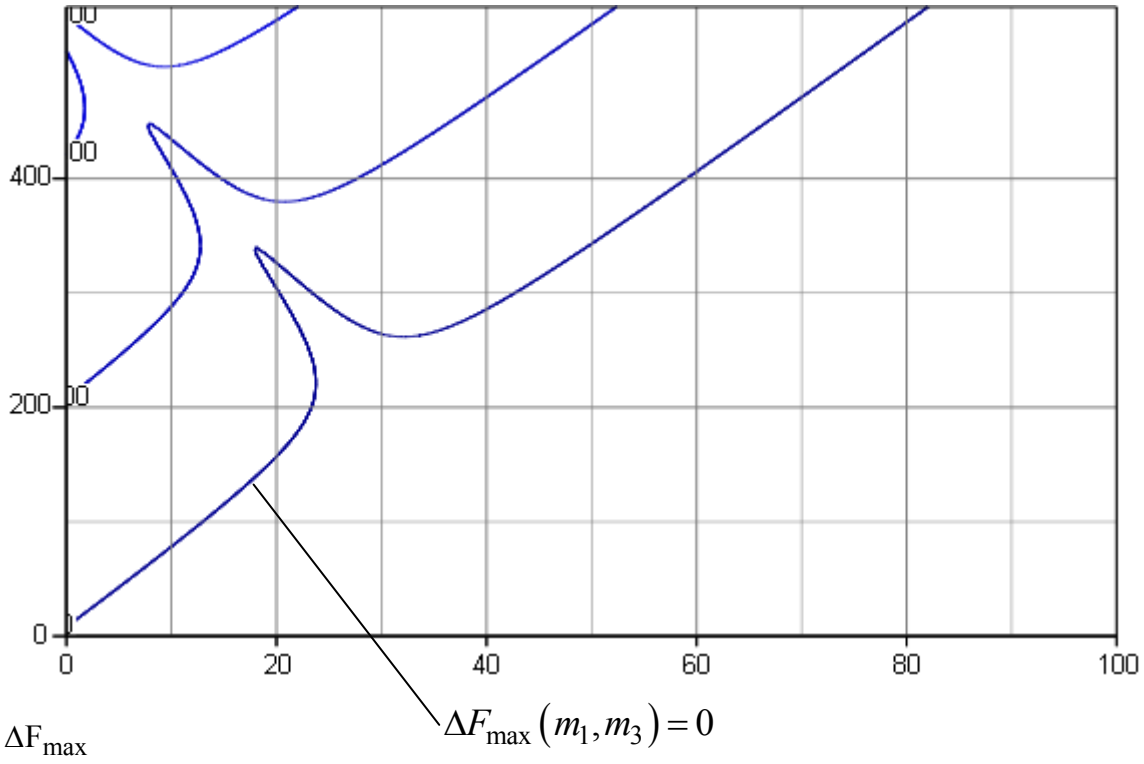


Рис. 7. График функции $\Delta F_{\max}(m_1, m_3)$

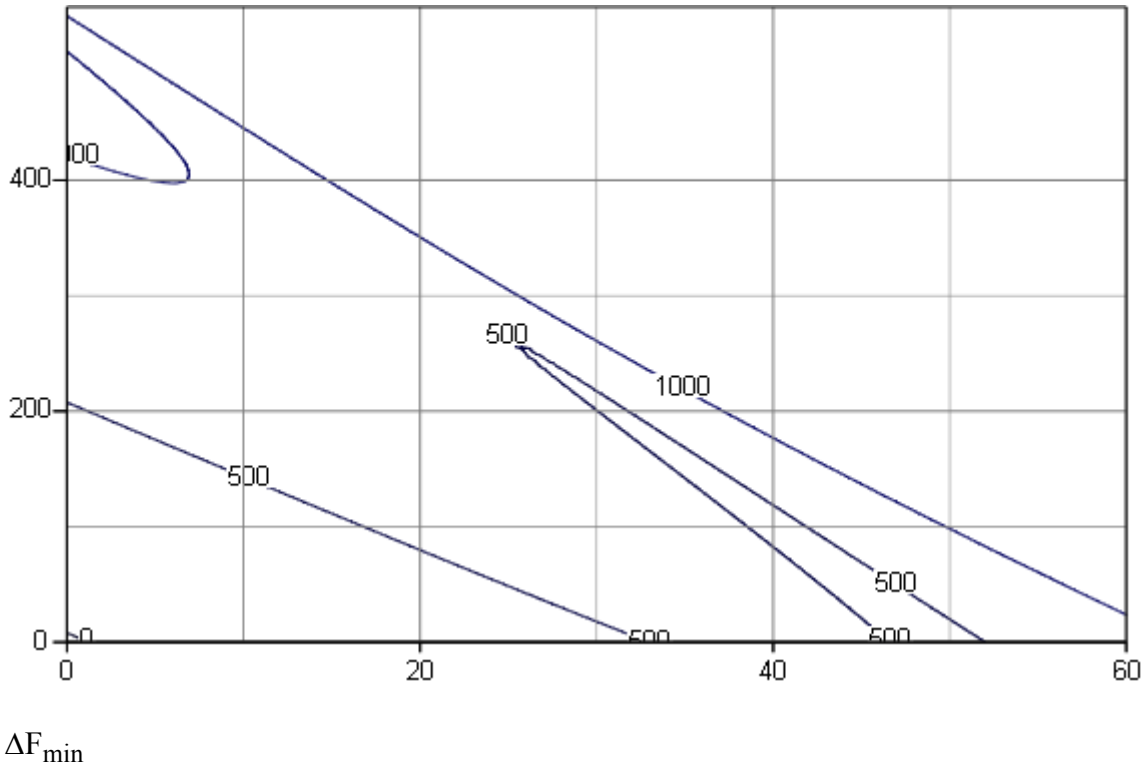
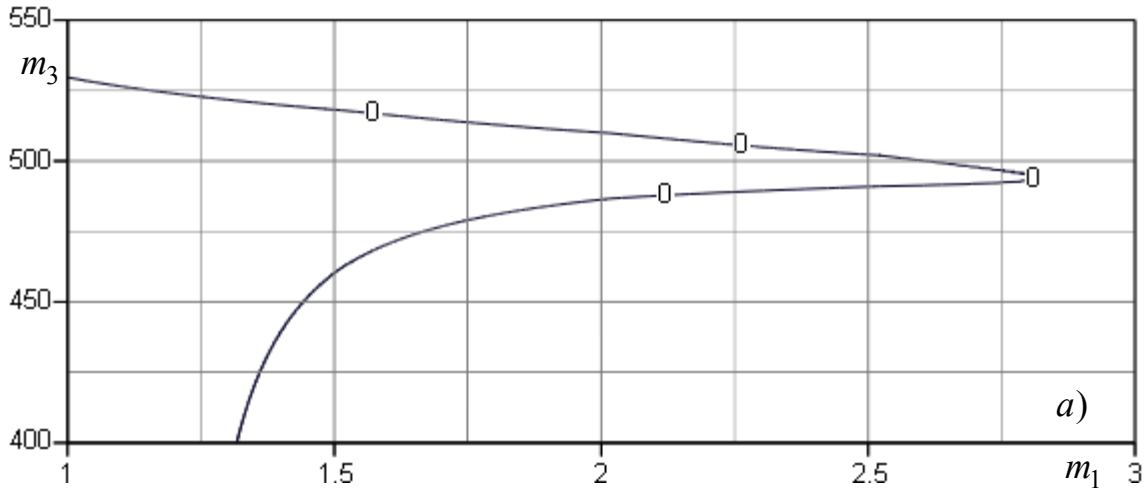
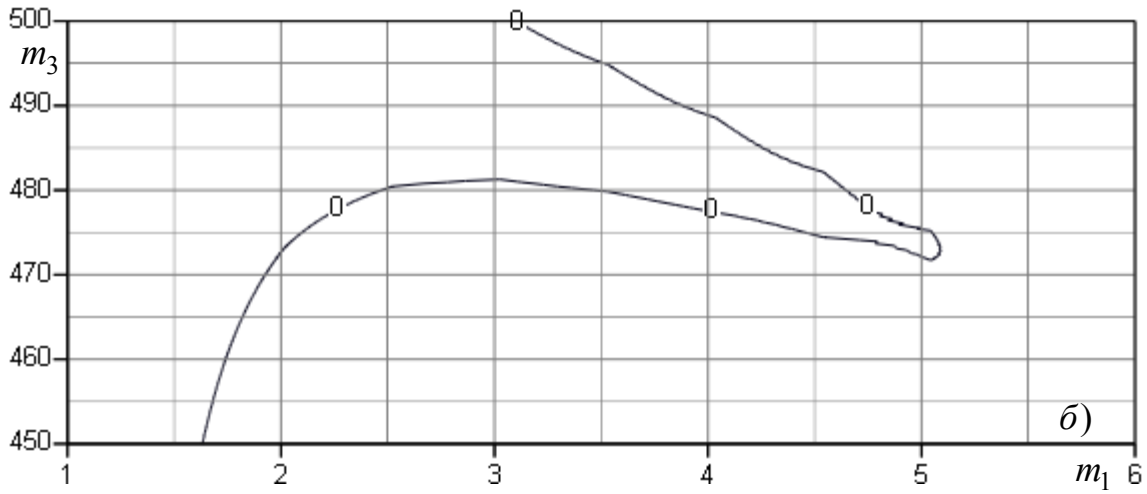


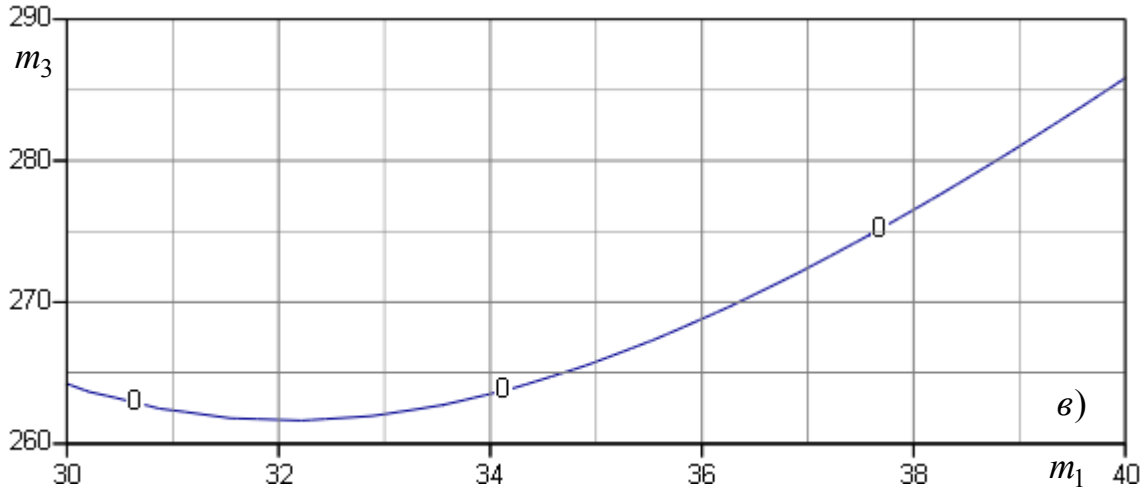
Рис. 8. График функции $\Delta F_{\min}(m_1, m_3)$



$\min T_{12}$



$\min T_{23}$



ΔF_{max}

Рис. 9. Линии уровня вблизи резонансного состояния для значений

а) $\min\left[T_{12}\left(m_1,m_3\right)\right]=0$, *б)* $\min\left[T_{23}\left(m_1,m_3\right)\right]=0$, *в)* $\Delta F_{\max}\left(m_1,m_3\right)=0$.

Найдем область допустимых значений масс m_1 и m_3, которые обеспечивают выполнение условий (31) и являются решениями уравнений (32).

Ниже представлен фрагмент документа Mathcad, реализующего поставленную задачу.

... ...

Вычисление массы груза 1 при резонансе как функции массы катка 3 $m_{1_{РЕЗ}}(m_3)$

$$M_{1rez}(M_3) := \frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2 \frac{c}{p^2} - m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} - \frac{3}{8} M_3 \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2$$

Вычисление предельного значения массы груза 1 в дорезонансной области $m_{1_{ПР\max}}(m_3)$.

$$\Delta m := \left| \begin{array}{l} S_{np} \leftarrow 2 \dfrac{R_2}{r_2} \lambda_{ПР} \\ \dfrac{F_0}{S_{np}\, p^2} \sqrt{1 + \left(\dfrac{S_{np}\, \nu\, p}{F_0\, R_2^2}\right)^2} \end{array} \right.$$

$$M1_{np_max}(M_3) := M_{1rez}(M_3) - \Delta m$$

Вычисление предельного значения массы груза 1 в послерезонансной области $m_{1_{ПР\min}}(m_3)$.

$$M1_{np_min}(M_3) := M_{1rez}(M_3) + \Delta m$$

Нахождение величины $m^*_{1_{\min}}$ из уравнения $\min\left[T_{12}\left(m^*_{1_{\min}}(m_3), m_3\right)\right] = 0$

$$M1_{min1}(M_3) := root\left(S_{12}(M_1, M_3), M_1, 0, 3\right)$$

Нахождение величины $m^{**}_{1_{\min}}$ из уравнения $\min\left[T_{23}\left(m^{**}_{1_{\min}}(m_3), m_3\right)\right] = 0$

$$M1_{min2_1}(M_3) := root\left(S_{23}(M_1, M_3), M_1, 0, 2.8\right)$$
$$M1_{min2_2}(M_3) := root\left(S_{23}(M_1, M_3), M_1, 2.8, M_{1rez}(M_3) - 0.26\right)$$
$$M1_{min2_3}(M_3) := root\left(S_{23}(M_1, M_3), M_1, M_{1rez}(M_3) - 0.26, 50\right)$$

Нахождение величины $m_{1_{\max}}$ из уравнения $\Delta F_{\max}\left[m_{1_{\max}}(m_3), m_3\right] = 0$

$$M1_{max_1}(M_3) := root\left(\Delta_{max}(M_1, M_3), M_1, 0, M_{1rez}(M_3)\right)$$
$$M1_{max_2}(M_3) := root\left(\Delta_{max}(M_1, M_3), M_1, M_{1rez}(M_3), 32\right)$$
$$M1_{max_3}(M_3) := root\left(\Delta_{max}(M_1, M_3), M_1, 32, 100\right)$$

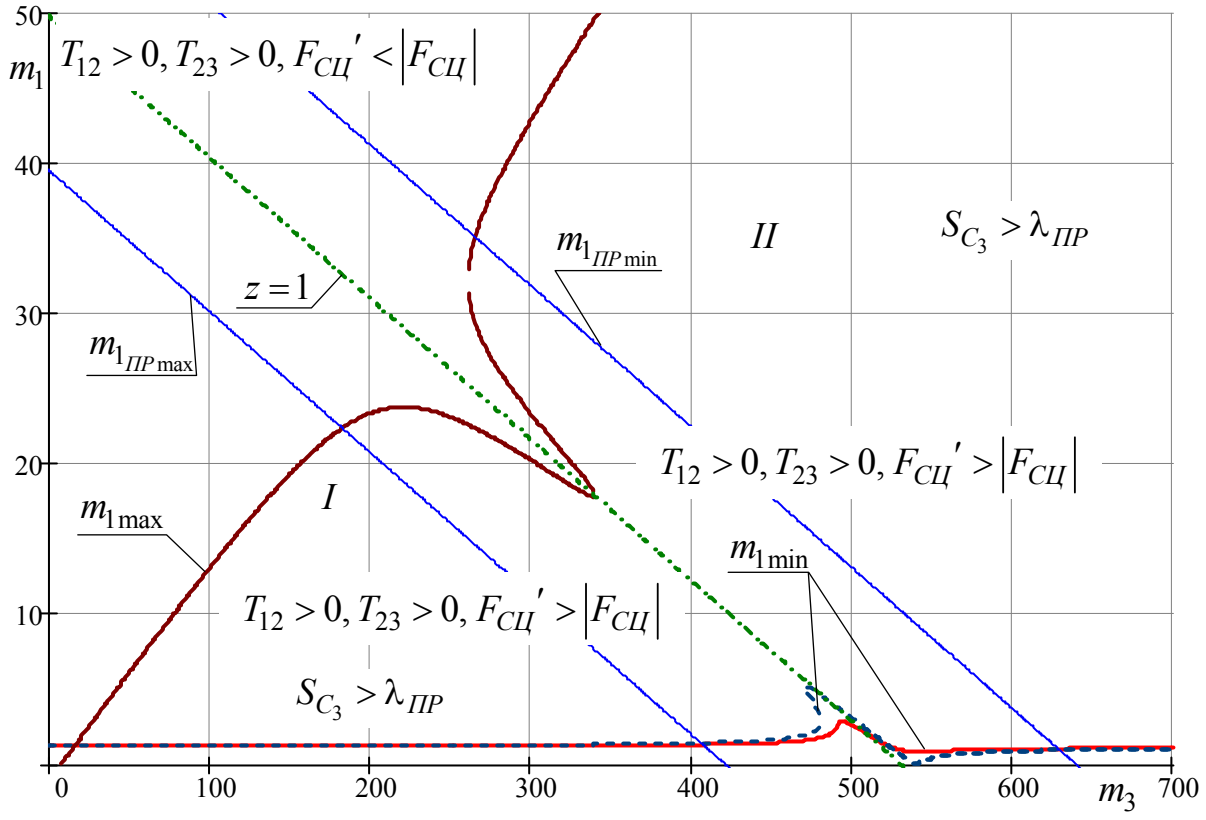


Рис. 10. Области допустимых значений для масс m_1 и m_3.

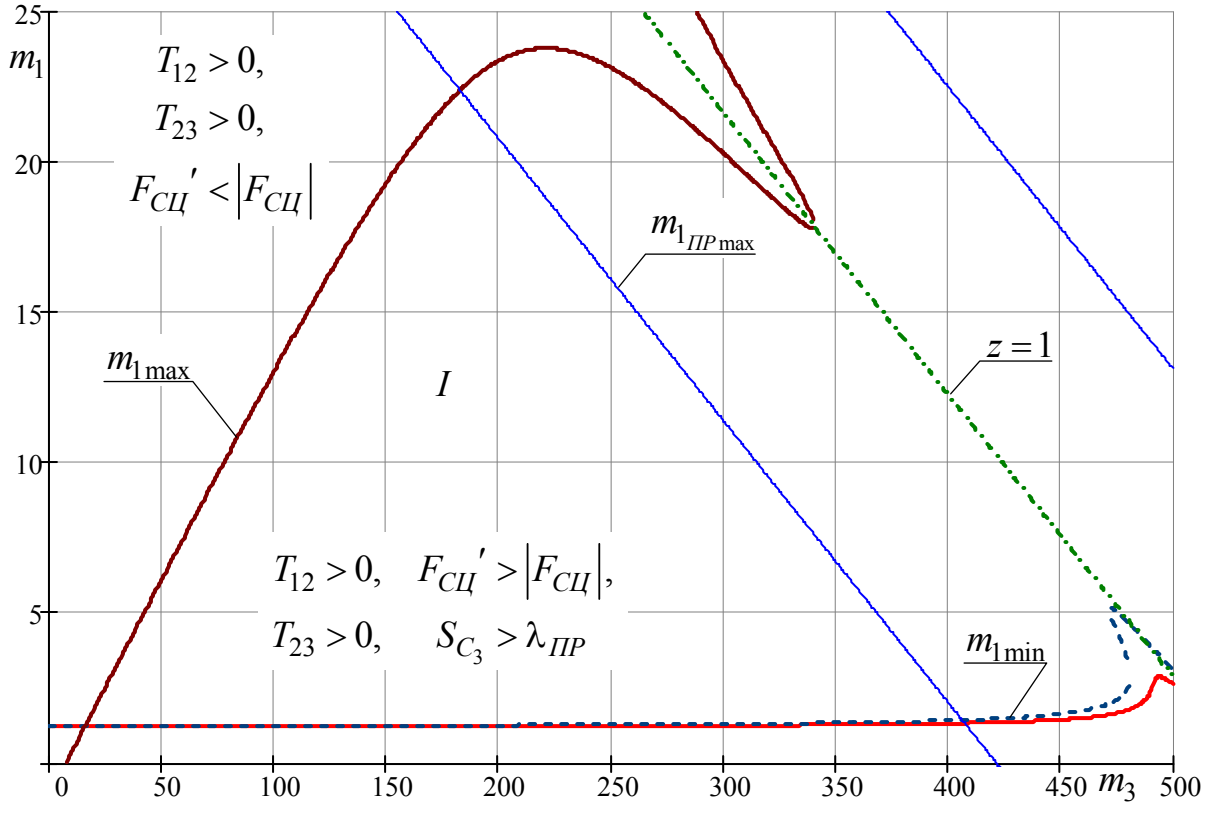


Рис. 11. Подобласть I *допустимых значений для масс* m_1 и m_3

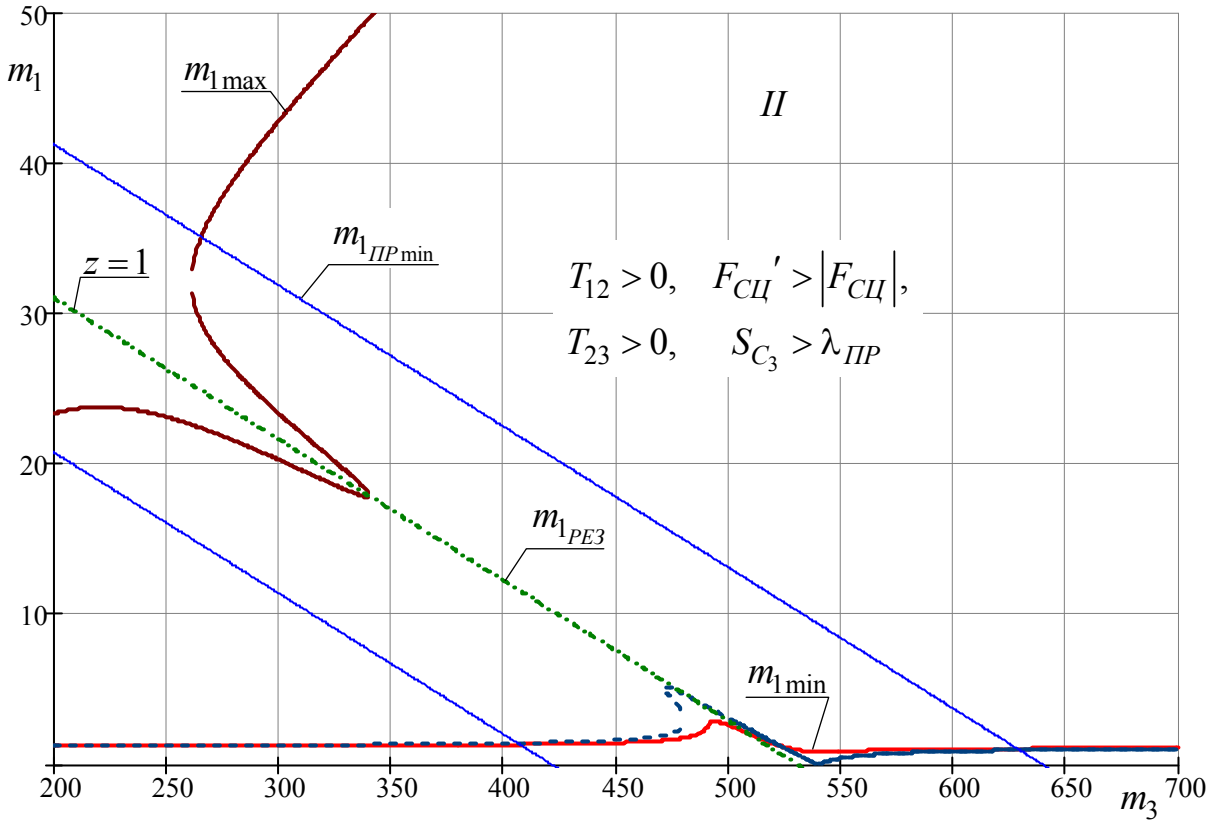


Рис. 12. Подобласть II *допустимых значений для масс* m_1 и m_3

Как видно из графиков (рис. 10 – рис. 12), область допустимых значений масс m_1 и m_3 разбивается на две подобласти:

- Подобласть I – состояние дорезонансного режима $(z<1)$, для которого значения масс ограничены: сверху – линиями $m_{1\max}(m_3), m_{1_{РЕЗ}}(m_3)-\Delta m$, снизу – линией $m^{**}_{1\min}(m_3)$;
- Подобласть II – состояние послерезонансного режима $(z>1)$, для которого значения масс ограничены: сверху – кривой $m_{1\max}(m_3)$; снизу – линиями $m_{1_{РЕЗ}}(m_3)+\Delta m, m^{*}_{1\min}(m_3)$.

Вычислим координаты узловых точек каждой подобласти. При нахождении этих координат можно использовать два способа:

- Численный, при котором определяются корни уравнений, связывающих координаты узловых точек. Например: $m_{1\max}(m_3)=m^{**}_{1\min}(m_3) \quad \Rightarrow \quad m_3$;

- С помощью опции "Trace" из контекстного меню свойств 2–D графиков.

Ниже представлен документ Mathcad, в котором реализуется численный метод.

Нахождение координат узловых точек в подобласти $I, (z<1)$

Формирование уравнений для определения искомых координат

$M_{3T12_I_1} := \text{root}(M1_{max_1}(M_3) - M1_{min1}(M_3), M_3, 10, 20)$

$M_{3T23_I_1} := \text{root}(M1_{max_1}(M_3) - M1_{min2_1}(M_3), M_3, 10, 20)$

$M_{3пр_I} := \text{root}(M1_{max_1}(M_3) - M1_{np_max}(M_3), M_3, 150, 200)$

$M_{3T12_I_2} := \text{root}(M1_{np_max}(M_3) - M1_{min1}(M_3), M_3, 400, 450)$

$M_{3T23_I_2} := \text{root}(M1_{np_max}(M_3) - M1_{min2_1}(M_3), M_3, 400, 450)$

Вычисление координат узловых точек

$M_{3T12_I_1} = 16.413$ $\quad M1_{min1}(M_{3T12_I_1}) = 1.207$

$M_{3T23_I_1} = 16.567$ $\quad M1_{min2_1}(M_{3T23_I_1}) = 1.23$

$M_{3пр_I} = 183.231$ $\quad M1_{max_1}(M_{3пр_I}) = 22.363$

$M_{3T12_I_2} = 407.619$ $\quad M1_{min1}(M_{3T12_I_2}) = 1.327$

$M_{3T23_I_2} = 406.517$ $\quad M1_{min2_1}(M_{3T23_I_2}) = 1.43$

Нахождение координат узловых точек в подобласти $II, (z>1)$

Формирование уравнений для определения искомых координат

$M_{3пр_II} := \text{root}(M1_{max_3}(M_3) - M1_{np_min}(M_3), M_3, 265, 300)$

$M_{3T12_II} := \text{root}(M1_{np_min}(M_3) - M1_{min1}(M_3), M_3, 600, 650)$

$M_{3T23_II} := \text{root}(M1_{np_min}(M_3) - M1_{min2_1}(M_3), M_3, 600, 650)$

Вычисление координат узловых точек

$M_{3пр_II} = 265.964$ $\quad M1_{max_3}(M_{3пр_II}) = 35.068$

$M_{3T12_II} = 628.74$ $\quad M1_{min1}(M_{3T12_II}) = 1.058$

$M_{3T23_II} = 629.828$ $\quad M1_{min2_3}(M_{3T23_II}) = 0.956$

6. Результаты анализа

С целью подтверждения проведенных исследований произведем расчет механической системы в дорезонансном и послерезонансном режимах.

Расчет механической системы с упругой связью для z < 1.

1. Ввод исходных данных

$m_3 := 50$ $m_1 := 5$

. . . . . .

4. Результаты расчета

$m_{np} = 10.576$ $k = 3.438$ $n = 0.105$ $k_1 = 3.436$

$A_0 = 0.047$ $\alpha_0 = 2.355$

$B_0 = 0.101$ $\beta_0 = 0.035$

$z = 0.457$ $\lambda_{CT} = -0.038$ $F'_{сц} = 127.436$

Графики движения груза 1 $s = s(t)$ и центра масс катка 3 $s_3 = s_3(t)$

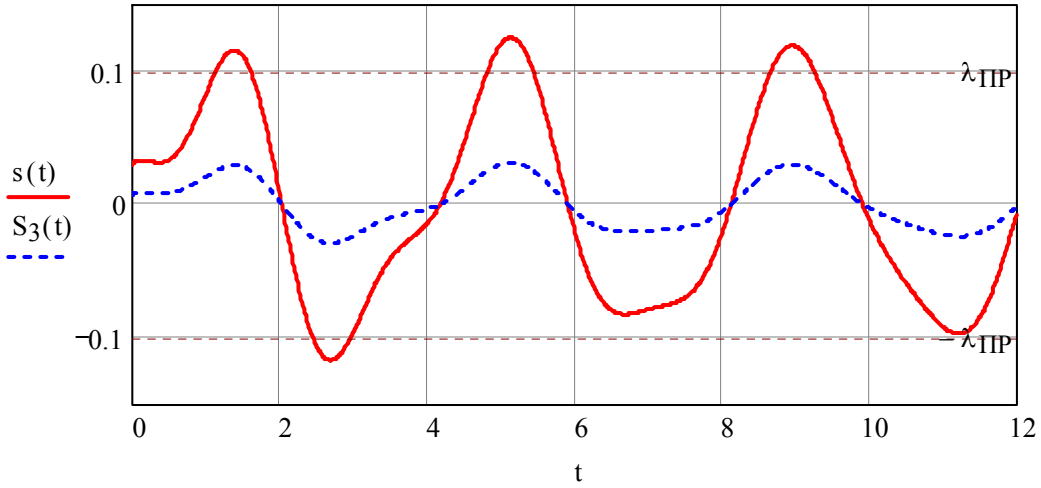


График сил натяжения канатов $T_{12} = T_{12}(t), T_{23} = T_{23}(t)$.

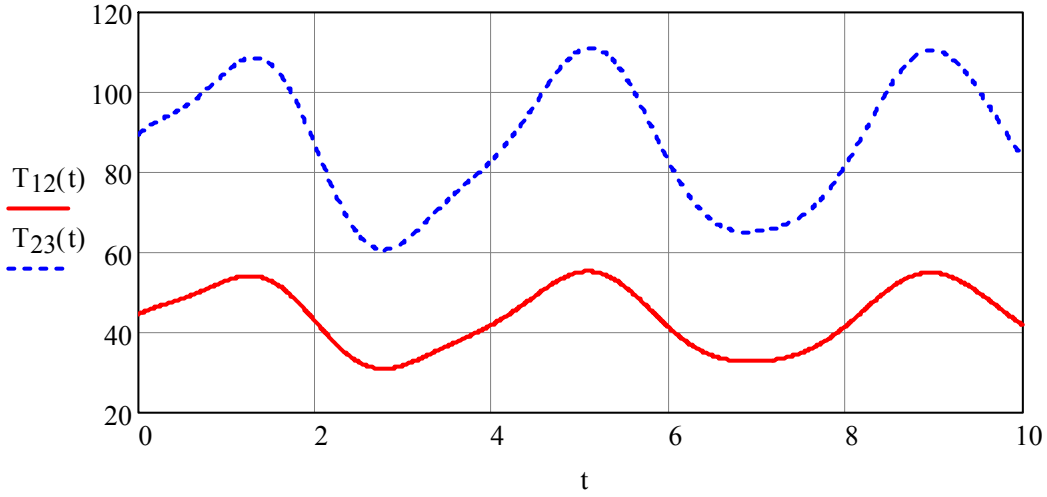
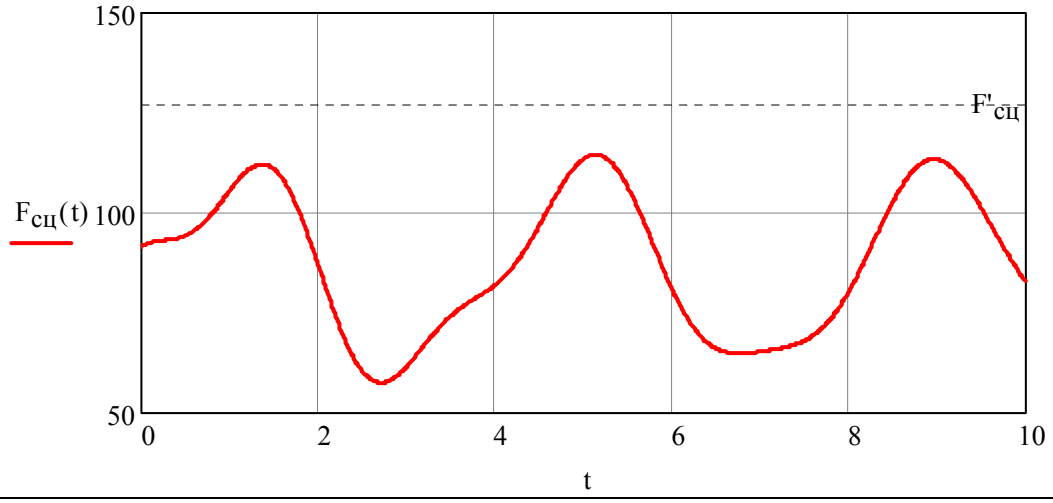


График силы сцепления $F_{сц} = F_{сц}(t)$



Расчет механической системы с упругой связью для z > 1.

1. Ввод исходных данных

$m_3 := 550$ $m_1 := 50$

. . . . . .

4. Результаты расчета

$m_{пр} = 102.451$	$k = 1.105$	$n = 0.011$	$k_1 = 1.105$
		$A_0 = 0.151$	$\alpha_0 = 0.214$
		$B_0 = 0.078$	$\beta_0 = 3.114$
$z = 1.422$	$\lambda_{СТ} = -0.499$	$F'_{сц} = 1401.792$	

Графики движения груза 1 $s = s(t)$ и центра масс катка 3 $s_3 = s_3(t)$

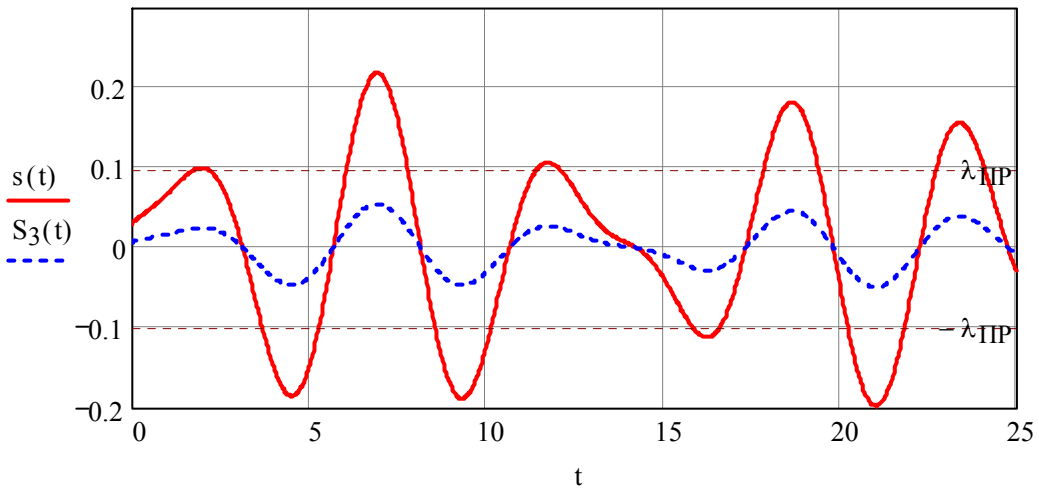


График сил натяжения канатов $T_{12} = T_{12}(t), T_{23} = T_{23}(t)$.

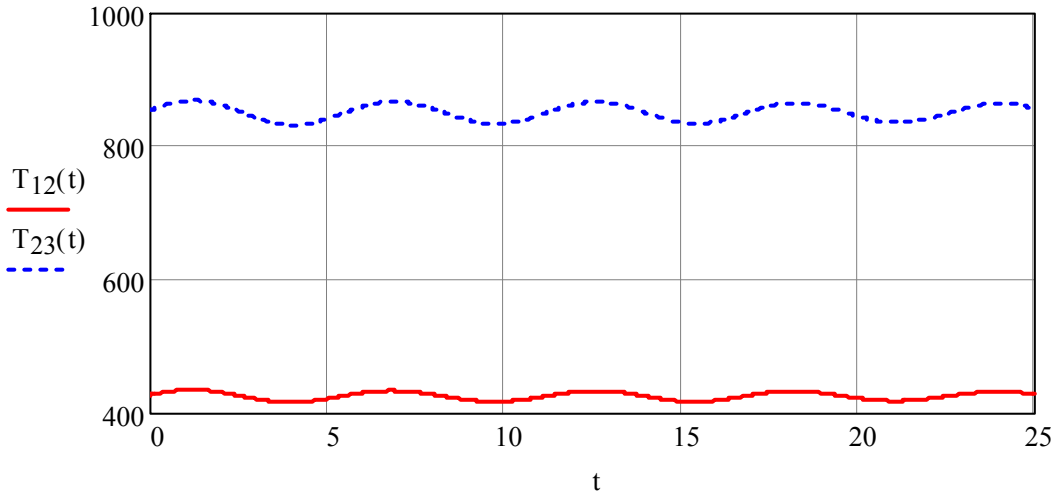
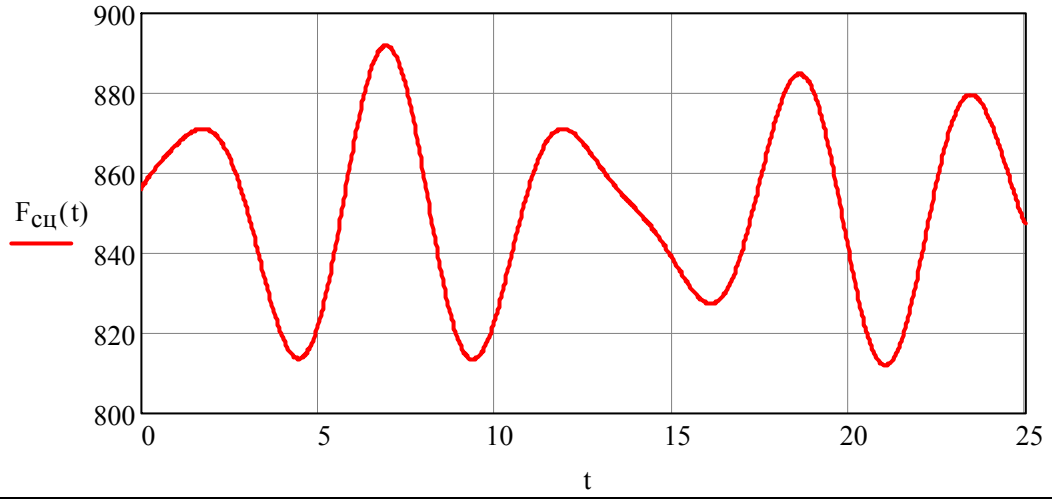


График силы сцепления $F_{сц} = F_{сц}(t)$



Выводы

В результате решения дифференциального уравнения движения системы (11) при начальных условиях (12) пределен закон движения системы $s = s(t)$, на основании которого по разработанному алгоритму вычислены значения реакций связей.

Анализ результатов расчета показал, что в некоторые моменты времени натяжения нитей становятся отрицательными, а сила сцепления превышает свое предельное значение, и, следовательно, принятая математическая модель не соответствует поведению механической системы: нити провисают, тела движутся рывками, а каток 3 – с проскальзыванием.

Для устранения этой ситуации были сформулированы критерии, удовлетворение которых обеспечивает адекватность движения системы математической модели, т.е. выполнение условий

$$T_{12} \geq 0,\ T_{23} \geq 0,\ F_{сц} \leq F'_{сц} = \left| f_{сц} N_3 \right|,\ s_3 \leq \lambda_{пр}.$$

Исследование влияния масс груза 1 и катка 3 на движение системы позволило определить область допустимых значений m_1 и m_3, внутри которой выполняются указанные условия. Эта область разбивается на две подобласти:

- подобласть I – состояние дорезонансного режима $(z < 1)$, для которого значения масс ограничены следующими соотношениями

$$16{,}57\ кг < m_3 < 407{,}62\ кг,$$

$$m_{1_{MAX}}(m_3) = \begin{cases} m_{1\max}(m_3) & \text{при} \quad 16{,}57\ кг < m_3 \leq 183{,}23\ кг, \\ m_{1РЕЗ}(m_3) - \Delta m & \text{при} \quad 183{,}23\ кг \leq m_3 < 406{,}52\ кг, \end{cases}$$

$$m_{1_{MIN}}(m_3) = m^{**}_{1\min}(m_3).$$

- подобласть II – состояние послерезонансного режима $\left(z>1\right)$, для которого для которого значения масс ограничены следующими соотношениями

$$265{,}96\ кг < m_3 < \infty,$$

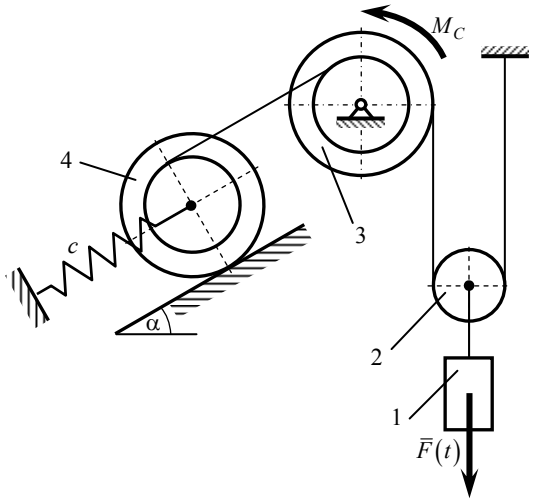
$$m_{1_{MAX}}\left(m_3\right) = m_{1\max}\left(m_3\right),$$

$$m_{1_{MIN}}\left(m_3\right) = \begin{cases} m_{1РЕЗ}\left(m_3\right) + \Delta m & \text{при} \quad 265{,}96\ кг < m_3 \le 628{,}74\ кг, \\ m^{**}_{1\min}\left(m_3\right) & \text{при} \quad 628{,}74\ кг \le m_3 < \infty. \end{cases}$$

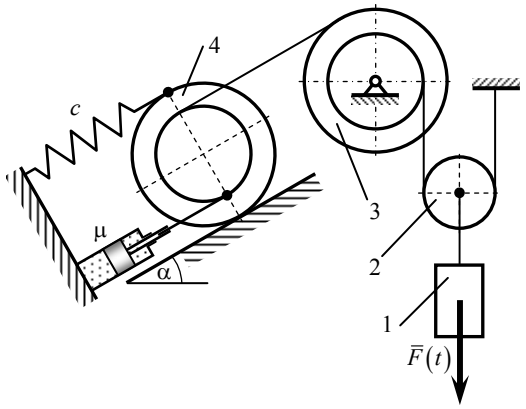
Результаты расчетов скорректированной механической системы представлены в виде графиков изменения характерных параметров в зависимости от времени.

АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

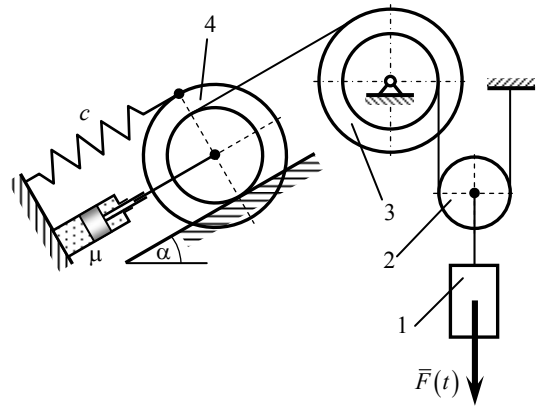
1



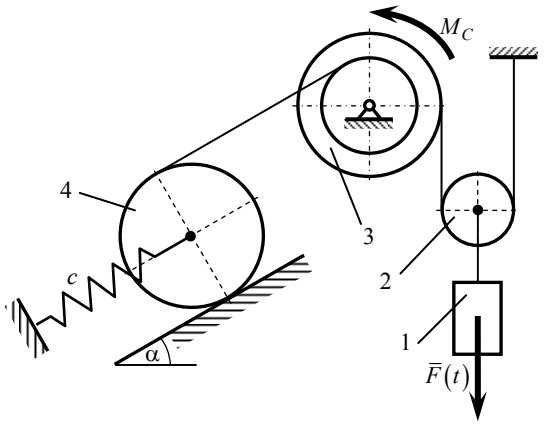
2



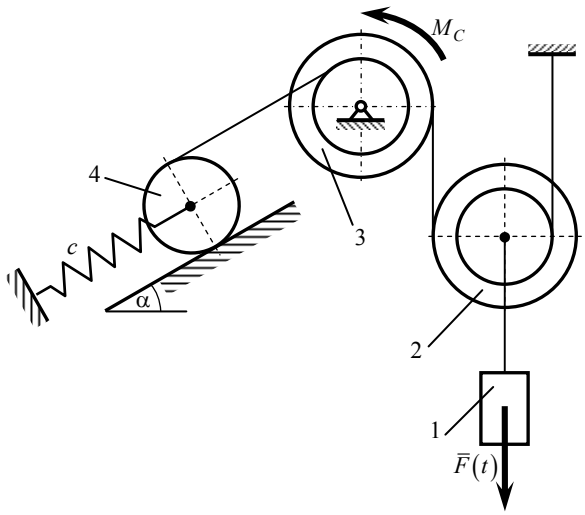
3



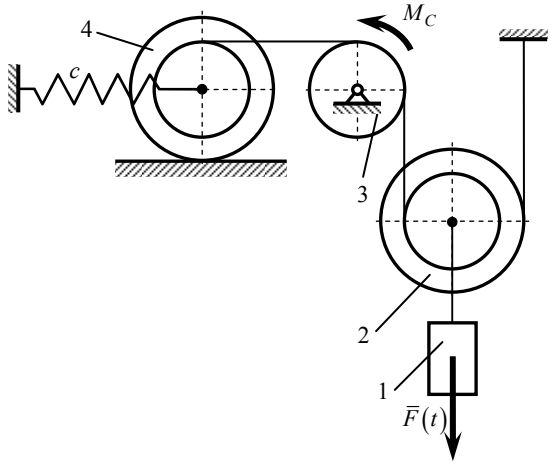
4



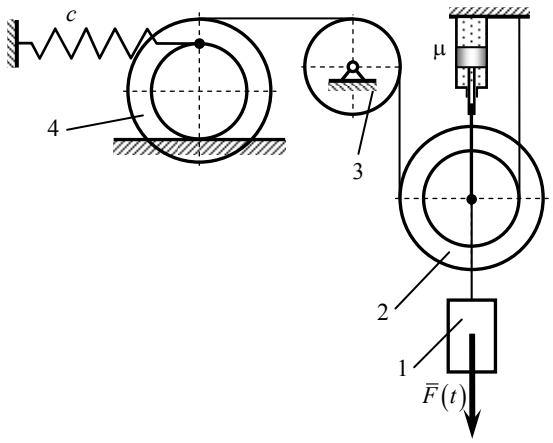
5



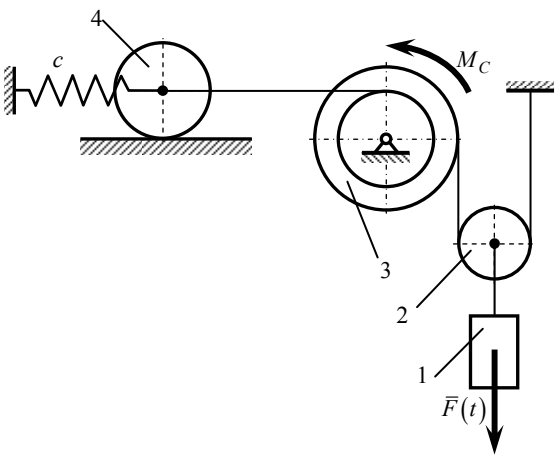
6



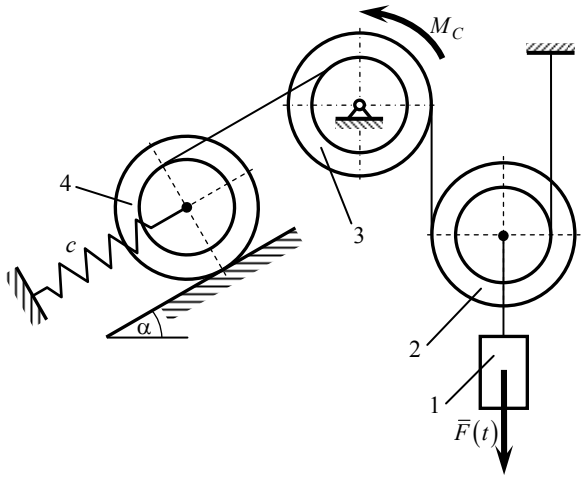
7


c
μ
4
3
2
1
$\bar{F}(t)$

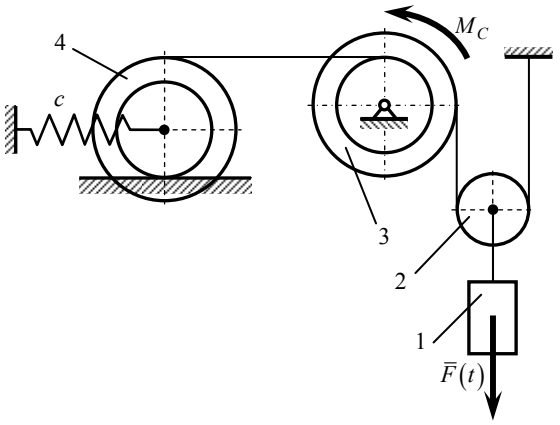
8


4
c
M_C
3
2
1
$\bar{F}(t)$

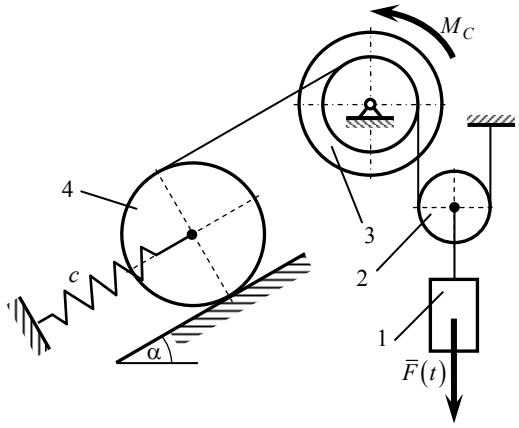
9


M_C
4
c
α
3
2
1
$\bar{F}(t)$

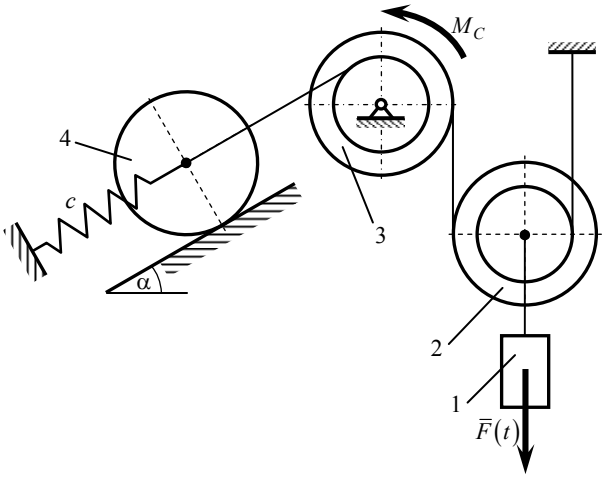
10


4
c
M_C
3
2
1
$\bar{F}(t)$

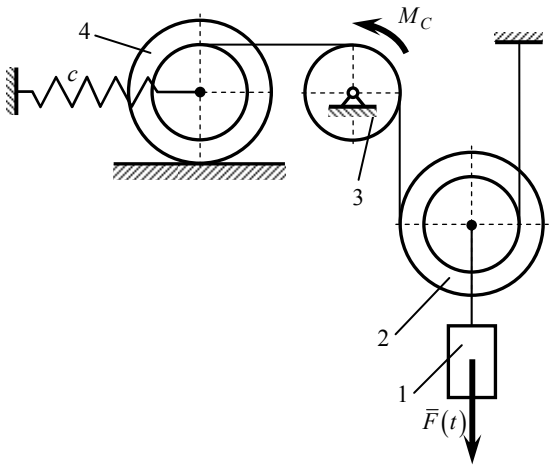
11


M_C
4
c
α
3
2
1
$\bar{F}(t)$

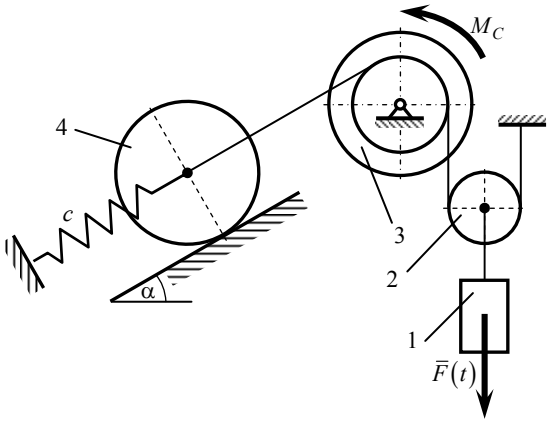
12


M_C
4
c
α
3
2
1
$\bar{F}(t)$

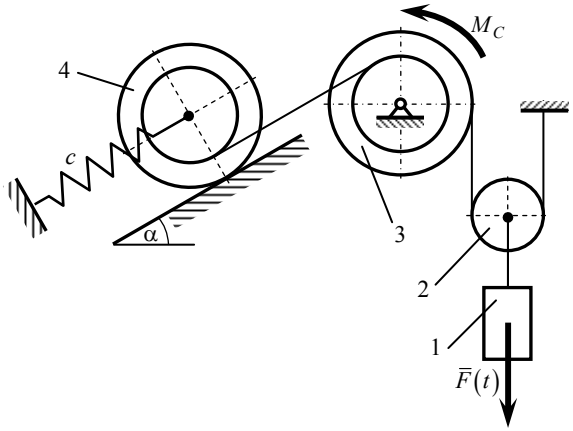
13



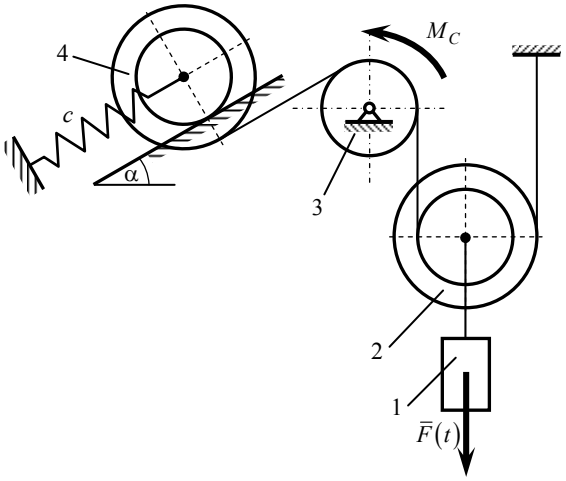
14



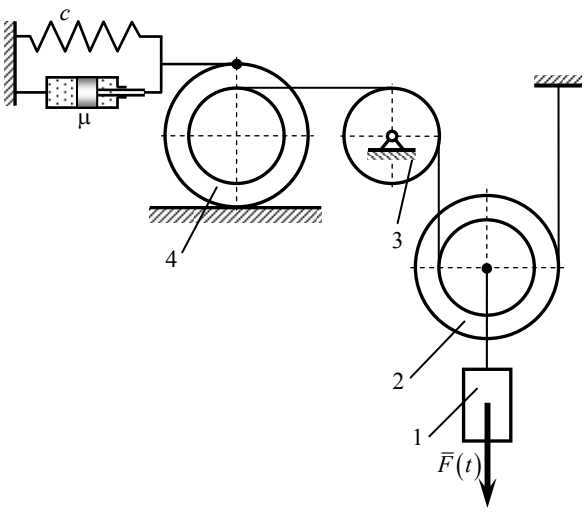
15



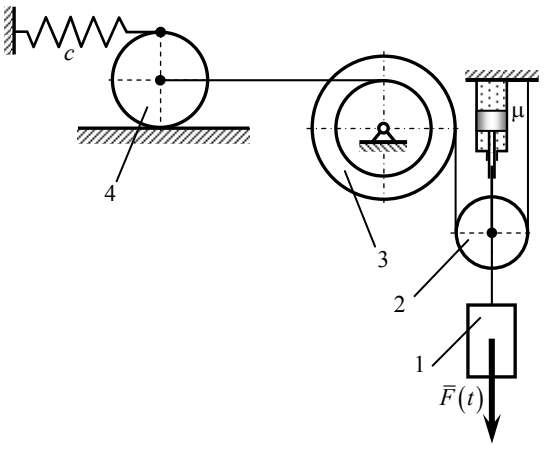
16



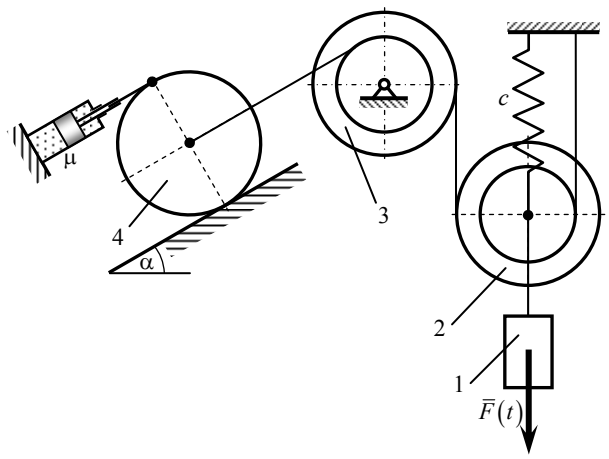
17



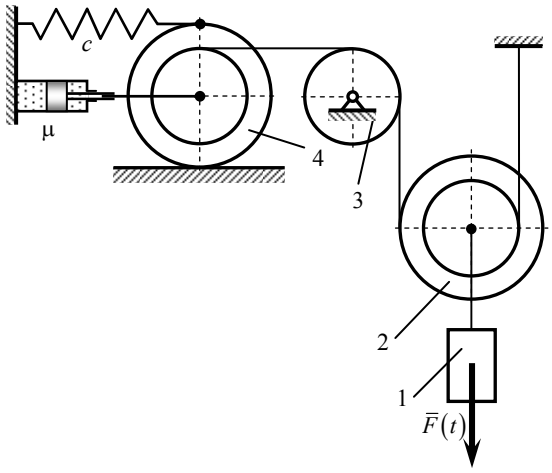
18



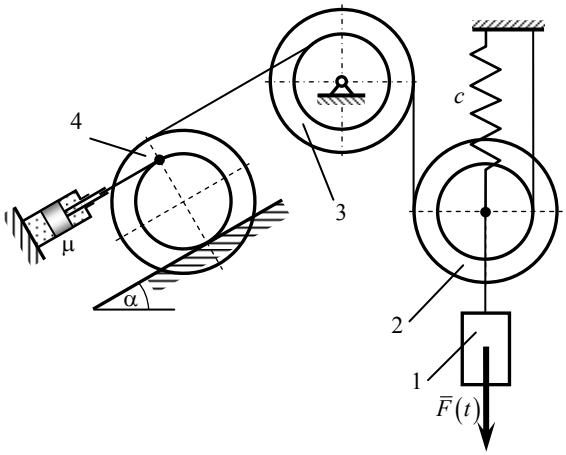
19



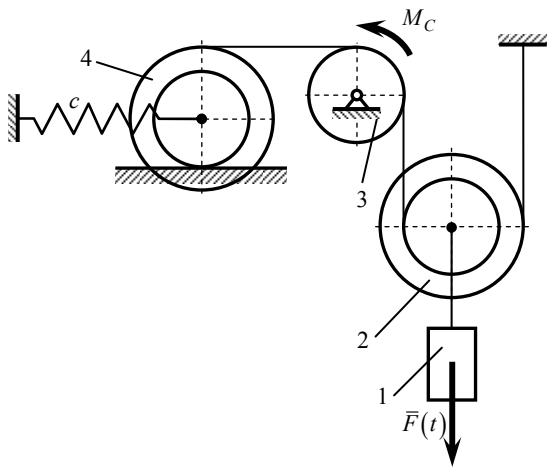
20



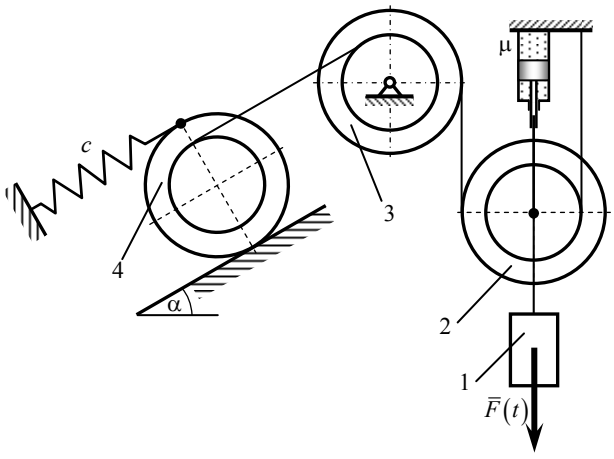
21



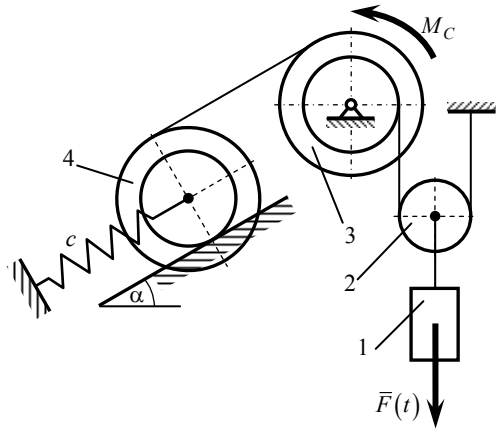
22



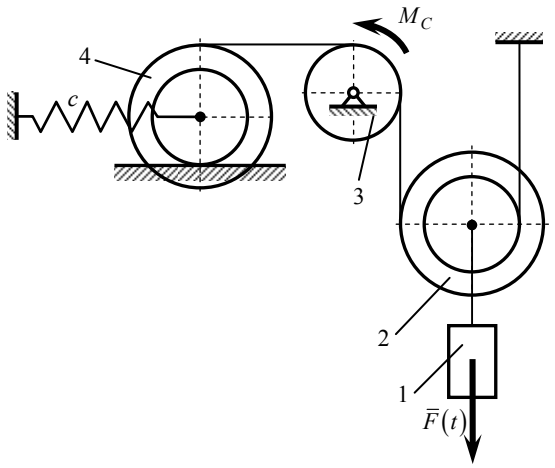
23



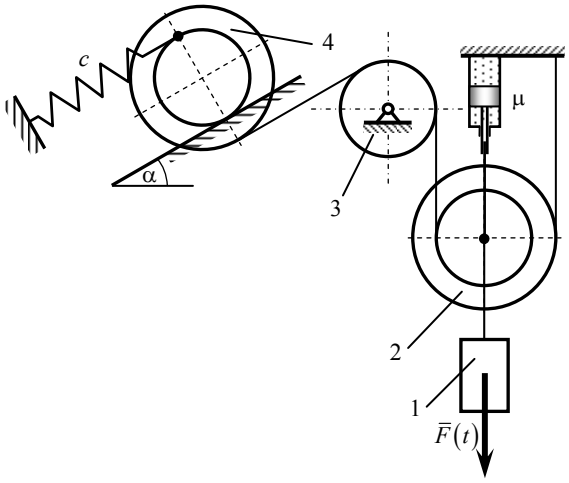
24



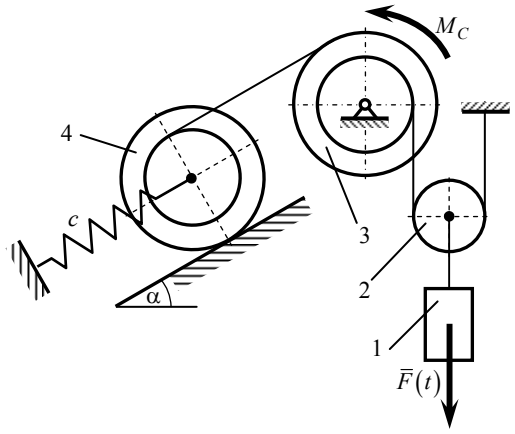
25



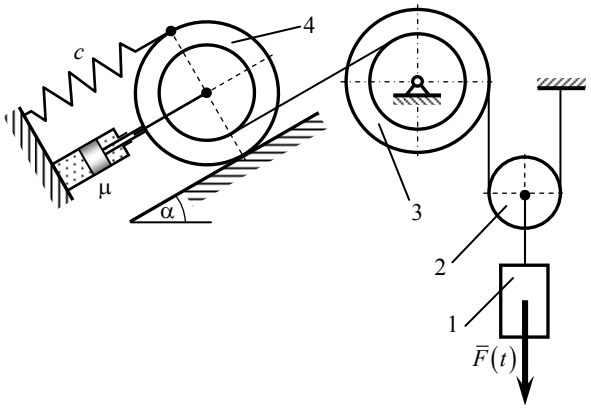
26



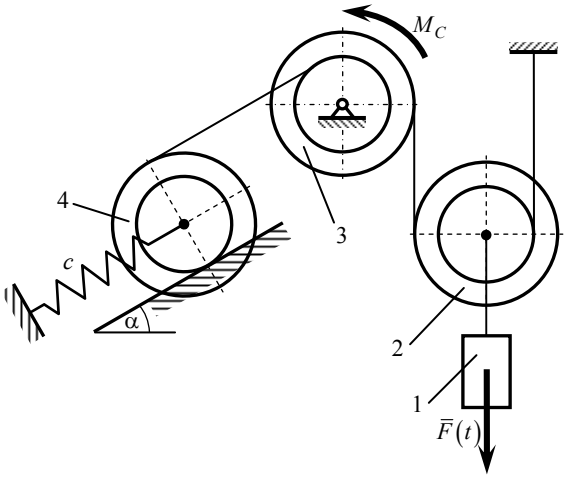
27



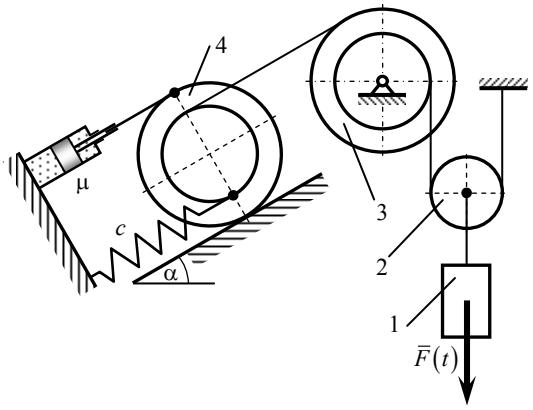
28



29



30



Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1	m	2m	m	3m	4m	2m	3m	4m	2m	m
m_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m_3	2m	3m	4m	m	m	3m	2m	5m	4m	2m
m_4	5m	4m	5m	2m	3m	4m	m	m	5m	3m
μ, кг/с	0.5	1.0	1.5	0.75	1.25	1.0	0.75	1.25	0.5	1.5
ν, Н м с	1	0.5	0.75	1.25	1.5	2	0.5	0.75	1	1.25
c, Н/м	1500	2000	3000	3500	4000	2500	2500	2000	3500	4000
$f_{сц}$	0.20	0.25	0.30	0.15	0.10	0.25	0.30	0.20	0.15	0.10
F_0, Н	50	20	30	40	60	50	40	30	20	50
p, c^{-1}	π	2π	$\frac{5}{2}\pi$	2π	π	$\frac{3}{2}\pi$	3π	3π	$\frac{3}{2}\pi$	π
x_0, м	0.1	0.05	0.03	0	0.02	0.06	0.07	0	0.08	0.09
$\dot{x}_0$, м/с	0.03	0	0.06	0.05	0.07	0	0.05	0.10	0.02	0
α^o	30	45	60	45	60	30	45	60	30	45
r_2	r	1.5 r	2 r	1.5 r	r	2 r	r	2 r	1.5 r	r
R_2	1.5r	3r	3r	2r	2r	3r	1.5r	3r	3r	2 r
i_2	r	r*	r**	r*	r**	2 r	r*	3 r	r*	r**
r_3	2 r	r	1.5 r	r	2 r	1.5 r	1.5 r	r	2 r	2 r
R_3	3 r	2 r	2 r	1.5 r	3 r	2 r	3 r	2 r	4 r	3 r
i_3	r*	2 r	r*	r**	r**	2 r	r*	r	r**	3 r
r_4	r	1.5 r	1.5 r	r	1.5 r	1.5 r	r	1.5 r	2 r	r
R_4	2 r	3 r	2 r	3 r	2 r	3 r	2 r	2 r	3 r	2 r
i_4	2 r	r*	r	R*	2 r	R**	2 r	r**	2.5 r	R*

Во всех вариантах задания принять: m = 1 кг, r = 0.10 м.

На груз 1 действует возмущающая сила $F(t) = F_0\sin(pt)$.

На блок действует момент $M_C = -\nu\,\omega_k$ или сила сопротивления $\overline{R} = -\mu\,\overline{v}_k$.

Для тел цилиндрической формы введены следующие обозначения:

r*, R* — сплошной однородный цилиндр радиуса "r_k" или "R_k" соответственно,

r**, R** — масса цилиндра распределена по ободу радиуса "r_k" или "R_k".

Д 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА С КУЛИСНЫМ ПРИВОДОМ

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин и механизмов.

Исследования поведения любой механической системы всегда начинается с выбора физической модели. Переходя от реальной системы к ее физической схеме, обычно упрощают систему, пренебрегая несущественными для данной задачи факторами. Одним из важных факторов, влияющих на поведение системы, являются конструктивные особенности механизма. Актуальной становится такая задача исследования механической системы, при которой оценивается влияние ее конструктивных элементов на динамические характеристики механизма.

Цель курсовой работы

Исследование и анализ динамического поведения механизма с кулисным приводом с помощью основных теорем и принципов теоретической механики.

Содержание курсовой работы

Объектом исследования является механизм с кулисным приводом, который приводится в движение электродвигателем, развивающим момент, приложенный к маховику

$$M_Д = M_0 - \nu_0 \omega$$

где M_0, ν_0 – постоянные величины.

Полезная нагрузка моделируется для разных вариантов либо силой $\bar{F}_H$, либо моментом M_H

$$\bar{F}_H = -\mu \bar{v}_3, \; M_H = -\nu_1 \omega_3$$

где ν_1, μ – постоянные величины.

Схемы механизмов и исходные данные для расчета приведены в альбоме заданий.

При составлении математической модели принимаются следующие допущения:

- Элементы конструкций механизма считаются абсолютно твердыми.
- Проскальзывание между телами отсутствует. Каток движется без скольжения.
- Трение в подшипниках не учитывается; ползуны скользят по направляющим без трения; трение между пальцем A маховика 1 и прорезью кулисы отсутствует. Сопротивление качению не учитывается.

Требуется:

1. Составить дифференциальное уравнение движения механизма.
2. Составить уравнения для определения динамических реакций внешних и внутренних связей.
3. Проинтегрировать при нулевых начальных условиях $\varphi\big|_{t=0} = 0, \dot{\varphi}\big|_{t=0} = 0$ дифференциальное уравнение движения маховика на ЭВМ на отрезке времени $[0, \tau]$. Величину τ рекомендуется принимать из промежутка $0,5 \div 10,0\ c$.
4. Построить графики функций $\varphi = \varphi(t), \omega_z = \omega_z(t), \varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ и определяемых динамических реакций. Определить предельную угловую скорость маховика.
5. Проанализировать полученные результаты.

Порядок выполнения работы

1. Составить дифференциальное уравнение движения механизма одним из следующих способов (по указанию преподавателя):
   - с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме;
   - методом общего уравнения динамики;
   - с помощью уравнений Лагранжа второго рода [1, §§ 19.2, 19.3].
2. Определить динамические реакции внешних и внутренних связей. Для их оп-

ределения следует использовать (по указанию преподавателя):

- теоремы об изменении количества движения и кинетического момента в дифференциальных формах;
- дифференциальные уравнения движения твердого тела;
- метод кинетостатики (принцип Даламбера).

3. Численное интегрирование дифференциального уравнения движения при заданных начальных условиях рекомендуется провести в одной из математических сред (например, *Mathcad*). Там же провести определение указанных динамических реакций и построение графиков.

4. Провести анализ результатов расчета движения механизма. Проверить соответствие расчетов принятым, при построении математической модели, предположениям. Исследовать влияние конструктивных элементов на динамические характеристики механизма. Определить область допустимых значений указанных параметров, обеспечивающих адекватность поведения системы ее математической модели.

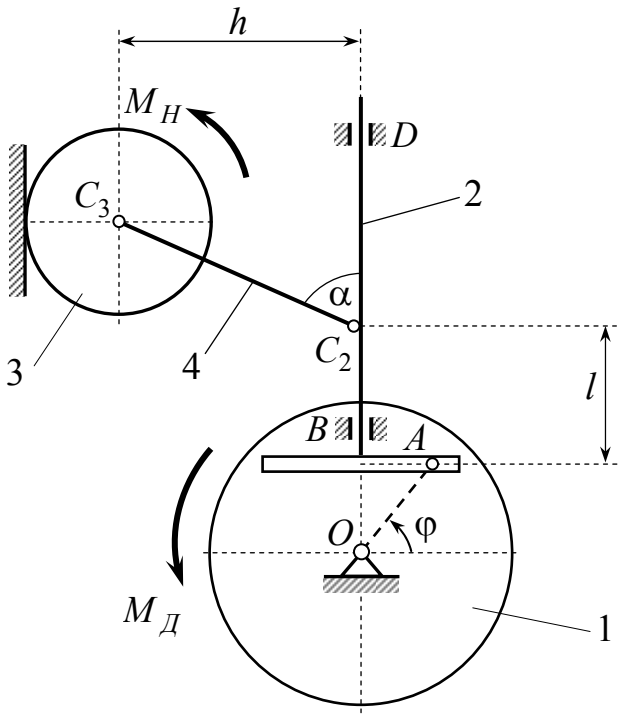
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Схема механизма с кривошипно-кулисным приводом приведена на рис.1. Со стороны электромотора к маховику 1 приложен вращающий момент $M_Д = M_0 - \nu_0 \omega$. Маховик 1, связан с кулисой 2, имеющей вертикальные направляющие. Кулиса соединена с катком 3 невесомым стержнем 4. Полезная нагрузка моделируется моментом $M_H = -\nu_1 \omega_3$, приложенным к катку. Механизм расположен в вертикальной плоскости. Каток 3 – сплошной однородный цилиндр движется без отрыва от вертикальной плоскости. Проскальзывание при качении тела 3, отсутствует. Сопротивлением движению пренебречь.

Требуется

1. Составить дифференциальное уравнение движения механизма методом уравнений Лагранжа второго рода.
2. Определить динамические реакции внешних и внутренних связей.

3. Провести численное интегрирование дифференциального уравнения движения при заданных начальных условиях с помощью пакета *Mathcad.*
4. Провести анализ результатов вычислений.



Дано:

$I_1 = 1.5\ кг\,м^2$	$OA = r_1 = 0.06\ м$	$m_1 = 50\ кг$		
$m_2 = 12\ кг$	$OB = 0.25\ м$	$BD = 0.6\ м$	$l = 0.5\ м$	$h = 0.5\ м$
$m_3 = 18\ кг$		$R_3 = 0.10\ м$	сплошной цилиндр	
$M_0 = 40\ Н\,м$	$\nu_0 = 1.0\ Н\,м\,с$	$\nu_1 = 6\ Н\,м\,с$	$f_{СЦ} = 0.3$	
$\varphi\big\|_{t=0} = 0$	$\dot{\varphi}\big\|_{t=0} = 0$	$\alpha = 45^\circ$		

Рис. 1. Схема механизма и исходные данные

1. Составление дифференциального уравнения движения механизма

Рассматриваемая механическая система при принятых допущениях имеет одну степень свободы. Примем за обобщенную координату угол поворота маховика φ (рис. 2). За положительное направление отсчета обобщенной координаты примем направление, противоположное движению часовой стрелки. Угол поворота катка 3 будем отсчитывать так же.

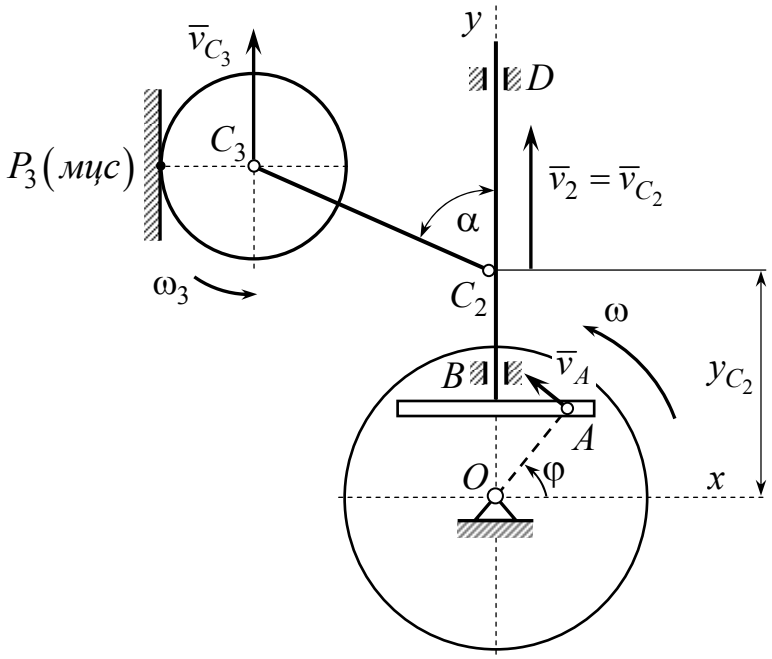


Рис. 2. Расчетная схема механизма (кинематическая)

Запишем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия механизма, φ – обобщенная координата, $\dot{\varphi}$ – обобщенная скорость, Q_φ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ.

Для вычисления кинетической энергии механизма составим кинематическую расчетную схему (рис. 2). Выберем правую систему координат xOy, на-

чало которой расположим в подшипнике O маховика 1 и рассмотрим механизм в произвольный момент времени. Изобразим для этого положения скорости тел входящих в систему (рис. 2):

- Маховик 1 совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, с угловой скоростью ω;
- Кулиса 2 и стержень 4 совершают поступательные движения в плоскости чертежа, имея при этом скорость $\overline{v}_{C_2}$;
- Каток 3 совершает плоское движение, двигаясь по вертикальной плоскости без проскальзывания со скоростью центра масс $\overline{v}_{C_3}$ и угловой скоростью ω_3.

Вычислим кинетическую энергию механизма как сумму кинетических энергий тел, входящих в ее состав

$$T = T_1 + T_2 + T_3 .$$

Кинетическая энергия маховика, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 .$$

Кинетическая энергия поступательно движущейся кулисы 2

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 .$$

Кинетическая энергия катка 3, совершающего плоское движение

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 ,$$

где $I_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$ – момент инерции сплошного однородного катка относительно оси, проходящей через его центр масс.

Таким образом, кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 . \qquad (2)$$

Выразим линейные и угловые скорости $v_{C_2}, v_{C_3}, \omega_3$ через обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\dot{\varphi}$.

Координаты центра масс кулисы (рис. 2)

$$x_{C_2} = 0; \quad y_{C_2} = r_1 \sin(\varphi) + l, \tag{3}$$

откуда

$$v_{C_{2x}} = \dot{x}_{C_2} = 0; \quad v_{C_{2y}} = \dot{y}_{C_2} = r_1 \dot{\varphi}\cos(\varphi) \text{ и } v_{C_2} = r_1 \dot{\varphi}\cos(\varphi). \tag{4}$$

Стержень, соединяющий кулису и каток, совершает поступательное движение, поэтому

$$v_{C_3} = v_{C_2} \tag{5}$$

Точка P_3 является мгновенным центром скоростей катка. Поэтому

$$\omega_3 = \frac{v_{C_3 y}}{C_3 P_3} = \frac{v_{C_3}}{R_3} = \frac{r_1}{R_3}\dot{\varphi}\cos(\varphi) \tag{6}$$

Подставив формулы (4) – (6) в выражение (2), получим

$$T = \frac{1}{2} I_{np}(\varphi)\dot{\varphi}^2 \tag{7}$$

Здесь $I_{np}(\varphi)$ – так называемый приведенный момент инерции механизма, вычисляемый по формуле

$$I_{np}(\varphi) = I_1 + m_0 r_1^2 \cos^2(\varphi), \tag{8}$$

где $m_0 = m_2 + m_3 + \frac{I_3}{R_3^2} = m_2 + \frac{3}{2} m_3$.

Как видно из выражения (8), приведенный момент инерции является функцией обобщенной координаты φ.

Вычислим производные от кинетической энергии, входящие в уравнение Лагранжа (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{d I_{np}(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{np}(\varphi)\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = I_{np}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{d I_{np}(\varphi)}{dt}\dot{\varphi}. \tag{9}$$

Однако производную $\frac{d I_{np}(\varphi)}{dt}$ можно вычислить так $\frac{d I_{np}(\varphi)}{dt} = \frac{d I_{np}(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi}$, где

$$\frac{d\,I_{пр}(\varphi)}{d\,\varphi} = -m_0\, r_1^2 \sin(2\varphi) \tag{10}$$

Таким образом, левая часть уравнения (1) с учетом формул (9) и (10) может быть записана в виде

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = I_{пр}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{d\,I_{пр}(\varphi)}{d\,\varphi}\dot{\varphi}^2. \tag{11}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_φ, соответствующей обобщенной координате φ, составим расчетную схему и изобразим силы, действующие в данный момент времени (рис. 3): $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$ – силы тяжести звеньев $\left(G_k = m_k\, g, k = \overline{1,3}\right)$; M_H – полезная нагрузка; $M_Д$ – момент, передаваемый электродвигателем. Остальные связи, наложенные на систему, являются идеальными. Поэтому их реакции на расчетной схеме не изображаем.

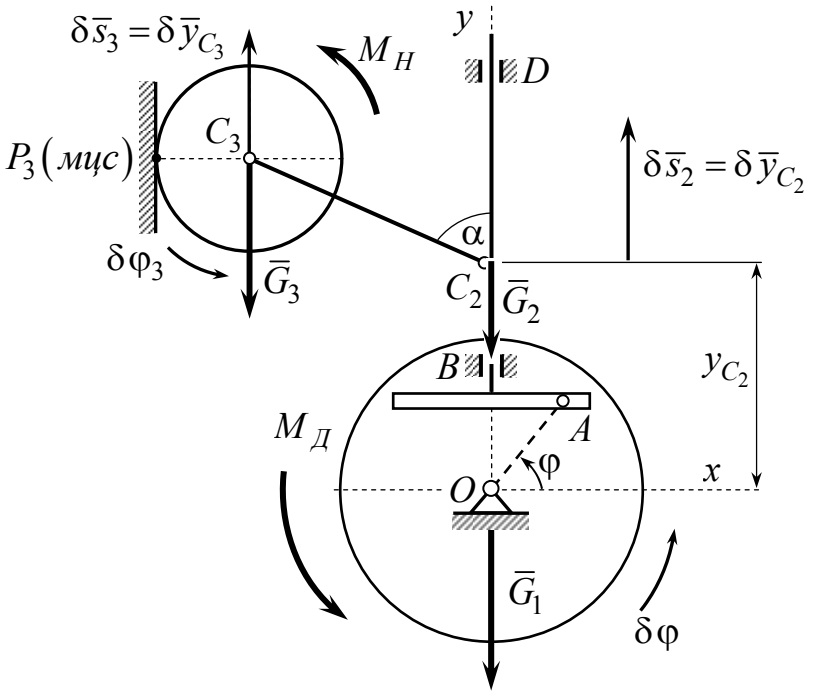


Рис. 3. Расчетная схема механизма (силовая)

Сообщим маховику возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания обобщенной координаты. Возможные перемещения точек кулисы будут

равны возможному перемещению его центра масс $\delta\bar{s}_2 = \delta\bar{y}_{C_2}$. Возможным перемещением катка является поворот на угол $\delta\varphi_3$ вокруг мгновенного центра скоростей, при этом центр масс катка имеет перемещение $\delta\bar{y}_{C_3} = \delta\bar{s}_2$, т. е. возможные перемещения центров масс кулисы и катка равны.

Вычислим сумму элементарных работ задаваемых сил на возможных перемещениях точек их приложения:

$$\delta A = \bar{M}_Д \cdot \delta\bar{\varphi} + \bar{G}_2 \cdot \delta\bar{y}_{C_2} + \bar{G}_3 \cdot \delta\bar{y}_{C_3} + \bar{M}_H \cdot \delta\bar{\varphi}_3.$$

Представим задаваемые силы и возможные перемещения в векторной форме

$$\bar{M}_Д = M_Д\,\bar{k}, \quad M_H = M_H\,\bar{k}, \qquad \bar{G}_n = -m_n g\,\bar{j},$$
$$\delta\bar{\varphi} = \delta\varphi\,\bar{k}, \qquad \delta\bar{\varphi}_3 = \delta\varphi_3\,\bar{k}, \quad \delta\bar{y}_{C_n} = \delta y_{C_n}\,\bar{j}, \qquad n = 2, 3.$$

Выражая, с учетом последних соотношений, скалярные произведения в выражении суммы элементарных работ, получим

$$\delta A = M_Д\,\delta\varphi - m_2 g\,\delta y_{C_2} - m_3 g\,\delta y_{C_3} + M_H\,\delta\varphi_3. \tag{12}$$

Выразим величины δy_{C_2}, δy_{C_3} и $\delta\varphi_3$ через вариацию $\delta\varphi$ обобщенной координаты. Имеем

$$\delta y_{C_2} = \delta y_{C_3} = r_1 \cos(\varphi)\delta\varphi, \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta y_{C_3}}{R_3} = \frac{r_1}{R_3}\cos(\varphi)\delta\varphi. \tag{13}$$

Подставим (13) в формулу(12). Тогда

$$\delta A = \left[M_Д - (m_2 + m_3) g\, r_1 \cos(\varphi) + M_H \frac{r_1}{R_3}\cos(\varphi) \right]\delta\varphi\,.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi$ в правой части последней формулы есть, по определению, обобщенная сила

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = M_Д - (m_2 + m_3) g\, r_1 \cos(\varphi) + M_H \frac{r_1}{R_3}\cos(\varphi) \tag{14}$$

Перепишем последнее равенство с учетом выражений для $M_Д$ и M_H, а

также формулы (6):

$$Q_\varphi = M_0 - \left(m_2 + m_3\right) g\, r_1 \cos\left(\varphi\right) - \left(\nu_0 + \nu_1 \frac{r_1^2}{R_3^2} \cos^2\left(\varphi\right) \right) \dot{\varphi}. \qquad (15)$$

Заметим, что обобщенная сила является функцией обобщенной координаты и обобщенной скорости, т. е. $Q_\varphi = Q_\varphi\left(\varphi, \dot{\varphi}\right)$.

Теперь можно записать дифференциальное уравнение движения машины, приравнивая согласно (1) правую часть соотношения (11) обобщенной силе:

$$I_{np}\left(\varphi\right)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{d\, I_{np}\left(\varphi\right)}{d\,\varphi}\dot{\varphi}^2 = Q_\varphi\left(\varphi, \dot{\varphi}\right). \qquad (16)$$

Данное уравнение представляет математическую модель машины.

2. Определение реакций внешних и внутренних связей

После интегрирования дифференциального уравнения (16) закон движения механизма будет известен. Располагая линейными и угловыми ускорениями тел, составляющих механизм, можно определить реакции внешних и внутренних связей. Для определения искомых реакций расчленим систему на составные части и составим расчетные схемы для каждого тела (рис. 4).

Запишем также кинематические соотношения, связывающие угловые и линейные ускорения тел, входящих в механизм

$$\ddot{y}_{C_2} = \ddot{y}_{C_3} = r_1\left[\ddot{\varphi}\cos\left(\varphi\right) - \dot{\varphi}^2 \sin\left(\varphi\right)\right], \quad \ddot{\varphi}_3 = \frac{\ddot{y}_{C_3}}{R_3}. \qquad (17)$$

Эти соотношения получены дифференцированием по времени кинематических соотношений (3) – (6).

Определение реакций связей катка 3

Для вычисления реакций связей (силы сцепления $\overline{F}_{СЦ}$, нормального давления на плоскость $\overline{N}_3$ и усилия в стержне 4 – $\overline{S}_4$) действующих на каток 3 запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

$$m_3\,\ddot{x}_{C_3}=\sum_k F^e_{kx},\quad m_3\,\ddot{y}_{C_3}=\sum_k F^e_{ky},\quad I_3\ddot{\varphi}_3=\sum_k M_{C_3z}\left(\bar{F}^e_k\right)$$

Расчетная схема изображена на рис. 4 а). На ней показаны силы, действующие на каток 3: полезная нагрузка, моделируемая моментом M_H, сила тяжести $\bar{G}_3=m_3\bar{g}$, реакции опорной плоскости $\bar{N}_3$ и $\bar{F}_{СЦ}$, усилие стержня 4 – $\bar{S}_4$ (стержень предполагается сжатым).

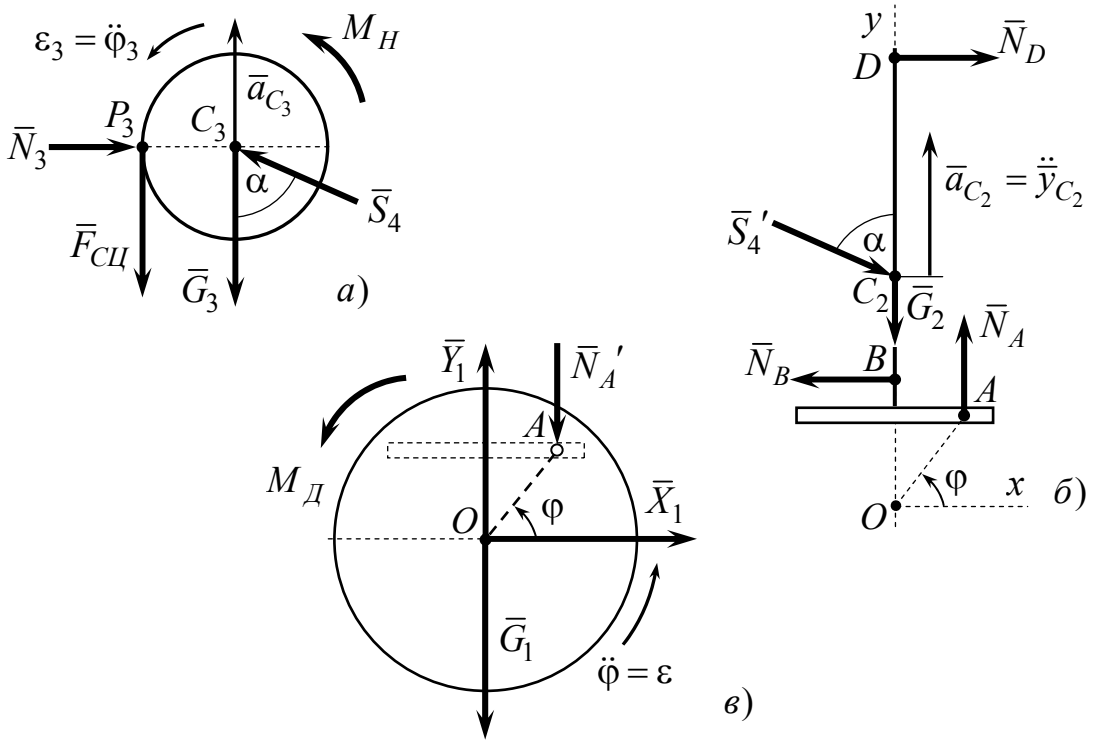


Рис. 4. Расчетная схема механизма

Дифференциальные уравнения движения катка 3 имеет вид

$$\begin{aligned}0&=N_3-S_4\sin(\alpha),\\ m_3\,\ddot{y}_{C_3}&=S_4\cos(\alpha)-F_{СЦ}-m_3\,g,\\ I_3\,\ddot{\varphi}_3&=F_{СЦ}\,R_3+M_H.\end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений относительно неизвестных реакций $N_3, F_{СЦ}, S_4$, получим

$$F_{СЦ}=\frac{I_3}{R_3}\ddot{\varphi}_3-\frac{M_H}{R_3},\quad S_4=\frac{m_3\,\ddot{y}_{C_3}+F_{СЦ}+m_3\,g}{\cos(\alpha)},\quad N_3=S_4\sin(\alpha).$$

С учетом соотношений (17), искомые величины будут равны

$$F_{СЦ} = \frac{I_3}{{R_3}^2}\ddot{y}_{C_3} - \frac{M_H}{R_3}, \tag{18}$$

$$S_4 = S_4{}' = \frac{1}{\cos(\alpha)}\left[m_3 g - \frac{M_H}{R_3} + \left(m_3 + \frac{I_3}{{R_3}^2} \right)\ddot{y}_{C_3} \right], \tag{19}$$

$$N_3 = tg(\alpha)\left[m_3 g - \frac{M_H}{R_3} + \left(m_3 + \frac{I_3}{{R_3}^2} \right)\ddot{y}_{C_3} \right]. \tag{20}$$

Следует отметить, что величина силы сцепления не должна превышать своего предельного значения $F_{СЦ}{}'$, определяемого выражением $F_{СЦ}{}' = f_{СЦ}\, N_3$, где $f_{СЦ}$ – коэффициент трения сцепления. Т.е. должно выполняться условие

$$-F_{СЦ}{}' \le F_{СЦ} \le F_{СЦ}{}'.$$

В тоже время при определении усилий в стержнях важными являются сжимающие усилия, которые могут привести к потере устойчивости стержня, т. е. к нарушению его прямолинейности.

При этом должно выполняться условие $S < S_{пр}{}'$, где $S_{пр}{}'$ – предельное значение сжимающего усилия, при котором происходит его искривление.

Определение реакций связей кулисы 2

Для нахождения реакций связей, действующих на кулису 2, запишем для нее теорему о движении центра масс (в проекциях на оси координат Ox, Oy) и теорему об изменении кинетического момента (относительно оси C_2z, проходящей через центр масс кулисы) в дифференциальных формах:

$$\frac{d}{dt}(m_2 \dot{x}_C) = \sum_k F^e_{kx}, \quad \frac{d}{dt}(m_2 \dot{y}_C) = \sum_k F^e_{ky}, \quad \frac{d L_{C_2z}}{dt} = \sum_k M_{C_2z}\left(\overline{F}^e_k\right).$$

Расчетная схема изображена на рис. 4 б. На ней показаны силы, действующие на кулису 2: сила тяжести $\overline{G}_2 = m_2\overline{g}$, реакции направляющих кулисы $\overline{N}_B, \overline{N}_D$, усилие стержня 4 – $\overline{S}_4{}'$, а также сила давления пальца маховика A на прорезь кулисы $\overline{N}_A$.

Подставляя выражения сил, действующих на кулису в данные уравнения, с учетом кинематических соотношений (3) – (6), получим

$$\begin{aligned} 0 &= N_D + S_4' \sin(\alpha) - N_B, \\ m_2\, \ddot{y}_{C_2} &= N_A - S_4' \cos(\alpha) - m_2\, g, \\ 0 &= N_A\, r_1 \cos(\varphi) - N_D\, C_2D - N_B\, C_2B. \end{aligned}$$

Давление в точке A, с учетом соотношений (17) и (19) будет равно

$$N_A = m_2\, \ddot{y}_{C_2} + S_4' \cos(\alpha) + m_2\, g. \tag{21}$$

Решая совместно первое и третье уравнения полученной системы, найдем

$$\begin{aligned} N_B &= N_A \frac{r_1}{BD} \cos(\varphi) + S_4' \frac{C_2D}{BD} \sin(\alpha), \\ N_B &= N_A \frac{r_1}{BD} \cos(\varphi) - S_4' \frac{C_2B}{BD} \sin(\alpha). \end{aligned} \tag{22}$$

где учтено, что

$$OD = OB + BD, \quad OC_2 = r_1 \sin(\varphi) + l, \quad C_2B = OC_2 - OB, \quad C_2D = OD - OC_2.$$

Следует отметить, что величина давления пальца на прорезь кулисы обычно используется при расчетах на срез. При этом должно выполняться условие $|N| < N_{пр}'$, где $N_{пр}'$ – предельное значение нормального давления, обеспечивающее отсутствие среза.

Определение реакций подшипника маховика 1 и проверка составления дифференциального уравнения движения

Для нахождения реакций подшипника маховика и проверки найденного дифференциального уравнения движения механизма, запишем для маховика 1 (рис. 4 в) теорему о движении центра масс (в проекциях на оси координат Ox, Oy) и теорему об изменении кинетического момента (относительно оси Oz) в дифференциальных формах

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{x}_{C_1}\right) = \sum_k F_{kx}^e, \quad \frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{y}_{C_1}\right) = \sum_k F_{ky}^e, \quad \frac{d\, L_{Oz}}{dt} = \sum_k M_{Oz}\left(\bar{F}_k^e\right).$$

Так как кинетический момент маховика равен $L_{Oz} = I_1 \dot{\varphi}$, а координаты его центра масс равны нулю $x_{C_1} = x_O = 0, y_{C_1} = y_O = 0$, получим

$$
\begin{aligned}
0 &= X_1, \\
0 &= Y_1 + N'_A - m_1 g, \\
I_1 \ddot{\varphi} &= M_Д - N'_A r_1 \cos(\varphi).
\end{aligned}
$$

Первые два уравнения данной системы позволяют определить реакции подшипника маховика

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 0, \\
Y_1 &= m_1 g - N'_A.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Подставляя выражение (21) в третье уравнение, раскрывая скобки и учитывая соотношения кинематических связей (17), найдем

$$
\left[I_1 + \left(m_2 + m_3 + \frac{I_3}{{R_3}^2} \right) {r_1}^2 \cos^2(\varphi) \right] \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \left(m_2 + m_3 + \frac{I_3}{{R_3}^2} \right) {r_1}^2 \sin(2\varphi) \dot{\varphi}^2 =
$$

$$
= M_Д - (m_2 + m_3) g r_1 \cos(\varphi) + M_H \frac{r_1}{R_3} \cos(\varphi).
$$

Выражение в квадратных скобках в левой части уравнения (коэффициент при угловом ускорении маховика $\ddot{\varphi}$) равно приведенному моменту инерции механизма $I_{пр}(\varphi)$ (8), а коэффициент при квадрате угловой скорости $\dot{\varphi}^2$ равен $-\frac{1}{2} \frac{d I_{пр}(\varphi)}{d \varphi}$ (10). Соотношение в правой части уравнения равно обобщенной силе $Q_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})$ (14). Таким образом, окончательно получаем дифференциальное уравнение

$$
I_{пр}(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{d I_{пр}(\varphi)}{d \varphi} \dot{\varphi}^2 = Q_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}),
$$

которое полностью совпадает с уравнением движения механизма (16).

Следовательно, составление дифференциального уравнения движения механизма произведено верно.

3. Результаты расчетов

Дифференциальное уравнение движения механизма (16) является нелинейным. Получить аналитическое решение этого уравнения не представляется возможным. Поэтому воспользуемся процедурой численного интегрирования данного уравнения. Для этого дифференциальное уравнение второго порядка (16) представим в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Введем новые переменные $\omega = \dot{\varphi}, \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = \omega, \\ &\dot{\omega} = \frac{1}{I_{np}(\varphi)}\left[Q_{\varphi}(\varphi, \omega) - \frac{1}{2}\frac{d\, I_{np}(\varphi)}{d\,\varphi}\omega^2 \right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Эти соотношения позволяет вычислять угловое ускорение маховика, если известны его угол поворота и угловая скорость; в частности, можно вычислить угловое ускорение в начальный момент по заданным начальным значениям угла поворота и угловой скорости маховика.

Для интегрирования системы уравнений (24) при заданных начальных условиях используем встроенную в пакет Mathcad процедуру-функцию *rkfixed* реализующую метод Рунге-Кутта [1] и имеющую следующий вид:

$$\text{rkfixed}(u, T_0, T_k, N, D),$$

где: $u = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \dot{\varphi}(0) \end{bmatrix}$- вектор начальных условий; T_0, T_k – граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциального уравнения. Начальные условия, заданные в векторе u – это значение решения в точке T_0; N – число точек (не считая начальной точки), в которых ищется приближенное решение. При помощи этого аргумента определяется число строк $N+1$ в матрице, возвращаемой функцией *rkfixed*; $D(t,U) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t,U) \\ \dot{\omega}(t,U) \end{bmatrix}$ – вектор, элементами которого является угловая скорость и угловое ускорение маховика, определяемых уравнениями (24).

Матрица, получаемая в результате решения, содержит три столбца; первый – для значений времени t, второй – для значений угла поворота $\varphi(t)$, третий – для значений угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$.

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором реализована процедура интегрирования дифференциального уравнения движения маховика и вычисления реакций внешних и внутренних связей.

Динамический расчет механизма с кулисным приводом

1. Ввод исходных данных

$g := 9.8$ $f := 0.3$

$M_0 := 40$ $\nu_0 := 1.$ $\nu_1 := 6.$

$r_1 := 0.06$ $R_3 := 0.1$ $BD := 0.6$ $OB := 0.25$ $l := 0.5$ $\alpha := \frac{\pi}{4}$

$I_1 := 1.5$ $m_1 := 50$ $m_2 := 12$ $m_3 := 18$

2. Вычисление постоянных величин

$I_3 := \frac{m_3 \cdot R_3^{\,2}}{2}$ $OD := OB + BD$ $m_0 := m_2 + m_2 + \frac{I_3}{R_3^{\,2}}$

3. Определение функций

Координата центра масс кулисы $OC(\phi) := l + r_1 \cdot \cos(\phi)$

Приведенный момент инерции $I_{np}(\varphi)$ $I_{np}(\phi) := I_1 + m_0 \cdot r_1^{\,2} \cdot \cos(\phi)^2$

Производная $\frac{d\, I_{np}(\varphi)}{d\,\varphi}$ $I'_{np}(\phi) := -m_0 \cdot r_1^{\,2} \cdot \sin(2 \cdot \phi)$

Момент от двигателя $M_D(\omega) := M_0 - \nu_0 \cdot \omega$

Полезная нагрузка $M_H(\phi, \omega) := -\nu_1 \cdot \frac{r_1}{R_3} \cdot \omega \cdot \cos(\phi)$

Обобщенная сила

$$Q(\phi, \omega) := M_0 - (m_2 + m_3) \cdot g \cdot r_1 \cdot \cos(\phi) - \left(\nu_0 + \nu_1 \cdot \frac{r_1^{\,2}}{R_3^{\,2}} \cdot \cos(\phi)^2 \right) \cdot \omega$$

Угловое ускорение маховика

$$\varepsilon_1(\phi, \omega) := \frac{Q(\phi, \omega) - I'_{np}(\phi) \cdot \frac{\omega^2}{2}}{I_{np}(\phi)}$$

4. Процедура интегрирования дифференциальных уравнений

Начальный момент времени $T_0 := 0$

Конечный момент времени $T_k := 10$

Число узловых точек $N := T_k \cdot 200$

Задание начальных условий $NU := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Формирование системы дифференциальных уравнений $D(t, U) := \begin{pmatrix} U_1 \\ \varepsilon_1(U_0, U_1) \end{pmatrix}$

Применение процедуры функции *rkfixed*. $z := \text{rkfixed}(U, T_0, T_k, N, D)$

Вывод результатов вычислений.

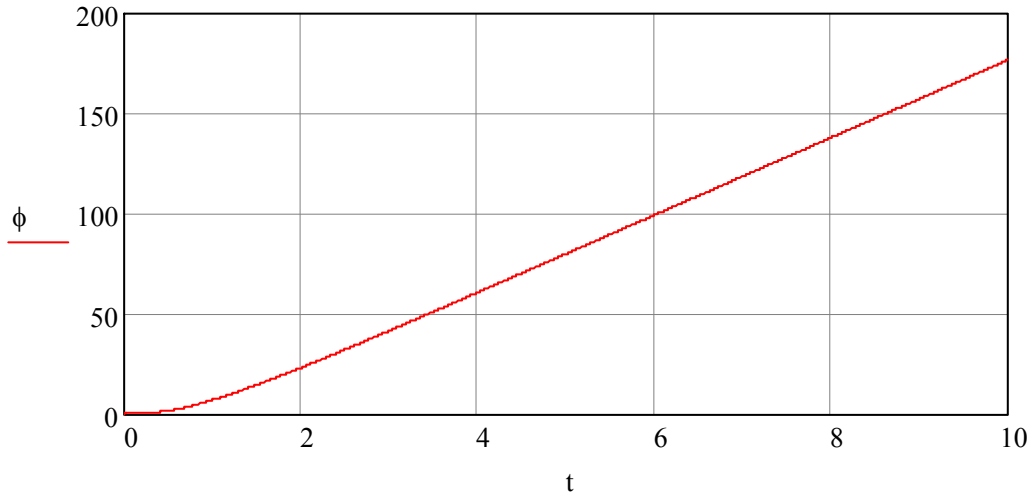
$z =$

	0	1	2
0	0	0	0
1	5·10-3	1.721·10-4	0.069
2	0.01	6.862·10-4	0.137
3	0.015	1.539·10-3	0.204
4	0.02	2.727·10-3	0.271
5	0.025	4.247·10-3	0.337
6	0.03	6.096·10-3	0.402
7	0.035	8.271·10-3	0.467
8	0.04	0.011	0.531
9	0.045	0.014	0.595
10	0.05	0.017	0.658
11	0.055	0.02	0.72
12	0.06	0.024	0.782
13	0.065	0.028	0.843
14	0.07	0.032	0.904
15	0.075	0.037	0.964

в выделенном столбце:
номера узловых точек 0-N,
в выделенной строке:
0 - время t,
1 - угол φ,
2 - угловая скорость ω

$t := z^{\langle 0 \rangle}$ $\phi := z^{\langle 1 \rangle}$ $\omega := z^{\langle 2 \rangle}$ $\varepsilon := \overrightarrow{\varepsilon_1(\phi, \omega)}$

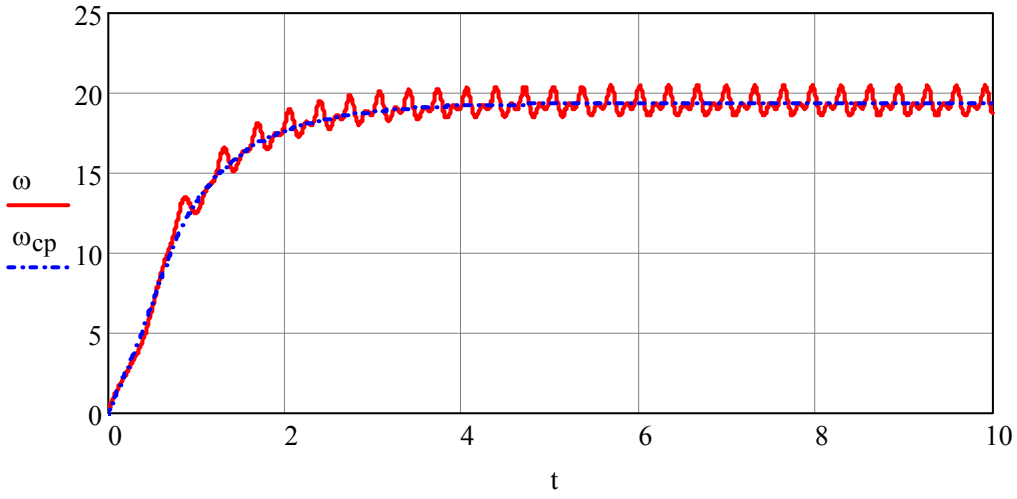
График движения $\phi = \phi(t)$

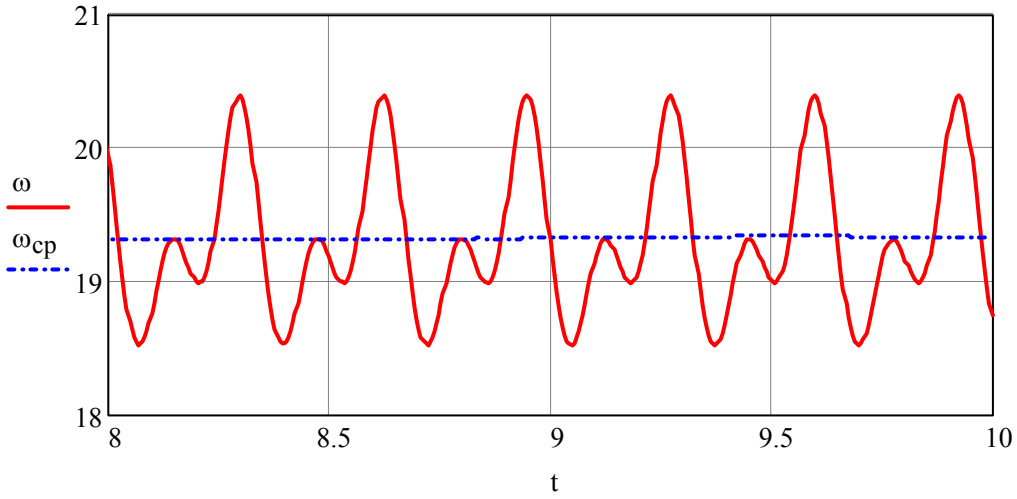


Вычисление средней угловой скорости $\omega_{cp} := \text{supsmooth}(t, \omega)$

$\max(\omega) = 20.389$ $\max(\omega_{cp}) = 19.336$

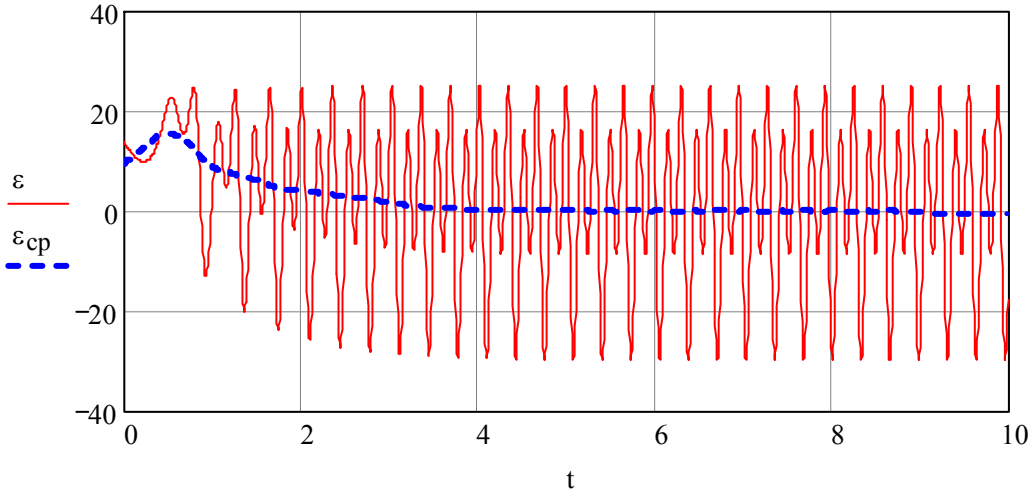
График изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ и величины ω_{cp}





Вычисление среднего углового ускорения $\varepsilon_{cp} := \text{supsmooth}(t, \varepsilon)$

График углового ускорения $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и величины ε_{cp}



5. Вычисление линейных ускорений тел, входящих в механизм

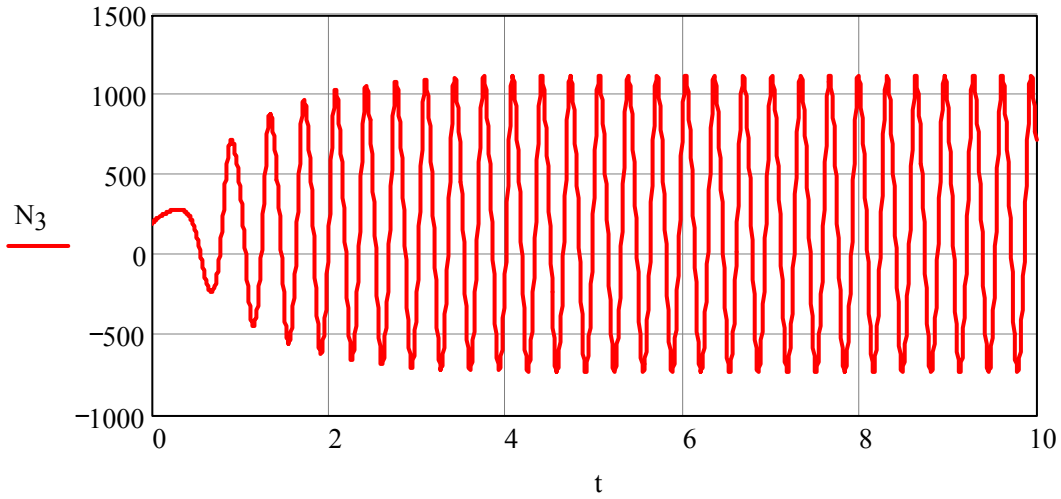
Ускорение центра масс катка 3 $a_{C3} := \overrightarrow{\left[r_1 \cdot \left(\cos(\phi) \cdot \varepsilon - \sin(\phi) \cdot \omega^2 \right) \right]}$

6. Вычисление реакций внешних и внутренних связей

Нормальное давление катка 3 $N_3 := \tan(\alpha) \cdot \overrightarrow{\left[m_3 \cdot g - \frac{M_H(\phi, \omega)}{R_3} + \left(m_3 + \frac{I_3}{R_3^2} \right) \cdot a_{C3} \right]}$

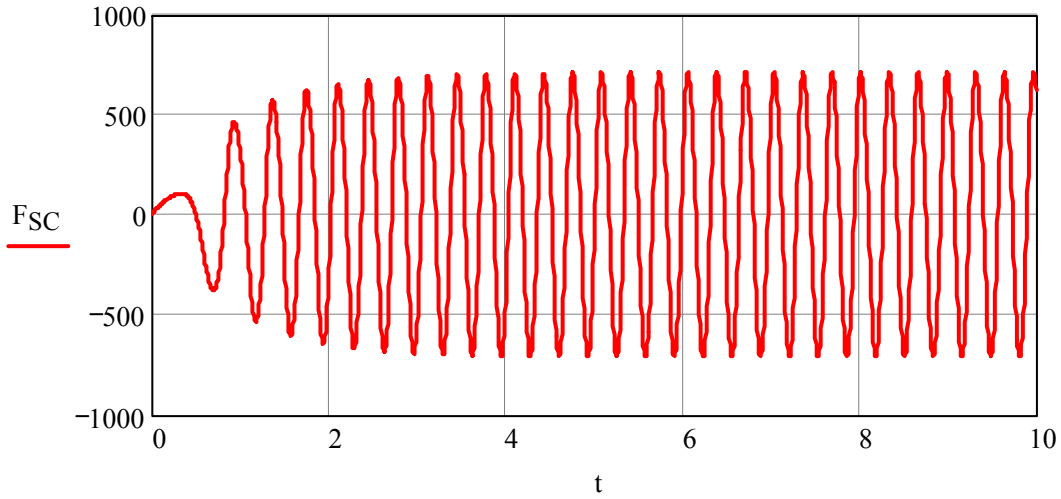
$\max(N_3) = 1123.75$ $\min(N_3) = -732.561$ $\text{mean}(N_3) = 180.14$

График зависимости нормального давления N_3 катка на вертикальную плоскость от времени



Сила сцепления катка 3 $F_{SC} := \overrightarrow{\left(\frac{I_3}{R_3^2} a_{C3} - \frac{M_H(\phi, \omega)}{R_3} \right)}$

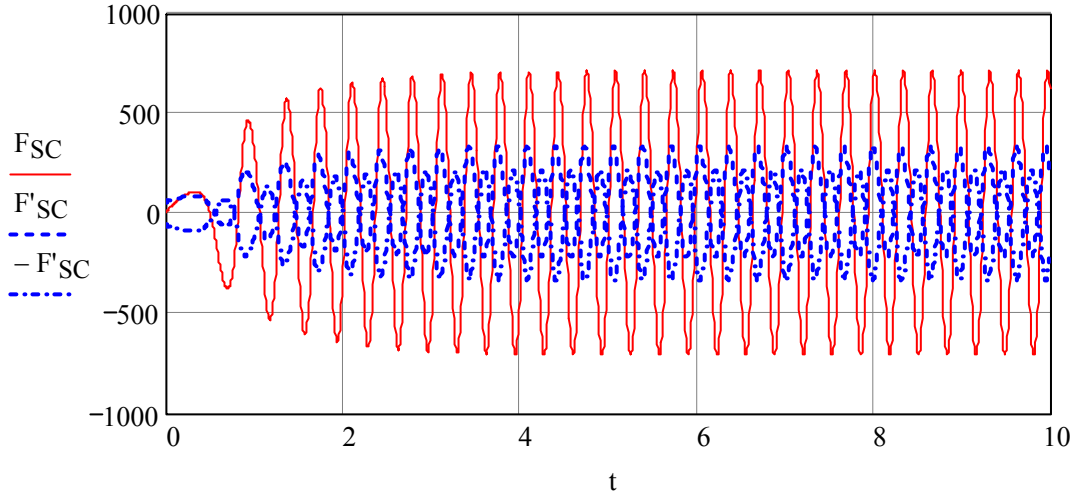
График зависимости силы сцепления катка с вертикальной плоскостью $F_{СЦ}$ от времени

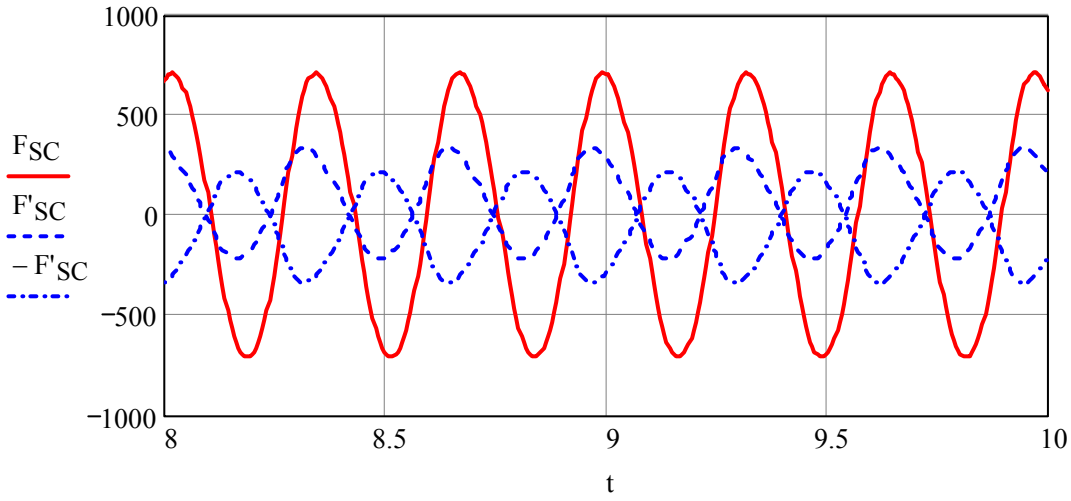


Предельное значение силы сцепления $F'_{SC} := f \cdot \overrightarrow{N_3}$

$\max(F_{SC}) = 711.7$ $\min(F_{SC}) = -709.927$ $\max(F'_{SC}) = 337.125$ $\min(F'_{SC}) = -219.768$

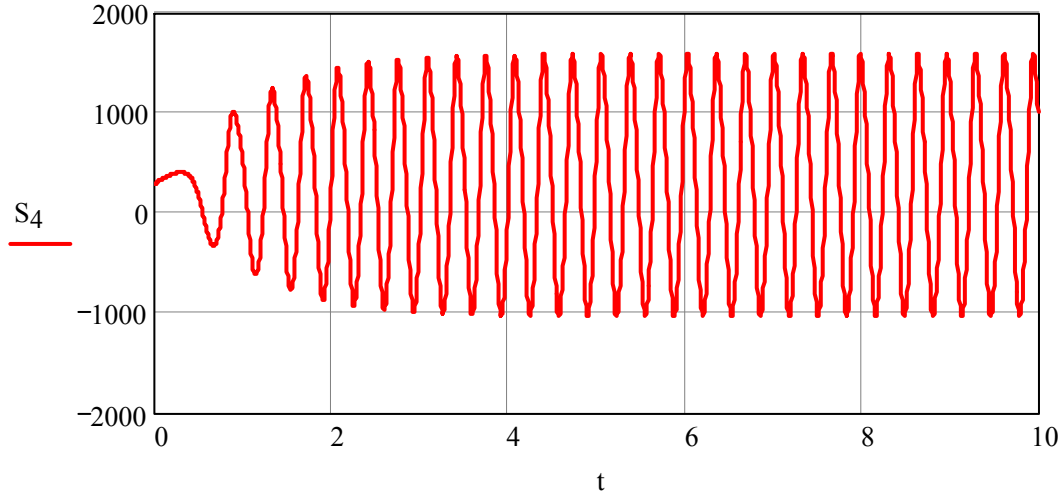
График зависимости силы сцепления катка с вертикальной плоскостью и ее предельных значений от времени





Усилие в стержне 4 $S_4 := \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \overrightarrow{\left[m_3 \cdot g - \frac{M_H(\phi, \omega)}{R_3} + \left(m_3 + \frac{I_3}{{R_3}^2} \right) \cdot a_{C3} \right]}$

График зависимости усилия в стержне 4 от времени

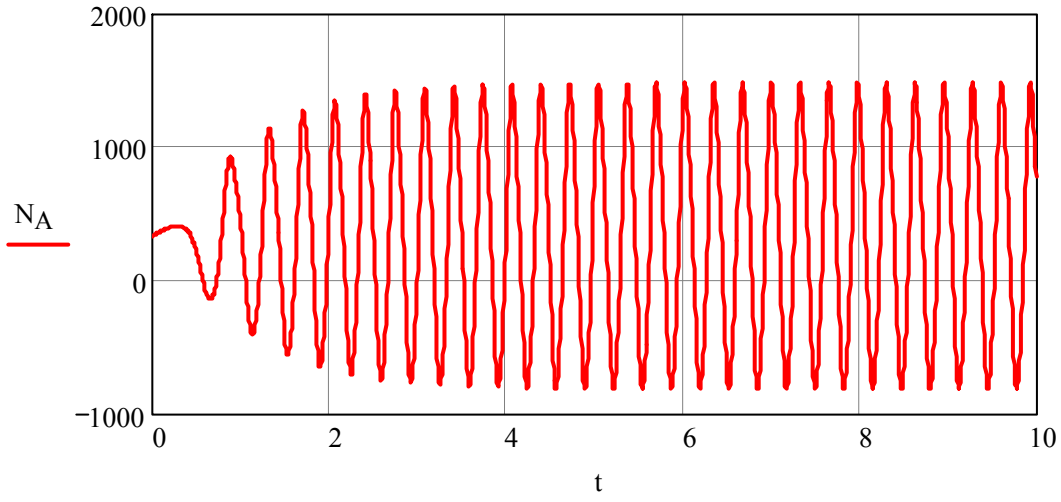


Давление пальца маховика на прорезь кулисы

$$N_A := \left[(m_2 + m_3)\cdot g - \frac{M_H(\phi, \omega)}{R_3} + \left(m_2 + m_3 + \frac{I_3}{{R_3}^2} \right)\cdot a_{C3} \right]$$

$\max(N_A) = 1477.811$ $\min(N_A) = -816.348$

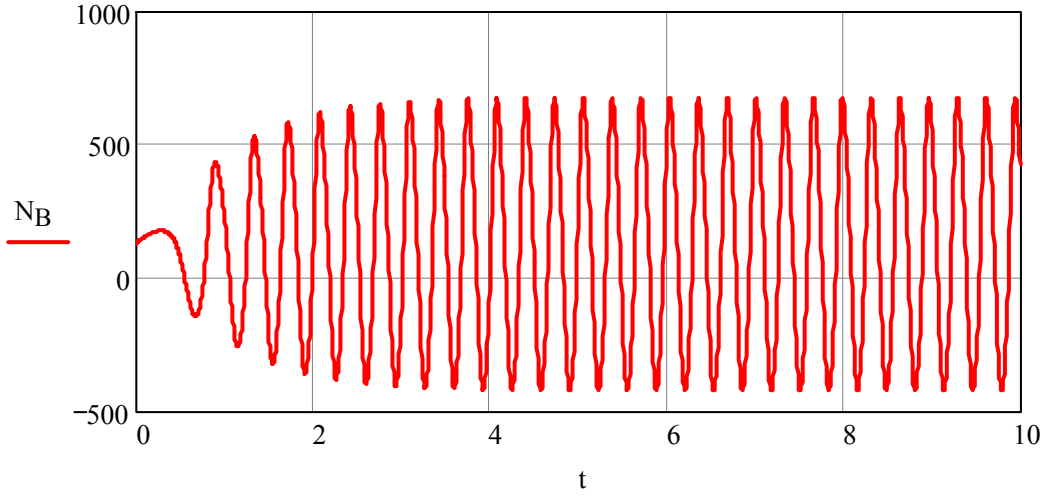
График зависимости давления пальца маховика на прорезь кулисы от времени



Давление кулисы на направляющую в точке B

$$N_B := \left(N_A \cdot \frac{r_1}{BD} \cdot \cos(\phi) + S_4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{OD - OC(\phi)}{BD} \right)$$

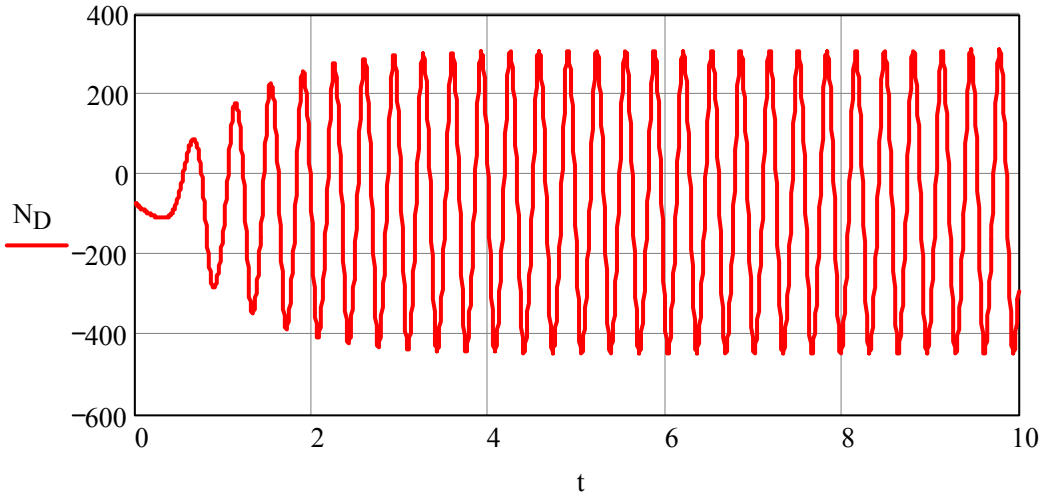
График зависимости давления кулисы на направляющую в точке B от времени



Давление кулисы на направляющую в точке D

$$N_D := \left(N_A \cdot \frac{r_1}{BD} \cdot \cos(\phi) - S_4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{OC(\phi) - OB}{BD} \right)$$

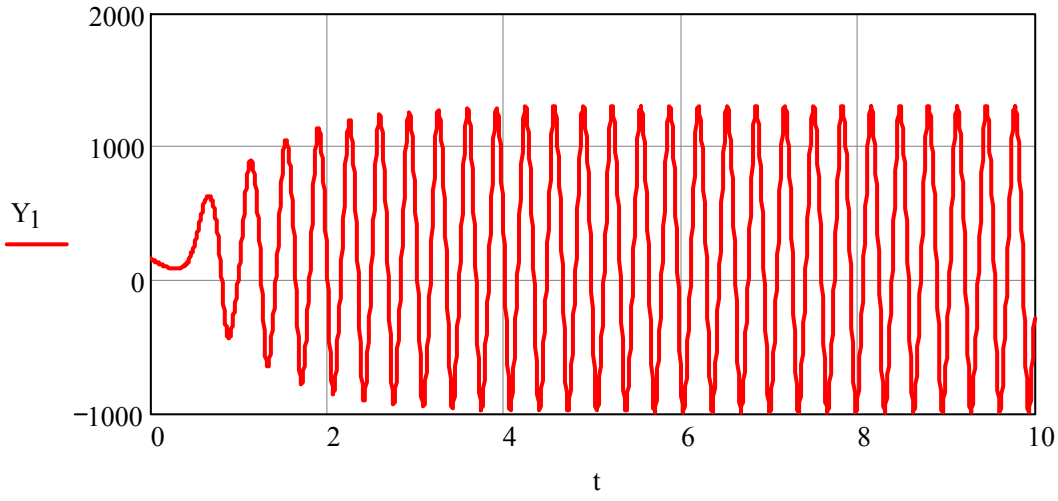
График зависимости давления кулисы на направляющую в точке D от времени



Вертикальная составляющая реакции подшипника маховика 1

$$Y_1 := \overrightarrow{\left(m_1 \cdot g - N_A\right)}$$

График зависимости вертикальной составляющей реакции подшипника маховика 1 от времени

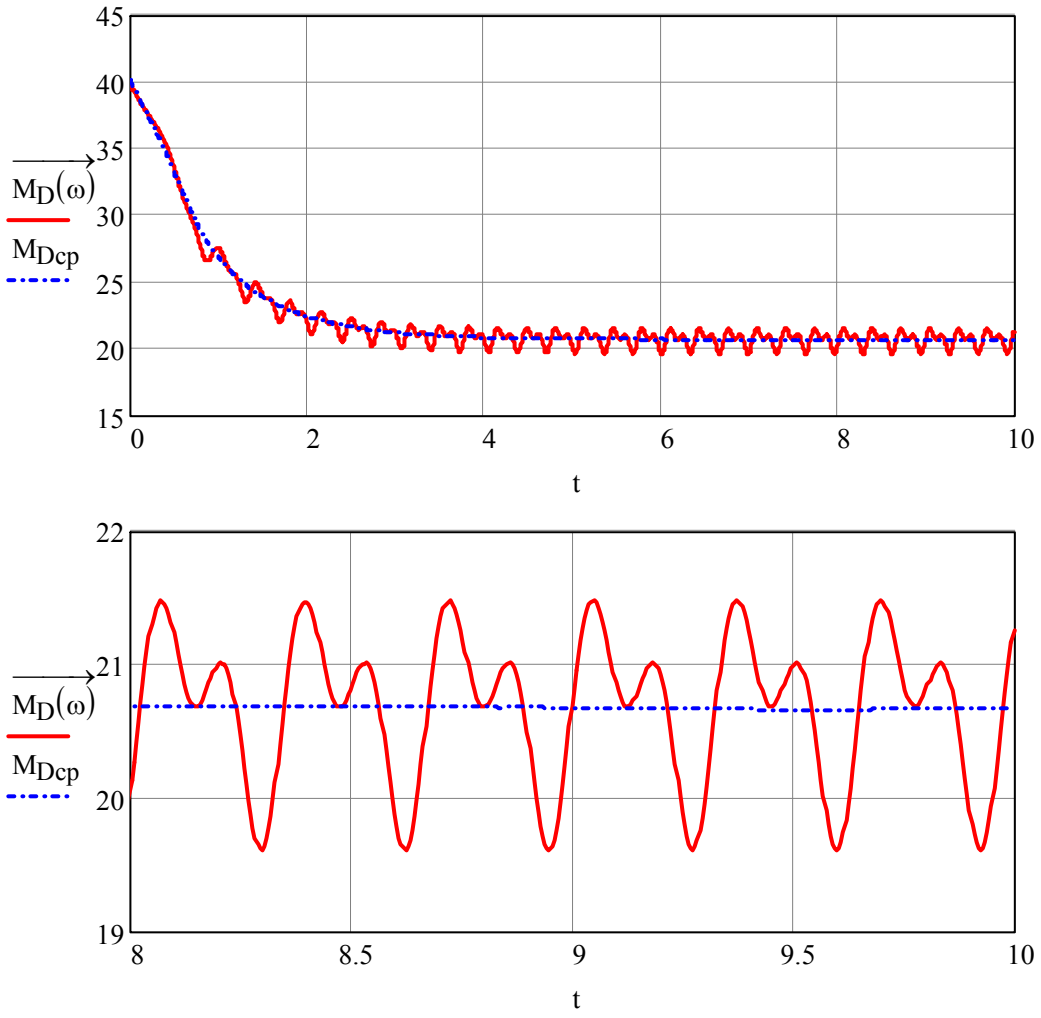


Вычисление среднего момента электродвигателя

$$M_{Dcp} := \text{supsmooth}\left(t, \overrightarrow{M_D(\omega)}\right)$$

$$\min\left(M_{Dcp}\right) = 20.664 \qquad \text{mean}\left(\overrightarrow{M_D(\omega)}\right) = 22.394 \qquad \min\left(\overrightarrow{M_D(\omega)}\right) = 19.611$$

График зависимости момента электродвигателя, передаваемого маховику 1 от времени



4. Анализ результатов вычислений

Математическая модель, описывающая поведение исследуемого механизма (механической системы), построена при следующих основных допущениях:

- Каток 3 движется вдоль вертикальной плоскости без отрыва от нее, т.е. на каток наложены дополнительные связи, которые можно описать следующими уравнениями:

  геометрическими $x_{C_3} = const = R_3$;

  силовыми $N_3 > 0$, т. к. связь в точке касания катка с плоскостью является неудерживающей.
- Каток 3 движется без проскальзывания, т.е. модуль силы сцепления $F_{СЦ}$ подчинен следующему ограничению

$$\left|F_{СЦ}\right| \le F'_{СЦ} = f_{СЦ}\, N_3,$$

где $F'_{СЦ}$ — предельное значение силы сцепления.

Анализ результатов расчета, с учетом сформулированных требований к поведению механической системы, позволяют сделать следующие выводы (величину времени начала установившегося режима движения механизма, период неравномерности вращения маховика и др. можно получить, используя опцию 2D-графиков "Trace", которая позволяет снимать значения координат функций прямо на графике [1]):

1. Время неустановившегося движения механизма невелико и составляет около 4,5 *с*.
2. В установившемся режиме движение маховика близко к равномерному вращению, средняя угловая скорость которого порядка $\omega_{ср} = 19.3\ рад/с$. Амплитуда неравномерного вращения составляет приблизительно $0.9\ рад/с$, а его период – $0.325\,с$. Таким образом коэффициент неравномерности движения механизма приблизительно равен

$$\delta \approx \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} = 0.096.$$

3. В установившемся режиме среднее угловое ускорение маховика приблизительно равно $\varepsilon_{ср} = 0\ рад/с^2$. Амплитуда изменения углового ускорения составляет приблизительно $26\ рад/с^2$, а коэффициент динамичности

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} = 0.067.$$

4. Среднее значение силы нормального давления на вертикальную плоскость N_3 в установившемся режиме составляет приблизительно 180 *Н*, что близко к величине $m_3 g\, tg(\alpha)$ (см. (20)) а амплитуда ее изменения – около 930 *Н*.
5. Величина силы нормального давления на вертикальную плоскость N_3 с периодичностью 0,325 *с.* принимает отрицательные значения, что может привести к отрыву катка от вертикальной плоскости. Такое поведение силы $\overline{N}_3$ противоречит математической модели механизма и требует изменения ее параметров.
6. Максимальные и минимальные значения силы сцепления имеют приблизительно следующие значения $\max\left(F_{СЦ}\right) = 712\ Н, \min\left(F_{СЦ}\right) = -710\ Н$. В тоже время предельные значения силы сцепления изменяются в интервале $\max\left(F'_{СЦ}\right) = 337\ Н, \min\left(F'_{СЦ}\right) = -220\ Н$, что не соответствует условиям движения катка без проскальзывания.
7. При заданных параметрах механизма и внешних нагрузок указанные условия не выполняются.

На основании выводов по результатам расчета движения механизма сформулируем задачу исследования.

Требуется обеспечить соответствие движения механизма ее математической модели в рамках принятых при постановке задачи допущениях.

Т.е. необходимо удовлетворить следующим условиям:

14) Сила нормального давления катка 3 о вертикальную плоскость должна быть положительной;

15) Величина силы сцепления должна обеспечивать движение катка 3 без проскальзывания.

Данные условия представим в математическом виде

$$\begin{aligned} \min\left(N_3\right) > 0, \quad \max\left(F_{СЦ}\right) \le \ \min\left(f_{СЦ}\, N_3\right), \\ \min\left(F_{СЦ}\right) \ge -\max\left(f_{СЦ}\, N_3\right). \end{aligned} \tag{25}$$

В дальнейшем будем считать, что расчетный режим движения механизма является штатным, т.е. входные $M_Д$ и выходные нагрузки M_H, а также средняя угловая скорость изменяться не должны.

Вид графиков изменения величин $N_3(t), F_{СЦ}(t), \omega(t)$ и $\varepsilon(t)$ показывает, что в дальнейшем исследовании следует ограничиться диапазоном установившегося режима движения механизма.

Для выполнения условий (25) выявим влияние параметров механизма и внешних нагрузок на величины углового ускорения ε и угловой скорости ω маховика, силы нормального давления $\overline{N}_3$, силы сцепления $\overline{F}_{СЦ}$.

Анализ зависимостей (18) – (20) показывает, что величина нормальной реакции опоры N_3 зависит от прижимного усилия $F = S_4 \sin(\alpha)$ катка на вертикальную плоскость; прижимное усилие зависит от кинематических и инерционных (массы и момента инерции) параметров катка 3; сила сцепления также пропорциональна кинематическим и инерционным параметрам катка. В тоже время инерционные параметры катка влияют на угловое ускорение механизма и, следовательно, на его угловую скорость.

Таким образом, изменение инерционных параметров катка (массы и / или момента инерции) приводит не только к изменению прижимного усилия, но и к изменению силы сцепления и кинематических параметров всего механизма.

Следует отметить, что в некоторых вариантах схем задания следует изменять инерционные параметры катка.

Подытоживая вышесказанное, нужно поставить цель изменения прижимного усилия таким образом, чтобы оно не влияло на кинематические параметры механизма. Данную проблему можно решить, добавив в механизм новый конструкционный элемент, который осуществляет поджим катка 3 к вертикальной плоскости. Вариантов, обеспечивающих такое решение, по–крайней мере – два (рис.5):

- Предварительно сжатый упругий стержень, поджимающий каток 3 со стороны кулисы 2 (рис.5 а);
- Предварительно растянутый упругий стержень, обеспечивающий внешнее поджатие катка 3 (рис.5 б).

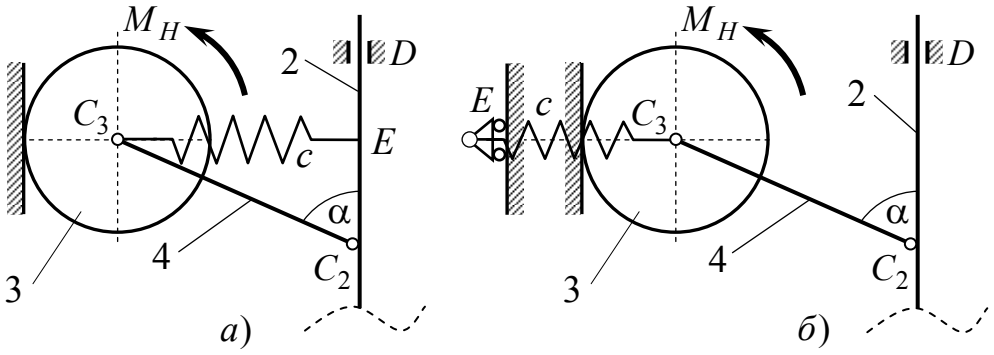


Рис. 5. Дополнительный конструктивный элемент

Оба стержня моделируются упругой пружиной, сила упругости которой, определяется выражением $F = c\lambda$, где c – коэффициент жесткости стержня, λ – предварительное удлинение / сжатие стержня, в зависимости от схемы крепления.

Так как точка крепления пружины совпадает с центром масс катка в обоих случаях, то расчетные схемы для них будут одинаковы (рис. 6). Отличие этой схемы от предыдущей (рис. 4 а) заключается в наличии силы $\overline{F}$, которая обеспечивает поджим катка 3 к вертикальной плоскости.

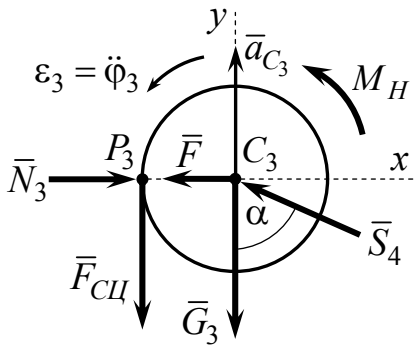


Рис. 6. Расчетная схема катка с дополнительным конструктивным элементом

Записывая для катка 3 дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела, получим

$$0 = N_3 - F - S_4 \sin(\alpha),$$
$$m_3 \ddot{y}_{C_3} = S_4 \cos(\alpha) - F_{СЦ} - m_3 g,$$
$$I_3 \ddot{\varphi}_3 = F_{СЦ} R_3 + M_H.$$

Из этих уравнений можно найти величину нормальной реакции катка N_3

$$N_3 = F + S_4 \sin(\alpha) = F + \left(m_3 g - \frac{M_H}{R_3} + \frac{3}{2} m_3 \ddot{y}_{C_3} \right) tg(\alpha)$$

и остальные реакции, действующие на каток 3 $-F_{СЦ}, S_4$, значения которых совпадают с предыдущим решением (см. формулы (18), (19)).

Оценим теперь величину прижимного усилия F. Так как значения силы сцепления $F_{СЦ}$ и реакции стержня 4 S_4 не изменяются в связи с появлением дополнительного конструктивного элемента, то в расчетах можно использовать результаты предыдущего решения, которые обозначим символом "$^{(0)}$". Подставляя экстремальные значения сил $F_{СЦ}, S_4$ в условия (25), получим

$$N_3 = F + \min\left[S_4 \sin(\alpha) \right] = F + \min\left[N_3^{(0)} \right] > 0,$$
$$\max\left(F_{СЦ} \right) = \max\left[F_{СЦ}^{(0)} \right] \le \min\left(f_{СЦ} N_3 \right) = f_{СЦ} F + f_{СЦ} \min\left[N_3^{(0)} \right],$$
$$\min\left(F_{СЦ} \right) = \min\left[F_{СЦ}^{(0)} \right] \ge -\min\left(f_{СЦ} N_3 \right) = -f_{СЦ} F - f_{СЦ} \min\left[N_3^{(0)} \right].$$

Разрешая данные неравенства относительно силы F, получим соотношения позволяющие найти минимальное значение величины прижимного усилия, обеспечивающего выполнение условий (25)

$$F \geq \frac{\max\left[F_{СЦ}^{(0)}\right] - f_{СЦ}\min\left[N_3^{(0)}\right]}{f_{СЦ}}, \quad F \geq \frac{-\min\left[F_{СЦ}^{(0)}\right] - f_{СЦ}\min\left[N_3^{(0)}\right]}{f_{СЦ}},$$

$$F > -\min\left[N_3^{(0)}\right].$$

Экстремальные значения силы сцепления $F_{СЦ}$ и нормальной реакции вертикальной плоскости N_3 в предыдущем решении равны

$$\min\left[N_3^{(0)}\right] = -732.651\,H, \quad \max\left[F_{СЦ}^{(0)}\right] = 711.7\,H, \quad \min\left[F_{СЦ}^{(0)}\right] = -709.927\,H.$$

Тогда минимальное значение прижимного усилия должно удовлетворять следующим неравенствам

$$F \geq 3104.893\,H, \quad F \geq 3098.984\,H, \quad F > 732.651\,H.$$

В качестве минимального значения прижимного усилия принимаем с небольшим запасом $F = 3200\,H$. Задавая теперь в качестве величины предварительного удлинения (сжатия) прижимного стержня $\lambda = 0.002\,м$, получим значение модуля упругости стержня

$$c = \frac{F}{\lambda} = 1\,600\,000\,{}^{H}\!/_{м}.$$

Для схемы механизма с предварительно растянутым стержнем (рис. 5 б) закон движения ведущего звена, а также реакции внешних и внутренних связей остаются неизменными, кроме нормальной реакции опорной плоскости N_3. При этом максимальные сжимающие усилия стержня 4 и силы нормального давления пальца на прорезь кулисы 2 равны

$$S_{4_{\max}} = 1589.222\,H, \quad N_{A_{\max}} = 1477.811\,H.$$

Оценим теперь, какое влияние оказывает на механизм предварительно сжатый стержень. Для этого рассмотрим кулису 2 и составим для нее расчет-

ную схему (рис. 7), на которой изобразим действующие на кулису силы: силу тяжести $\bar{G}_2 = m_2\bar{g}$, реакции направляющих кулисы $\bar{N}_B, \bar{N}_D$, усилие стержня 4 – $\bar{S}_4'$, прижимное усилие $\bar{F}'$, а также силу давления пальца маховика A на прорезь кулисы $\bar{N}_A$.

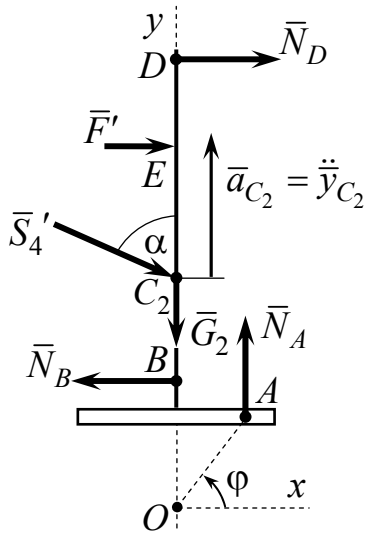


Рис. 7. Расчетная схема кулисы 2 в случае внутреннего поджима (рис.5 а).

Применяя, как и ранее теорему о движении центра масс и теорему об изменении кинетического момента механической системы, получим следующие уравнения

$$0 = N_D + F' + S_4'\sin(\alpha) - N_B,$$
$$m_2\,\ddot{y}_{C_2} = N_A - S_4'\cos(\alpha) - m_2\,g,$$
$$0 = N_A\,r_1\cos(\varphi) - N_D\,C_2D - N_B\,C_2B - F'\,C_2E.$$

Решение данной системы показывает, что величина силы давления пальца на прорезь кулисы N_A полностью совпадает с формулой (21), а остальные реакции равны

$$N_B = N_A\frac{r_1}{BD}\cos(\varphi) + S_4'\frac{C_2D}{BD}\sin(\alpha) + F\frac{ED}{BD},$$
$$N_B = N_A\frac{r_1}{BD}\cos(\varphi) - S_4'\frac{C_2B}{BD}\sin(\alpha) - F\frac{EB}{BD},$$

где $ED = OD - OE, \quad EB = OE - OB, \quad C_2E = h\cos(\alpha).$

Таким образом, для схемы механизма с предварительно сжатым стержнем (рис. 5 а), закон движения ведущего звена, а также реакции связей остаются неизменными, кроме нормальных реакций опорной плоскости N_3 и направляющих N_B, N_D. Максимальные значения сжимающих усилий в стержне 4 и прижимном стержне, а также силы нормального давления пальца на прорезь кулисы 2 равны

$$S_{4_{\max}} = 1589.222\,H, \quad N_{A_{\max}} = 1477.811\,H, \quad F = 3200\,H.$$

Сравнивая предельные значения сжимающих усилий для разных конструктивных схем, делаем вывод, что поскольку эти значения меньше для схемы с предварительно растянутым стержнем (рис. 5 б), то данная схема предпочтительнее.

5. Результаты анализа

С целью подтверждения проведенных исследований произведем расчет конструктивно измененного механизма.

Динамический расчет механизма с кулисным приводом

1. Ввод исходных данных

… … … … $h := 0.5$ $\lambda := 0.002$ $c := 1600000$

2. Вычисление постоянных величин

… … … … $F := c \cdot \lambda$ $CE := h \cdot \cos(\alpha)$

3. Определение функций

… … … …

$$OE(\phi) := OC(\phi) + CE$$

… … … …

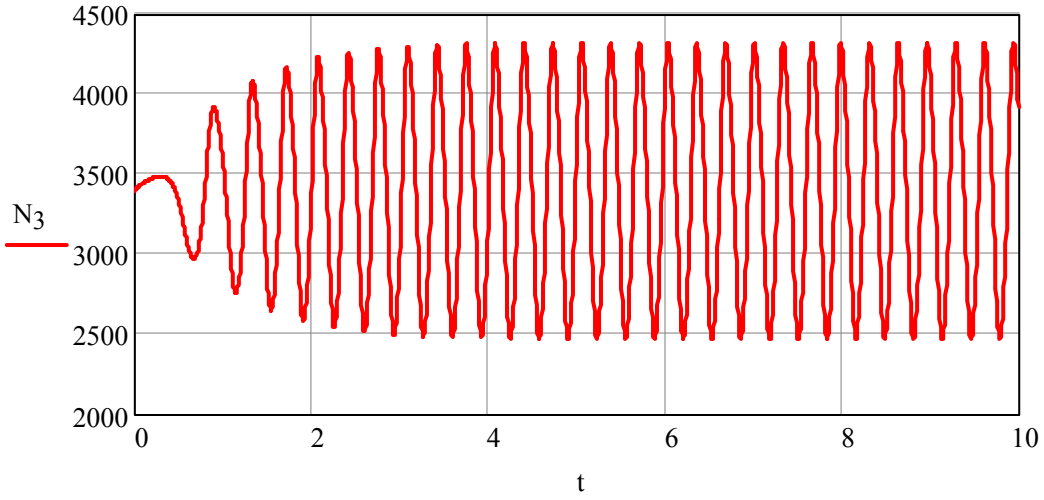
6. Вычисление реакций внешних и внутренних связей

Нормальное давление катка 3

$$N_3 := \tan(\alpha) \cdot \overrightarrow{\left[m_3 \cdot g - \frac{M_H(\phi, \omega)}{R_3} + \left(m_3 + \frac{I_3}{R_3^2} \right) \cdot a_{C3} \right]} + F$$

$\max(N_3) = 4323.75$ $\min(N_3) = 2467.439$ $\text{mean}(N_3) = 3380.14$

График зависимости нормального давления N_3 катка на вертикальную плоскость от времени

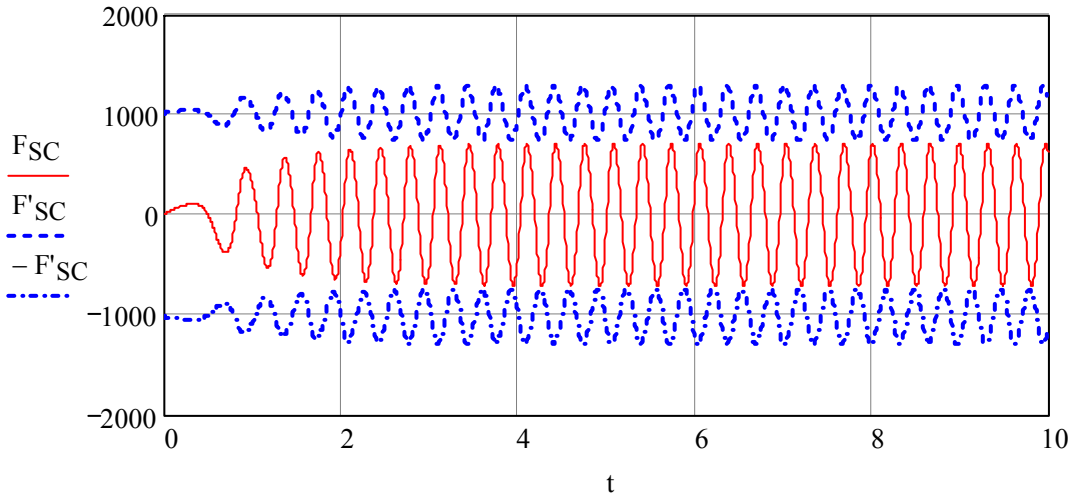


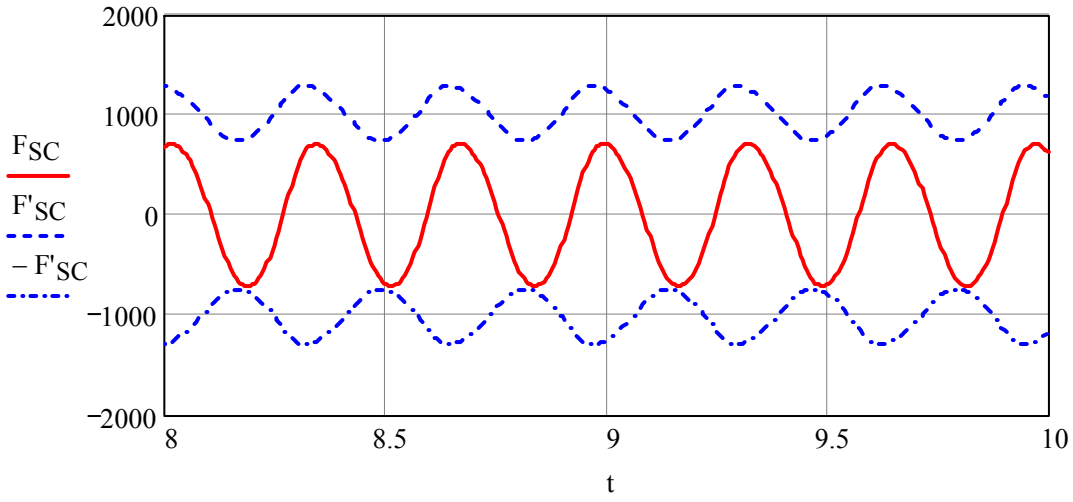
… … … …

Предельное значение силы сцепления $F'_{SC} := \overrightarrow{f \cdot N_3}$

$\max(F_{SC}) = 711.7$ $\min(F_{SC}) = -709.927$ $\max(F'_{SC}) = 1297.125$ $\min(F'_{SC}) = 740.232$

График зависимости силы сцепления катка с вертикальной плоскостью и ее предельных значений от времени



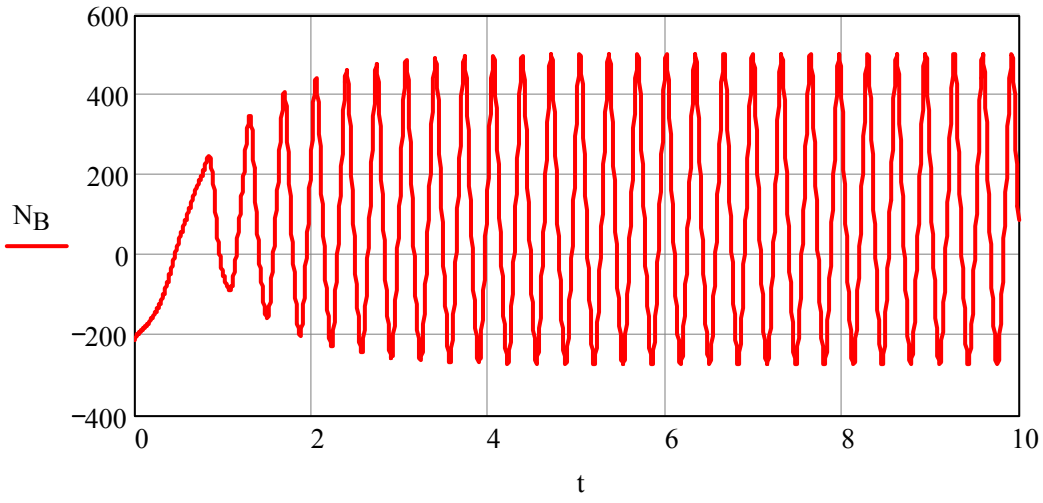


… … … …

Давление кулисы на направляющую в точке B

$$N_B := \left(N_A \cdot \frac{r_1}{BD} \cdot \cos(\phi) + S_4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{OD - OC(\phi)}{BD} + F \cdot \frac{OD - OE(\phi)}{BD} \right) \rightarrow$$

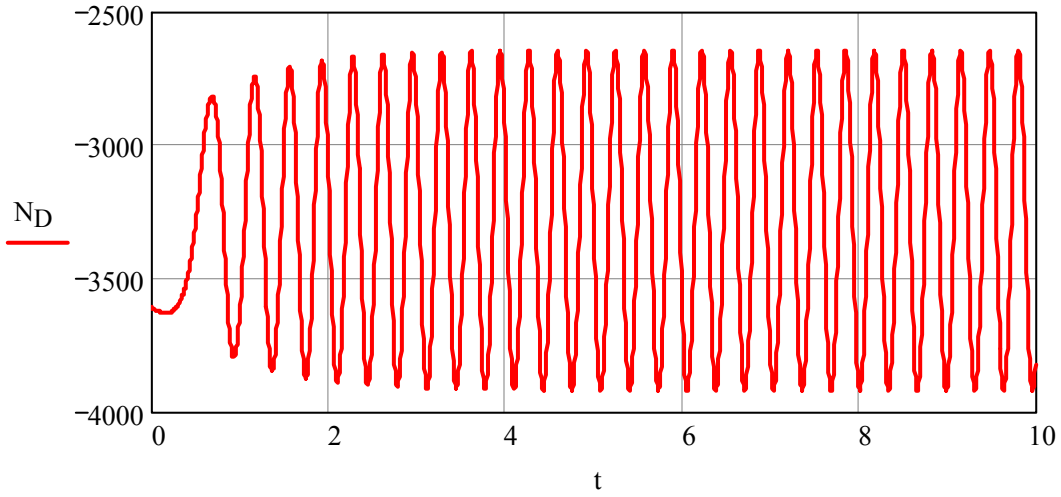
График зависимости давления кулисы на направляющую в точке B от времени



Давление кулисы на направляющую в точке D

$$N_D := \overrightarrow{\left(N_A \cdot \frac{r_1}{BD} \cdot \cos(\phi) - S_4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{OC(\phi) - OB}{BD} - F \cdot \frac{OE(\phi) - OB}{BD} \right)}$$

График зависимости давления кулисы на направляющую в точке D от времени



… … … …

Выводы

В результате решения полученного дифференциального уравнения движения механизма были определены: закон движения маховика 1, его угловые скорость и ускорение как функции времени t. На основании найденного закона движения по разработанному алгоритму были вычислены значения реакций внешних и внутренних связей.

Проведенный анализ результатов расчета показал, что в некоторые моменты времени значения нормальной реакции опорной плоскости становятся отрицательными, а сила сцепления превышает свое предельное значение. Следовательно, математическая модель не соответствует поведению механической системы: каток 3 может двигаться не только с проскальзыванием, но и с отрывом от вертикальной плоскости. Таким образом, механизм может получить дополнительную степень свободы.

С целью устранения этой ситуации были сформулированы критерии, удовлетворение которых обеспечивает адекватность движения системы математической модели.

Проведенные исследования показали, что конструкционное внесение в схему механизма предварительно напряженных упругих стержней позволяет обеспечить адекватность математической модели ее реальному движению.

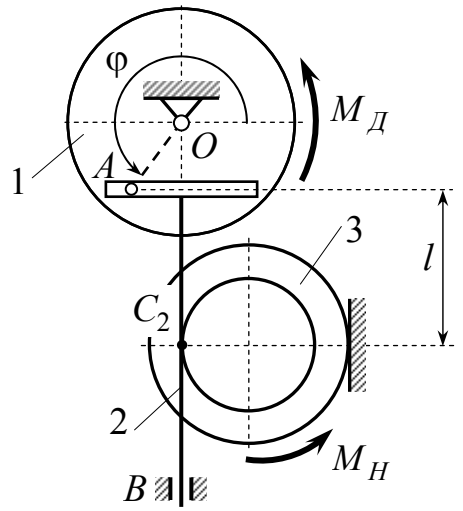
Было найдено минимальное значение прижимного усилия, обеспечивающего выполнение необходимых для этого условий

$$N_3 > 0, \quad F_{СЦ} \le F'_{СЦ} \quad \text{при} \quad F > 3105\,H.$$

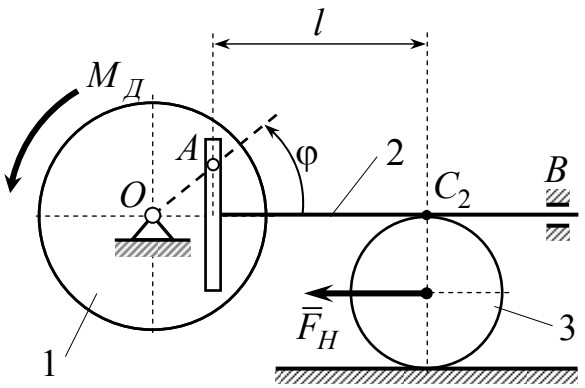
Произведена сравнительная оценка разных конструкционных элементов внесенных в механизм и сделан вывод о предпочтительности схемы с предварительно растянутым стержнем, в связи с необходимостью дальнейших расчетов на устойчивость сжатых стержней и срез пальца маховика 1.

АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

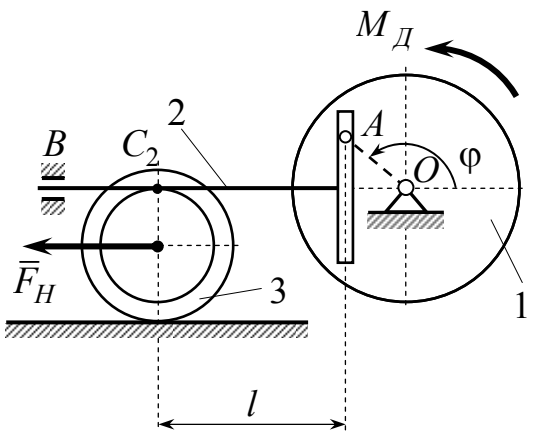
1



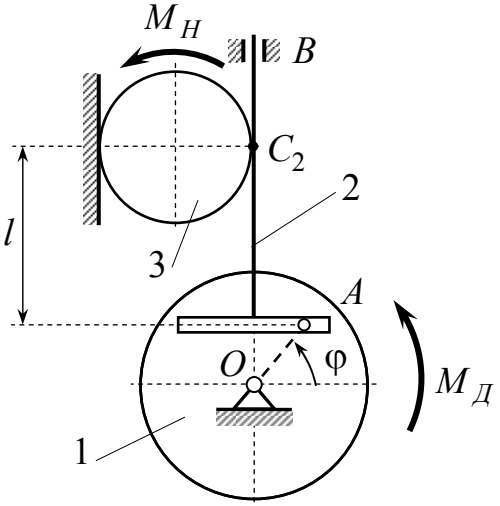
2



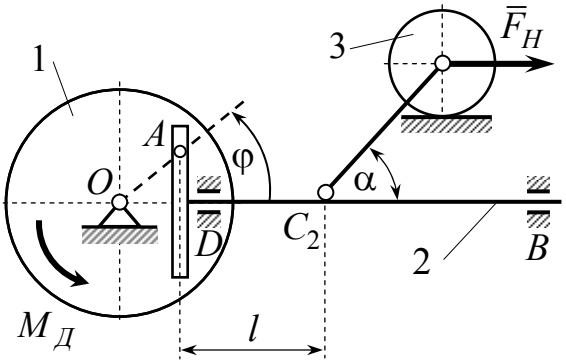
3



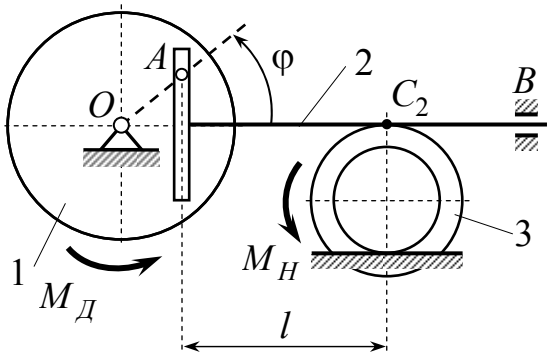
4



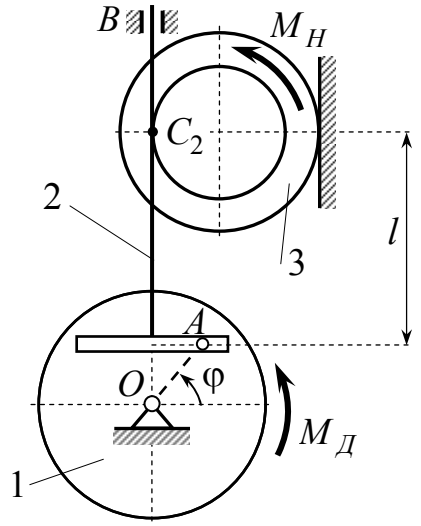
5



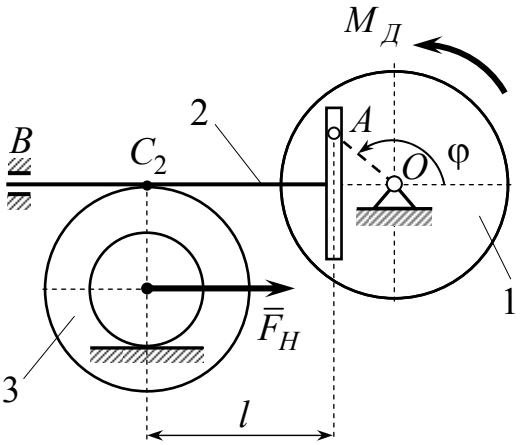
6



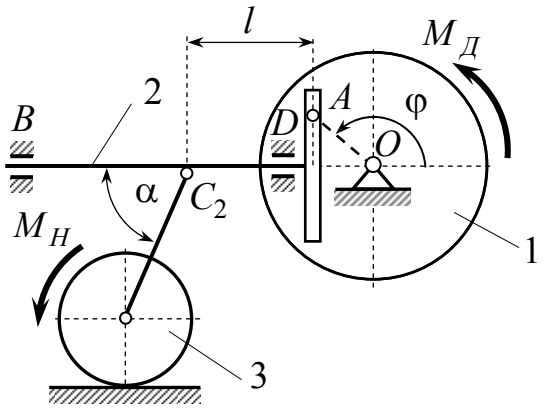
7


B
M_H
C_2
2
3
l
A
O
φ
M_Д
1

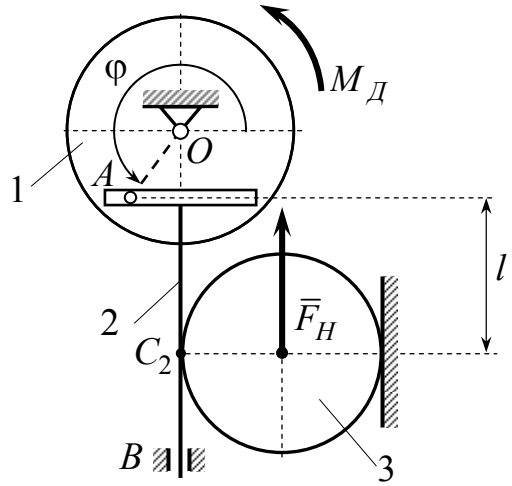
8


M_Д
2
A
B
C_2
O
φ
1
F_H
3
l

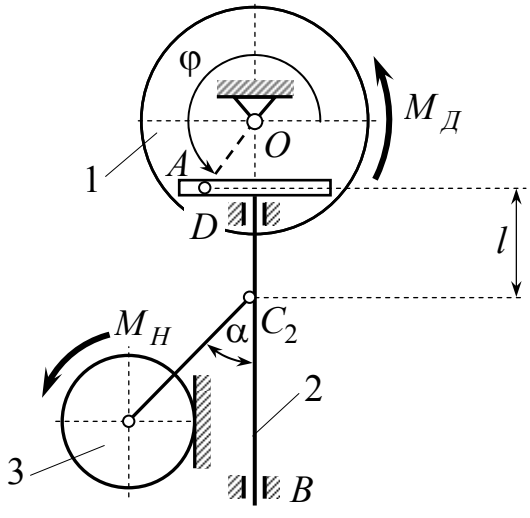
9


l
M_Д
2
A
B
D
φ
O
α
C_2
M_H
1
3

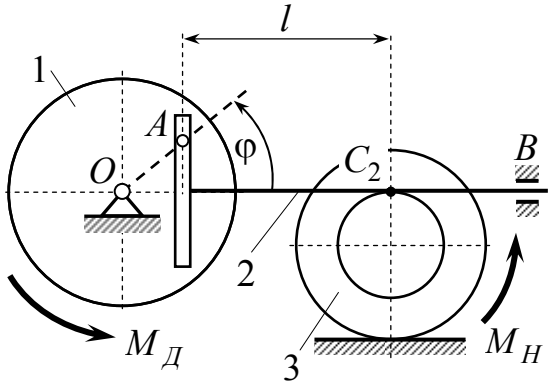
10


φ
M_Д
O
1
A
l
2
F_H
C_2
B
3

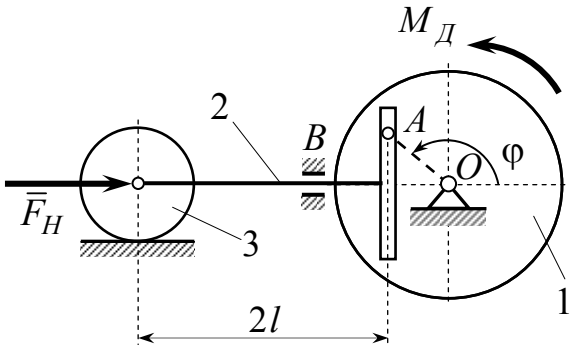
11


φ
M_Д
O
1
A
D
l
M_H
α
C_2
2
3
B

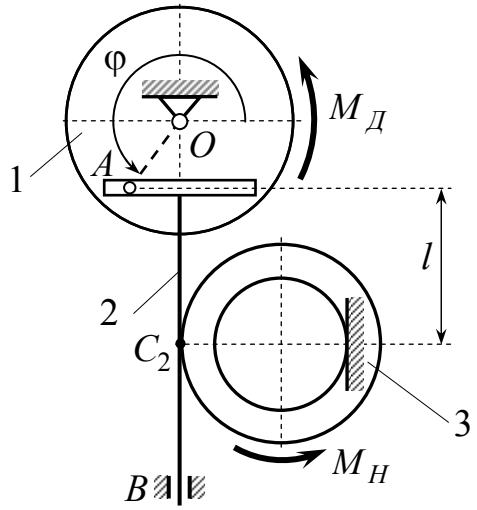
12


l
1
A
O
φ
C_2
B
2
M_Д
3
M_H

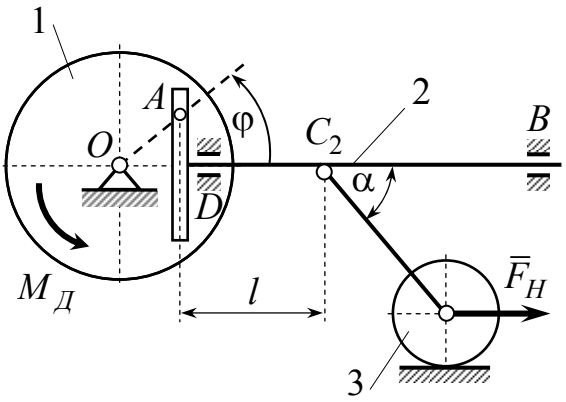
13



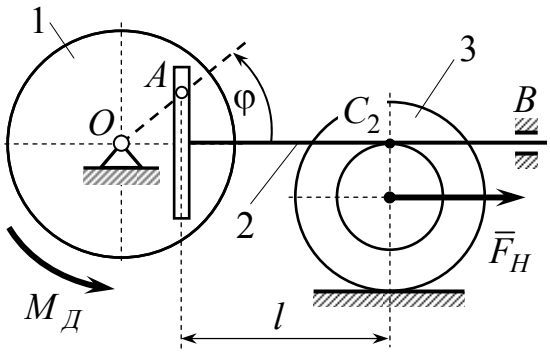
14



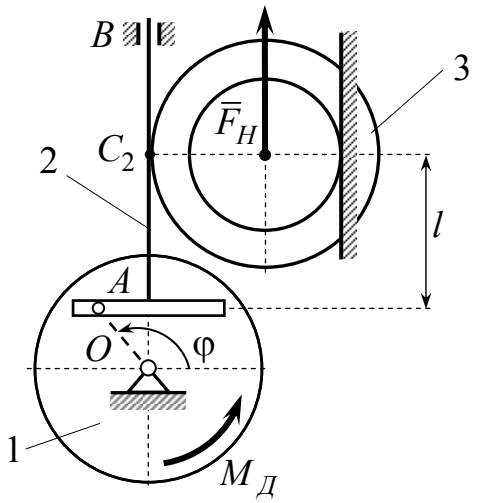
15



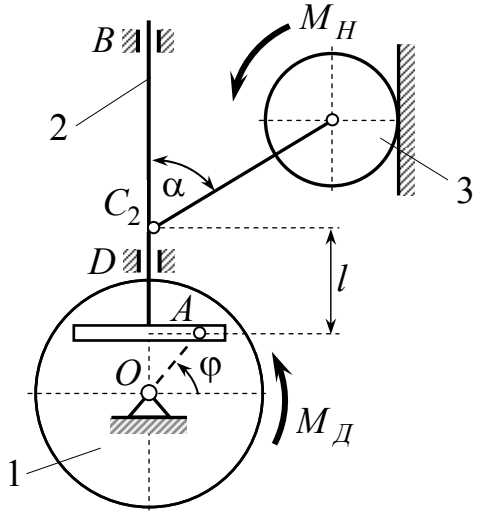
16



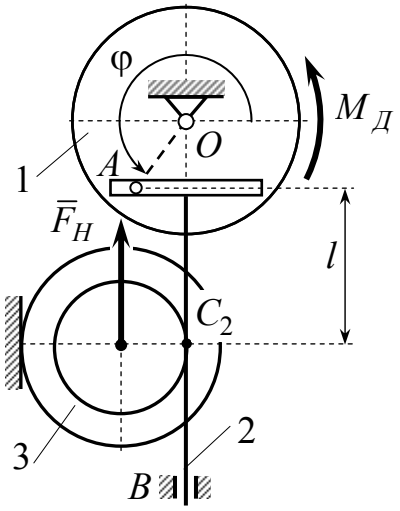
17



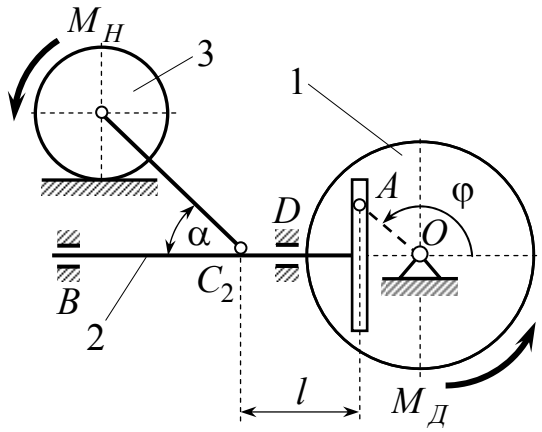
18



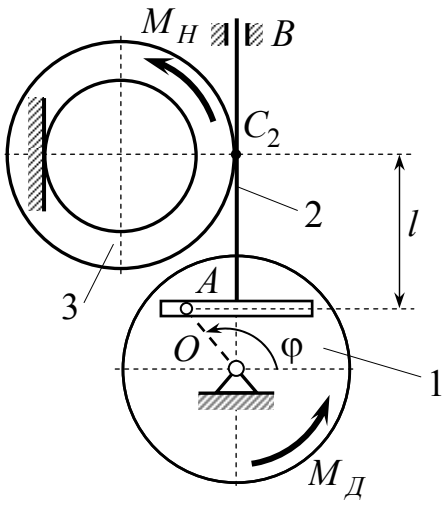
19



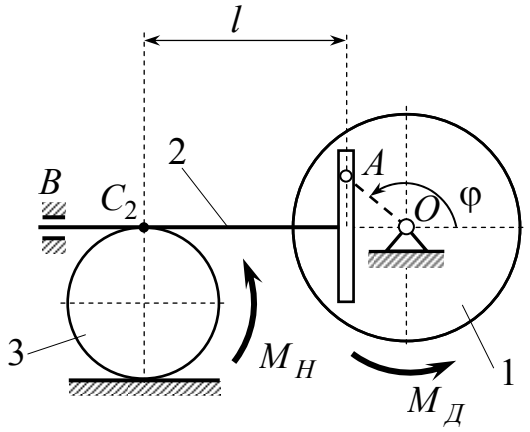
20



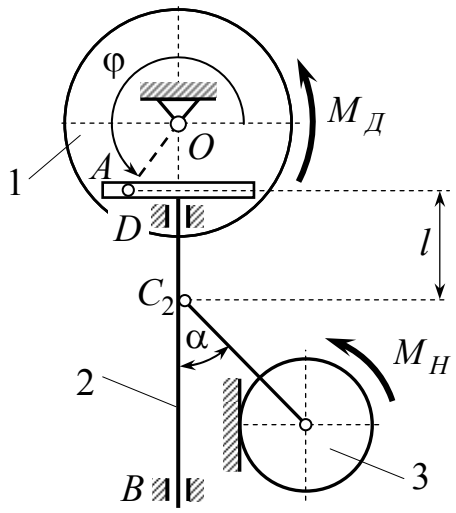
21



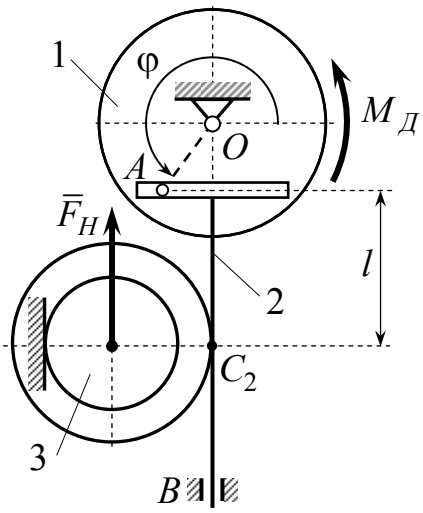
22



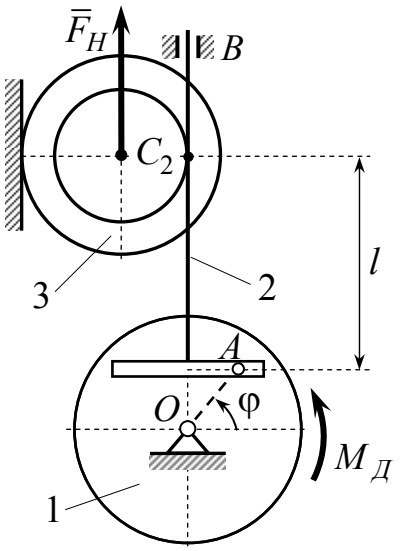
23



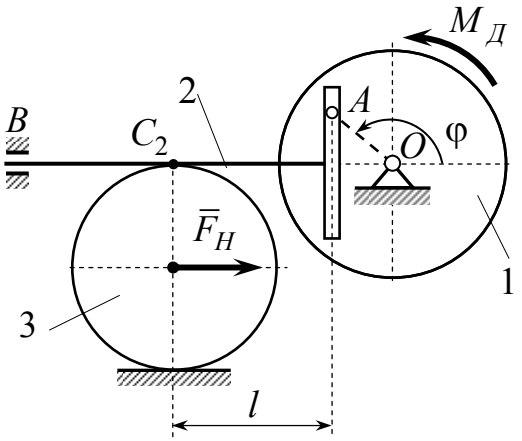
24



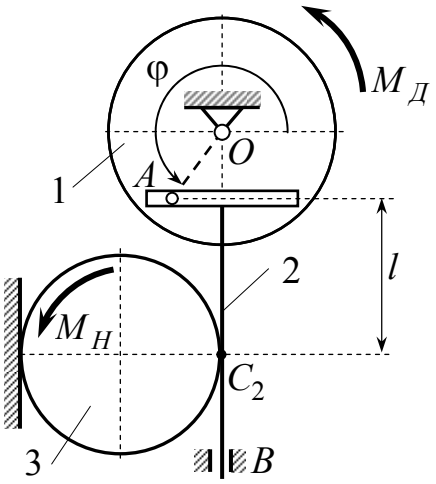
25



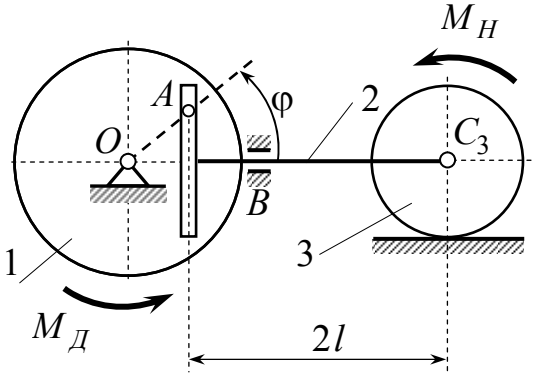
26



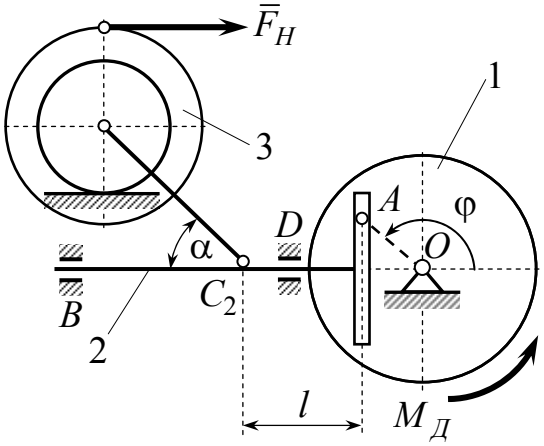
27



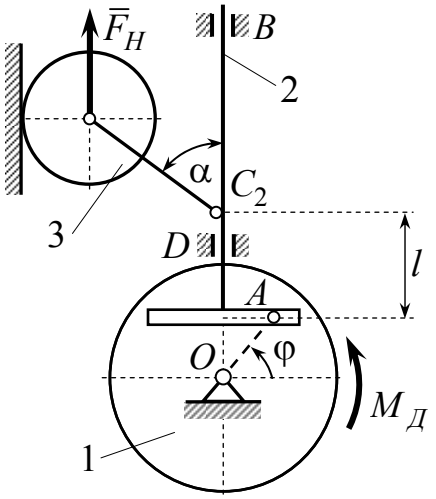
28



29



30



№	M_0	ν_0	ν_1	μ	I_1	m_1	m_2	m_3	R_3	r_3	i_3	OB	l
	$H \cdot м$	$кг \cdot м/с$		$кг/с$	$кг \cdot м^2$	$кг$			$м$				
1	- 50	0,8	—	344	1,4	51	21	24	0,18	—	—	—	—
2	102	3,3	—	331	2,0	55	15	20	0,13	—	—	—	—
3	- 34	0,3	9,56	—	1,5	50	20	24	0,12	—	—	0,12	—
4	26	0,2	3,48	—	1,7	56	26	20	0,09	—	—	0,09	—
5	105	3,5	—	639	2,0	49	10	20	0,12	0,08	0,09	—	—
6	- 53	0,8	4,72	—	1,4	54	24	24	0,18	—	—	0,10	—
7	- 27	0,2	20,6	—	1,5	51	20	20	0,09	—	—	0,12	0,08
8	108	3,5	—	222	2,0	60	10	15	0,10	0,08	0,08	—	—
9	- 27	0,2	20,6	—	1,4	53	15	30	0,09	—	—	0,15	0,05
10	110	3,8	—	571	2,0	62	12	20	0,18	0,08	0,12	—	—
11	37	0,4	11,5	—	1,7	52	22	32	0,12	—	—	0,12	0,06
12	112	3,7	—	246	2,0	54	14	12	0,16	0,12	0,14	—	—
13	113	3,7	—	342	2,0	58	12	10	0,12	—	—	—	—
14	114	3,8	—	856	2,0	57	15	28	0,10	0,06	0,08	—	—
15	115	3,9	—	2234	2,0	63	16	30	0,20	0,06	0,14	—	—
16	116	3,9	—	2654	2,0	48	18	16	0,10	0,05	0,08	—	—
17	39	0,4	6,95	—	1,4	63	23	32	0,12	—	—	0,12	—
18	118	3,9	—	337	2,0	64	12	10	0,08	—	—	—	—
19	119	3,9	—	3231	2,0	59	20	40	0,14	0,07	0,08	—	—
20	120	4,0	3,24	—	2,0	70	10	12	0,10	—	—	—	—
21	121	4,0	—	1380	2,0	67	24	16	0,07	—	—	—	—
22	122	4,1	—	700	2,0	72	12	18	0,18	0,06	0,12	—	—
23	65	1,0	5,36	—	1,4	57	17	16	0,18	—	—	0,10	—
24	- 31	0,2	49,2	—	1,7	65	25	36	0,09	—	—	0,16	0,08
25	63	1,0	35,4	—	1,4	64	24	32	0,18	—	—	0,14	—
26	126	4,2	—	5440	2,0	58	18	26	0,18	0,09	0,10	—	—
27	- 36	0,4	29,9	—	1,5	56	26	24	0,12	—	—	0,16	—
28	128	4,3	—	1308	2,0	71	22	16	0,15	—	—	—	—
29	129	4,2	—	101	2,0	67	12	10	0,05	—	—	—	—
30	- 41	0,4	6,10	—	1,5	49	15	20	0,12	—	—	0,10	—

Радиус маховика $R_1 = 0.36$ м, $OA = r_1 = 0.06$ м. Тела, радиус инерции которых не задан в таблице, считать круглыми однородными цилиндрами.

Д 3. ДИНАМИКА ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Плоские шарнирные механизмы широко распространены в современном машиностроении в связи с присущими им достоинствами: высокой технологичностью изготовления, возможностью выполнения шарнирных соединений на подшипниках качения, небольшим износом соприкасающихся поверхностей, долговечностью, надежностью в работе и ремонтоспособностью.

Без глубокого знания кинематических и динамических характеристик механизмов, входящих в современный агрегат, невозможно спроектировать машину с параметрами, близкими к оптимальным, что, безусловно, отражается на производительности, надежности, долговечности машины, и на качестве выпускаемой продукции. Знание кинематических и динамических свойств и возможностей механизмов необходимо для разработки новых технологических процессов.

Цель курсовой работы

Исследование и анализ динамического поведения плоского шарнирного механизма с помощью основных теорем и принципов теоретической механики.

Содержание курсовой работы

Объектом исследования является плоский шарнирный механизм, который приводится в движение электродвигателем, развивающим момент, приложенный к ведущему звену (кривошипу OA)

$$M_Д = M_0 - \nu_0 \omega$$

где M_0, ν_0 – постоянные величины.

Полезная нагрузка моделируется для разных вариантов либо силой $\overline{F}_H$, либо моментом M_H

$$\overline{F}_H = -\mu \overline{v}, \; M_H = -\nu \omega$$

где ν, μ – постоянные величины, а v, ω – линейная или угловая скорость ведо-

мого звена.

Схемы механизмов и исходные данные для расчета приведены в альбоме заданий.

При составлении математической модели принимаются следующие допущения:

- Звенья механизма считаются абсолютно твердыми, сплошными и однородными стержнями.
- Проскальзывание между звеньями отсутствует.
- Трение в подшипниках и шарнирах не учитывается; ползуны скользят по направляющим без трения.

Требуется:

1. Составить дифференциальное уравнение движения механизма.
2. Составить уравнения для определения динамических реакций внешних и внутренних связей.
3. Проинтегрировать при нулевых начальных условиях $\varphi\big|_{t=0} = 0, \dot{\varphi}\big|_{t=0} = 0$ дифференциальное уравнение движения кривошипа OA на отрезке времени $[0, \tau]$. Величину τ рекомендуется принимать из промежутка $0,5 \div 10,0\ c$.
4. Построить графики функций $\varphi = \varphi(t), \omega_z = \omega_z(t), \varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ и определяемых динамических реакций. Найти предельную угловую скорость кривошипа.
5. Проанализировать полученные результаты.

Порядок выполнения работы

1. Составить дифференциальное уравнение движения механизма одним из следующих способов (по указанию преподавателя):
   - с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме;
   - методом общего уравнения динамики;
   - с помощью уравнений Лагранжа второго рода.
2. Определить динамические реакции внешних и внутренних связей. Для их оп-

ределения следует использовать (по указанию преподавателя):

- теоремы об изменении количества движения и кинетического момента в дифференциальных формах;
- дифференциальные уравнения движения твердого тела;
- метод кинетостатики (принцип Даламбера).

3. Численное интегрирование дифференциального уравнения движения при заданных начальных условиях рекомендуется провести в одной из математических сред (например, *Mathcad*). Там же провести определение указанных динамических реакций и построение графиков.

4. Провести анализ результатов расчета движения механизма. Исследовать факторы, влияющие на неравномерность движения механизма

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Плоский шарнирный механизм (рис. 1), расположенный в вертикальной плоскости, движется под действием внешнего момента $M_Д$, приложенного к ведущему звену (кривошипу OA) и изменяющемуся по закону $M_Д = M_0 - \nu_0 \omega$.

На ползун D действует полезная нагрузка $\bar{F}_H$, величина которой задается соотношением

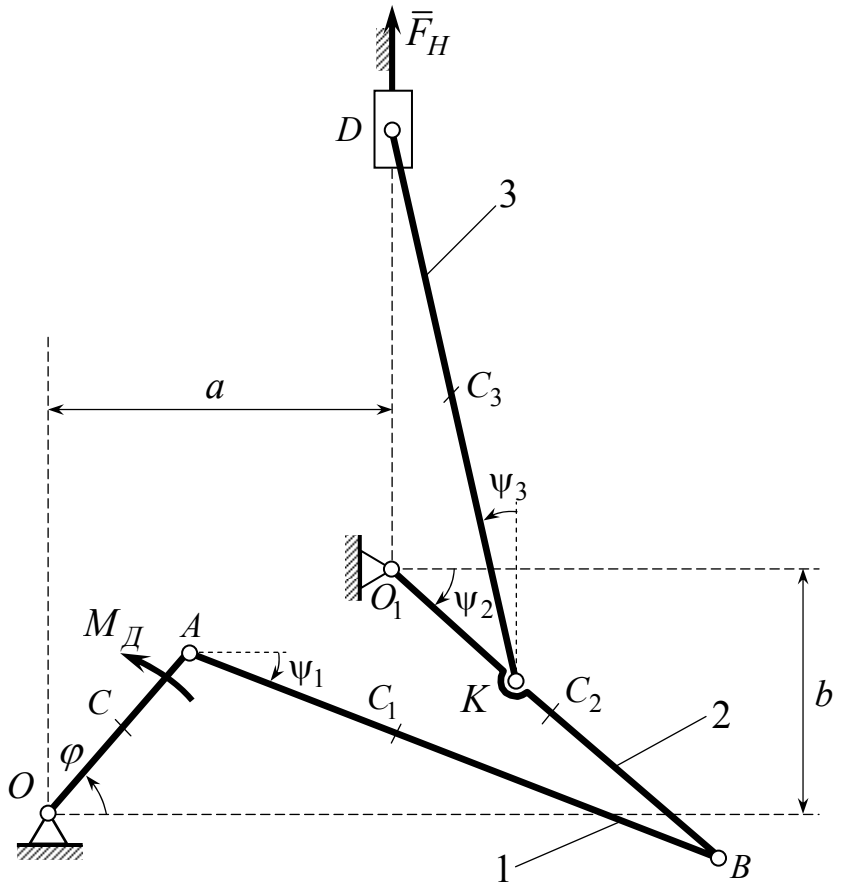
$$\bar{F}_H = -\mu \bar{v}_D.$$

Звенья механизма моделируются сплошными однородными стержнями, массы которых пропорциональны их длине. Погонная плотность каждого стержня равна ρ. Соединение стержней осуществлено идеальными шарнирами. Движение механизма начинается из состояния покоя, а начальное значение угла поворота ведущего звена равно $\varphi = 0$.

Требуется

- Составить дифференциальное уравнение движения механизма с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

- Определить динамические реакции внешних и внутренних связей.
- Провести численное интегрирование дифференциального уравнения движения при заданных начальных условиях с помощью пакета *Mathcad.*
- Провести анализ результатов вычислений.



Исходные данные:

$OA = l_0 = 15\ см$, $AB = l_1 = 97\ см$, $O_1B = l_2 = 66\ см$, $KD = l_3 = 86\ см$,
$O_1K = 25\ см$, $a = 50\ см$, $b = 37\ см$,
$\rho = 10\ кг/м$, $m_4 = 2\ кг$,
$\mu = 15.0\ Н\,с/м$, $M_0 = 50\ Н\,м$, $\nu_0 = 1.25\ Н\,м\,с$.

Рис. 1. Схема плоского механизма и исходные данные

1. Составление дифференциального уравнения движения механизма

Для решения поставленной задачи выберем правую систему координат, начало которой расположим в подшипнике O. Рассмотрим механизм в произвольном положении и изобразим силы действующие на него в данный момент времени (рис. 2): $\bar{G}$, $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4$ – силы тяжести звеньев; $\bar{F}_H$ – полезная нагрузка; $M_Д$ – возмущающий момент; $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{X}_{O_1}, \bar{Y}_{O_1}, \bar{X}_П$ – реакции опор.

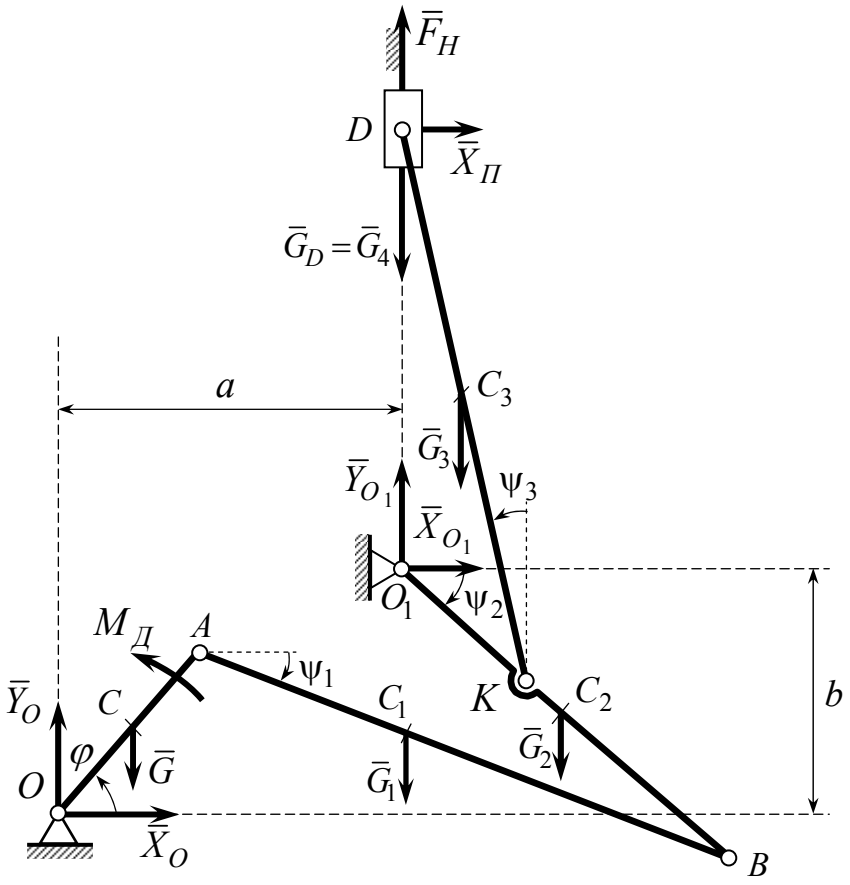


Рис. 2. Расчетная схема плоского механизма

Составление кинематических соотношений

Рассматриваемый механизм представляет собой механическую систему с одной степенью свободы. Положение всех его звеньев будем определять с помощью угла поворота ведущего звена φ. Углы поворотов звеньев φ_k $\left(k = 1, 2, 3\right)$, отсчитываемые от горизонтальной оси Ox в положительном направлении, связаны с острыми углами ψ_k, изображенными на рис. 2 (см. К 1,

рис. 2), соотношениями

$$\varphi_1 = 2\pi + \psi_1, \varphi_2 = 2\pi + \psi_2, \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \psi_1.$$

Выразим кинематические характеристики всех тел механизма через кинематические параметры ведущего звена с помощью уравнений геометрических связей (К 1, (3))

$$\begin{aligned} AB\cos(\varphi_1) - O_1B\cos(\varphi_2) &= a - OA\cos(\varphi), \\ AB\sin(\varphi_1) - O_1B\sin(\varphi_2) &= b - OA\sin(\varphi), \\ O_1K\cos(\varphi_2) + KD\cos(\varphi_3) &= 0, \\ O_1K\sin(\varphi_2) + KD\sin(\varphi_3) - y_D &= b. \end{aligned} \tag{1}$$

Угловые координаты звеньев механизма и координата ползуна D будут в этом случае определяться соотношениями (К 1, (5) – (8)):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 - O_1A^2 - AB^2}{2\ AB\ \ O_1A}\right), \\ \varphi_2 &= \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 + O_1A^2 - AB^2}{2\ O_1B\ \ O_1A}\right), \\ \varphi_3 &= \arccos\left[-\frac{O_1K}{KD}\cos(\varphi_2)\right], \\ y_D &= b + O_1K\sin(\varphi_2) + KD\sin(\varphi_3). \end{aligned} \tag{2}$$

Угловые скорости звеньев можно получить из соотношений (К 1, (11'))

$$X_\Omega = A^{-1} \cdot B, \tag{3}$$

где $X_\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$ – вектор угловых скоростей звеньев, отнесенных к угловой скорости ведущего звена $\left(\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi}\dot{\varphi} = \Omega_k\omega\right)$;

$A = \begin{bmatrix} -AB\sin(\varphi_1) & O_1B\sin(\varphi_2) & 0 \\ AB\cos(\varphi_1) & -O_1B\cos(\varphi_2) & 0 \\ 0 & -O_1K\ \sin(\varphi_2) & -KD\ \sin(\varphi_3) \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов системы уравнений $A \cdot X_\Omega = B$;

$B = \begin{bmatrix} OA\ \sin(\varphi) \\ -OA\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$ – вектор правых частей системы уравнений $A \cdot X_\Omega = B$.

Скорости центров масс кривошипов OA и O_1B найдем по формуле Эйлера

$$\overline{v}_C = \overline{\omega} \times \overline{OC}; \quad \overline{v}_{C_2} = \overline{\omega}_2 \times \overline{O_1C_2}, \tag{4}$$

а скорости центров масс шатунов AB и KD вычислим с помощью теоремы о сложении скоростей плоской фигуры

$$\overline{v}_{C_1} = \overline{v}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AC}_1, \quad \overline{v}_{C_3} = \overline{v}_K + \overline{\omega}_3 \times \overline{KC}_3, \tag{5}$$

где $\overline{v}_A = \overline{\omega} \times \overline{OA}$ – скорость точки A шатуна AB, $\overline{v}_K = \overline{\omega}_2 \times \overline{O_1K}$ – скорость точки K шатуна KD.

Скорость ползуна D определяется простым дифференцированием четвертого уравнения системы (2)

$$\dot{y}_D = v_{C_4} = O_1K\ \cos(\varphi_2)\omega_2 + KD\cos(\varphi_3)\omega_3. \tag{6}$$

Угловые ускорения механизма связаны между собой аналогичными с (3) выражениями (К 1, (13'))

$$X_\varepsilon = A^{-1} \cdot C \tag{7}$$

где $X_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных угловых ускорений звеньев;

$C = C'\omega^2 + B\varepsilon$ – вектор правых частей системы уравнений $A \cdot X_\varepsilon = C$; а

$$C' = \begin{bmatrix} OA\cos(\varphi) + AB\cos(\varphi_1)\Omega_1^2 - O_1B\cos(\varphi_2)\Omega_2^2 \\ OA\ \sin(\varphi) + AB\ \sin(\varphi_1)\Omega_1^2 - O_1B\sin(\varphi_2)\Omega_2^2 \\ O_1K\cos(\varphi_2)\Omega_2^2 + KD\cos(\varphi_3)\Omega_3^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

При вычислении угловых ускорений звеньев учтено, что, в отличии от задания К 1, угловое ускорение ведущего звена не равно нулю.

Ускорения центров масс кривошипов OA и O_1B найдем по формуле Эйлера

$$\begin{aligned} \bar{a}_C &= \bar{\varepsilon} \times \overline{OC} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{OC}\right); \\ \bar{a}_{C_2} &= \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{O_1C_2} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega}_2 \times \overline{O_1C_2}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

Ускорения центров масс шатунов AB и KD вычислим с помощью теоремы о сложении ускорений плоской фигуры

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_1} &= \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AC}_1 + \bar{\omega}_1 \times \left(\bar{\omega}_1 \times \overline{AC}_1\right), \\ \bar{a}_{C_3} &= \bar{a}_K + \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{KC}_3 + \bar{\omega}_3 \times \left(\bar{\omega}_3 \times \overline{KC}_3\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{a}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{OA}\right)$ – ускорение точки A шатуна AB, $\bar{a}_K = \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{O_1K} + \bar{\omega}_2 \times \left(\bar{\omega}_2 \times \overline{O_1K}\right)$ – ускорение точки K шатуна KD.

Ускорение ползуна D определяется дифференцированием уравнения (6)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_D = a_{C_4} = O_1K\left[\cos(\varphi_2)\varepsilon_2 - \sin(\varphi_2)\omega_2^2\right] + \\ KD\left[\cos(\varphi_3)\varepsilon_3 - \sin(\varphi_3)\omega_3^2\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью теоремы об изменении кинетической энергии

Для составления дифференциального уравнения движения механической системы с одной степенью свободы применим теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\frac{d\,T}{d\,t} = \sum_k N_k\left(\bar{F}_k^e\right) + \sum_k N_k\left(\bar{F}_k^i\right), \quad (12)$$

где T – кинетическая энергия системы; $\sum_k N_k\left(\bar{F}_k^e\right)$ – сумма мощностей внешних сил; $\sum_k N_k\left(\bar{F}_k^i\right)$ – сумма мощностей внутренних сил.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел, образующих механическую систему

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где $T_0 = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega^2$ – кинетическая энергия кривошипа OA, совершающего вращательное движение вокруг оси Oz;

$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{1_{C_1 z}} \omega_1^2$ – кинетическая энергия шатуна AB, совершающего плоское движение;

$T_2 = \frac{1}{2} I_{2_{O_1 z}} \omega_2^2$ – кинетическая энергия кривошипа O_1B, совершающего вращательное движение вокруг оси $O_1 z$;

$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{3_{C_3 z}} \omega_3^2$ – кинетическая энергия шатуна KD, совершающего плоское движение;

$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_D^2 = \frac{1}{2} m_4 v_{C_4}^2$ – кинетическая энергия ползуна D, который движется поступательно.

Моменты инерции сплошных однородных стержней, составляющих механизм, относительно осей проходящих через их центры масс равны

$$I_{Oz} = \frac{1}{3} m_0 l_0^2, \quad I_{1_{C_1 z}} = \frac{1}{12} m_1 l_1^2, \quad I_{2_{O_1 z}} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2, \quad I_{3_{C_3 z}} = \frac{1}{12} m_3 l_3^2.$$

Подставляя кинематические соотношения (3) – (6) в выражение кинетической энергии системы, окончательно получаем:

$$T = \frac{1}{2} I_{np}(\varphi)\, \omega^2 \qquad (13)$$

где $$I_{пр}(\varphi) = I_{Oz} + m_1 V_{C_1}^2 + I_{1_{C_1 z}} \Omega_1^2 + I_{2_{O_1 z}} \Omega_2^2 + m_3 V_{C_3}^2 + I_{3_{C_3 z}} \Omega_3^2 + m_4 V_{C_4}^2 \qquad (14)$$

– приведенный момент инерции механизма, а величины $V_{C_k}, \left(k = \overline{1,4}\right)$ – скорости точек механизма, отнесенные к угловой скорости ведущего звена $\left(V_{C_k} = {}^{v_{C_k}}\!/_{\omega}\right)$.

Для рассматриваемой механической системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных идеальными шарнирами сумма мощностей внутренних сил равна нулю $\sum_k N_k\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$.

Сумма мощностей внешних сил будет равна

$$\sum_k N_k\left(\overline{F}_k^e\right) = N_{M_Д} + N_{F_H} + N_{\overline{G}} + N_{\overline{G}_1} + N_{\overline{G}_2} + N_{\overline{G}_3} + N_{\overline{G}_4},$$

где $N_{\overline{G}} = \overline{G} \cdot \overline{v}_C$, $N_{\overline{G}_1} = \overline{G}_1 \cdot \overline{v}_{C_1}$, $N_{\overline{G}_2} = \overline{G}_2 \cdot \overline{v}_{C_2}$, $N_{\overline{G}_3} = \overline{G}_3 \cdot \overline{v}_{C_3}$, $N_{\overline{G}_4} = \overline{G}_4 \cdot \overline{v}_{C_4}$ – мощности сил тяжести звеньев; $N_{M_Д} = M_Д\,\omega$ – мощность момента приводящего механизм в движение; $N_{F_H} = \overline{F}_H \cdot \overline{v}_D$ – мощность полезной нагрузки.

Мощности сил $\overline{X}_O, \overline{Y}_O, \overline{X}_{O_1}, \overline{Y}_{O_1}, \overline{X}_П$ равны нулю, т.к. реакция опорной плоскости $\overline{X}_П$ перпендикулярна скорости точки D, а остальные силы приложены к неподвижным точкам.

Учитывая выражения для движущегося момента $M_Д$ и полезной нагрузки $\overline{F}_H$, окончательно получим

$$\sum_k N_k\left(\overline{F}_k^e\right) = M_{пр}(\varphi, \omega)\omega = M_{пр}^0(\varphi)\omega - \nu_{пр}(\varphi)\omega^2, \qquad (15)$$

где $$M_{пр}(\varphi, \omega) = M_{пр}^0(\varphi) - \nu_{пр}(\varphi)\omega \qquad (16)$$

– приведенный момент внешних сил, а величины $M_{пр}^0(\varphi)$ и $\nu_{пр}(\varphi)$ равны

$$M_{пр}^0(\varphi) = M_0 + \overline{G} \cdot \overline{V}_C + \sum_k \overline{G}_k \cdot \overline{V}_{C_k},$$

$$\nu_{пр}(\varphi) = \nu_0 + \mu V_{C_4}^2.$$

Подставляя найденные выражение кинетической энергии (13) и мощности внешних сил (15) в теорему об изменении кинетической энергии (12), получим дифференциальное уравнение движения механизма

$$I_{пр}(\varphi)\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} I_{пр}'(\varphi)\,\dot{\varphi}^2 = M_{пр}(\varphi, \dot{\varphi}), \tag{17}$$

где $I_{пр}'(\varphi) = \dfrac{d}{d\varphi} I_{пр}(\varphi)$ – производная момента инерции механизма по углу поворота ведущего звена.

Решив данное дифференциальное уравнение второго порядка с указанными в задаче начальными условиями, найдем закон движения ведущего звена $\varphi(t)$, его угловую скорость $\dot{\varphi}(t) = \omega$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}(t) = \varepsilon$.

2. Нахождение реакций внешних и внутренних связей

Для определения реакций внешних и внутренних связей расчленим плоский шарнирный механизм на отдельные звенья и изобразим реакции внешних и внутренних связей каждого звена (рис. 3).

Применив к каждому телу, изображенному на расчетной схеме, теорему о движении центра масс (в проекциях на оси координат) и теорему об изменении кинетического момента (для кривошипов относительно осей вращения, для шатунов относительно осей проходящих через центр масс) получим следующую систему уравнений:

Кривошип OA

$$\begin{aligned} m\,a_{C_x} &= X_O + X_A, \\ m\,a_{C_y} &= Y_O + Y_A - m\,g, \\ I_{Oz}\,\varepsilon &= M_Д - m\,g\,x_C + Y_A x_A - X_A y_A; \end{aligned} \tag{18}$$

Шатун AB

$$\begin{aligned} m_1\,a_{C_{1x}} &= X_B - X_A', \\ m_1\,a_{C_{1y}} &= Y_B - Y_A' - m_1\,g, \\ I_{1_{C_1 z}}\,\varepsilon_1 &= -X_A'\left(y_{C_1} - y_A\right) + Y_A'\left(x_{C_1} - x_A\right) - X_B\left(y_B - y_{C_1}\right) + \\ &\quad + Y_B\left(x_B - x_{C_1}\right); \end{aligned} \tag{19}$$

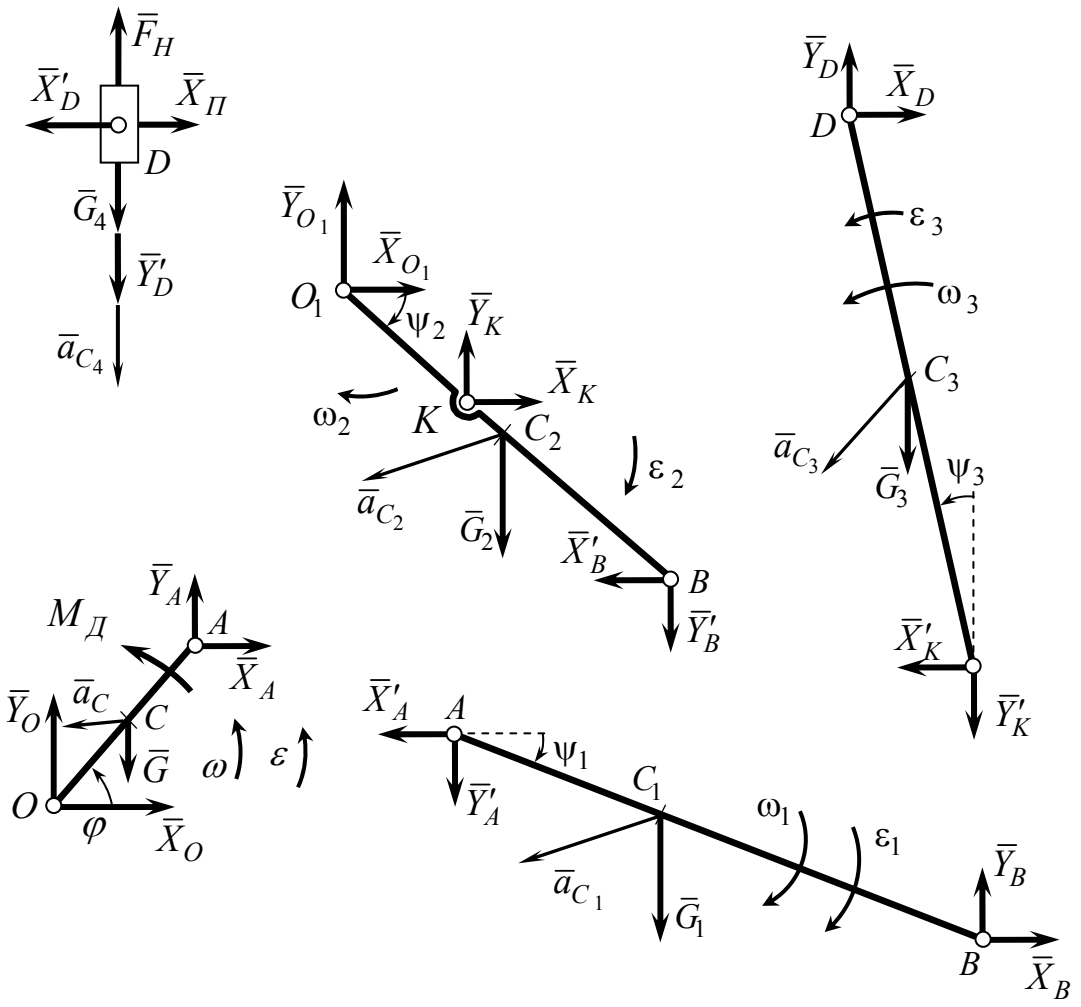


Рис. 3. Расчетные схемы звеньев плоского механизма

Кривошип O_1B

$$\begin{aligned} m_2\, a_{C_{2x}} &= X_{O_1} - X'_B + X_K, \\ m_2\, a_{C_{2y}} &= Y_{O_1} - Y'_B + Y_K - m_2\, g, \\ I_{2_{O_1 z}}\, \varepsilon_2 &= -X_K \left(y_K - y_{O_1}\right) + Y_K \left(x_K - x_{O_1}\right) + \\ &\quad + X'_B \left(y_B - y_{O_1}\right) - Y'_B \left(x_B - x_{O_1}\right) - m_2\, g \left(x_{C_2} - x_{O_1}\right); \end{aligned} \tag{20}$$

Шатун KD

$$\begin{aligned} m_3\, a_{C_{3x}} &= X_D - X'_K, \\ m_3\, a_{C_{3y}} &= Y_D - Y'_K - m_3\, g, \\ I_{3_{C_3 z}}\, \varepsilon_3 &= -X'_K \left(y_{C_3} - y_K\right) + Y'_K \left(x_{C_3} - x_K\right) - \\ &\quad - X_D \left(y_D - y_{C_3}\right) + Y_D \left(x_D - x_{C_3}\right); \end{aligned} \tag{21}$$

Ползун D

$$\begin{aligned} 0 &= X_П - X'_D, \\ m_4\, a_{C_4} &= -Y'_D - m_4\, g + F_H. \end{aligned} \tag{22}$$

Первое уравнение системы (22) позволяет определить реакцию опорной плоскости $X_П$, а второе, после подстановки найденных величин, дифференциальное уравнение движения механизма (17).

Оставшиеся двенадцать соотношений представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных реакций.

3. Результаты расчетов

Решение поставленной задачи сводится к численному интегрированию дифференциального уравнения движения механизма (17) и решению системы двенадцати линейных алгебраических уравнений (18) – (21) относительно неизвестных динамических реакций внешних и внутренних связей.

Задача интегрирования дифференциального уравнения (17) связана с большим количеством предварительных вычислений и может быть условно разбита на пять блоков:

- решение системы уравнений геометрических связей (1) или вычисление геометрических соотношений (2);
- вычисление кинематических соотношений по формулам (3) – (11);
- вычисление приведенного момента инерции механизма $I_{пр}(\varphi)$ и приведенного момента внешних сил $M_{пр}(\varphi, \dot{\varphi})$;
- вычисление производной от приведенного момента инерции по углу поворота ведущего звена $I_{пр}'(\varphi)$;
- численное интегрирование дифференциального уравнения.

Все это может быть проведено в Mathcad несколькими способами использующими различные встроенные процедуры–функции. Отличие этих способов и методов заключается во времени вычислений, которое требуется для нахождения: решения системы уравнений геометрических связей, приведенного момента инерции механизма $I_{пр}(\varphi)$ и его производной $I_{пр}'(\varphi)$, приведенного момента внешних сил $M_{пр}(\varphi, \dot{\varphi})$, а также решения дифференциального уравнения

движения (17). Подробно о методах решения данного дифференциального уравнения изложено в [1]. Ниже рассмотрен алгоритм и приведет пример документа Mathcad, в котором обеспечивается минимальное время вычислений.

Алгоритм вычислений

Угловые координаты звеньев $\varphi_k \left(k = \overline{1,3}\right)$ и положение ползуна D $y_D = y_{C_4}$ вычисляются в явном виде по формулам (2).

Угловые скорости звеньев $\Omega_k \left(k = \overline{1,3}\right)$, отнесенных к угловой скорости кривошипа, вычисляются в явном виде по формулам (3).

Скорости центров масс звеньев $V_{C_k} \left(k = \overline{1,4}\right)$, отнесенных к угловой скорости кривошипа, вычисляются в явном виде по формулам (4) – (6), которые примут следующий вид

$$\begin{aligned}
&\bar{V}_C = \bar{k} \times \overline{OC};\\
&\bar{V}_{C_1} = \bar{k} \times \overline{OA} + \bar{\Omega}_1 \times \overline{AC}_1,\\
&\bar{V}_{C_2} = \bar{\Omega}_2 \times \overline{O_1C_2},\\
&\bar{V}_{C_3} = \bar{\Omega}_2 \times \overline{O_1K} + \bar{\Omega}_3 \times \overline{KC}_3,\\
&V_{C_4} = O_1K\cos(\varphi_2)\Omega_2 + KD\cos(\varphi_3)\Omega_3.
\end{aligned} \qquad (23)$$

Далее, по формулам (14) и (16) вычисляется приведенный момент инерции $I_{np}(\varphi)$ и коэффициенты в приведенном моменте внешних сил $M_{np}(\varphi, \dot{\varphi})$.

Для вычисления производной $I_{np}'(\varphi)$ от приведенного момента инерции по углу поворота ведущего звена воспользуемся явным представлением этой производной

$$\begin{aligned}
I_{np}'(\varphi) = \quad & 2m_1V_{C_1}V_{C_1}' + 2I_{1_{C_1z}}\Omega_1\Omega_1' + 2I_{2_{O_1z}}\Omega_2\Omega_2' +\\
& 2m_3V_{C_3}V_{C_3}' + 2I_{3_{C_3z}}\Omega_3\Omega_3' + 2m_4V_{C_4}V_{C_4}'.
\end{aligned}$$

Производные $\Omega_k' \left(k = \overline{1,3}\right)$ можно найти, продифференцировав по φ сис-

тему уравнений $A(\varphi)\cdot X_\Omega(\varphi)=B(\varphi)$. Получим

$$A'(\varphi)\cdot X_\Omega(\varphi)+A(\varphi)\cdot X_\Omega{}'(\varphi)=B'(\varphi)\quad\Rightarrow\quad A(\varphi)\cdot X_\Omega{}'(\varphi)=C'(\varphi),$$

откуда

$$X_\Omega{}'(\varphi)=A^{-1}(\varphi)\cdot C'(\varphi),$$

где вектор $X_\Omega{}'(\varphi)=\begin{pmatrix}\Omega_1{}'\\ \Omega_2{}'\\ \Omega_3{}'\end{pmatrix}$, а матрица $C'(\varphi)$ определена соотношением (8).

Производные $V_{C_k}{}'\left(k=\overline{1,4}\right)$ находятся дифференцированием по углу поворота кривошипа OA выражений (23).

Для численного интегрирования дифференциального уравнения второго порядка (17) представим его в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Введя новые переменные $\omega=\dot\varphi,\ \varepsilon=\dot\omega=\ddot\varphi$, получим

$$\begin{aligned}&\dot\varphi=\omega,\\ &\dot\omega=\frac{1}{I_{np}(\varphi)}\left[M^0_{np}(\varphi)-\nu_{np}(\varphi)\omega-\frac{1}{2}I_{np}{}'(\varphi)\omega^2\right].\end{aligned}\qquad(24)$$

Эти соотношения позволяет вычислять угловое ускорение кривошипа, если известны его угол поворота и угловая скорость; в частности, можно вычислить угловое ускорение в начальный момент по заданным начальным значениям угла поворота и угловой скорости кривошипа.

Для интегрирования системы уравнений (24) при заданных начальных условиях используем встроенную в пакет Mathcad процедуру-функцию *rkfixed* реализующую метод Рунге-Кутта [1] и имеющую следующий вид:

$$\text{rkfixed(u, } T_0\text{, } T_k\text{, N, D)},$$

где: $u=\begin{bmatrix}\varphi(0)\\ \dot\varphi(0)\end{bmatrix}$- вектор начальных условий; T_0, T_k – граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциального уравнения. Начальные условия, заданные в векторе u – это значение решения в точке T_0; N – число то-

чек (не считая начальной точки), в которых ищется приближенное решение. При помощи этого аргумента определяется число строк $N+1$ в матрице, возвращаемой функцией *rkfixed* ; $D(t,U)=\begin{bmatrix}\dot{\varphi}(t,U)\\ \dot{\omega}(t,U)\end{bmatrix}$ – вектор, элементами которого является угловая скорость и угловое ускорение маховика, определяемых уравнениями (24).

Матрица, получаемая в результате решения, содержит три столбца; первый – для значений времени t, второй – для значений угла поворота $\varphi(t)$, третий – для значений угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (18) – (21), для нахождения динамических реакций внешних и внутренних связей сложностей не вызывает и реализуется любым из методов реализованных в Mathcad [1, 5].

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором реализована процедура интегрирования дифференциального уравнения движения маховика и вычисления реакций внешних и внутренних связей.

Динамический расчет плоского шарнирного механизма

1. Ввод исходных данных

$a := .50$ $b := .37$

$OA := .15$ $AB := .97$ $O1K := .25$ $O1B := .66$ $KD := .86$

$M_0 := 50$ $\nu_0 := 1.25$ $\mu := 15.$ $\rho := 10$ $g := 9.81$

2. Вычисление постоянных величин и вспомогательных функций

$m_0 := \rho \cdot OA$ $m_1 := \rho \cdot AB$ $m_2 := \rho \cdot O1B$ $m_3 := \rho \cdot KD$ $m_4 := 2$

$L_0 := OA$ $L_1 := AB$ $L_2 := O1B$ $L_3 := KD$

$ORIGIN := 1$

$\beta := \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$ $O1A(\phi) := \sqrt{a^2 + b^2 + OA^2 - 2 \cdot OA \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\phi - \beta)}$

$\alpha(\phi) := \operatorname{angle}(OA \cdot \cos(\phi) - a, OA \cdot \sin(\phi) - b)$

3. Определение угловых координат звеньев и вертикальной координаты ползуна D как функции угла поворота ведущего звена

$$\phi_1(\phi) := \alpha(\phi) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1B^2 - AB^2 - O1A(\phi)^2}{2\cdot O1A(\phi)\cdot AB}\right) \qquad \phi_2(\phi) := \alpha(\phi) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1A(\phi)^2 + O1B^2 - AB^2}{2\cdot O1A(\phi)\cdot O1B}\right)$$

$$\phi_3(\phi) := \operatorname{acos}\left(-\frac{O1K}{KD}\cdot\cos(\phi_2(\phi))\right) \qquad y_D(\phi) := b + O1K\cdot\sin(\phi_2(\phi)) + KD\cdot\sin(\phi_3(\phi))$$

4. Определение положения узловых точек механизма радиус-векторами

$$R_A(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\\ 0\end{pmatrix}\cdot L_0 \qquad \rho_{C1}(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi_1(\phi))\\ \sin(\phi_1(\phi))\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{L_1}{2} \qquad R_{C1}(\phi) := R_A(\phi) + \rho_{C1}(\phi)$$

$$R_{O1}(\phi) := \begin{pmatrix}a\\ b\\ 0\end{pmatrix} \qquad \rho_B(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi_2(\phi))\\ \sin(\phi_2(\phi))\\ 0\end{pmatrix}\cdot L_2 \qquad R_B(\phi) := R_{O1}(\phi) + \rho_B(\phi)$$

$$R_C(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{L_0}{2} \qquad \rho_K(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi_2(\phi))\\ \sin(\phi_2(\phi))\\ 0\end{pmatrix}\cdot O1K \qquad R_K(\phi) := R_{O1}(\phi) + \rho_K(\phi)$$

$$\rho_D(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi_3(\phi))\\ \sin(\phi_3(\phi))\\ 0\end{pmatrix}\cdot L_3 \qquad \rho_{C2}(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi_2(\phi))\\ \sin(\phi_2(\phi))\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{L_2}{2}$$

$$R_D(\phi) := \begin{pmatrix}a\\ y_D(\phi)\\ 0\end{pmatrix} \qquad \rho_{C3}(\phi) := \begin{pmatrix}\cos(\phi_3(\phi))\\ \sin(\phi_3(\phi))\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{L_3}{2} \qquad R_{C3}(\phi) := R_K(\phi) + \rho_{C3}(\phi)$$

5. Блок вычисления приведенного момента инерции механизма
Определение матрицы коэффициентов, вектора правых частей системы нелинейных уравнений относительно угловых скоростей звеньев, а также вектора неизвестных приведенных угловых скоростей.

$$A(\phi) := \begin{pmatrix}-AB\cdot\sin(\phi_1(\phi)) & O1B\cdot\sin(\phi_2(\phi)) & 0\\ AB\cdot\cos(\phi_1(\phi)) & -O1B\cdot\cos(\phi_2(\phi)) & 0\\ 0 & -O1K\cdot\sin(\phi_2(\phi)) & -KD\cdot\sin(\phi_3(\phi))\end{pmatrix}$$

$$B(\phi) := \begin{pmatrix}OA\cdot\sin(\phi)\\ -OA\cdot\cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix} \qquad \phi'(\phi) := A(\phi)^{-1}\cdot B(\phi)$$

Определение законов изменения скоростей звеньев отнесенных к угловой скорости кривошипа в векторной форме.

$$\Omega(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Omega_1(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi'(\phi)_1 \end{pmatrix} \quad \Omega_2(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi'(\phi)_2 \end{pmatrix} \quad \Omega_3(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi'(\phi)_3 \end{pmatrix}$$

Определение скоростей узловых точек механизма отнесенных к угловой скорости кривошипа

$$V_A(\phi) := \Omega(\phi) \times R_A(\phi) \qquad V_C(\phi) := \Omega(\phi) \times R_C(\phi)$$

$$V_{C1}(\phi) := V_A(\phi) + \Omega_1(\phi) \times \rho_{C1}(\phi) \qquad V_B(\phi) := \Omega_2(\phi) \times \rho_B(\phi)$$

$$V_{C2}(\phi) := \Omega_2(\phi) \times \rho_{C2}(\phi) \qquad V_K(\phi) := \Omega_2(\phi) \times \rho_K(\phi)$$

$$V_{C3}(\phi) := V_K(\phi) + \Omega_3(\phi) \times \rho_{C3}(\phi)$$

$$\nu(\phi) := O1K \cdot \cos\left(\phi_2(\phi)\right) \cdot \phi'(\phi)_2 + KD \cdot \cos\left(\phi_3(\phi)\right) \cdot \phi'(\phi)_3$$

$$V_D(\phi) := \begin{pmatrix} 0 & \nu(\phi) & 0 \end{pmatrix}^T$$

Вычисление моментов инерции кривошипов относительно оси вращения, шатунов – относительно осей, проходящих через центр масс.

$$Jz_O := \frac{1}{3} \cdot m_0 \cdot L_0^2 \qquad Jz_{C1} := \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot L_1^2 \qquad Jz_{O1} := \frac{1}{3} \cdot m_2 \cdot L_2^2 \qquad Jz_{C3} := \frac{1}{12} \cdot m_3 \cdot L_3^2$$

Вычисление приведенного момента инерции механизма

$$\begin{aligned} Jnp(\phi) := {} & Jz_O + m_1 \cdot V_{C1}(\phi) \cdot V_{C1}(\phi) + Jz_{C1} \cdot \Omega_1(\phi) \cdot \Omega_1(\phi) \ldots \\ & + Jz_{O1} \cdot \Omega_2(\phi) \cdot \Omega_2(\phi) + m_4 \cdot V_D(\phi) \cdot V_D(\phi) \ldots \\ & + m_3 \cdot V_{C3}(\phi) \cdot V_{C3}(\phi) + Jz_{C3} \cdot \Omega_3(\phi) \cdot \Omega_3(\phi) \end{aligned}$$

6. Блок вычисления производной от приведенного момента инерции по углу поворота ведущего звена

Вычисление производных $\Omega_k'\left(k = \overline{1,3}\right)$

$$C'(\phi) := \begin{bmatrix} OA \cdot \cos(\phi) + AB \cdot \cos\left(\phi_1(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_1\right)^2 - O1B \cdot \cos\left(\phi_2(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_2\right)^2 \\ OA \cdot \sin(\phi) + AB \cdot \sin\left(\phi_1(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_1\right)^2 - O1B \cdot \sin\left(\phi_2(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_2\right)^2 \\ O1K \cdot \cos\left(\phi_2(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_2\right)^2 + KD \cdot \cos\left(\phi_3(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_3\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\phi''(\phi) := A(\phi)^{-1} \cdot C'(\phi)$$

Формирование производных $\Omega_k'\left(k = \overline{1,3}\right)$ в виде векторов

$$\Omega'(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega'_1(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi''(\phi)_1 \end{pmatrix} \quad \Omega'_2(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi''(\phi)_2 \end{pmatrix} \quad \Omega'_3(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi''(\phi)_3 \end{pmatrix}$$

Вычисление производных $V_{C_k}'\left(k = \overline{1,4}\right)$

$$V'_A(\phi) := \Omega'(\phi) \times R_A(\phi) + \Omega(\phi) \times \left(\Omega(\phi) \times R_A(\phi)\right)$$

$$V'_{C1}(\phi) := V'_A(\phi) + \Omega'_1(\phi) \times \rho_{C1}(\phi) + \Omega_1(\phi) \times \left(\Omega_1(\phi) \times \rho_{C1}(\phi)\right)$$

$$V'_K(\phi) := \Omega'_2(\phi) \times \rho_K(\phi) + \Omega_2(\phi) \times \left(\Omega_2(\phi) \times \rho_K(\phi)\right)$$

$$V'_{C3}(\phi) := V'_K(\phi) + \Omega'_3(\phi) \times \rho_{C3}(\phi) + \Omega_3(\phi) \times \left(\Omega_3(\phi) \times \rho_{C3}(\phi)\right)$$

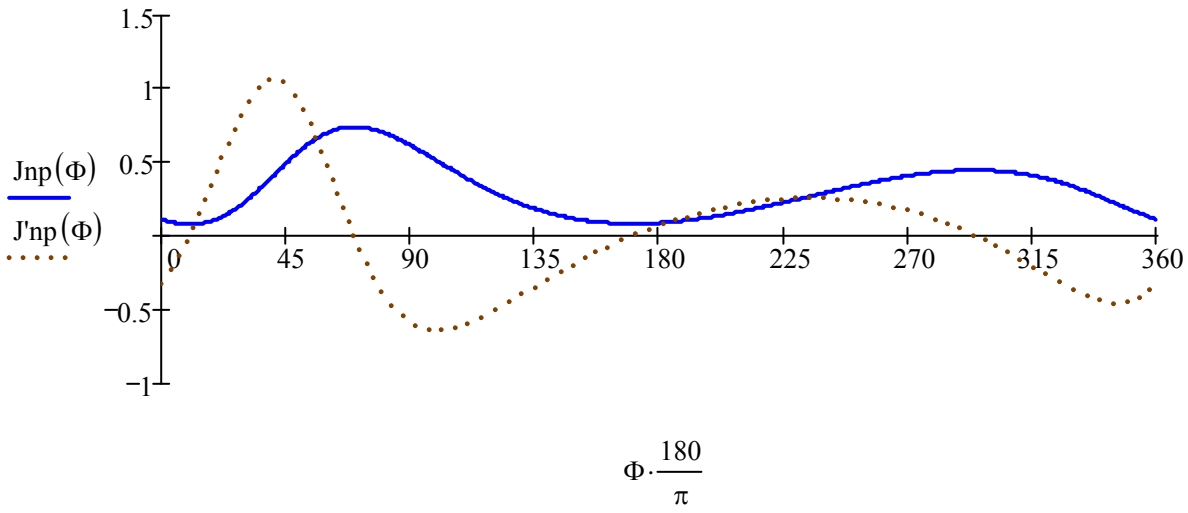
$$V'_D(\phi) := \begin{bmatrix} 0 \\ -O1K \cdot \sin\left(\phi_2(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_2\right)^2 - KD \cdot \sin\left(\phi_3(\phi)\right) \cdot \left(\phi'(\phi)_3\right)^2 \ldots \\ + O1K \cdot \cos\left(\phi_2(\phi)\right) \cdot \phi''(\phi)_2 + KD \cdot \cos\left(\phi_3(\phi)\right) \cdot \phi''(\phi)_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вычисление производной $I_{np}'(\varphi)$

$$J'np(\phi) := 2 \cdot m_1 \cdot V_{C1}(\phi) \cdot V'_{C1}(\phi) + 2 \cdot Jz_{C1} \cdot \Omega_1(\phi) \cdot \Omega'_1(\phi) \ldots$$
$$+ 2 \cdot Jz_{O1} \cdot \Omega_2(\phi) \cdot \Omega'_2(\phi) + 2 \cdot m_4 \cdot V_D(\phi) \cdot V'_D(\phi) \ldots$$
$$+ 2 \cdot m_3 \cdot V_{C3}(\phi) \cdot V'_{C3}(\phi) + 2 \cdot Jz_{C3} \cdot \Omega_3(\phi) \cdot \Omega'_3(\phi)$$

Отображение приведенного момента инерции и его производной на графике за один оборот кривошипа

$$\Phi := 0, 0.01 .. 2 \cdot \pi$$



7. Блок вычисления приведенного момента внешних сил и углового ускорения звена

Формирование векторов сил тяжести звеньев механизма

$$G := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_0 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_3 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -m_4 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление коэффициентов в выражении приведенного момента внешних сил

$$M_{0пр}(\phi) := G \cdot V_C(\phi) + G_1 \cdot V_{C1}(\phi) + G_2 \cdot V_{C2}(\phi) + G_3 \cdot V_{C3}(\phi) + G_4 \cdot V_D(\phi) + M_0$$

$$\nu_{пр}(\phi) := \nu_0 + \mu \cdot V_D(\phi) \cdot V_D(\phi)$$

Вычисление углового ускорения кривошипа OA

$$\varepsilon_{OA}(\phi, \omega) := \frac{M_{0пр}(\phi) - \nu_{пр}(\phi) \cdot \omega - \frac{1}{2} \cdot J'np(\phi) \cdot \omega^2}{Jnp(\phi)}$$

8. Процедура интегрирования дифференциальных уравнений

Конечный момент времени $T := 2.2$

Число узловых точек $N := 500 \cdot T$

Формирование системы дифференциальных уравнений

$$D(t, U) := \begin{pmatrix} U_2 \\ \varepsilon_{OA}(U_1, U_2) \end{pmatrix}$$

Применение процедуры функции *rkfixed*.

$$\Psi := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right]$$

Вывод результатов вычислений.

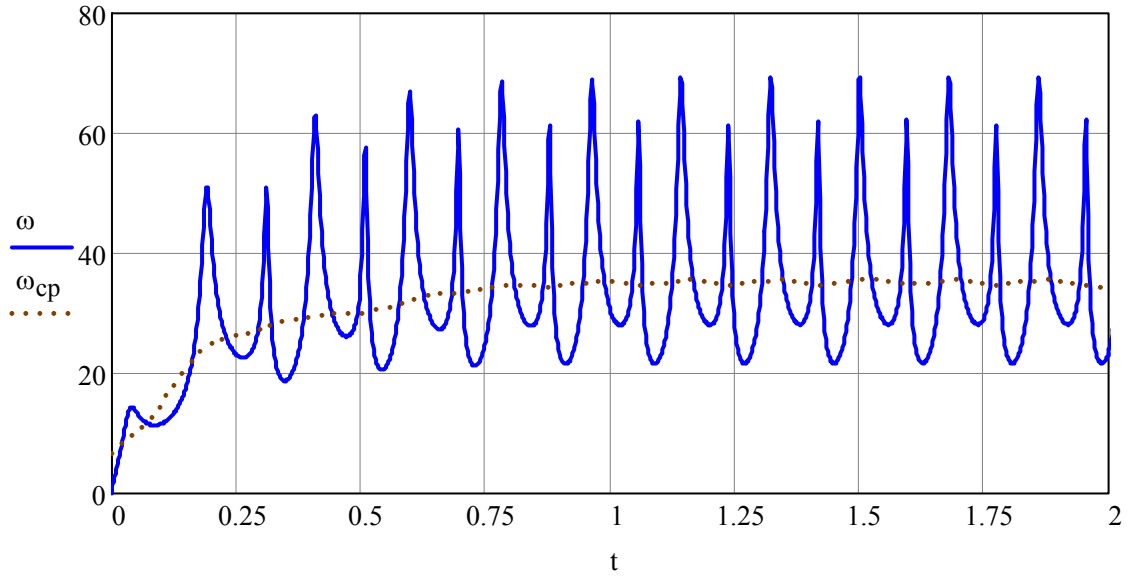
Формирование векторов искомых величин

$t := \Psi^{\langle 1 \rangle}$ $\phi := \Psi^{\langle 2 \rangle}$ $\omega := \Psi^{\langle 3 \rangle}$ $\varepsilon := \overrightarrow{\varepsilon_{OA}(\phi, \omega)}$

Вычисление средней угловой скорости $\omega_{cp} := \text{supsmooth}(t, \omega)$

$\max(\omega_{cp}) = 35.4382$ $\max(\omega) = 69.3093$

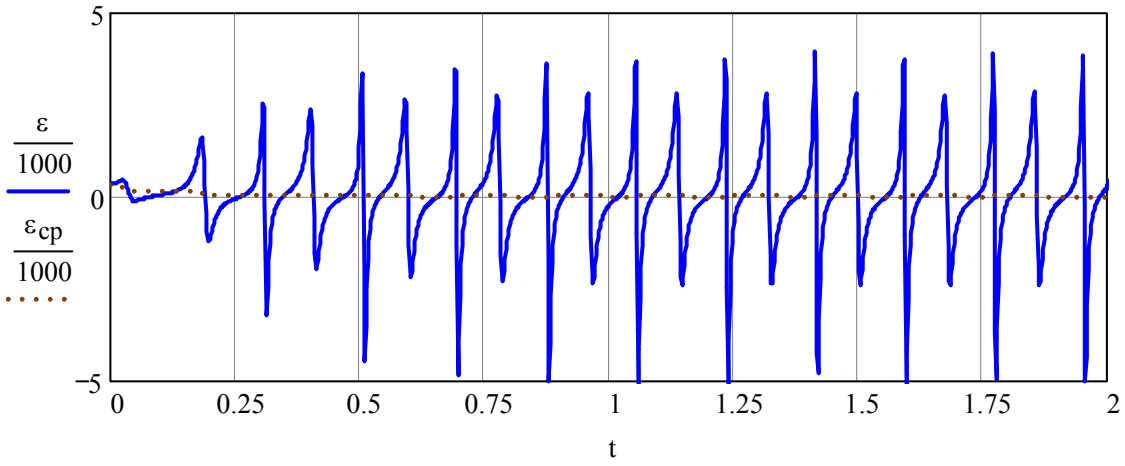
График изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ и величины ω_{cp}



Вычисление среднего углового ускорения $\varepsilon_{cp} := \text{supsmooth}(t, \varepsilon)$

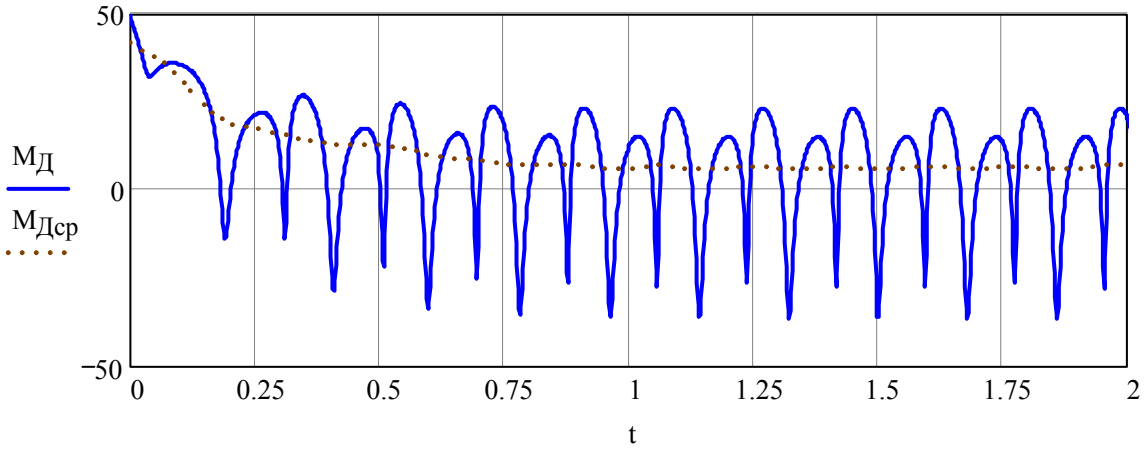
$\min(\varepsilon) = -5126.4989$ $\max(\varepsilon) = 3955.7691$

График углового ускорения $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и величины ε_{cp}



Вычисление момента $M_Д$, и его среднего значения

$$M_Д := \overrightarrow{\left(M_0 - \nu_0 \cdot \omega\right)} \qquad M_{Дср} := \text{supsmooth}\left(t, M_Д\right)$$



9. Процедура вычисления реакций внешних и внутренних связей

Вычисление угловых ускорений звеньев механизма

Формирование вектора правых частей системы уравнений (7)

$$C(i) := C'\left(\phi_i\right) \cdot \left(\omega_i\right)^2 + B\left(\phi_i\right) \cdot \varepsilon_i$$

Нахождение угловых ускорений звеньев

$$E(i) := A\left(\phi_i\right)^{-1} \cdot C(i)$$

$$\varepsilon_0(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_i \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_1(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(i)_1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(i)_2 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_3(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(i)_3 \end{pmatrix}$$

Вычисление ускорений узловых точек и центров масс звеньев

$$a_C(i) := \varepsilon_0(i) \times R_C\left(\phi_i\right) + \left[\Omega\left(\phi_i\right) \times \left(\Omega\left(\phi_i\right) \times R_C\left(\phi_i\right)\right)\right] \cdot \left(\omega_i\right)^2$$

$$a_A(i) := \varepsilon_0(i) \times R_A\left(\phi_i\right) + \left[\Omega\left(\phi_i\right) \times \left(\Omega\left(\phi_i\right) \times R_A\left(\phi_i\right)\right)\right] \cdot \left(\omega_i\right)^2$$

$$a_{C1}(i) := a_A(i) + \varepsilon_1(i) \times \rho_{C1}\left(\phi_i\right) + \left[\Omega_1\left(\phi_i\right) \times \left(\Omega_1\left(\phi_i\right) \times \rho_{C1}\left(\phi_i\right)\right)\right] \cdot \left(\omega_i\right)^2$$

$$a_{C2}(i) := \varepsilon_2(i) \times \rho_{C2}(\phi_i) + \left[\Omega_2(\phi_i) \times \left(\Omega_2(\phi_i) \times \rho_{C2}(\phi_i)\right)\right] \cdot (\omega_i)^2$$

$$a_K(i) := \varepsilon_2(i) \times \rho_K(\phi_i) + \left[\Omega_2(\phi_i) \times \left(\Omega_2(\phi_i) \times \rho_K(\phi_i)\right)\right] \cdot (\omega_i)^2$$

$$a_{C3}(i) := a_K(i) + \varepsilon_3(i) \times \rho_{C3}(\phi_i) + \left[\Omega_3(\phi_i) \times \left(\Omega_3(\phi_i) \times \rho_{C3}(\phi_i)\right)\right] \cdot (\omega_i)^2$$

$$a_D(i) := \begin{bmatrix} 0 \\ -O1K \cdot \sin\left(\phi_2(\phi_i)\right) \cdot \left(\phi'(\phi_i)_2 \cdot \omega_i\right)^2 - KD \cdot \sin\left(\phi_3(\phi_i)\right) \cdot \left(\phi'(\phi_i)_3 \cdot \omega_i\right)^2 \ldots \\ + O1K \cdot \cos\left(\phi_2(\phi_i)\right) \cdot E(i)_2 + KD \cdot \cos\left(\phi_3(\phi_i)\right) \cdot E(i)_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для системы линейных алгебраических уравнений (18) – (21)относительно реакций внешних и внутренних связей осуществляется формирование матрицы коэффициентов V при неизвестных реакциях и вектора правых частей H для каждого момента времени задаваемого вектором решений t

$i := 1 .. N$

$V_i :=$ | $f(i, j) \leftarrow 0$

$V \leftarrow \text{matrix}(12, 12, f)$

$\left(V_{1,1} \;\; V_{1,3} \;\; V_{2,2} \;\; V_{2,4} \;\; V_{3,12}\right) \leftarrow (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -1)$

$\left(V_{4,3} \;\; V_{4,5} \;\; V_{5,4} \;\; V_{5,6}\right) \leftarrow (-1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 1)$

$\left(V_{6,3} \;\; V_{6,4}\right) \leftarrow \left(-\rho_{C1}(\phi_i)_2 \;\; \rho_{C1}(\phi_i)_1\right)$

$\left(V_{6,5} \;\; V_{6,6}\right) \leftarrow \left[-\left(\rho_{AB}(\phi_i)_2 - \rho_{C1}(\phi_i)_2\right) \;\; \left(\rho_{AB}(\phi_i)_1 - \rho_{C1}(\phi_i)_1\right)\right]$

$\left(V_{7,5} \;\; V_{7,7} \;\; V_{7,9} \;\; V_{8,6} \;\; V_{8,8} \;\; V_{8,10}\right) \leftarrow (-1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 1)$

$\left(V_{9,5} \;\; V_{9,6} \;\; V_{9,9} \;\; V_{9,10}\right) \leftarrow \left(\rho_B(\phi_i)_2 \;\; -\rho_B(\phi_i)_1 \;\; -\rho_K(\phi_i)_2 \;\; \rho_K(\phi_i)_1\right)$

$\left(V_{10,9} \;\; V_{10,11} \;\; V_{11,10} \;\; V_{11,12}\right) \leftarrow (-1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 1)$

$\left(V_{12,9} \;\; V_{12,10}\right) \leftarrow \left(-\rho_{C3}(\phi_i)_2 \;\; \rho_{C3}(\phi_i)_1\right)$

$\left(V_{12,11} \;\; V_{12,12}\right) \leftarrow \left[-\left(\rho_D(\phi_i)_2 - \rho_{C3}(\phi_i)_2\right) \;\; \left(\rho_D(\phi_i)_1 - \rho_{C3}(\phi_i)_1\right)\right]$

V

$$H_i := \begin{pmatrix} m_0 \cdot a_C(i)_1 \\ m_0 \cdot g + m_0 \cdot a_C(i)_2 \\ m_4 \cdot a_D(i)_2 + \mu \cdot v(\phi_i) \cdot \omega_i + m_4 \cdot g \\ m_1 \cdot a_{C1}(i)_1 \\ m_1 \cdot g + m_1 \cdot a_{C1}(i)_2 \\ Jz_{C1} \cdot E(i)_1 \\ m_2 \cdot a_{C2}(i)_1 \\ m_2 \cdot g + m_2 \cdot a_{C2}(i)_2 \\ Jz_{O1} \cdot E(i)_2 + m_2 \cdot g \cdot \rho_{C2}(\phi_i)_1 \\ m_3 \cdot a_{C3}(i)_1 \\ m_3 \cdot g + m_3 \cdot a_{C3}(i)_2 \\ Jz_{C3} \cdot E(i)_3 \end{pmatrix} \qquad Ri^{\langle i \rangle} := (V_i)^{-1} \cdot H_i$$

$X_{O_i} := Ri_{1,i}$ $Y_{O_i} := Ri_{2,i}$ $X_{A_i} := Ri_{3,i}$ $Y_{A_i} := Ri_{4,i}$

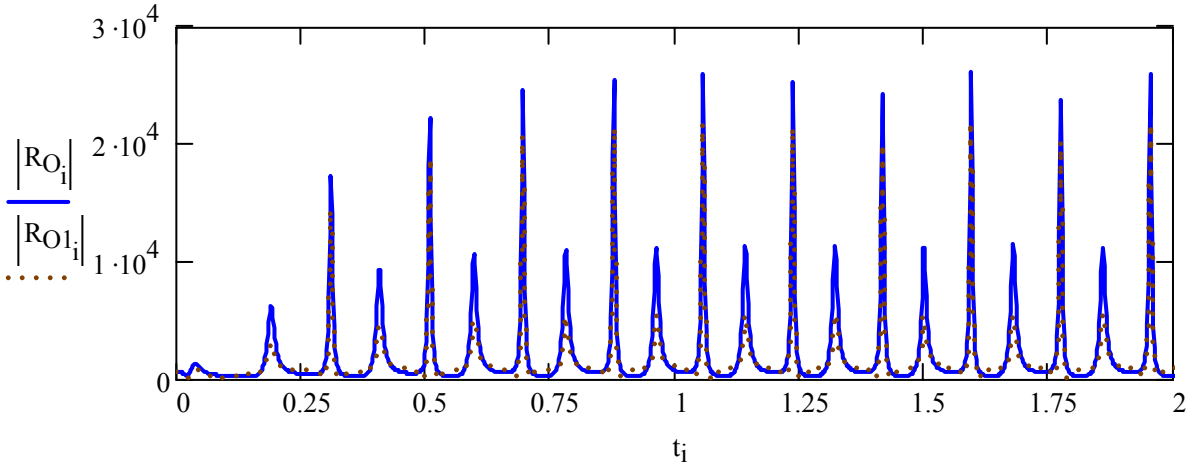
$X_{B_i} := Ri_{5,i}$ $Y_{B_i} := Ri_{6,i}$ $X_{O1_i} := Ri_{7,i}$ $Y_{O1_i} := Ri_{8,i}$

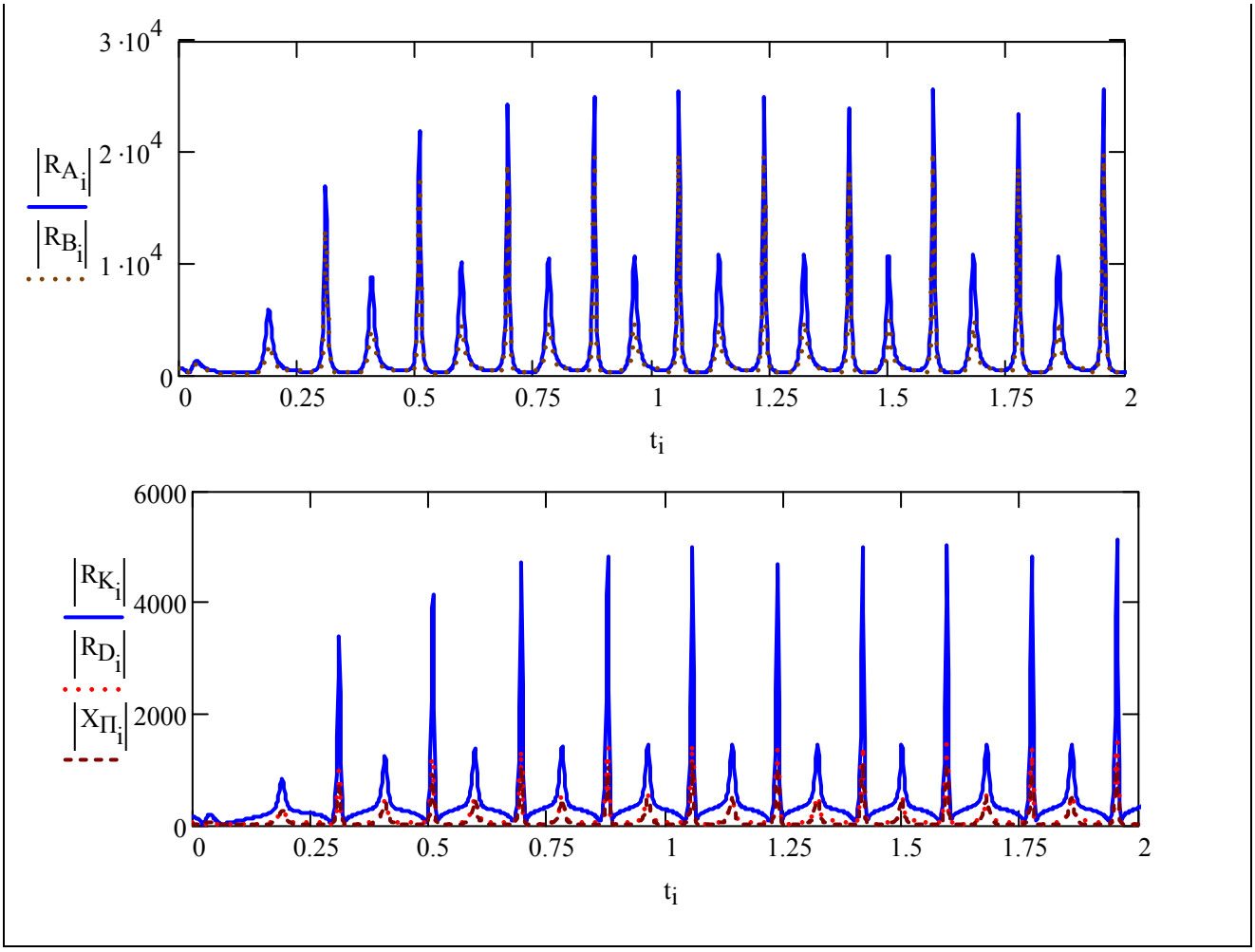
$X_{K_i} := Ri_{9,i}$ $Y_{K_i} := Ri_{10,i}$ $X_{D_i} := Ri_{11,i}$ $Y_{D_i} := Ri_{12,i}$

$$R_{O_i} := \begin{pmatrix} X_{O_i} \\ Y_{O_i} \end{pmatrix} \quad R_{A_i} := \begin{pmatrix} X_{A_i} \\ Y_{A_i} \end{pmatrix} \quad R_{B_i} := \begin{pmatrix} X_{B_i} \\ Y_{B_i} \end{pmatrix} \quad R_{O1_i} := \begin{pmatrix} X_{O1_i} \\ Y_{O1_i} \end{pmatrix}$$

$$R_{K_i} := \begin{pmatrix} X_{K_i} \\ Y_{K_i} \end{pmatrix} \quad R_{D_i} := \begin{pmatrix} X_{D_i} \\ Y_{D_i} \end{pmatrix} \quad X_{П_i} := X_{D_i}$$

Графики реакций внешних и внутренних связей





4. Анализ результатов вычислений

Анализ результатов вычислений позволяет сделать следующие выводы (величину времени начала установившегося режима движения механизма, период неравномерности вращения маховика и др. можно получить, используя опцию 2D-графиков "Trace", которая позволяет снимать значения координат функций прямо на графике [1, 5]):

1. Время неустановившегося движения механизма невелико и составляет около 1 *с*.
2. В установившемся режиме движение маховика близко к равномерному вращению, средняя угловая скорость которого порядка $\omega_{ср} \approx 35.5\ рад/с$. Максимальные и минимальные значения угловой скорости в установившемся режиме приблизительно равны $\omega_{max} \approx 69.\ рад/с$ $\omega_{min} \approx 21.\ рад/с$, а его период – $0.18\,с$. Таким образом коэффициент неравномерности дви-

жения механизма приблизительно равен

$$\delta \approx \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} = 1.35.$$

3. В установившемся режиме среднее угловое ускорение маховика приблизительно равно $\varepsilon_{ср} = 0\ рад/с^2$. Амплитуда изменения углового ускорения значительна и составляет около $5000\ рад/с^2$, а коэффициент динамичности в этом случае

$$\chi \approx \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} = 4.1.$$

4. При заданных геометрических и инерционных параметрах механизма градиенты углового ускорения ведущего звена, а также реакций внешних и внутренних связей в сочленениях звеньев механизма имеют большие значения. Это может привести к разрывам механизма в местах сочленений и нарушению его работоспособности.

На основании выводов по результатам расчета движения механизма сформулируем задачу исследования.

Выявить факторы, влияющие на неравномерность движения механизма и найти такие решения, при которых неравномерность установившегося движения исчезает или становится незначительной.

Анализ дифференциального уравнения движения механизма (17) показывает, что основными факторами, влияющими на неравномерность движения, являются:

- величина приведенного момента инерции $I_{пр}(\varphi)$ (чем больше $I_{пр}(\varphi)$, тем меньше амплитуда угловых ускорений);
- характер изменения производной $I'_{пр}(\varphi)$ (чем меньше амплитуда и чем больше период ее изменения, тем меньше градиенты углового ускорения);

Таким образом, для уменьшения неравномерности движения необходимо обеспечить:

$$I_{np}(\varphi) \to const.$$

что может быть получено за счет увеличения приведенного момента инерции механизма и уменьшения амплитуды его изменения.

Это достигается постановкой на ведущее звено массивного маховика и (или) облегчением остальных звеньев механизма.

В качестве примера произведем следующие изменения в конструкции механизма:

Заменим ведущее звено сплошным маховиком радиуса OA ***и массой*** $10m_0$

Введем новые данные для расчета

$m_0 := 100 \cdot OA$

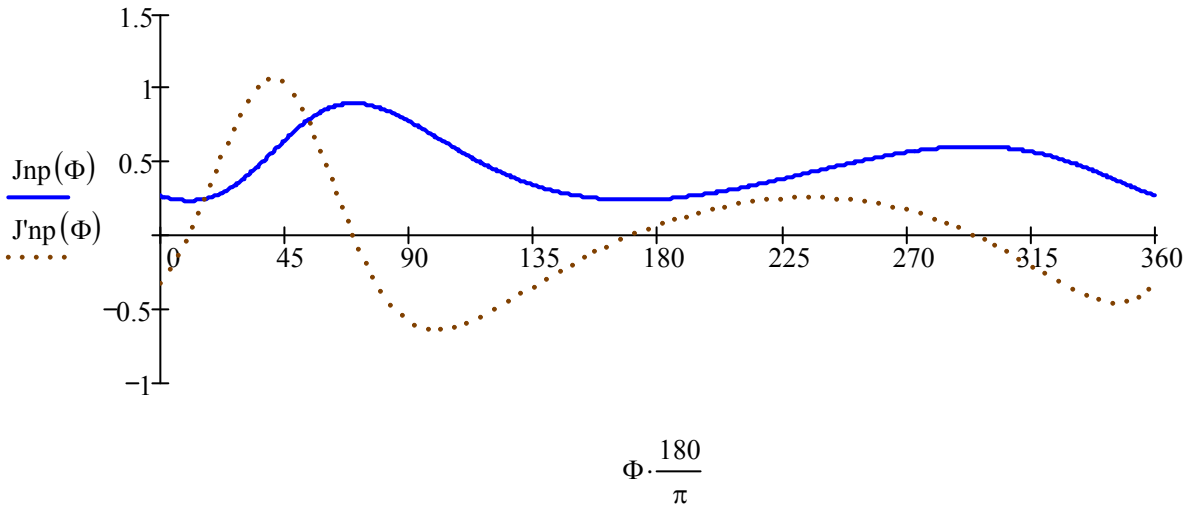
Определим положения центра масс маховика

$$R_C(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим момент инерции маховика относительно оси вращения.

$$Jz_O := \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot L_0^{\,2}$$

Отображение приведенного момента инерции и его производной на графике за один оборот кривошипа



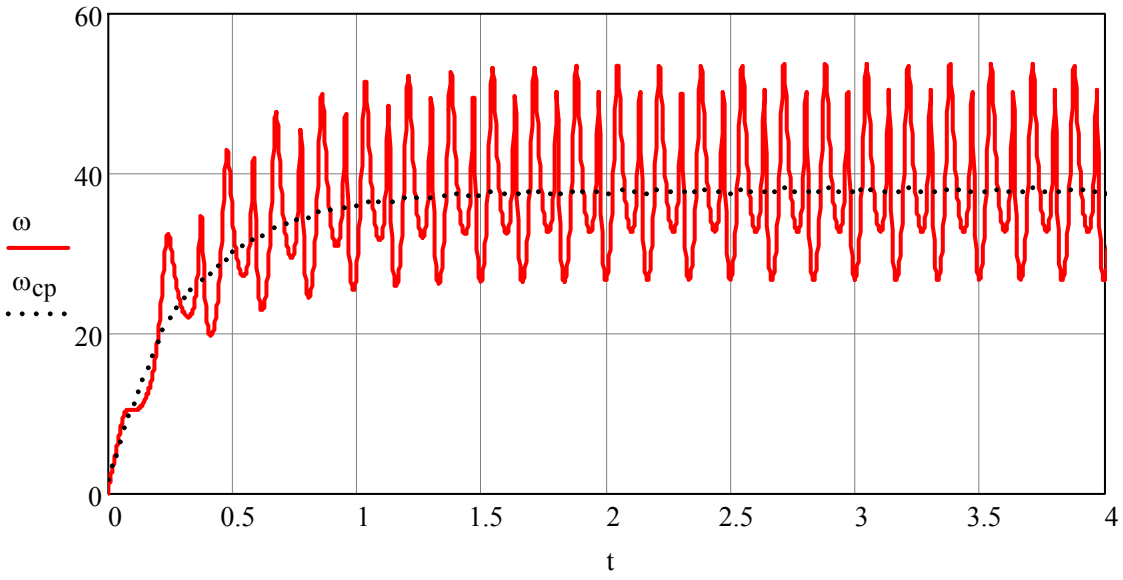
Численное решение дифференциального уравнения с измененными исходными данными

Конечный момент времени $T := 4.2$

.....

$\max(\omega_{cp}) = 38.0469$ $\max(\omega) = 53.5454$

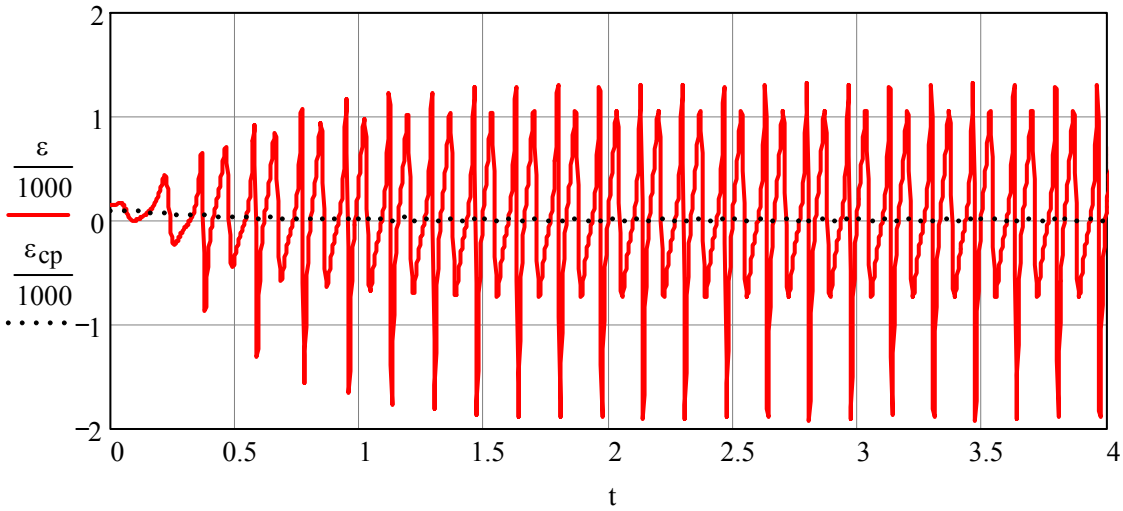
График изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ и величины ω_{cp}



.....

$\min(\varepsilon) = -1924.2479$ $\max(\varepsilon) = 1308.4323$

График углового ускорения $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и величины ε_{cp}



.....

Замена однородного стержня массой m_0 сплошным маховиком массой $10m_0$ приводит к увеличению приведенного момента инерции не только за счет изменения массы ведущего звена, но и за счет увеличения момента инерции маховика по сравнению со стержнем в 1,5 раза. Т. е. момент инерции ведущего звена увеличился в 15 раз.

Кроме этого центр масс маховика неподвижен и расположен в начале координат, в то время как центр масс кривошипа движется по окружности радиуса $\frac{1}{2}OA$. В этом случае траектория центра масс механизма приближается к началу координат.

В результате замены кривошипа сплошным маховиком с массой в 10 раз больше

- Время неустановившегося движения механизма составляет около 1.5 *с*.
- В установившемся режиме движения средняя угловая скорость маховика приблизительно равна $\omega_{ср} \approx 38\ рад/с$. Максимальные и минимальные значения угловой скорости в установившемся режиме равны $\omega_{\max} \approx 53.5\ рад/с$ $\omega_{\min} \approx 26.6\ рад/с$.
- Коэффициент неравномерности движения механизма становится равным

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} \approx 0.71.$$

- Коэффициент динамичности в этом случае

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} \approx 1.33.$$

Таким образом, увеличение массы и момента инерции ведущего звена с изменением его формы приводит к существенному уменьшению коэффициента неравномерности ($\approx$ в 2 раза) и коэффициента динамичности ($\approx$ в 3 раза). При этом не изменялось отклонение амплитуды приведенного момента инерции от своего среднего значения.

Следует отметить, что увеличение массы ведущего звена без изменения его формы приводит к значительно меньшему уменьшению коэффициентов неравномерности $(\delta \approx 0.86)$ и динамичности $(\chi \approx 1.76)$. Это можно проверить непосредственным расчетом и не вызывает сложности в вычислениях.

Уменьшим массы всех остальных звеньев, используя для этого материал с погонной плотностью 0.1ρ **.**

Введем новые данные для расчета

$m_0 := 100 \cdot OA$ $\rho := 1.$

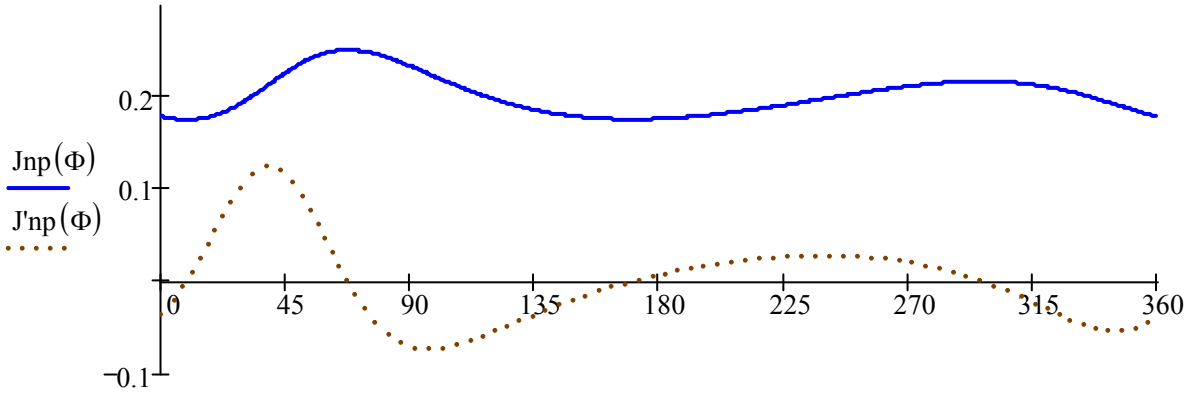
Определим положения центра масс маховика

$$R_C(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим момент инерции маховика относительно оси вращения.

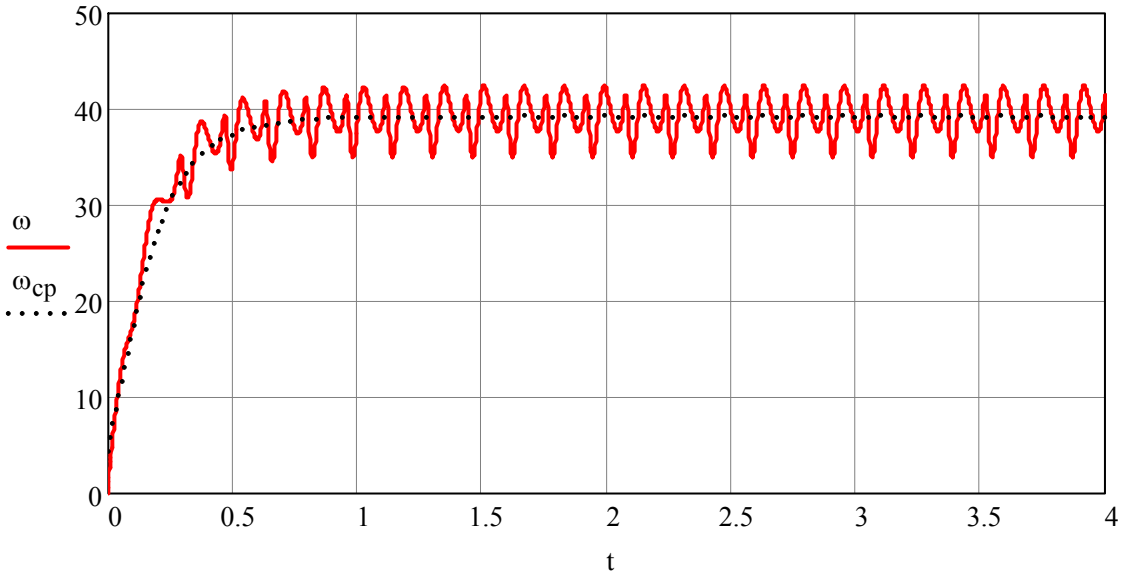
$$Jz_O := \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot L_0^{\,2}$$

Отображение приведенного момента инерции и его производной на графике за один оборот кривошипа

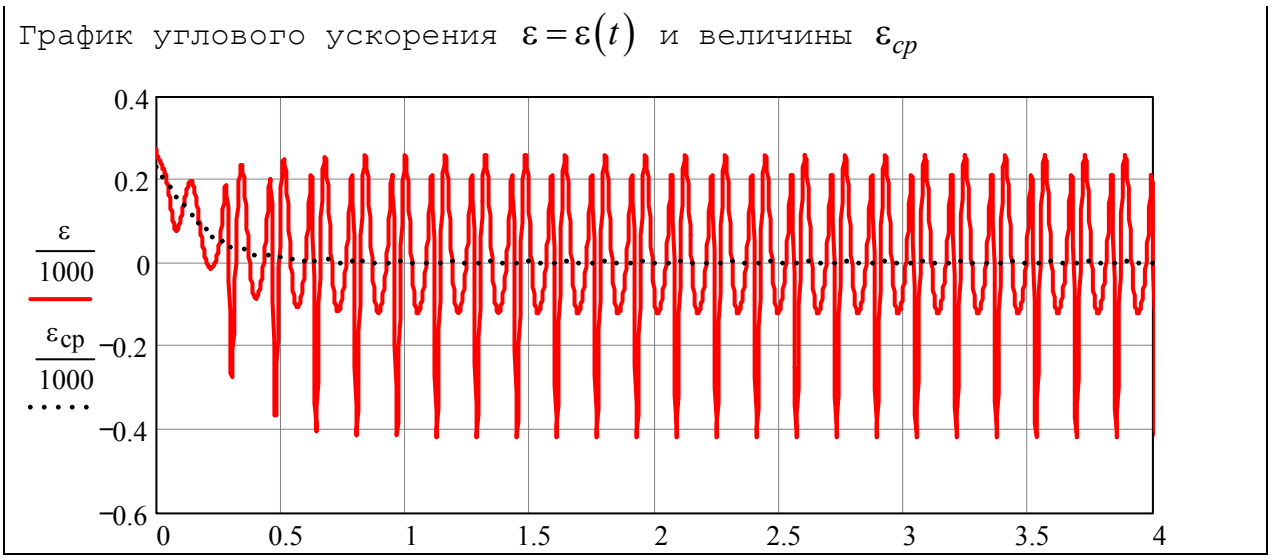


$\max(\omega_{cp}) = 39.1965$ $\max(\omega) = 42.3114$

График изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ и величины ω_{cp}



$\min(\varepsilon) = -421.6425$ $\max(\varepsilon) = 271.7034$



Уменьшение погонной плотности звеньев механизма, исключая ведущее звено и ползун, приводит к уменьшению их масс и, следовательно, к уменьшению амплитуды приведенного момента инерции механизма. При этом среднее значение амплитуды производной $I'_{пр}(\varphi)$ уменьшилось со значения 0.835 до значения 0.099, т. е. приблизительно в 8.5 раз.

В результате уменьшения масс звеньев механизма

- Время неустановившегося движения механизма составляет около 1 *с.*;
- В установившемся режиме движения средняя угловая скорость маховика приблизительно равна $\omega_{ср} \approx 39\ рад/с$. Максимальные и минимальные значения угловой скорости в установившемся режиме равны $\omega_{\max} \approx 42.3\ рад/с$ $\omega_{\min} \approx 35\ рад/с$;
- Коэффициент неравномерности движения механизма становится равным

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} \approx 0.19;$$

- Коэффициент динамичности в этом случае

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} \approx 0.27.$$

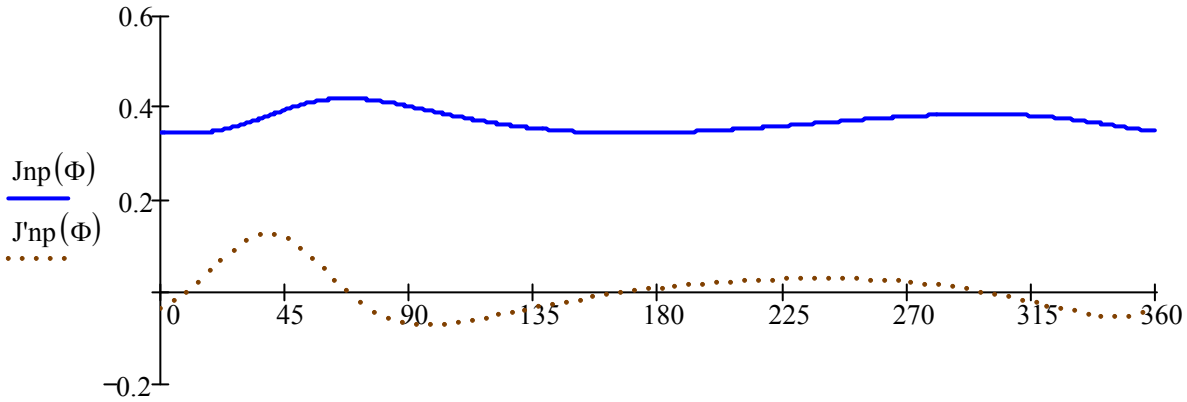
Таким образом, уменьшение массы звеньев приводит к существенному, по сравнению с предыдущим случаем, уменьшению коэффициента неравномерности (≈ в 4 раза) и коэффициента динамичности (≈ в 5 раза).

Изменим распределение массы маховика (по ободу)

Введем новые данные для расчета

$m_0 := 100 \cdot OA$ $\rho := 1.$ $Jz_O := m_0 \cdot L_0^2$

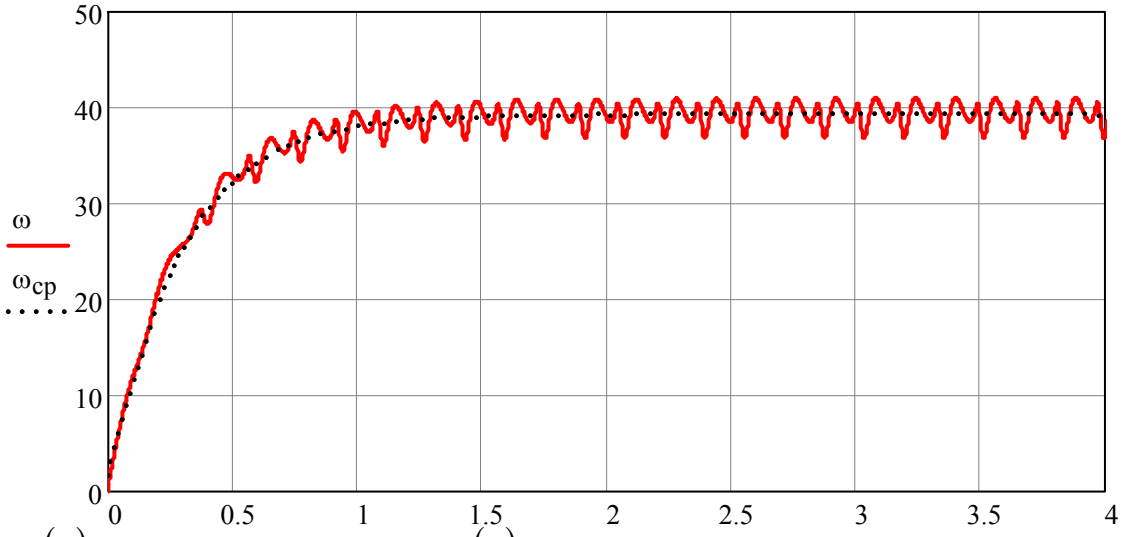
Приведенный момент инерции, его производная за 1 оборот



Численное решение дифференциального уравнения с измененными исходными данными

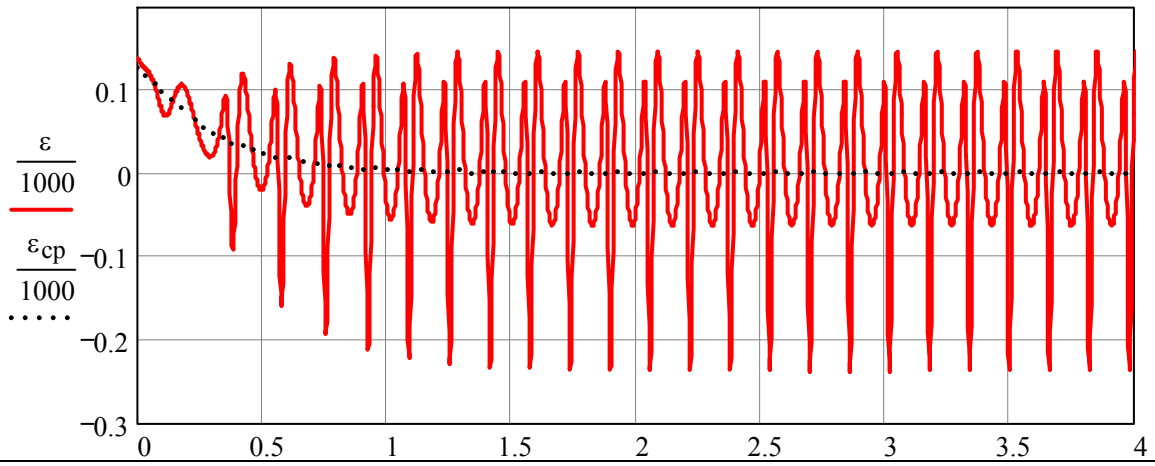
$\max(\omega_{cp}) = 39.2275$ $\max(\omega) = 40.851$

График изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ и величины ω_{cp}



$\min(\varepsilon) = -237.7635$ $\max(\varepsilon) = 146.8796$

График углового ускорения $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и величины ε_{cp}



Изменение распределения массы маховика со сплошного на тонкостенный цилиндр приводит не только к увеличению момента инерции маховика в два раза, но и к увеличению среднего значения приведенного момента инерции механизма

В результате увеличения момента инерции маховика в два раза

- Время неустановившегося движения механизма составляет около 1.5 *с*.
- В установившемся режиме движения средняя угловая скорость маховика приблизительно равна $\omega_{ср} \approx 39.2\ рад/с$. Максимальные и минимальные значения угловой скорости в установившемся режиме равны $\omega_{\max} \approx 40.8\ рад/с$ $\omega_{\min} \approx 36.7\ рад/с$.
- Коэффициент неравномерности движения механизма становится равным

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} \approx 0.105.$$

- Коэффициент динамичности в этом случае

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} \approx 0.15.$$

Таким образом, увеличение момента инерции ведущего звена в 2 раза без изменения его массы, приводит к уменьшению коэффициента неравномерности ($\approx$ в 2 раза) и коэффициента динамичности ($\approx$ в 2 раза). При этом не изменялось отклонение амплитуды приведенного момента инерции от своего среднего значения.

Задача дальнейшего уменьшения неравномерности и значений реакций связей решается аналогично и не вызывает трудностей.

5. Результаты анализа

С целью подтверждения проведенных исследований произведем расчет конструктивно измененного механизма.

Динамический расчет плоского шарнирного механизма

1. Ввод исходных данных

..... $\rho := 1.$ .....

2. Вычисление постоянных величин и вспомогательных функций

$m_0 := 200 \cdot OA$ $m_1 := \rho \cdot AB$ $m_2 := \rho \cdot O1B$ $m_3 := \rho \cdot KD$ $m_4 := 2$

.....

4. Определение положения узловых точек механизма радиус-векторами

..... $R_C(\phi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .....

5. Блок вычисления приведенного момента инерции механизма

.....

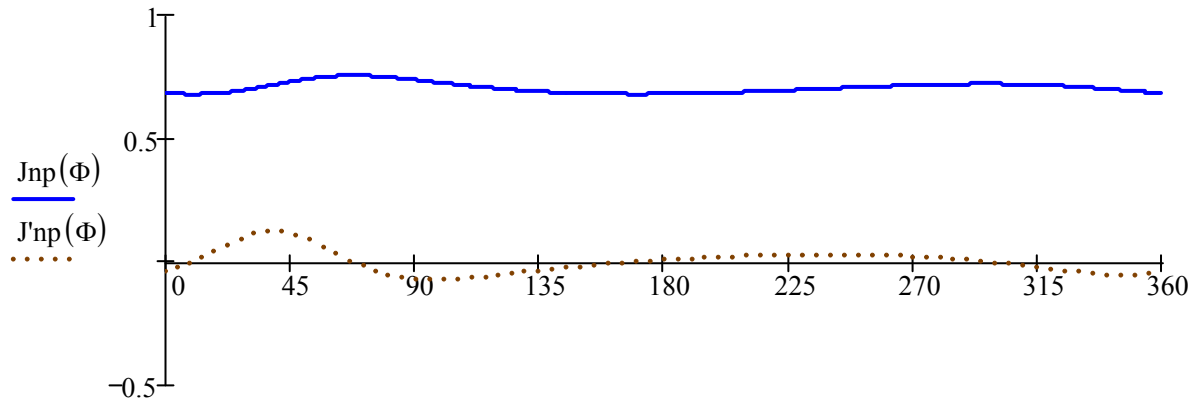
Вычисление моментов инерции .....

$Jz_O := m_0 \cdot L_0^2$ .....

6. Блок вычисления производной от приведенного момента инерции по углу поворота ведущего звена

.....

Отображение приведенного момента инерции и его производной на графике за один оборот кривошипа



.....

8. Процедура интегрирования дифференциальных уравнений

Конечный момент времени T := 8.2

.....

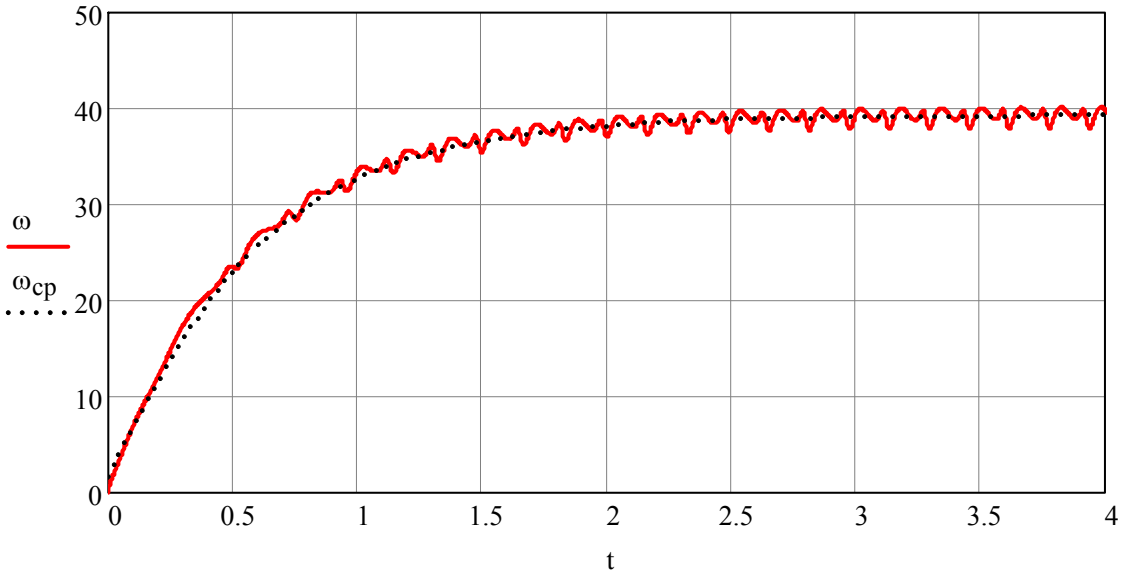
Вывод результатов вычислений.

.....

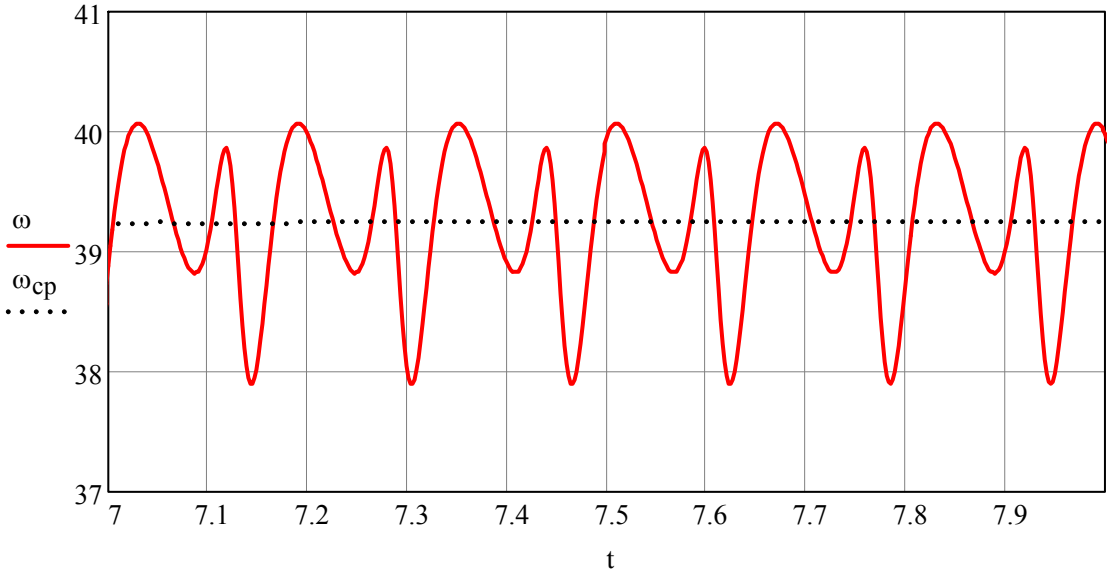
$\max(\omega_{cp}) = 39.2503$ $\max(\omega) = 40.0615$

График изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ и величины ω_{cp}

Для интервала времени $0 \le t \le 4\,c$



Для интервала времени $7 \le t \le 8\,c$

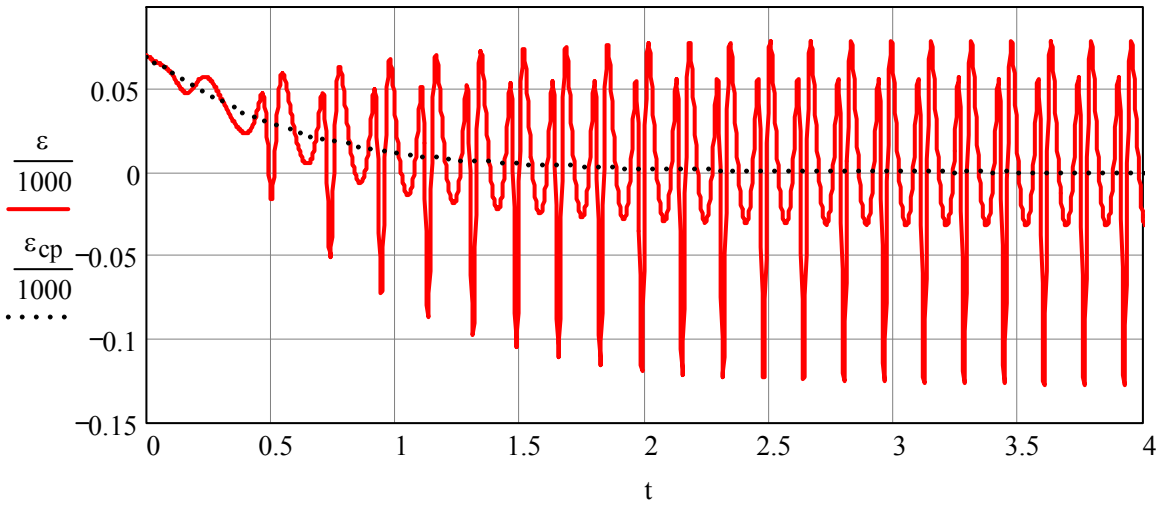


.....

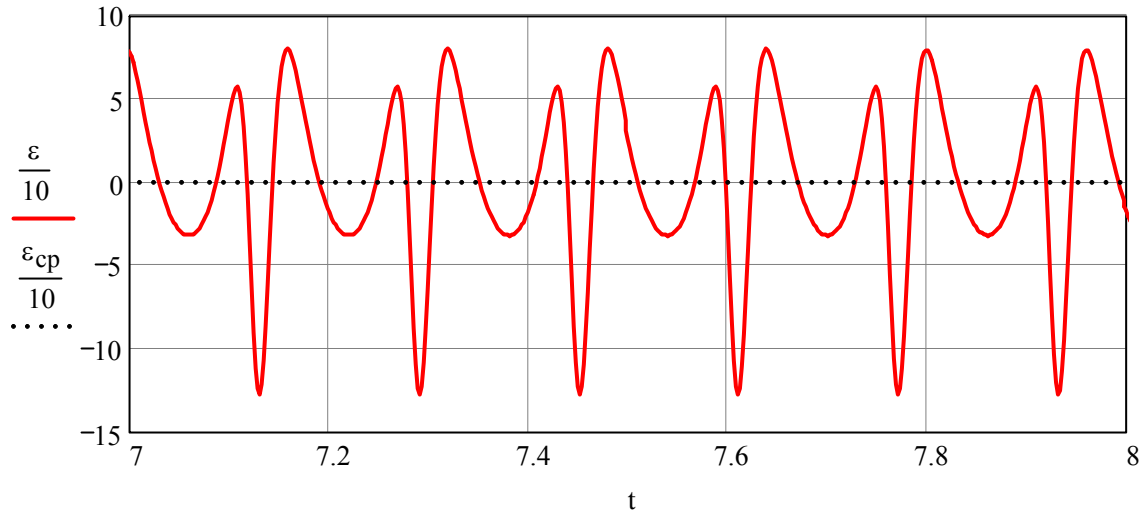
$\min(\varepsilon) = -128.0535$ $\max(\varepsilon) = 79.5953$

График углового ускорения $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и величины ε_{cp}

Для интервала времени $0 \le t \le 4\,c$

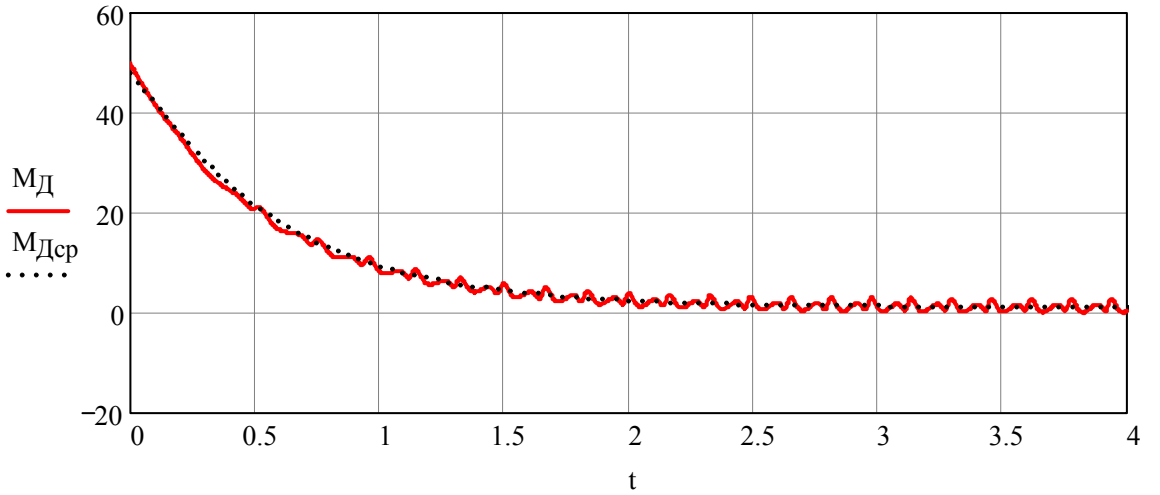


Для интервала времени $7 \le t \le 8\,c$

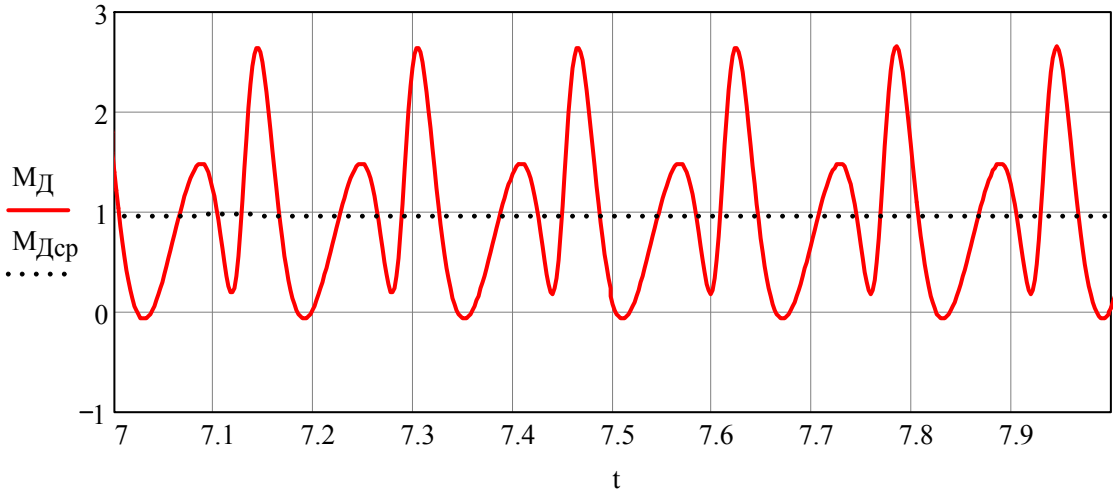


Вычисление момента $M_Д$, и его среднего значения

$M_Д := \overrightarrow{(M_0 - \nu_0 \cdot \omega)}$ $M_{Дср} := \text{supsmooth}(t, M_Д)$



Для интервала времени $7 \le t \le 8\,c$



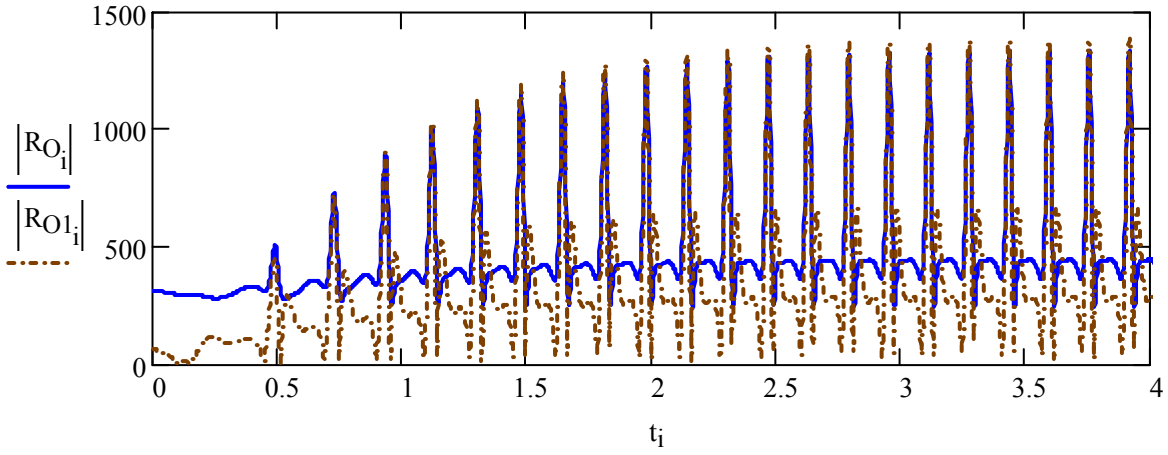
9. Процедура вычисления реакций внешних и внутренних связей

.....

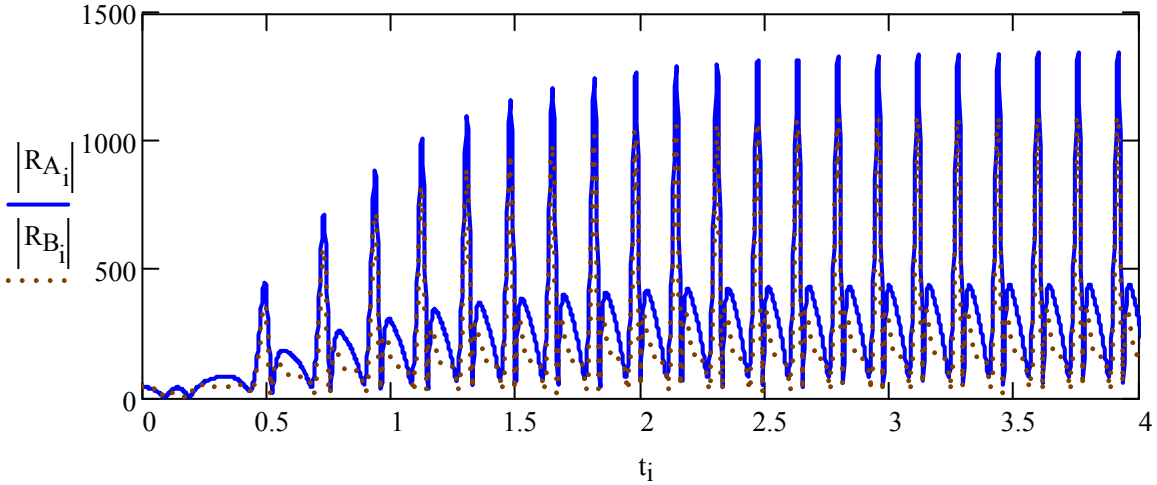
Графики реакций внешних и внутренних связей

Для интервала времени $0 \le t \le 4\,c$

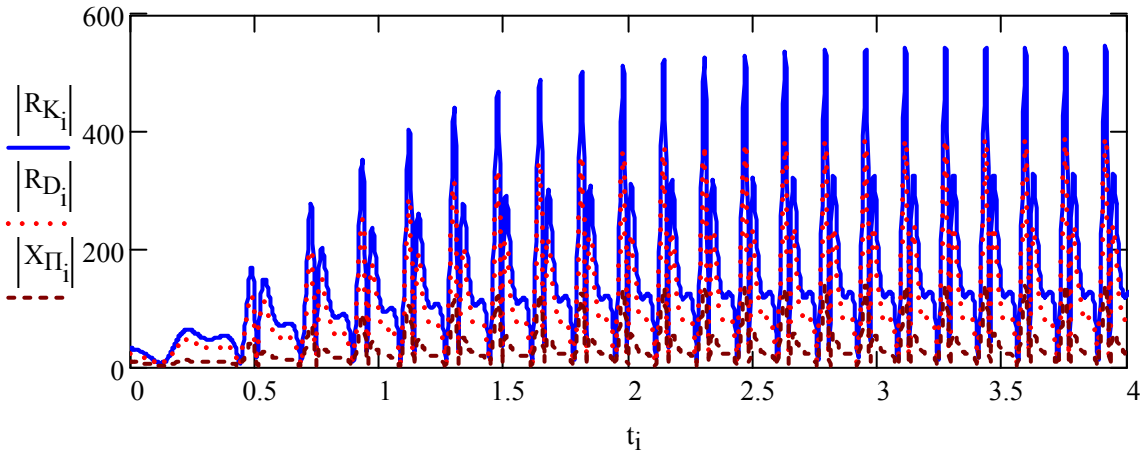
Модули реакций $\left|\overline{R}_O\right|, \left|\overline{R}_{O_1}\right|$.



Модули реакций $\left|\overline{R}_A\right|, \left|\overline{R}_B\right|$.

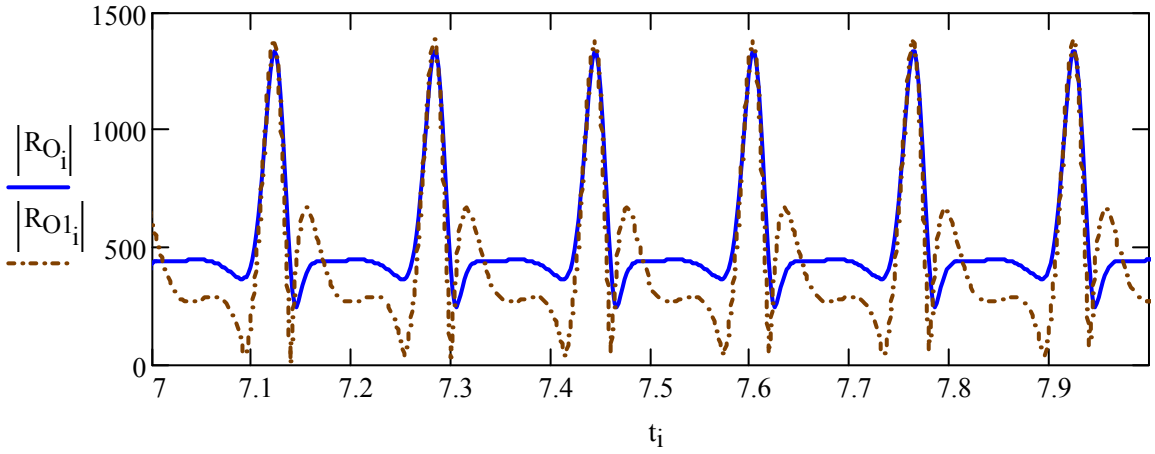


Модули реакций $|\bar{R}_K|, |\bar{R}_D|, |\bar{X}_\Pi|$.

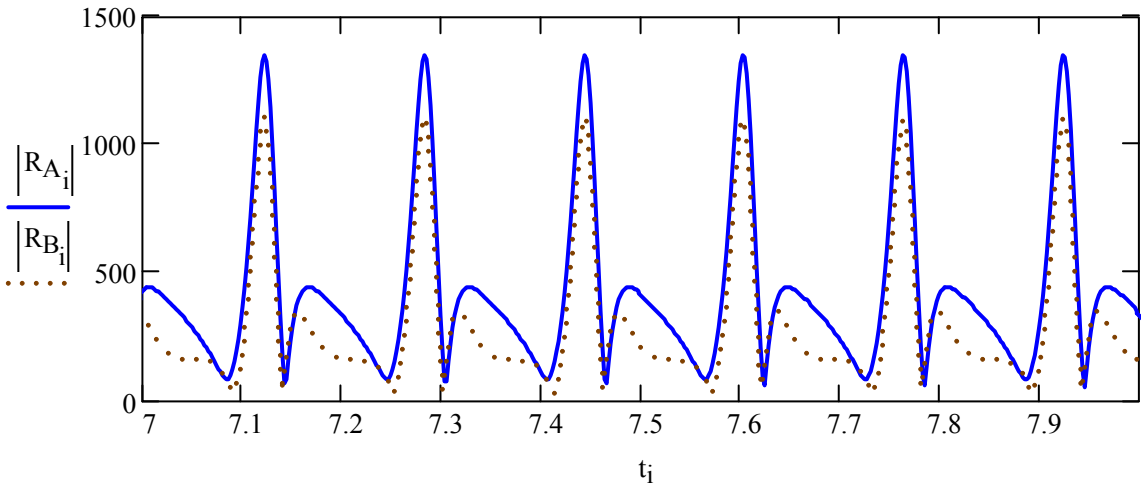


Для интервала времени $7 \le t \le 8\,c$

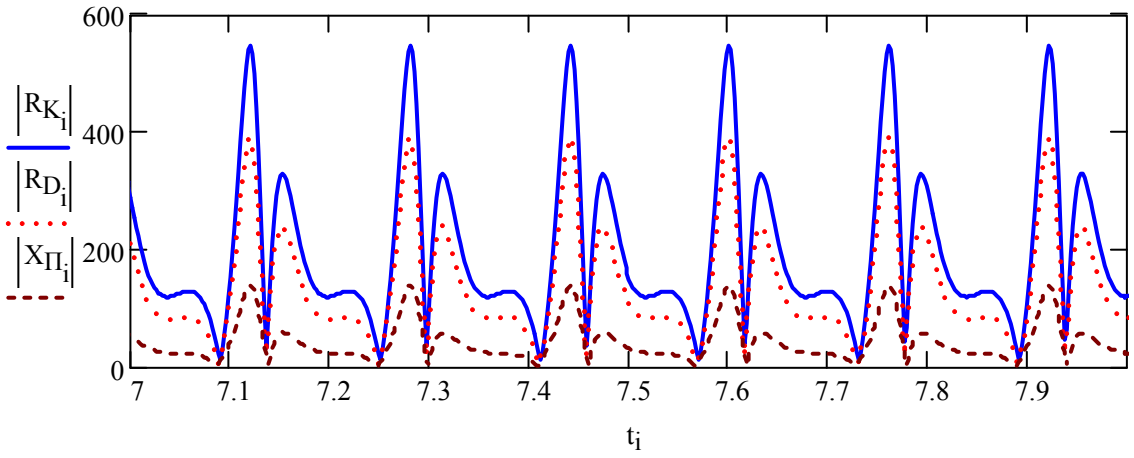
Модули реакций $|\bar{R}_O|, |\bar{R}_{O_1}|$.



Модули реакций $|\bar{R}_A|, |\bar{R}_B|$.



Модули реакций $\left|\bar{R}_K\right|, \left|\bar{R}_D\right|, \left|\bar{X}_\Pi\right|$.



В результате уменьшения масс звеньев механизма, с одновременным увеличением массы ведущего звена и замены однородного стержня маховиком с массой распределенной по его ободу

- Время неустановившегося движения механизма составляет около 3 *с*.;
- В установившемся режиме движения средняя угловая скорость маховика составляет $\omega_{ср} \approx 39.25\ рад/с$. Максимальные и минимальные значения угловой скорости в установившемся режиме равны $\omega_{\max} \approx 40.06\ рад/с$ $\omega_{\min} \approx 37.9\ рад/с$;
- Коэффициент неравномерности движения механизма становится равным

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} \approx 0.055;$$

- Коэффициент динамичности в этом случае

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} \approx 0.083.$$

Такое уменьшение, по сравнению с первоначальным случаем, коэффициентов неравномерности (≈ в 24.5 раза) и динамичности (≈ в 50 раз) приводит к уменьшению максимальных значений модулей реакций внешних и внутренних связей приблизительно от 20 до 10 раз.

Выводы

В результате решения полученного дифференциального уравнения движения механизма были определены: закон движения ведущего звена 1, его угловые скорость и ускорение как функции времени t. На основании найденного закона движения по разработанному алгоритму были вычислены значения реакций внешних и внутренних связей.

Проведенный анализ результатов расчета показал, что

- В установившемся режиме движение маховика близко к равномерному вращению, средняя угловая скорость которого порядка $\omega_{ср} \approx 35.5\ рад/с$. Максимальные и минимальные значения угловой скорости в установившемся режиме приблизительно равны $\omega_{\max} \approx 69.\ рад/с$ $\omega_{\min} \approx 21.\ рад/с$, а его период – $0.18\,с$. Таким образом коэффициент неравномерности движения механизма приблизительно равен

$$\delta \approx \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} = 1.35.$$

- В установившемся режиме среднее угловое ускорение маховика приблизительно равно $\varepsilon_{ср} = 0\ рад/с^2$. Амплитуда изменения углового ускорения значительна и составляет около $5000\ рад/с^2$, а коэффициент динамичности в этом случае

$$\chi \approx \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} = 4.1.$$

- При заданных геометрических и инерционных параметрах механизма градиенты углового ускорения ведущего звена, а также реакций внешних и внутренних связей в сочленениях звеньев механизма имеют большие значения. Это может привести к разрывам механизма в местах сочленений и нарушению его работоспособности.

С целью устранения этой ситуации был сформулирован критерий, удовлетворение которого позволит уменьшить значение этих коэффициентов.

Проведенные исследования показали, что уменьшения масс звеньев механизма, с одновременным увеличением массы ведущего звена и замены кривошипа маховиком с массой распределенной по его ободу значительно снизили величины данных коэффициентов.

Таким образом, увеличение массы ведущего звена в 20 раз с одновременным уменьшением масс звеньев в 10 раз позволило добиться следующего:

- В установившемся режиме движения средняя угловая скорость маховика составляет $\omega_{ср} \approx 39.25\ рад/с$. Максимальные и минимальные значения угловой скорости в установившемся режиме равны $\omega_{\max} \approx 40.06\ рад/с$ $\omega_{\min} \approx 37.9\ рад/с$;
- Коэффициент неравномерности движения механизма становится равным

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}} \approx 0.055;$$

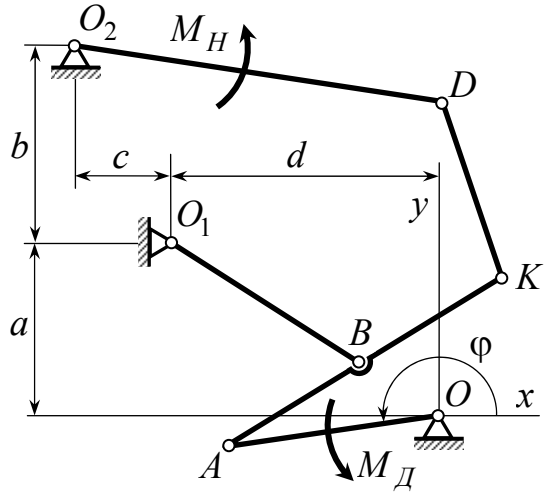
- Коэффициент динамичности в этом случае

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega_{ср}^2} \approx 0.083.$$

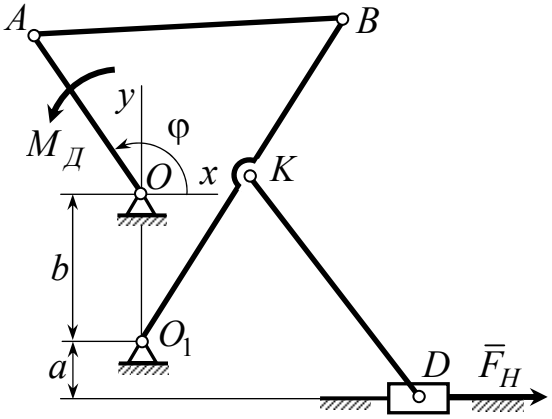
Такое уменьшение, по сравнению с первоначальным случаем, коэффициентов неравномерности ($\approx$ в 24.5 раза) и динамичности ($\approx$ в 50 раз) приводит к уменьшению максимальных значений модулей реакций внешних и внутренних связей приблизительно от 20 до 10 раз.

АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

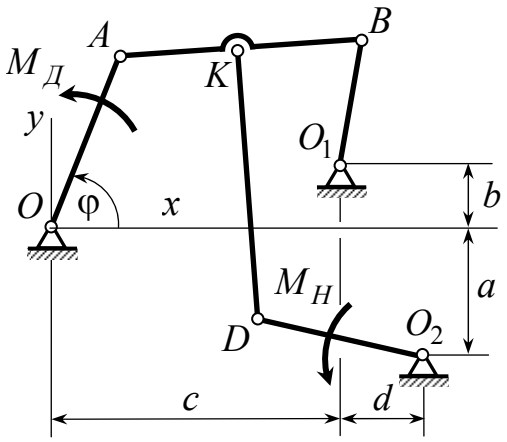
1



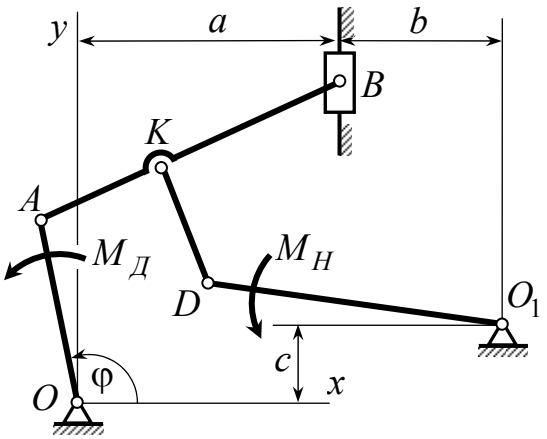
2



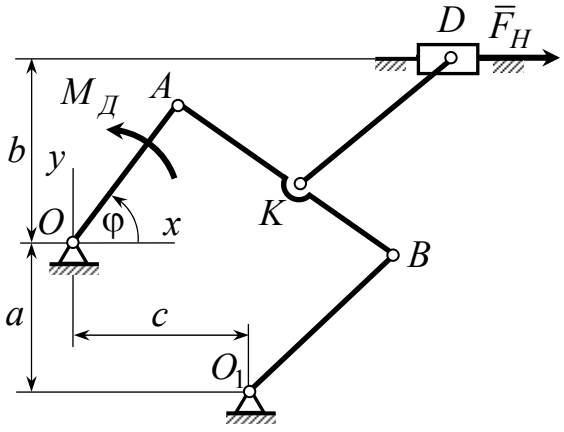
3



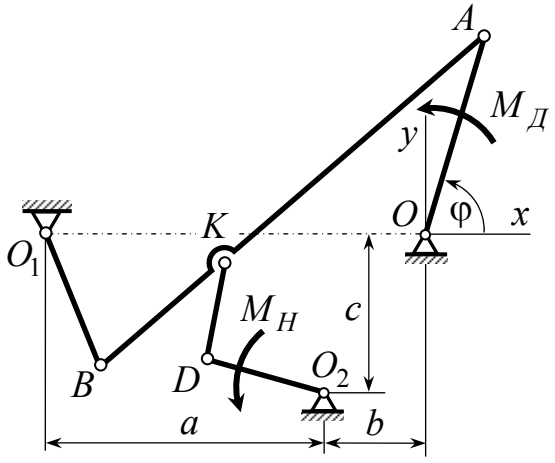
4



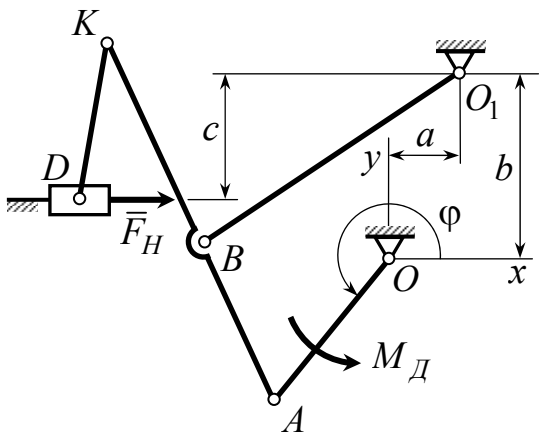
5



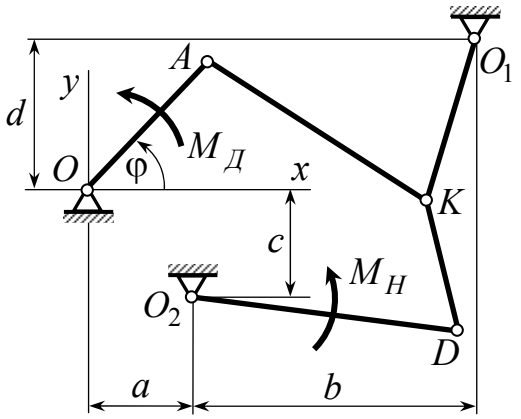
6



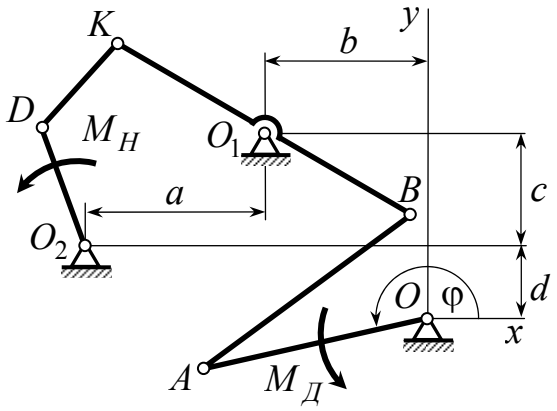
7


K
D
$\bar{F}_H$
B
A
c
O_1
a
y
b
φ
O
x
$M_Д$

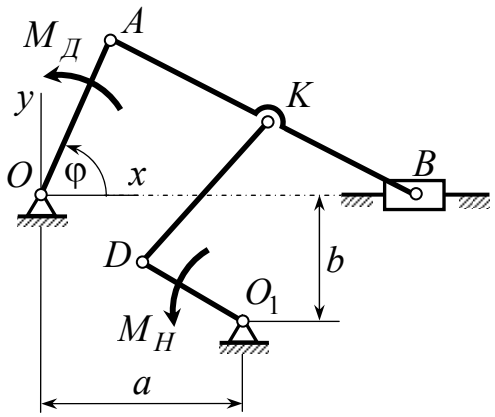
8


A
O_1
d
y
O
φ
$M_Д$
x
K
c
M_H
O_2
D
a
b

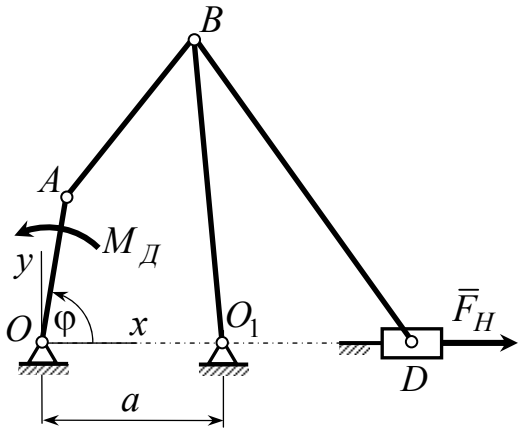
9


K
y
b
D
M_H
O_1
a
B
c
O_2
O
φ
d
x
A
$M_Д$

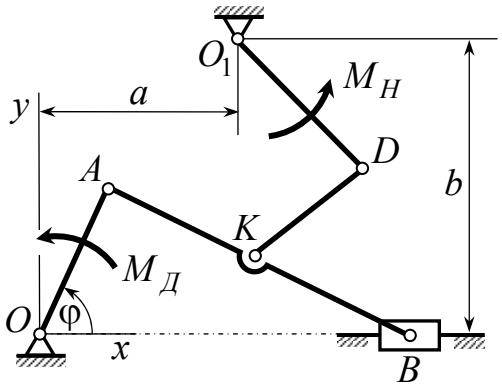
10


$M_Д$
A
y
K
O
φ
x
B
D
b
O_1
M_H
a

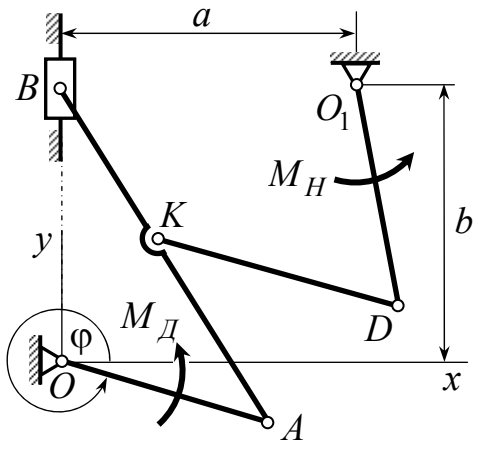
11


B
A
$M_Д$
y
O
φ
x
O_1
$\bar{F}_H$
D
a

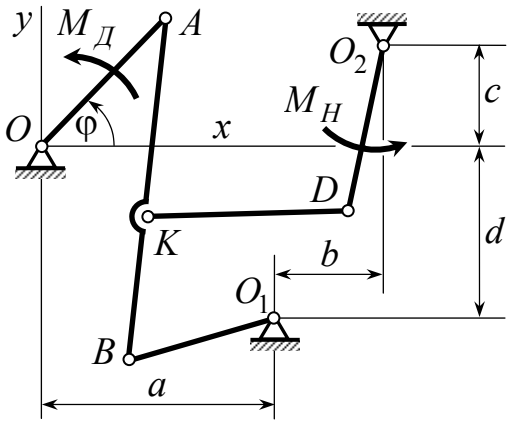
12


O_1
M_H
y
a
D
A
b
K
$M_Д$
O
φ
x
B

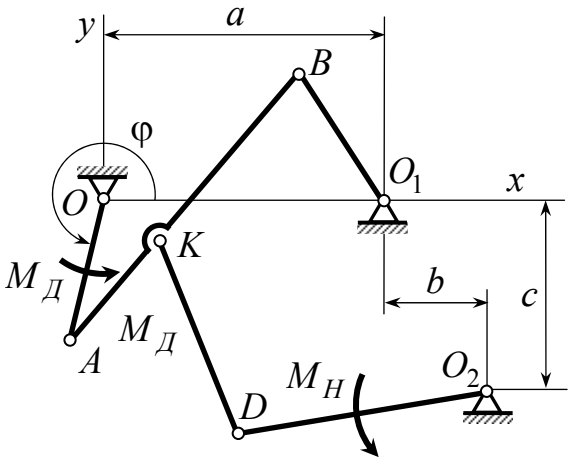
13



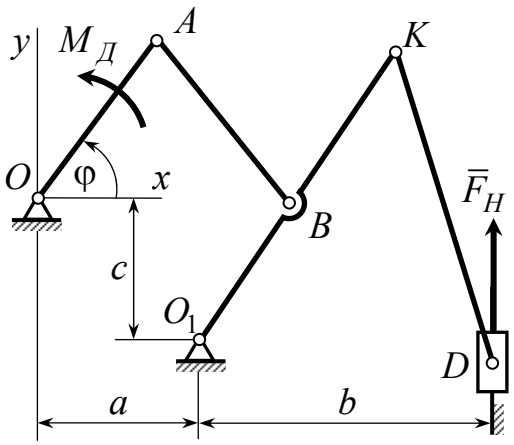
14



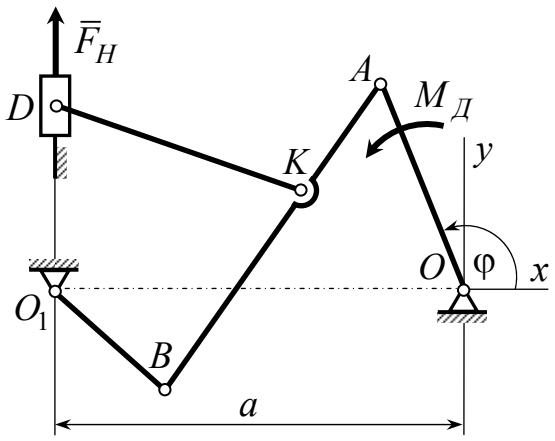
15



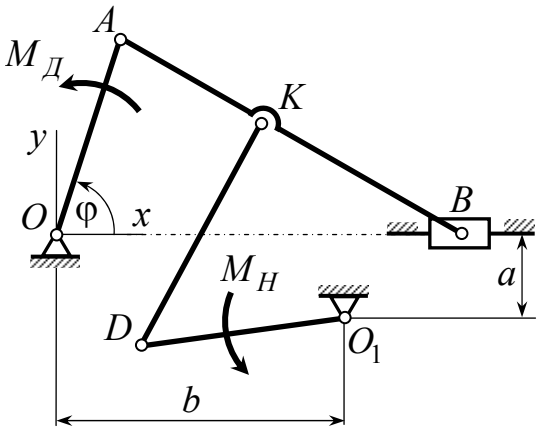
16



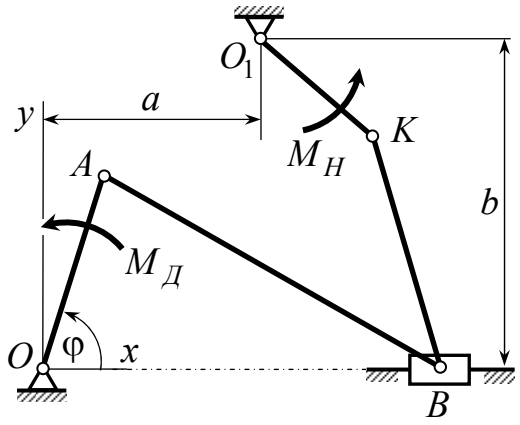
17



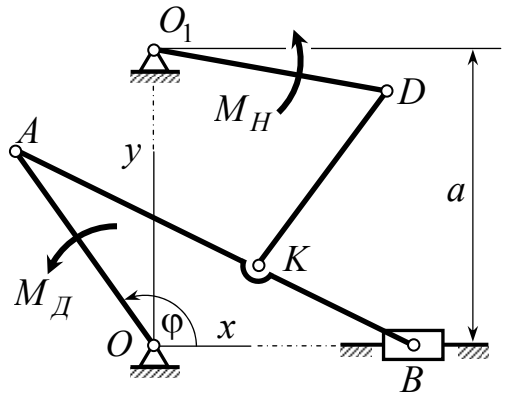
18



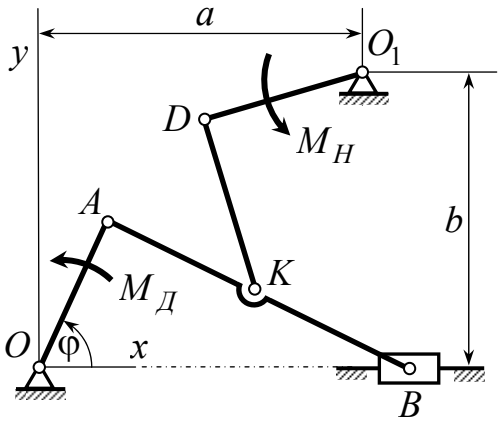
19



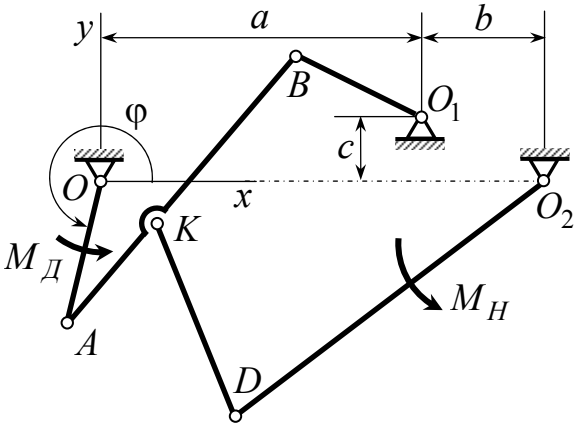
20



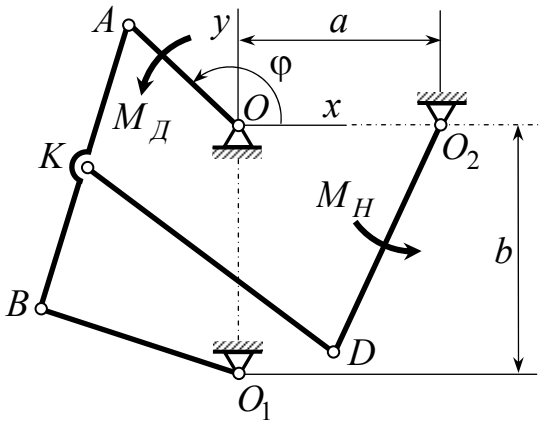
21



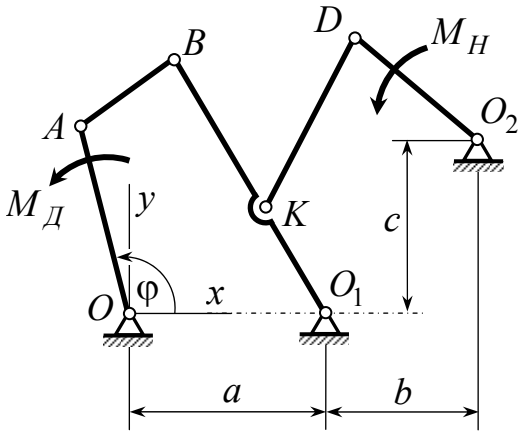
22



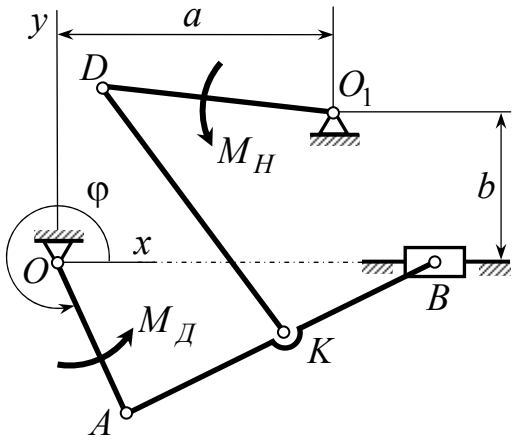
23



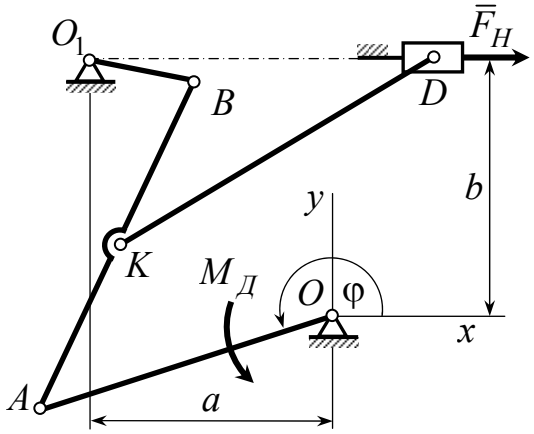
24



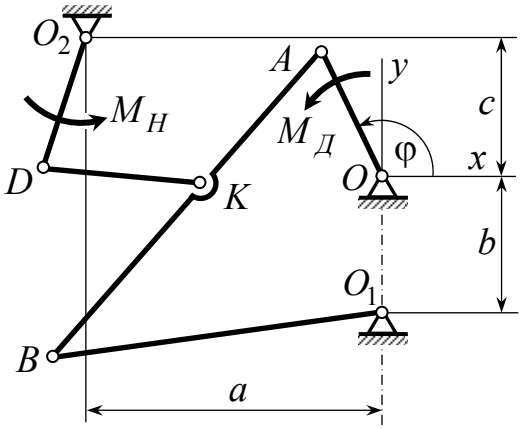
25



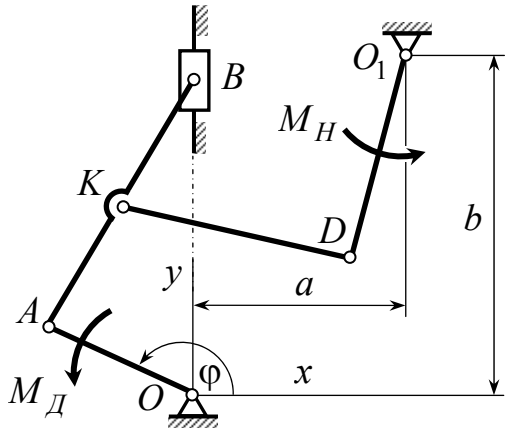
26



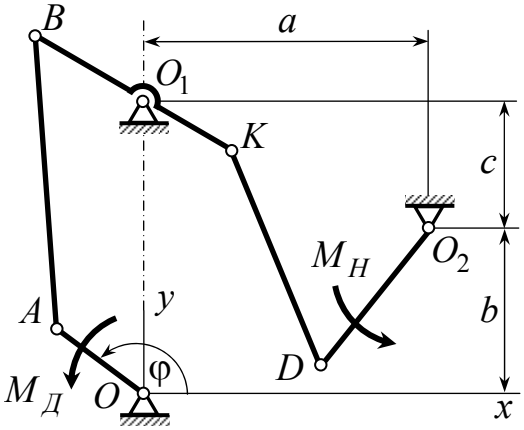
27



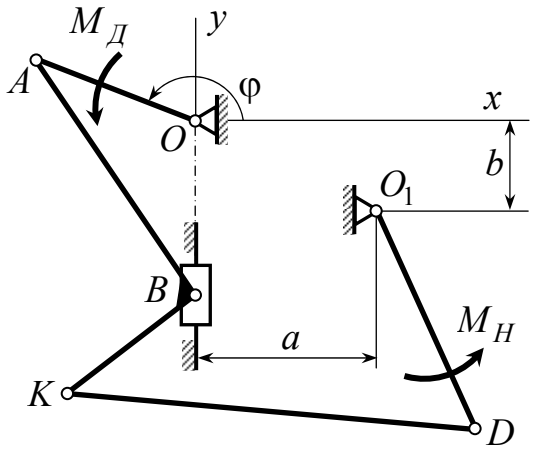
28



29



30



№	M_0	ν_0	ν	μ	m_B	m_D	ρ	KD	O_1K	AK	BK
	$H \cdot м$	$кг \cdot м / с$		$кг / с$	$кг$		$кг / м$	$см$			
1	100	3,1	20,1	—	—	—	10	46	—	42	—
2	102	3,3	—	75,4	—	5	10	60	33	19	—
3	134	5,3	22,5	—	—	—	10	70	—	21	—
4	136	5,2	23,8	—	8	—	10	25	—	38	—
5	105	3,5	—	73,2	—	6	10	70	—	30	—
6	153	4,8	24,3	—	—	—	10	50	—	25	—
7	137	4,2	—	74,1	—	7	10	60	—	80	30
8	108	3,5	21,3	—	—	—	10	63	20	55	—
9	135	5,1		—	—	—	10	30	31	—	62
10	110	3,8	25,4	—	7	—	10	33	—	35	35
11	147	4,9	—	83,5	—	8	10	—	—	—	60
12	112	3,7	27,9	—	—	—	10	60	—	15	45
13	113	3,7	26,7	—	6	—	10	40	—	15	—
14	114	3,8	26,5	—	—	—	10	—	—	25	—
15	115	3,9	27,1	—	—	—	10	45	—	30	—
16	116	3,9	—	86,7	—	9	10	60	40	—	20
17	139	4,4	—	76,9	—	7	10	75	—	42	48
18	118	3,9	25,3	—	5	—	10	40	—	40	—
19	119	3,9	24,8	—	4	—	10	—	30	—	40
20	120	4,0	31,2	—	9	—	10	50	—	30	—
21	121	4,0	27,6	—	8	—	10	50	—	40	—
22	122	4,1	24,7	—	—	—	10	35	—	22	—
23	145	5,0	23,8	—	—	—	10	60	—	30	—
24	131	4,6	26,4	—	—	—	10	50	15	—	—
25	143	4,9	32,4	—	7	—	10	42	—	15	25
26	126	4,2	—	69,7	—	8	10	60	—	35	—
27	146	5,4	33,1	—	—	—	10	54	—	—	22
28	128	4,3	31,7	—	6	—	10	70	—	30	25
29	129	4,2	31,3	—	—	—	10	70	14	—	39
30	124	3,4	30,8	—	5	—	10	81	—	—	30

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Бертяев В. Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум: Учебное пособие. / В. Д. Бертяев – СПб: БХВ – Санкт-Петербург, 2005. 752 с.

2. Бутенин Н. В. и др. Курс теоретической механики: Учеб. пособие для студов вузов по техн. спец.: В 2-х т./Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб.: Лань. - 5-е изд., испр.-1998. - 729 с.

3. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. Учеб. для втузов / Н. Н. Никитин – М.: ВШ, 1990. 608 с.

3. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/С.М.Тарг.-15-е изд., стер. - М.: ВШ, 2005. - 415 с.

4. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов / А. А. Яблонский, В.М. Никифорова. 13-е изд., исправл. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 603с.

Дополнительная

5. Бать М.И и др. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособ. для вузов. В 2-х т./М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - 9-е изд., перераб.-М.: Наука, 1990. - 670 с.

6. Бертяев В. Д. и др. Кинематика плоских механизмов (с использованием пакета MathCAD): Учебное пособие. /В. Д. Бертяев, Л. А. Булатов, А. Г.Митяев/ – Тула: ТулГУ, 2003, 112 с.

7. Исследование колебаний механических систем и основы виброзащиты: Учебное пособие для вузов /[В. Д. Бертяев, Л. А. Булатов и др.]; Под общ. ред. В. Д. Бертяева – Тула: ТулГУ, 2002. 140 с.

8. Исследование колебаний механической системы с гибкой упругой связью: Учебное пособие. / В. Д. Бертяев, Л. А. Булатов, А. Г.Митяев, А. Б. Каплун – Тула: ТулГУ, 2002. 108 с.

9. Кирьянов Д. В. Самоучитель MathCAD 11./Д. В. Кирьянов – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. 538 с.

10. Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в области техники и технологии / [В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.]; Под ред. К. С. Колесникова. - 3-е изд.,стер. М. : Изд- во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. - 735 с. - (Механика в техническом университете: В 8 т., т. 1)

11. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, ч. 1 и 2. – М.: 1954 и последующие издания. 698 с.

12. Новожилов И. В., Зацепин М. Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ: Учебное пособие./ И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин/ – М.: ВШ, 1986. 136 с.

13. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для студ. втузов /[А.А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др.]; Под общ. ред. А. А. Яблонского. - 11-е изд., стер.-М.: Интеграл - Пресс, 2004. - 382 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
Общие положения 5
Требования к оформлению и защите 6
1. КИНЕМАТИКА 7
К1. КИНЕМАТИКА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ 7
Цель курсовой работы. 7
Содержание курсовой работы 7
Пример выполнения задания 9
1. Аналитический метод 11
2. Результаты расчетов 20
3. Определение кинематических характеристик механизма в заданном положении с помощью теорем плоского движения твердого тела 30
4. Определение кинематических характеристик механизма в заданном положении с помощью теорем сложного движения точки 47
Анализ результатов вычислений 60
Альбом заданий и исходные данные для расчета 62
2. СТАТИКА 69
С 1. ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ ФЕРМ 70
Цель курсовой работы 71
Содержание курсовой работы 71
Порядок выполнения работы 71
Пример выполнения задания 73
1. Определение реакций внешних связей 74
2. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов 76
3. Определение усилий методом Риттера 85
4. Результаты расчетов 88

5. Анализ результатов вычислений 97
6. Выводы 106
Альбом заданий и исходные данные для расчета 107
С 2. РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ 115
Цель курсовой работы 115
Содержание курсовой работы 115
Порядок выполнения работы 116
Пример выполнения задания 117
1. Определение реакций внешних и внутренних связей 118
2. Определение $M_A, \overline{X}_B, \overline{Y}_B$ оптимальным способом 121
3. Альтернативное расположение опор внешних связей 122
4. Результаты расчетов 125
5. Анализ результатов вычислений и выводы 131
Альбом заданий и исходные данные для расчета 132
С 3. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ 148
Цель курсовой работы 148
Содержание курсовой работы 148
Порядок выполнения работы 149
Пример выполнения задания 150
1. Составление уравнений равновесия 151
2. Составление уравнений геометрических связей 158
3. Результаты расчетов 159
4. Анализ результатов вычислений и выводы 166
5. Выводы 171
3. ДИНАМИКА 172
Д 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ 173
Цель курсовой работы 174
Содержание курсовой работы 174
Порядок выполнения работы 175

Пример выполнения задания 177
1. Составление дифференциального уравнения движения механической системы. 179
2. Определение реакций внешних и внутренних связей. 184
3. Определение закона движения системы 187
4. Результаты расчетов 190
5. Анализ результатов вычислений 193
6. Результаты анализа 207
Выводы 210
Альбом заданий и исходные данные для расчета 212
Д 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА С КУЛИСНЫМ ПРИВОДОМ 218
Цель курсовой работы 218
Содержание курсовой работы 218
Порядок выполнения работы 219
Пример выполнения задания 220
1. Составление дифференциального уравнения движения механизма 222
2. Определение реакций внешних и внутренних связей 227
3. Результаты расчетов 232
4. Анализ результатов вычислений 241
5. Результаты анализа 249
Выводы 252
Альбом заданий и исходные данные для расчета 253
Д 3. ДИНАМИКА ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ 259
Цель курсовой работы 259
Содержание курсовой работы 259
Порядок выполнения работы 260
Пример выполнения задания 261
1. Составление дифференциального уравнения движения механизма 263
2. Нахождение реакций внешних и внутренних связей 269

3. Результаты расчетов 271
4. Анализ результатов вычислений 282
5. Результаты анализа 291
Выводы 297
Альбом заданий и исходные данные для расчета 299
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 305
Основная 305
Дополнительная 305
ОГЛАВЛЕНИЕ 307