

Глава 10

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

10.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА

Потеря устойчивости деформированного состояния равновесия строительной конструкции проявляется в *неоднозначности* формы их равновесия под действием нагрузки, которая получила *незначительное* (сколько угодно малое) приращение величины. Ниже будут исследоваться формы равновесия, сопровождающиеся появлением малых (в сравнении с линейными размерами) поперечных перемещений оси конструктивного стержневого элемента вследствие изменения величины продольной силы при сохранении ее направления («мертвая» нагрузка). Такой класс задач получил название *продольного изгиба*.

Задачей расчета в этом случае является определение значения продольной нагрузки, при котором появляются поперечные перемещения *минимальной* величины. Соответствующая нагрузка получила название *критической*. Важным является также решение вопроса о том, какой именно стержневой элемент потерял устойчивость. Поскольку такой конструктивный элемент является «слабым местом» конструкции в целом.

На рис. 10.1 приведена расчетная схема рамы (ЗРС), которая нагружена *узловой* нагрузкой в виде сосредоточенных сил.

Для этой расчетной схемы требуется определить значение критической нагрузки $P_{кр}$ и построить *форму потери устойчивости* (форму смежного состояния равновесия, возникающую при потере устойчивости за счет поперечных перемещений).

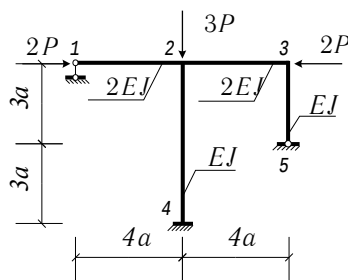


Рис. 10.1

Решение задачи рекомендуется проводить в три этапа: 1) оценить значение критической нагрузки способом эквивалентного стержня; 2) получить приближенное решение задачи методом перемещений для

сжато-изогнутых стержней; 3) уточнить решение на ЭВМ с использованием программы реализации метода перемещений.

10. 2. ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ СПОСОБОМ ЭКВИВАЛЕНТНОГО СТЕРЖНЯ

Идея способа основана на применении обобщенной формулы Эйлера, генерирующей значения критической силы для однопролетных стержней, которые опираются на систему абсолютно жестких опорных стержней, образующих стандартные способы опирания. Формула имеет следующее выражение:

$$P_{кр}^{Э.о.} = \left(\frac{\pi}{\mu l} \right)^2 EJ = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{\mu} \right)}{l} \right)^2 EJ = \left(\frac{v_{кр}}{l} \right)^2 EJ \Rightarrow v_{кр} = \frac{\pi}{\mu} = l \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ}},$$

где μ — коэффициент свободной длины стержня в смежном состоянии равновесия. Этот коэффициент показывает, какую часть начальной длины стержня занимает так называемая «*полуволна* потери устойчивости» оси стержня, которая характеризуется тем, что в ее концевых точках изгибающий момент равен нулю, а в средней точке поперечное перемещение достигает максимума. Формула охватывает все возможные случаи закрепления концов стержня с помощью недеформируемых опорных стержней (рис. 10.2).

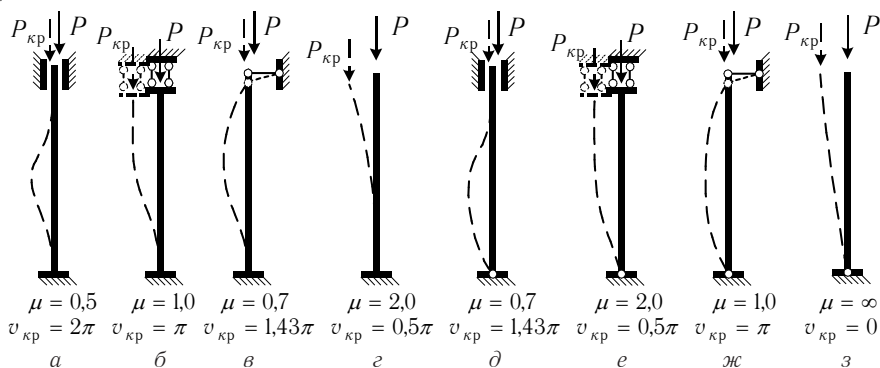


Рис. 10.2

Большая часть стержневых элементов конструкции опирается своими концами на соседние элементы, которые обладают ограниченной

жесткостью, и создают, таким образом, условия *упругого* опирания для включенного между ними элемента. Варьируя значением жесткости опорных элементов между нулем и бесконечностью, всегда можно указать два из перечисленных на рис. 10.2 предельных случаев, между которыми располагается исследуемый упруго опертый стержень. Отсюда и вытекает возможность *оценки* — определения интервала значений, содержащего искомую силу.

10.2.1. ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА УЧАСТКЕ 1-2

Поскольку в точке 1 опирание участка стандартное, а в точке 2 — упругое, постольку рассмотрим именно варианты стандартного опирания точки 2 (рис. 10.3). Пренебрегая растяжимостью оси стержня при наличии изгиба можно убедиться в том, что на поперечное перемещение в смежном состоянии влияет значение поворота сечения в точке 2. А это означает, что предельными случаями будут вариант шарнирной заделки (рис. 10.3, а) и вариант жесткой заделки (рис. 10.3, б).

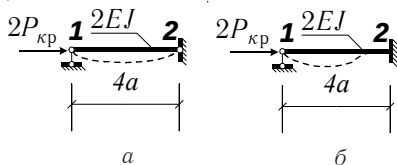


Рис. 10.3

Воспользуемся обобщенной формулой Эйлера для определения значений критической силы P этих вариантов опирания:

$$P_{1-2, \text{кр}}^{(a)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{1-2}^{(\text{рис. 2, ж})} \cdot l_{1-2}} \right)^2 E_{1-2} J_{1-2} = \left(\frac{\pi}{1,0 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 1,234 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{\text{кр}};$$

$$P_{1-2, \text{кр}}^{(б)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{1-2}^{(\text{рис. 2, в})} \cdot l_{1-2}} \right)^2 E_{1-2} J_{1-2} = \left(\frac{\pi}{0,7 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 2,518 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{\text{кр}};$$

$$1,234 \frac{EJ}{a^2} < 2P_{\text{кр}} < 2,518 \frac{EJ}{a^2} \Rightarrow 0,617 \frac{EJ}{a^2} < P_{\text{кр}} < 1,26 \frac{EJ}{a^2}. \quad (10.1)$$

Итак, получена *первая* оценка значения критической нагрузки. Поскольку участок 2-3, хотя и имеет характеристики, те же, что и участок 1-2, но опирается в системе несколько иначе, приходится и для него проводить соответствующую оценку критической нагрузки.

10.2.2. ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА УЧАСТКЕ 2-3

Варианты опирания участка 2-3 в точке 2 точно такие же, что и для участка 1-2, поскольку точка 2 — общая, и оси участков лежат на одной прямой.

В точке 3 (жесткий узел) проходят те же рассуждения, что и в точке 2: степень упругости опирания определяется только углом поворота сечения в точке 3.

В результате мы имеем четыре варианта опирания участка 2-3 изображенные на рис. 4. По данным этого рисунка, с чисто формаль-

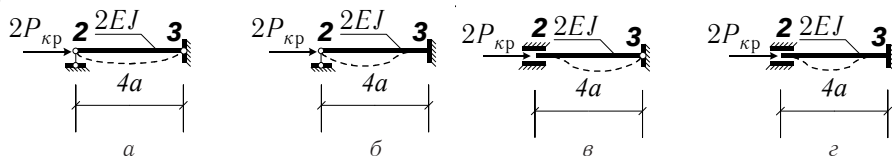


Рис. 10.4

ной точки зрения, мы получаем три граничных значения для критической силы (варианты рис. 10.4, б и рис. 10.4, в являются идентичными):

$$P_{2-3, \text{кр}}^{(a)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-3}^{(\text{рис. 10.2, ж})} \cdot l_{2-3}} \right)^2 E_{2-3} J_{2-3} = \left(\frac{\pi}{1,0 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 1,234 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{\text{кр}};$$

$$P_{2-3, \text{кр}}^{(б, в)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-3}^{(\text{рис. 10.2, в})} \cdot l_{2-3}} \right)^2 E_{2-3} J_{2-3} = \left(\frac{\pi}{0,7 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 2,518 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{\text{кр}};$$

$$P_{2-3, \text{кр}}^{(г)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-3}^{(\text{рис. 10.2, а})} \cdot l_{2-3}} \right)^2 E_{2-3} J_{2-3} = \left(\frac{\pi}{0,5 \cdot 4a} \right)^2 \cdot 2EJ = 4,935 \frac{EJ}{a^2} = 2P_{\text{кр}}.$$

Но, поскольку мы ищем минимальное значение нагрузки, постольку интервал оценки смещается в область меньших значений.

$$1,234 \frac{EJ}{a^2} < 2P_{\text{кр}} < 2,518 \frac{EJ}{a^2} \Rightarrow 0,617 \frac{EJ}{a^2} < P_{\text{кр}} < 1,26 \frac{EJ}{a^2}. \quad (10.2)$$

Следует, однако, отметить, что любое значение изгибной жесткости, соответствующее реальной конструкции, далеко не нулевое. Поэтому приходится учитывать, что оценка будет смещена в сторону большего граничного значения, т.е. ближе к $1,26EJ/a^2$. И поскольку на этом участке два упругих закрепления, то критическая нагрузка на первом участке, где упруго оперт только один узел, будет меньше. Хотя интервал оценки критической нагрузки для участков является общим.

10.2.3. ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА УЧАСТКЕ 2-4

Хотя точка 2 участка 2-4 и является общей для участков 1-2, 2-3 и 2-4 варианты ее закрепления в составе участка 2-4 отличаются от вари-

антов для точки 2, рассмотренных ранее. Дело в том, что на возникновение поперечных перемещений оси этого участка влияет не только угол поворота сечения 2, но и возможность его поперечного перемещения. Такое перемещение может возникать в силу отсутствия на оси 1-2-3 опорного горизонтального стержня. Так что ограничение на значение этого перемещения связано только с величиной изгибной жесткости стойки 3-5.

В силу указанных обстоятельств, возможны четыре варианта опирания точки 2 (ось участка, как и ранее, при изгибе считается нерастяжимой), изображенные на рис. 10.5.

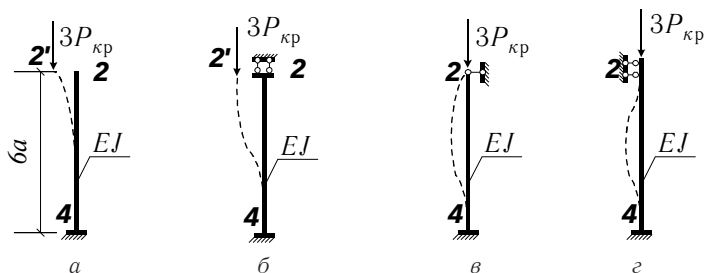


Рис. 10.5

Рис. 10.5, *а* — свободный конец, что соответствует нулевой изгибной жесткости участков 1-2, 2-3 и 3-5 (возможны поворот и горизонтальное перемещение сечения в точке 2).

Рис. 10.5, *б* — ползун (скользящая заделка), что соответствует абсолютно жесткому ригелю и стойке 3-5 нулевой изгибной жесткости (возможно только горизонтальное перемещение сечения 2).

Рис. 10.5, *в* — шарнирная заделка, что соответствует нулевой изгибной жесткости участков ригеля и абсолютно жесткой стойке 3-5 (возможен только поворот сечения 2).

Рис. 10.5, *г* — жесткая заделка, что соответствует абсолютно жесткому ригелю и стойке 3-5 (сечение в точке 2 перемещаться не может).

Что касается точки 4, то в ней мы имеем стандартное опирание в виде жесткой заделки.

Таким образом, предстоит провести анализ интервала, содержащего значение критической нагрузки, по указанным выше вариантам опирания. Предварительно заметим, что, как следует из сравнения значений параметра критической нагрузки $\nu_{кр}$ на рис. 10.2, *а* и рис. 10.2, *б*, рис. 10.2, *в* и рис. 10.2, *г*, рис. 10.2, *д* и рис. 10.2, *е*, а также рис. 10.2, *ж* и рис. 10.2, *з*, наличие поперечного перемещения в опорном сечении *уменьшает* значение критической нагрузки. Это видно по значениям $\nu_{кр}$.

Вычислим критические нагрузки для каждого варианта:

$$P_{2-4, \kappa p}^{(a)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(\text{рис. 10.2, а})} \cdot I_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{2,0 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 0,06854 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{\kappa p};$$

$$P_{2-4, \kappa p}^{(б)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(\text{рис. 10.2, б})} \cdot I_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{1,0 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 0,2741 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{\kappa p};$$

$$P_{2-4, \kappa p}^{(в)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(\text{рис. 10.2, в})} \cdot I_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{0,7 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 0,5595 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{\kappa p};$$

$$P_{2-4, \kappa p}^{(г)} = \left(\frac{\pi}{\mu_{2-4}^{(\text{рис. 10.2, г})} \cdot I_{2-4}} \right)^2 E_{2-4} J_{2-4} = \left(\frac{\pi}{0,5 \cdot 6a} \right)^2 \cdot EJ = 1,096 \frac{EJ}{a^2} = 3P_{\kappa p};$$

Исходя из того, что варианты на рис. 10.5, а и 10.5, б в точке 2 имеют поперечное перемещение, именно эти варианты и следует рассматривать в качестве предельных. Если учесть, что оба эти варианта связаны с предположением о нулевой изгибной жесткости (вариант на рис. 10.5, а «обнуляет» жесткость ригеля 1-2-3 и стойки 4-5, а вариант на рис. 10.5, б — жесткость стойки 4-5 при абсолютно жестком ригеле 1-2-3), то следует признать, что действительное поведение стойки 2-4 должно быть близко к значению по варианту рис. 10.5, в со стороны варианта рис. 10.5, г, поскольку предположение о нулевых жесткостях ригеля и стойки очень сильное. Этот результат зафиксирован в виде следующих соотношений:

$$0,5595 \frac{EJ}{a^2} < 3P_{\kappa p} < 1,096 \frac{EJ}{a^2} \Rightarrow 0,167 \frac{EJ}{a^2} < P_{\kappa p} < 0,365 \frac{EJ}{a^2}. \quad (10.3)$$

Сравнение оценок (10.1), (10.2) и (10.3) показывает, что наименьшее значение нагрузки требуется для потери устойчивости стойки 2-4, так что именно оценка (10.3) является окончательной оценкой для значения критической силы в данной задаче, а стойка 2-4 — наиболее слабым элементом рассматриваемой расчетной схемы с точки зрения ее устойчивости при данных условиях загрузки. Отметим также, что именно стойка 2-4 теряет устойчивость, в то время как сжатые участки ригеля 1-2-3 просто изгибаются под воздействием поворота сечения 2.

В соответствии со сделанным выводом, форма потери устойчивости ЗРС строится на основе поведения стойки 2-4, которая потеряла устойчивость в форме, обеспечиваемой поворотом и смещением узла 2 расчетной схемы.

Построение формы потери устойчивости возможно в двух вариантах (рис. 10.6): при горизонтальном смещении *влево* и при горизонтальном перемещении *вправо*. При построении формы изогнутой оси стойки 2-4 за основу нужно брать форму, которую мы определили как наиболее вероятную (рис. 10.5, в), добавив в ней поворот сечения 2.

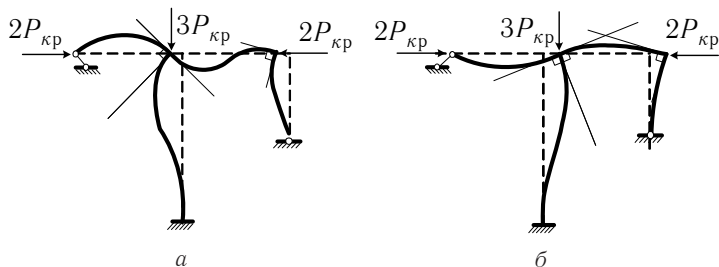


Рис. 10.6

Форма на рис. 10.6, а требует большего запаса потенциальной энергии, поскольку участок ригеля 2-3 имеет большую кривизну (из-за наличия двойного перегиба оси) и искривлена стойка 4-5. А это, в свою очередь означает, что при одних и тех же значениях деформирующих перемещений для получения больших кривизн должны быть приложены большие внешние силы. Так что форма на рис. 10.6, а требует больших значений внешних нагрузок в сравнении с формой на рис. 10.6, б, т.е. соответствующие нагрузки не могут быть признаны критическими. Таким образом, именно форма на рис. 10.6, б является формой потери устойчивости рамы.

Способ эквивалентного стержня дает нам только *оценку* критической нагрузки. Но эта оценка позволит проконтролировать правильность решения, которое мы получим методом перемещений для сжато-изогнутых стержней.

10. 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ИЗ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Уравнение устойчивости наиболее просто составить, пользуясь методом перемещений, который в этом случае имеет ряд особенностей:

1) нагрузкой на ЗРС являются сосредоточенные силы, приложенные в узлах и вызывающие сжатие участков, поэтому в канонической системе уравнений метода перемещений отсутствуют свободные члены (нет внутрипролетной нагрузки); КСУ в этом случае является однородной системой линейных алгебраических уравнений и имеет ненулевое решение, только если определитель системы уравнений равен нулю;

2) при вычислении коэффициентов КСУ используется таблица стандартных эпюр метода перемещений для сжато-изогнутых стержней, которая включает только эпюры, возникающие в элементарных балках, нагруженных продольной сжимающей силой и единичными перемещениями концевых сечений;

3) поскольку изучается равновесие в смежном состоянии равновесия, сжимающая участок сила создает изгибающий момент, пропорциональный поперечному перемещению точек оси от линии действия этой силы; для учета возникающего изгибающего момента введены специальные функции, на которые ссылается таблица метода перемещений;

4) наличие упомянутых функций превращает коэффициенты при неизвестных метода перемещений в канонической системе уравнений из чисел в функции от неизвестного аргумента — безразмерного параметра нагрузки; этот параметр определяется из условия равенства нулю определителя КСУ.

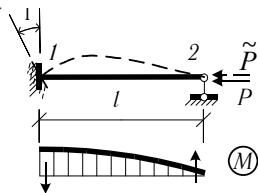
10.3.1. ТАБЛИЦА МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Результаты, зафиксированные в таблице, получены на основе решения дифференциального уравнения сжато-изогнутого стержня при различных вариантах опирания его концов и нагружении единичными угловыми и линейными перемещениями, приложенными на одном из концов балочного элемента.

Форма представления значений ординат изгибающего момента и поперечных усилий выбрана так, что значения, характерные для соответствующих нагрузок в статике (глава 9, рис. 9.8), домножаются на функциональные множители типа $\varphi_k(v_s)$, $\eta_k(v_s)$, зависящие от безразмерного параметра сжимающей силы v_s , связанного с абсолютным значением силы на участке «s» обобщенной формулой Эйлера.

Эти множители определены комбинациями тригонометрических функций, поэтому являются *многозначными* функциями, что вполне соответствует характеру решаемой задачи. Стоит также обратить внимание на то, что сжимающая сила, определяющая аргумент упомянутых функций, *неизвестна*. О ней можно только сказать, что эта сила может поддерживать целый набор смежных состояний, т.е. ее значение также многозначно. Поэтому для нее в формулах множителей введено обозначение $\tilde{P}$, а не $P_{кр}$. И только после выделения из всего спектра возможных значений $\tilde{P}$ минимального, мы можем утверждать, что $P_{кр} = \min \tilde{P}$.

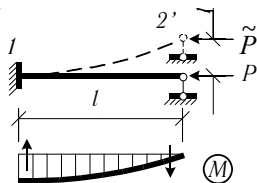
На рис. 10.7 приведены эпюры таблицы метода перемещений для сжато-изогнутых стержней. Эпюры построены на растянутых волокнах, положение которых зависит от направления единичного перемещения.



$$M_{1-2} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}} \varphi_1(v_{1-2});$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \varphi_1(v_{1-2}).$$

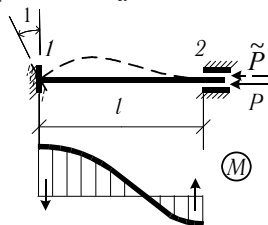
а



$$M_{1-2} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \varphi_1(v_{1-2});$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 3 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^3} \eta_1(v_{1-2}).$$

б

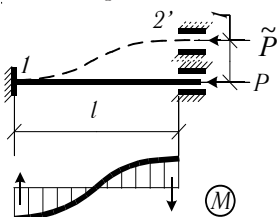


$$M_{1-2} = 4 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}} \varphi_2(v_{1-2});$$

$$M_{2-1} = 2 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}} \varphi_3(v_{1-2});$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 6 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \eta_1(v_{1-2}).$$

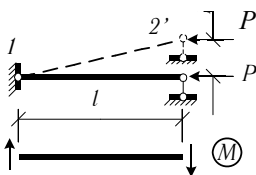
в



$$M_{1-2} = M_{2-1} = 6 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^2} \varphi_4(v_{1-2});$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = 12 \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^3} \eta_2(v_{1-2}).$$

г



$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = \frac{E_{1-2} J_{1-2}}{l_{1-2}^3} v_{1-2}^2.$$

д

Рис. 10.7

Приведем формулы для функций-множителей:

$$v = l\sqrt{\frac{\tilde{P}}{EJ}}; \quad \varphi_1(v) = \frac{v^2}{3\left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{4\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\frac{v}{2}} - 1\right)};$$

$$\varphi_3(v) = \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{2\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\frac{v}{2}} - 1\right)}; \quad \varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right);$$

$$\eta_1(v) = \frac{v^2}{3\left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right)} = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}; \quad \eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right) = \varphi_4(v) - \frac{v^2}{12}.$$

Обратите внимание, что значения функций при вычислении усилий по таблице метода перемещений определяются числовыми характеристиками каждого конкретного участка *отдельно*.

Для проведения этих вычислений необходимо для ЗРС подготовить схему дискретизации с нумерацией узлов опирания двухопорных балок и обозначениями безразмерных параметров сжимающей силы для каждого сжатого участка-балки.

Для ЗРС на рис. 10.1 схема дискретизации показана на рис. 10.8.

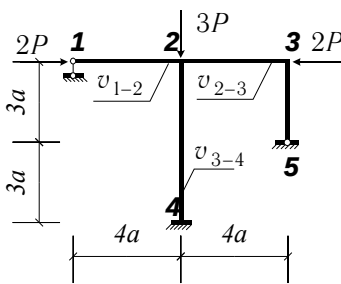


Рис. 10.8

$$v_{1-2} = l_{1-2}\sqrt{\frac{\tilde{P}_{1-2}}{E_{1-2}J_{1-2}}} = 4a\sqrt{\frac{2\tilde{P}}{2EJ}} = 4a\sqrt{\frac{\tilde{P}}{EJ}};$$

$$v_{2-3} = l_{2-3}\sqrt{\frac{\tilde{P}_{2-3}}{E_{2-3}J_{2-3}}} = 4a\sqrt{\frac{2\tilde{P}}{2EJ}} = 4a\sqrt{\frac{\tilde{P}}{EJ}};$$

$$v_{2-4} = l_{2-4}\sqrt{\frac{\tilde{P}_{2-4}}{E_{2-4}J_{2-4}}} = 6a\sqrt{\frac{3\tilde{P}}{EJ}} =$$

$$= \left(\frac{6}{4}\sqrt{3}\right) \cdot 4a\sqrt{\frac{\tilde{P}}{EJ}}.$$

Для дальнейшей работы следует все введенные параметры выразить в общем масштабе v :

$$v = 4a\sqrt{\frac{\tilde{P}}{EJ}} \Rightarrow v_{1-2} = v_{2-3} = v; \quad v_{2-4} \approx 2,598v. \quad (10.4)$$

10.3.2. ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УСТОЙЧИВОСТИ

Порядок действий по методу перемещений в устойчивости на этапе построения КСУ метода перемещений не отличается от порядка при решении задачи в статике (глава 9, параграфы 9.6-9.8).

Прежде всего, проводится кинематический анализ ЗРС с целью определения количества кинематических неизвестных. Данные, необходимые для проведения анализа, показаны на рис. 10.9.

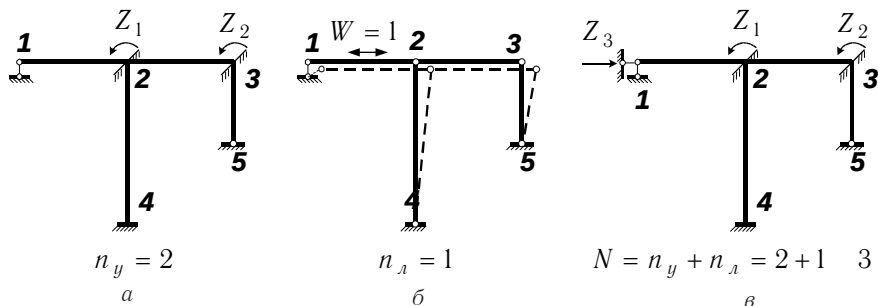


Рис. 10.9

Число угловых неизвестных метода определяется количеством жестких узлов ЗРС (см. рис. 10.9, а), в число которых не входят опорные, даже если они жесткие.

Для определения числа линейных неизвестных требуется преобразовать ЗРС в дополнительную расчетную схемы путем удаления связей, отвечающих за возникновение изгибающих моментов во всех узлах ЗРС, включая опорные (см. рис. 10.9, б). Вычисленное число степеней свободы этой схемы определяет число линейных неизвестных:

$$D = \begin{Bmatrix} 1-2 \\ 2-3 \\ 2-4 \\ 4-5 \end{Bmatrix} = 4; \quad III^{(I)} = \begin{Bmatrix} III_1^{(I)} = 1-1 = 0 \\ III_2^{(I)} = 3-1 = 2 \\ III_3^{(I)} = 2-1 = 1 \\ III_4^{(I)} = 1-1 = 0 \\ III_5^{(I)} = 1-1 = 0 \end{Bmatrix} = 2+1 = 3;$$

$$C_o = \begin{Bmatrix} C_{o,1} = 1 \\ C_{o,4} = 2 \\ C_{o,5} = 2 \end{Bmatrix} = 1+2+2 = 5; \Rightarrow$$

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot (2+1) - (1+2+2) = +1. \quad (10.5)$$

Однако может встретиться случай, когда дополнительная расчетная схема является статически определимой ($W = 0$), но мгновенно изменяемой. В таком случае, приходится определять наличие линейных неизвестных метода путем построения плана бесконечно малых перемещений, проверяя подвижность цепочек узлов, расположенных на каждой вертикали и горизонтали.

Следующий шаг связан с построением эпюр метода перемещений в основной системе метода перемещений, которая получается из ЗРС расстановкой «плавающих» заделок и линейных связей по направлениям обнаруженных неизвестных перемещений. На рис. 10.10 показана эта процедура для ОСМП ЗРС (рис. 10.9, в).

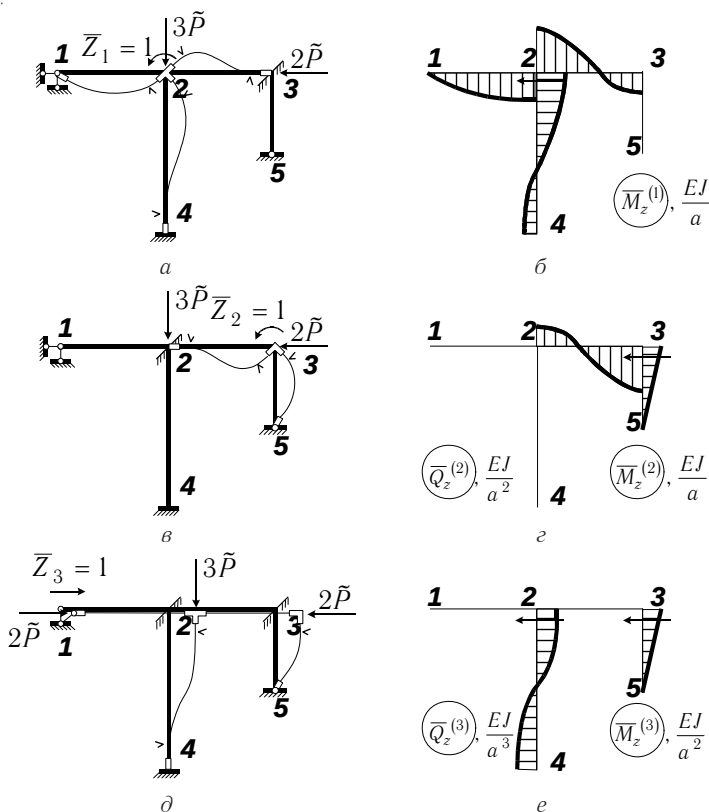


Рис. 10.10

Чтобы не загромождать рисунки эпюр значениями изгибающих моментов и поперечных усилий, выраженными через функции метода

перемещений, будем ссылаться на двухцифровые обозначения усилий, как это было оговорено ранее в задачах статики.

Используя эпюры от нагружения единичными перемещениями в ОСМП (рис. 10.10), выраженные в *одном масштабе* параметры сжимающей нагрузки на участках ОСМП (10.4), а также табличные эпюры метода перемещений (рис. 10.7), вычислим усилия, необходимые для определения реакций от единичного поворота узла 2 (рис. 10.10, а, б):

$$\begin{aligned}
 M_{2-1} &= M_{1-2}^{(puc.10.7,a)} = 3 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_1(v_{1-2}) = 1,5\varphi_1(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{2-3} &= M_{1-2}^{(puc.10.7,в)} = 4 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_2(v_{2-3}) = 2\varphi_2(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{3-2} &= M_{2-1}^{(puc.10.7,в)} = 2 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_3(v_{2-3}) = \varphi_3(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{2-4} &= M_{1-2}^{(puc.10.7,в)} = 4 \cdot \frac{EJ}{6a} \cdot \varphi_2(v_{2-4}) = 0,6666\varphi_2(2,598v) \frac{EJ}{a}; \\
 Q_{2-4} &= Q_{1-2}^{(puc.10.7,в)} = 6 \cdot \frac{EJ}{(6a)^2} \cdot \varphi_4(v_{2-4}) = 0,1666\varphi_4(2,598v) \frac{EJ}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

Обратите внимание, что момент и поперечная сила в сечении 4 не вычисляются, так как они не входят в узлы с дополнительными связями.

Такие же вычисления для нагрузки в виде единичного поворота в узле 3 по эпюре рис. 10.10, г имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M_{2-3} &= M_{2-1}^{(puc.10.7,г)} = 2 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_3(v_{2-3}) = \varphi_3(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{3-2} &= M_{1-2}^{(puc.10.7,г)} = 4 \cdot \frac{2EJ}{4a} \cdot \varphi_2(v_{2-3}) = 2\varphi_2(v) \frac{EJ}{a}; \\
 M_{3-5} &= M_{1-2}^{(puc.10.7,a)} \Big|_{v_{3-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{3a} \cdot 1 = \frac{EJ}{a}; \\
 Q_{3-5} &= Q_{1-2}^{(puc.10.7,a)} \Big|_{v_{3-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{(3a)^2} \cdot 1 = 0,3333 \frac{EJ}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

При вычислении усилий в сечении 3 участка 3-5 мы воспользовались тем, что усилия табличных эпюр метода перемещений для сжатых изогнутых стержней при *отсутствии сжимающей силы* на балке совпадают с усилиями табличных эпюр метода перемещений в статике. И по-прежнему вычисляются только те усилия, которые входят в узлы с дополнительными связями.

Проведем аналогичные выкладки для случая нагружения ОСМП единичным линейным перемещением ригеля 1-2-3, для чего используем соответствующую эпюру (рис. 10.10, е).

$$\begin{aligned}
M_{2-4} &= M_{1-2}^{(\text{пуч.7,з})} = 6 \cdot \frac{EJ}{(6a)^2} \cdot \varphi_4(v_{2-4}) = 0,1666\varphi_4(2,598v) \frac{EJ}{a^2}; \\
Q_{2-4} &= Q_{1-2}^{(\text{пуч.7,з})} = 12 \cdot \frac{EJ}{(6a)^3} \cdot \eta_2(v_{2-4}) = 0,05555\eta_2(2,598v) \frac{EJ}{a^3}; \\
M_{3-5} &= M_{1-2}^{(\text{пуч.7,б})} \Big|_{v_{3-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{(3a)^2} \cdot 1 = 0,3333 \frac{EJ}{a^2}; \\
Q_{3-5} &= Q_{1-2}^{(\text{пуч.7,б})} \Big|_{v_{3-5}=0} = 3 \cdot \frac{EJ}{(3a)^3} \cdot 1 = 0,1111 \frac{EJ}{a^3}.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Следующий этап в реализации метода перемещений заключается в определении коэффициентов канонической системы уравнений $r_{ij}(v)$. Для этого используется статический способ, который вполне эффективен для задач с небольшим (не более пяти) количеством неизвестных. Как и в методе перемещений для задач статики, рекомендуется использовать каждую из эпюр, построенную от единичных перемещений (рис. 10.10), для определения *всех* реакций в дополнительных связях. Иллюстрацией необходимых действий является рис. 10.11, на котором сплошные стрелки показывают усилия, а двойные стрелки — искомые реакции в дополнительных связях.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \left[+1,5\varphi_1(v) + 2\varphi_2(v) + \right] \frac{EJ}{a} \\
&\quad 1,5\varphi_1(v) \frac{EJ}{a} \quad 2\varphi_2(v) \frac{EJ}{a} \\
&\quad 0,6666\varphi_2(2,598v) \frac{EJ}{a} \\
r_{21} &= \left[+\varphi_3(v) \right] \frac{EJ}{a} \\
&\quad \varphi_3(v) \frac{EJ}{a} \\
r_{31} &= \left[+0,1666\varphi_4(2,598v) \right] \frac{EJ}{a^2} \\
&\quad 0,1666\varphi_4(2,598v) \frac{EJ}{a^2} \\
r_{12} &= \left[+\varphi_3(v) \right] \frac{EJ}{a} \\
&\quad \varphi_3(v) \frac{EJ}{a} \\
r_{22} &= \left[+2\varphi_2(v) + 1 \right] \frac{EJ}{a} \\
&\quad 2\varphi_2(v) \frac{EJ}{a} \\
&\quad \frac{EJ}{a} \\
r_{32} &= \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} \\
&\quad 0,3333 \frac{EJ}{a^2} \\
r_{13} &= \left[+0,1666\varphi_4(2,598v) \right] \frac{EJ}{a^2} \\
&\quad 0,1666\varphi_4(2,598v) \frac{EJ}{a^2} \\
r_{23} &= \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} \\
&\quad 0,3333 \frac{EJ}{a^2} \\
r_{33} &= \left[+0,05555\eta_2(2,598v) + \right] \frac{EJ}{a^3} \\
&\quad +0,1111 \\
&\quad 0,05555\eta_2(2,598v) \frac{EJ}{a^2} \quad 0,1111 \frac{EJ}{a^3}
\end{aligned}$$

Рис. 10.11

Заметьте, что получение коэффициентов КСУ проводилось без использования теоремы о взаимности реакций, так что теперь ее справедливость можно проверить по данным рис. 10.11. Это является определенной гарантией правильности определения коэффициентов.

С учетом отсутствия свободных членов КСУ метода перемещений для рассматриваемой задачи устойчивости принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \left[+1,5\varphi_1(v) + 2\varphi_2(v) + \right] \frac{EJ}{a} & \left[+\varphi_3(v) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+0,1666\varphi_4(2,598v) \right] \frac{EJ}{a^2} \\ \left[+0,6666\varphi_2(2,598v) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+\varphi_3(v) \right] \frac{EJ}{a} & \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} \\ \left[+0,1666\varphi_4(2,598v) \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+0,3333 \right] \frac{EJ}{a^2} & \left[+0,05555\eta_2(2,598v) + \right] \frac{EJ}{a^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

10.3.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Условием существования хотя бы одного перемещения, не равно нулю (иначе не реализуется смежное деформированное состояние!) является требование *равенства нулю определителя*, составленного из коэффициентов при неизвестных КСУ. При составлении выражения этого определителя нужно учитывать, что его значение не изменяется, если *все* элементы строки или столбца поделить на число отличное от нуля. В первой и второй строках таким числом является EJ/a , во второй строке — число EJ/a^2 . Кроме того, после деления на эти числа строк, в третьем столбце остается общий множитель EJ/a . Поделив и на него, получаем исходный вид определителя устойчивости:

$$\begin{vmatrix} 1,5\varphi_1(v) + 2\varphi_2(v) + & \varphi_3(v) & 0,1666\varphi_4(2,598v) \\ +0,6666\varphi_2(2,598v) & \varphi_3(v) & 0,3333 \\ \varphi_3(v) & 2\varphi_2(v) + 1 & 0,05555\eta_2(2,598v) + \\ 0,1666\varphi_4(2,598v) & 0,3333 & +0,1111 \end{vmatrix} = 0 = f(v). \quad (10.9)$$

Если раскрыть этот определитель, вычислив его, например, по правилу Саррюса, то мы получим нелинейное трансцендентное уравнение относительно v . Способы определения его корней изучаются в дисциплине «Численные методы». И наиболее простой из них состоит в реализации двух этапов: 1) отделение корня (определение интервала, содержащего корень) способом простого перебора; 2) уточнение корня (уменьшение размеров интервала до величины, когда любая из его границ, принятая за значение искомого корня, дает его значение с заданной наперед точностью) методом половинного деления.

Применение этого подхода требует наличия механизма вычисления значения определителя при заданном значении аргумента v . Самым простым является механизм, основанный на использовании таблиц функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней. Такие таблицы оставлены для отрезка $[0, 2\pi]$, поскольку указанные функции определяются тригонометрическими составляющими. В табл. 10.1 приведены значения функций, подсчитанные для шага 0,1 аргумента v .

Таблица 10.1

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,9994	0,9997	1,0002	0,9999	0,9961	0,9990
0,2	0,9973	0,9987	1,0007	0,9994	0,9640	0,9960
0,3	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910
0,4	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840
0,5	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,6	0,9757	0,9879	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640
0,7	0,9669	0,9836	1,0083	0,9918	0,8035	0,9510
0,8	0,9565	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360
0,9	0,9447	0,9727	1,0138	0,9864	0,6747	0,9189
1,0	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,1	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8788
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0297	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9227	1,0403	0,9619	0,0893	0,7744
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9620	0,0000	0,7525
1,6	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100
1,8	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8436	1,0849	0,9241	-0,8103	0,5566
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1051	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	-1,6040	0,3700
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7295	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8505	-2,5838	0,1497

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2251	0,8275	-3,1609	0,0267
π	0,0000	0,6168	1,2336	0,8225	-3,2898	0,0000
3,2	-0,0635	0,5997	1,2462	0,8152	-3,4769	-0,0381
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-1,1718	-0,1743
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4655	1,3509	0,7606	-5,0062	-0,3194
3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7455	-5,4904	-0,3954
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6269	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6969	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5019	0,6961	-7,5060	-0,6372
4,1	-2,9802	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7525
4,2	-4,3156	0,1878	1,6037	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9947	0,1287	1,6636	0,6404	-13,158	-0,9005
4,4	-15,327	0,0648	1,7310	0,6202	-21,780	-0,9931
4,5	227,93	-0,0048	1,8070	0,5991	221,18	-1,0884
4,6	14,669	-0,0890	1,8933	0,5772	7,616	-1,1861
4,7	7,8186	-0,1646	1,9920	0,5543	0,4553	-1,2865
$3\pi/2$	7,4022	-0,1755	2,0052	0,5514	-0,0000	-1,2992
4,8	5,4023	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3896
4,9	4,1463	-0,3607	2,2375	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3923	0,4793	-4,9719	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6099	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7629	2,7960	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9422	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9474
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-1,4182	3,8236	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3266	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1803	5,1346	0,2580	-9,7065	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2130	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6679	7,8727	0,1790	-10,861	-2,7219
6,0	0,5551	-5,1594	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3656	-8,2336	16,739	0,0907	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2π	-0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,159	-3,2898

Воспользуемся данными этой таблицы для отделения корня уравнения устойчивости (10.9) в интервале длиной 0,4. Процедура отделения требует наличия табулированной с указанным выше интервалом функ-

ции определителя устойчивости $f(v)$, значения которой в точках $v_i = i \cdot 0,4$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) вычисляются одним из известных способов (например, способом разложения определителя устойчивости по элементам строки).

$$f(0,4) = \det \begin{pmatrix} 4,115 & 1,002 & 0,1635 \\ 1,002 & 2,989 & 0,3333 \\ 0,1636 & 0,3333 & 0,1606 \end{pmatrix} = 1,386;$$

$$f(0,8) = \det \begin{pmatrix} 3,956 & 1,010 & 0,1542 \\ 1,010 & 2,957 & 0,3333 \\ 0,1543 & 0,3333 & 0,14252 \end{pmatrix} = 1,115;$$

...

Табулированная функция определителя представлена в табл. 10.2.

Таблица 10.2

v	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
f	1,386	1,115	0,7056	0,2277	-0,1651	5,585	-1,282	-0,2787
v	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	
f	-2,728	1,707	15,76	8,363	7,072	12,57	1326	

Нетрудно убедиться в том, что на интервалах (1,6; 2,0), (2,4; 2,8) и (3,6; 4,0) функция меняет знак, что говорит о наличии хотя бы одного корня в каждом из этих интервалов. Поскольку нас интересует минимальное значения корня, постольку *уточнение* значения этого корня (табл. 10.3) будем проводить способом половинного деления на интервале (1,6; 2,0).

Таблица 10.3

v	1,8	1,9	1,85	1,825
f	0,003040	-0,09231	-0,04674	-0,02231
v	1,8125	1,80625	1,803125	1,8015625
f	-0,009741	-0,003379	-0,0007617	0,001426

После выбора середины начального интервала ($v = 1,8$) процесс уменьшения интервала содержания корня (интервала с разнознаковыми значениями функции f на концах) происходит за счет движения *левой* границы — она приближается к правой. И только в точке $v = 1,8015625$ нужно на следующем шаге двигать правую границу, выбирая очередной интервал, содержащий корень. Понятно, что процесс не имеет конца, если не выставить требования к точности решения. Ограничимся погрешностью решения, равной полуразности последнего интервала, т.е.

$|1,803125-1,8015625| = 0,0015625$. А за значение корня примем значение середины интервала $v_{кр} = 1,802$ с абсолютной погрешностью 0,002.

Вычислим значение масштаба критической нагрузки:

$$v_{кр} \approx 1,802 \Rightarrow P_{кр} \approx \left(\frac{1,802}{4a} \right)^2 EJ = 0,203 \frac{EJ}{a^2}. \quad (10.10)$$

Сравнение этого результата с оценкой (10.3) показывает, что найденное значение принадлежит интервалу (0,167; 0,365), который назначен этой оценкой, и соответствует значению коэффициента приведенной длины, равному

$$\mu_{2-4} = \frac{\pi}{v_{2-4,кр}} = \frac{\pi}{2,598 \cdot v_{кр}} = \frac{\pi}{2,598 \cdot 1,802} = 0,671.$$

Этот результат говорит о том, что перемещения сечения 2 (поворот и линейное горизонтальное) не являются свободными, о чем и шла речь при обсуждении оценки (10.3).

Заметим также, что полученное значение критической силы является приближенным, хотя значительно более точным, чем оценка (10.3). Стоит обратить внимание, что применение данных табл. 10.1 (при ручном счете) не исключает возможности потери минимального значения корня, если выбрать интервал отделения слишком большим.

Гарантировать получение минимального корня уравнения устойчивости, равно как и минимальную погрешность определения значения критической нагрузки, можно только на основе применения для расчета ЭВМ, оснащенной соответствующим программным обеспечением.

10.4. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Для построения формы потери устойчивости, соответствующей критическому значению нагрузки используется КСУ метода перемещений, коэффициенты которой вычислены при значении аргумента $v = v_{кр}$.

$$\begin{bmatrix} +1,5\varphi_1(1,802) + 2\varphi_2(1,802) + \left[\frac{EJ}{a} \right] & [+ \varphi_3(1,802)] \frac{EJ}{a} & [+0,1666\varphi_4(2,598 \cdot 1,802)] \frac{EJ}{a^2} \\ [+0,6666\varphi_2(2,598 \cdot 1,802)] \frac{EJ}{a} & [+2\varphi_2(1,802) + 1] \frac{EJ}{a} & [+0,3333] \frac{EJ}{a^2} \\ [+0,1666\varphi_4(2,598 \cdot 1,802)] \frac{EJ}{a^2} & [+0,3333] \frac{EJ}{a^2} & [+0,05555\eta_2(2,598 \cdot 1,802) + \left[\frac{EJ}{a^3} \right]] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2,814 \frac{EJ}{a} & 1,060 \frac{EJ}{a} & 0,09310 \frac{EJ}{a^2} \\ 1,060 \frac{EJ}{a} & 2,773 \frac{EJ}{a} & 0,3333 \frac{EJ}{a^2} \\ 0,09434 \frac{EJ}{a^2} & 0,3333 \frac{EJ}{a^2} & 0,04073 \frac{EJ}{a^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Поскольку определитель этой системы уравнений равен нулю при значениях коэффициентов, вычисленных от $v_{кр}$, то система имеет неоднозначное решение. Это означает, что *нельзя* определить абсолютные значения перемещений. Поэтому, преобразовав предварительно систему к безразмерным параметрам, задаемся единичным значением одного из них (например, последнего по номеру). Это позволяет вместо исходной системы уравнений решать систему с размерностью на единицу меньшей (из системы удаляется уравнение с тем же номером, что и перемещение с назначенным значением). Оставшаяся часть системы становится неоднородной и решается любым из способов решения систем линейных алгебраических уравнений (Гаусса, Крамера и др.).

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \tilde{Z}_3 \end{cases} = \begin{cases} Z_1 / (EJ / a) \\ Z_2 / (EJ / a) \\ Z_3 / (EJ / a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2,814 & 1,060 & 0,09310 \\ 1,060 & 2,773 & 0,3333 \\ 0,09434 & 0,3333 & 0,04073 \end{bmatrix} \begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \tilde{Z}_3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}; \quad (10.11)$$

$$\tilde{Z}_3 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2,814 & 1,060 \\ 1,060 & 2,773 \end{bmatrix} \begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{cases} = \begin{cases} -0,09310 \\ -0,3333 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{cases} = \begin{cases} 0,0142 \\ -0,126 \end{cases}.$$

Построение формы потери устойчивости проводится по найденным перемещениям с учетом, того, что знак «-» в значении относительного перемещения означает, что оно противоположно направлению, указываемому соответствующим единичным перемещением (при построении эпюр). На рис. 10.12 показана полученная форма потери устойчивости.

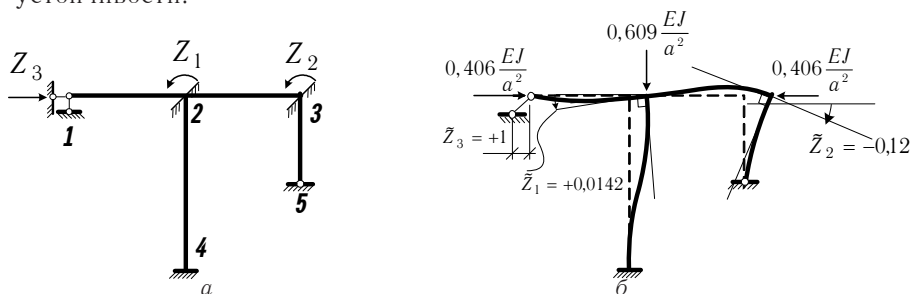


Рис. 10.12

Таким образом решение задачи устойчивости завершено, поскольку найдено значение критической нагрузки и построена форма потери устойчивости, этой нагрузке соответствующая (см. рис. 10.12).

На рис. 10.13 приведен операционный алгоритм решения задачи устойчивости, реализованный в приведенном примере.

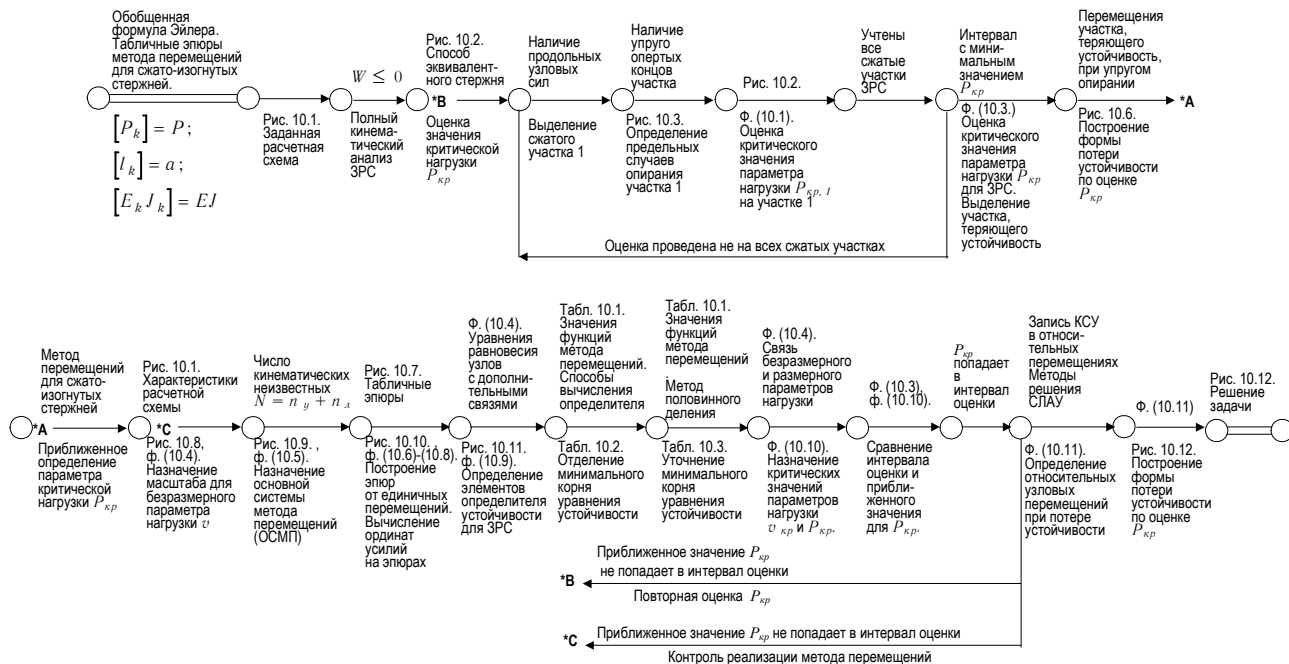


Рис. 10.13

11.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА

Колебания строительной конструкции вокруг равновесного деформированного состояния проявляется в *изменении* характеристик напряженно-деформированного состояния (НДС) *во времени t* по закону, характеризующемуся некоторым периодом, по прошествии которого значения характеристик НДС получают значения, характерные для состояния статического равновесия.

Причиной подобного поведения конструкции является перемещение *массы* конструкции *с ускорением*, что может происходить как под действием динамической (изменяющейся во времени) нагрузки, так и в результате внезапного исчезновения статической нагрузки или ее части, приложенной к деформированной системе, находящейся в состоянии равновесия. Возникающие силы инерции приложены к *каждой* материальной точке конструкции (т.е. распределены по ее материальному объему), а их величина и направление определяются вторым законом Ньютона. Эти силы являются, по существу, *дополнительной* нагрузкой.

Ниже будут исследоваться колебания, сопровождающиеся малыми (в сравнении с размерами стержневых элементов) линейными и угловыми перемещениями точек осей расчетной схемы под воздействием упругих внутренних сил, сил инерции (*собственные* колебания) и, возможно, внешних сил (*вынужденные* колебания). В последнем случае, рассматривается основная часть процесса, которая происходит с частотой θ изменения нагрузки (*установившиеся* вынужденные колебания).

Естественно, что при анализе возникающих характеристик НДС мы, как и ранее, будем пользоваться *расчетной схемой* конструкции. Самым простым способом учета сил инерции $I_k(t)$ является введение в традиционную расчетную схему нескольких так называемых «тяжелых» точек, в которых сосредоточена распределенная по объему масса стержневой конструкции. Величины этих масс m_k обычно пропорциональны длине участка, в середине которого приложена данная масса. Поскольку количество

тяжелых точек ограничено, соответствующая расчетная схема называется схемой с *конечным* числом W_d *динамических степеней свободы*, каждая из которых определяется одной из сосредоточенных сил инерции, действующей вдоль осей глобальной системы координат в каждой тяжелой точке (вращением масс пренебрегают!).

Уравнения движения системы с конечным числом динамических степеней свободы формируются на основе принципа Даламбера, т.е. каждая тяжелая точка испытывает воздействие упругих сил, сил инерции и, возможно, сосредоточенных нагрузок. При этом в любой момент времени удовлетворяются условия равновесия сил в каждой подобной точке.

Поскольку речь идет о движении в форме колебаний, то все нагрузки и характеристики НДС изменяются во времени по закону, описываемому функциями типа $H^A \sin(B + \tau \cdot t)$, где H^A – *амплитуда*, B – *фаза*, τ – *круговая частота* колебаний, связанная с периодом T колебаний формулой $T = 2\pi/\tau$.

В процессе решения задачи о колебаниях определению подлежат амплитудные значения сил инерции I_k^A и их вклад в изменение картины распределения характеристик НДС (амплитудные эпюры усилий) в сравнении со статическим приложением нагрузки, заданной своими максимальными (амплитудными) значениями q^A , P^A , M^A . Кроме того, учитывая важность определения положения растянутых волокон сечения в точках оси, требуется также построить деформированную схему в момент возникновения амплитудных значений усилий.

11.2. О СВЯЗИ ЗАДАЧИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

Наблюдения показывают, что любое упругое тело, участвующее в собственных колебаниях, может двигаться с несколькими частотами ω_s . Будучи упорядоченными по возрастанию, эти частоты образуют *спектр* частот собственных колебаний. Значение частоты собственных колебаний, с которой осуществляется конкретный динамический процесс, зависит от *начальных условий*, в которых он возникает.

С другой стороны существует явление *резонанса*, когда близость частоты внешнего воздействия θ к одной из частот спектра собственных колебаний вызывает резкое возрастание амплитудных значений характеристик НДС расчетной схемы. Поэтому естественно поставить задачу об определении *минимальной* частоты собственных колебаний, при которой возможно явление резонанса (*сравните* с задачей определения критической нагрузки в задаче устойчивости), а задачу исследования установившихся вынужденных колебаний решать при значениях частоты из

менения нагрузки, близкой к этой минимальной частоте собственных колебаний и нескольким более высоким частотам. Например, при исследовании колебаний трубопроводных переходов большой протяженности исследуется до сорока частот спектра.

Интересно отметить и другое: при формализации задачи собственных колебаний в условиях отсутствия внешних сил математической моделью является однородная система линейных алгебраических уравнений относительно амплитудных перемещений Y^A тяжелых точек с коэффициентами, зависящими от частоты ω собственных колебаний. Т.е. налицо полная *тождественность* математической модели задачи устойчивости и задачи собственных колебаний. Понятно, что методы решения соответствующих математических задач также являются общими.

Таким образом, проводя *аналогию* между двумя задачами, можно отметить, что критическая нагрузка соответствует минимальной частоте собственных колебаний, узловые перемещения дополнительных связей — амплитудным перемещениям тяжелых точек по направлениям динамических степеней свободы, а форма потери устойчивости — форме собственных колебаний с минимальной частотой спектра.

Соответственно отмеченной аналогии и будем решать задачу колебаний: вначале найдем минимальную частоту ω путем оценки ее значения и построим соответствующую форму колебаний, затем уточним значение этой частоты и форму колебаний, и, наконец, решим задачу о построении эпюр амплитудных значений определяющих усилий в случае установившихся вынужденных колебаний с частотой θ , близкой к найденной минимальной частоте собственных колебаний ω .

11.3. ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В качестве заданной расчетной схемы (ЗРС) рассмотрим схему, представленную на рис. 11.1.

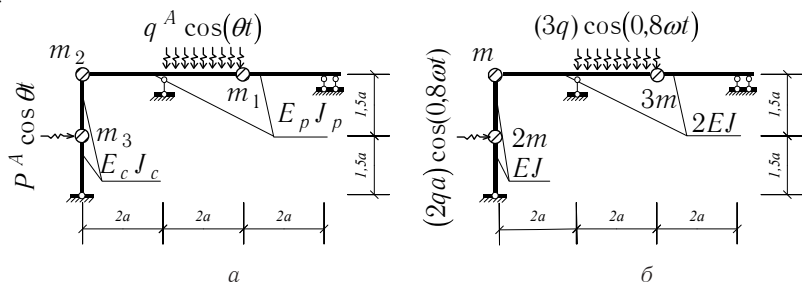


Рис. 11.1

11.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ДИНАМИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Определим число динамических степеней свободы, которыми обладают массы в ЗРС, способом, основанным на том, что каждая *тяжелая* точка на плоскости в общем случае может иметь две линейные степени свободы. Нас, однако, интересуют только те из них, действие вдоль которых сил инерции, приложенных к тяжелой точке, вызовет появление определяющих деформаций (изгиб в балках, ломаных брусках и рамах; растяжение-сжатие в стержнях ферм).

На рис. 11.2, *а* показано максимальное число динамических степеней свободы, которым обладает ЗРС. А на рис. 11.2, *б* отмечены *эффективные* степени свободы. При построении схемы реализации динамических степеней свободы важно учитывать величину массы, которая будет создавать соответствующую силу инерции.

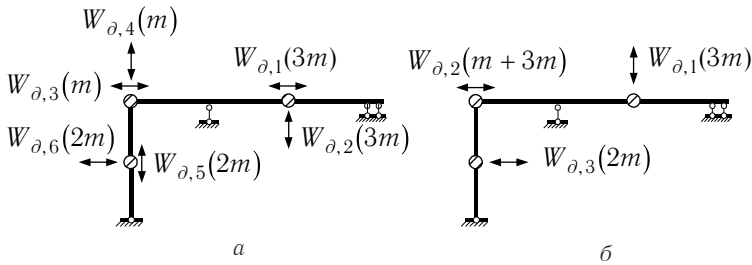


Рис. 11.2

Поясним принцип отбора динамических степеней свободы.

Во-первых, в ЗРС определяющими являются деформации изгиба, поэтому растяжением-сжатием стойки и ригеля можно пренебречь. Из рис. 11.2, *а* видно, что 4-я и 5-я степени свободы могут быть реализованы только за счет осевых деформаций участков стойки, поэтому их можно не учитывать (этим деформациям соответствуют более высокие собственные частоты). По аналогичной причине нет смысла учитывать разницу между 3-й и 1-й степенями, ибо она появляется только за счет растяжения-сжатия участка ригеля между массами. Оставшиеся степени свободы реализуются за счет поперечных перемещений тяжелых точек (изгиба осей участков): 2-я степень изгибает второй участок ригеля, 3-я (или 1-я) изгибает стойку, 6-я также изгибает стойку.

Во-вторых, три динамические степени свободы, связанные с изгибом, позволяют получить три частоты собственных колебаний, которые заведомо ниже тех, которыми мы пренебрегли. Поэтому на рис. 11.2, *б* произведена перенумерация динамических степеней свободы. Силы инерции, действующие по этим направлениям, и определяют поведение рас-

четной схемы. Стоит отметить, что из-за нерастяжимости оси ригеля массы, расположенные на нем, в горизонтальном направлении будут действовать *совместно*, что и отмечено на рис. 11.2, б.

Таким образом, число эффективных динамических степеней свободы $W_{\partial} = 3$.

11.3.2. ФОРМУЛЫ ОЦЕНКИ МИНИМАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ

Определение интервала, содержащего значение минимальной частоты, производится по формулам Бернштейна-Смирнова:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}} < \omega < \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}; \quad (11.1)$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{W_{\partial}} \delta_{ii} m_i; \quad B_2 = \sum_{i=1}^{W_{\partial}} \sum_{k=1}^{W_{\partial}} \delta_{ik}^2 m_i m_k.$$

Здесь δ_{ik} — перемещение тяжелой точки в направлении $W_{\partial, i}$ от действия *единичной* силы инерции по направлению $W_{\partial, k}$. Указанные перемещения в ЗРС вычисляются по матричным формулам статики

$$[\delta_{ik}] = (\overline{M}_i^I)^T [B] (\overline{M}_k^I).$$

Историческая справка: оценка минимальной частоты предложена С.А. Бернштейном, позже А.Ф. Смирновым было предложено более простое выражение для правой границы интервала. В этом виде оценка и приведена выше.

11.3.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР НАПРАВЛЯЮЩИХ УСИЛИЙ В ЗРС

Итак, ближайшая задача заключается в том, чтобы вычислить перемещения δ_{ik} в ЗРС от действия единичных сил инерции $\overline{T}_k = 1$, которые приложены в направлениях, заданных на рис. 11.2, б. Для проведения соответствующих вычислений нам потребуются эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_k^I$ в ЗРС от действия все тех же единичных сил инерции, которые в данном случае будут направляющими и грузовыми одновременно. По этим эпюрам и схеме дискретизации строится направляющая (она же грузовая) матрица $(\overline{M}_k^I)$ и матрица податливости $[B]$, необходимые для вычисления перемещений по матричным формулам. При этом направляющая матрица $(\overline{M}_k^I)$ содержит количество столбцов, равное количеству эффективных динамических степеней свободы W_{∂} .

Перед построением эпюр усилий требуется выполнить кинематический анализ ЗРС. Особенность проведения кинематического анализа в задаче колебаний заключается в том, что имеет смысл определять не только степень *статической* неопределимости, но и степень *кинематической* неопределимости расчетной схемы, поскольку для статически неопределимой ЗРС использование метода перемещений при построении эпюр может оказаться менее трудоемким, нежели применение метода сил. Результаты такого анализа представлены на рис. 11.3.

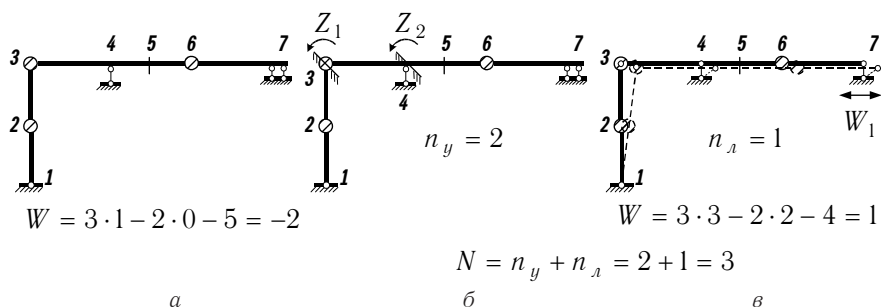


Рис. 11.3

Поскольку степень статической неопределимости (рис. 11.3, а) ниже степени кинематической определенности (рис. 11.3, б-в), КСУ метода сил будет иметь меньшую размерность, и построение эпюр рекомендуется проводить методом сил.

При вычислении ординат эпюр усилий следует помнить о том, что по этим ординатам будут заполняться матричные наборы данных, необходимые для вычисления перемещений δ_{ik} , поэтому следует разработать *схему дискретизации*, основываясь на виде внешних нагрузок и точках приложения сил инерции. Для задачи рассматриваемого примера схема дискретизации приведена на рис. 11.4, где указаны номера участков, номера контролируемых сечений и правило знаков для элементов матриц.

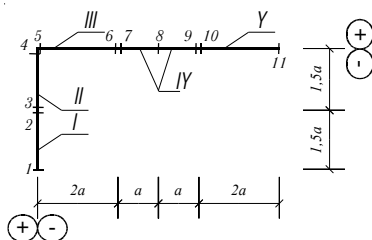


Рис. 11.4

Эпюры от единичных сил инерции представлены на рис. 11.5.

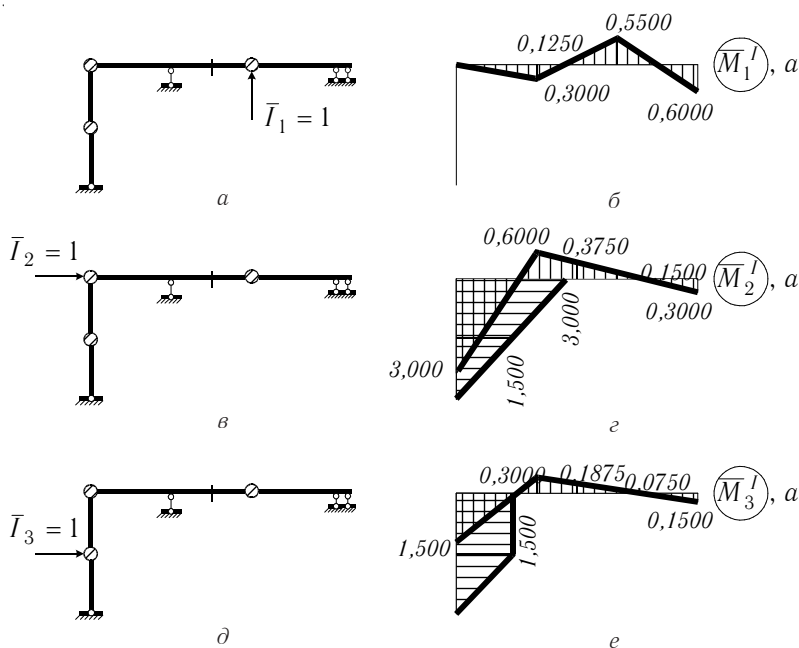


Рис. 11.5

По данным рис. 11.5 с учетом схемы дискретизации (см. рис. 11.4) собирается направляющая матрица $(\bar{M}_k^I)$:

$$(\bar{M}_{ik}^I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1,500 & -1,500 \\ 3 & 0 & -1,500 & -1,500 \\ 4 & 0 & -3,000 & -1,500 \\ 5 & 0 & -3,000 & -1,500 \\ 6 & -0,3000 & +0,6000 & +0,3000 \\ 7 & -0,3000 & +0,6000 & +0,3000 \\ 8 & +0,1250 & +0,3750 & +0,1875 \\ 9 & +0,5500 & +0,1500 & +0,0750 \\ 10 & +0,5500 & +0,1500 & +0,7500 \\ 11 & -0,6000 & -0,3000 & -0,1500 \end{bmatrix} \cdot a. \quad (11.2)$$

Следующим шагом в подготовке данных к вычислению перемещений является построение матрицы податливости для ЗРС. Это построение основано на данных о ЗРС (см рис. 11.1) и схеме дискретизации (см. рис. 11.4).

$$\mathbf{b}_I = \mathbf{b}_{II} = \frac{1,5a}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{III} = \mathbf{b}_V = \frac{2a}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{IV} = \frac{2a}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{b}_I = \mathbf{b}_{II} = \frac{a}{12EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{III} = \mathbf{b}_V = \frac{a}{12EJ} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{IV} = \frac{a}{12EJ} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Подробности осуществляемых действий изложены ранее в примере вычисления перемещений от статической нагрузки (глава 6, п. 6.3). Напомним только, что выделение наименьшего общего множителя в каждой из подматриц является обязательной операцией, поскольку без нее нельзя собрать матрицу податливости ЗРС (11.3).

$$[B] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_I & & & & & & & & & & \\ & \mathbf{b}_{II} & & & & & & & & & \\ & & \mathbf{b}_{III} & & & & & & & & \\ & & & \mathbf{b}_{IV} & & & & & & & \\ & & & & \mathbf{b}_V & & & & & & \\ & & & & & \mathbf{b}_Y & & & & & \end{bmatrix} = \frac{a}{12EJ} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 6 & 3 & & & & & & & & \\ 2 & 3 & 6 & & & & & & & & \\ 3 & & & 6 & 3 & & & & & & \\ 4 & & & 3 & 6 & & & & & & \\ 5 & & & & & 4 & 2 & & & & \\ 6 & & & & & 2 & 4 & & & & \\ 7 & & & & & & & 2 & & & \\ 8 & & & & & & & & 8 & & \\ 9 & & & & & & & & & 2 & \\ 10 & & & & & & & & & 4 & 2 \\ 11 & & & & & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (11.3)$$

В принципе, мы готовы к вычислению матрицы δ_{ik} , однако имеется возможность уменьшить размеры матриц, как это делалось в статике (глава 6, п. 6.3):

$$(\overline{M}_{ik}^I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1,500 & -1,500 \\ 4 & 0 & -3,000 & -1,500 \\ 6 & -0,3000 & +0,6000 & +0,3000 \\ 8 & +0,1250 & +0,3750 & +0,1875 \\ 9 & +0,5500 & +0,1500 & +0,0750 \\ 11 & -0,6000 & -0,3000 & -0,1500 \end{bmatrix} \cdot a; \quad B_{\min} = \frac{a}{12EJ} \begin{bmatrix} 2 & 12 & 3 & & & \\ 4 & 3 & 10 & 2 & & \\ 6 & & 2 & 6 & & \\ 8 & & & & 8 & \\ 9 & & & & & 6 & 2 \\ 11 & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Вычислим компоненты матрицы δ_{ik} :

$$\begin{aligned}
 [\delta_{ik}] &= (\bar{M}_{ik}^I)^T [B]_{\min} (\bar{M}_{ik}^I) = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,3000 & +0,1250 & +0,5500 & -0,6000 \\ 0 & -3,000 & +0,6000 & +0,3750 & +0,1500 & -0,3000 \\ -1,500 & -1,500 & +0,3000 & +0,1875 & +0,0750 & -0,1500 \end{pmatrix} a \times \\
 &\times \frac{a}{12EJ} \begin{bmatrix} 12 & 3 & & & & \\ 3 & 10 & 2 & & & \\ & 2 & 6 & & & \\ & & & 8 & & \\ & & & & 6 & 2 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1,500 & -1,500 \\ 0 & -3,000 & -1,500 \\ -0,3000 & +0,6000 & +0,3000 \\ +0,1250 & +0,3750 & +0,1875 \\ +0,5500 & +0,1500 & +0,0750 \\ -0,6000 & -0,3000 & -0,1500 \end{pmatrix} a = \\
 &= \frac{a^2}{12EJ} \begin{pmatrix} 0 & -0,6000 & -1,800 & 1,000 & 2,100 & -1,300 \\ -27,00 & -33,30 & -2,400 & 3,000 & 0,3000 & -0,9000 \\ -22,50 & -18,90 & -1,200 & 1,500 & 0,1500 & -0,4500 \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 0 & -1,500 & -1,500 \\ 0 & -3,000 & -1,500 \\ -0,3000 & +0,6000 & +0,3000 \\ +0,1250 & +0,3750 & +0,1875 \\ +0,5500 & +0,1500 & +0,0750 \\ -0,6000 & -0,3000 & -0,1500 \end{pmatrix} a = \frac{a^3}{12EJ} \begin{bmatrix} 2,600 & 1,800 & 0,9000 \\ 1,800 & 140,4 & 90,45 \\ 0,9000 & 90,45 & 62,10 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{a^3}{EJ} \begin{bmatrix} 0,2166 & 0,1500 & 0,0750 \\ 0,1500 & 11,70 & 7,537 \\ 0,0750 & 7,537 & 5,175 \end{bmatrix}. \tag{11.4}
 \end{aligned}$$

Теперь можно приступить к вычислению границ интервала оценки:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} m_i = \delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2 + \delta_{33} m_3 = \\
 &= 0,2166 \frac{a^3}{EJ} \cdot 3m + 11,70 \frac{a^3}{EJ} \cdot 4m + 5,175 \frac{a^3}{EJ} \cdot 2m = 57,8 \frac{ma^3}{EJ}; \\
 B_2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^2 m_i m_k = \sum_{i=1}^3 (\delta_{i1}^2 m_i m_1 + \delta_{i2}^2 m_i m_2 + \delta_{i3}^2 m_i m_3) = \\
 &= (\delta_{11}^2 m_1 m_1 + \delta_{21}^2 m_1 m_2 + \delta_{31}^2 m_1 m_3) + \\
 &+ (\delta_{21}^2 m_2 m_1 + \delta_{22}^2 m_2 m_2 + \delta_{23}^2 m_2 m_3) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +(\delta_{31}^2 m_3 m_1 + \delta_{32}^2 m_3 m_2 + \delta_{33}^2 m_3 m_3) &= 3207 \left(\frac{ma^3}{EJ} \right)^2; \\
 \frac{1}{\sqrt[4]{B_2}} = 0,1328 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}} < \omega < \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} = 0,1342 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}.
 \end{aligned}
 \tag{11.5}$$

11.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЧАСТОТ

Уравнения движения масс с конечным числом динамических степеней свободы в условиях отсутствия сил сопротивления являются уравнениями равновесия сил, включая силу инерции, приложенных к тяжелой точке. Поскольку исследуется движение в виде колебаний, причем предполагается, что массы колеблются с одной частотой (ее величина может быть *любой* из спектра значений!), постольку из уравнений равновесия системы с конечным числом степеней свободы зависимость характеристик НДС от времени можно исключить. Соответствующие уравнения принимают вид:

$$\left[-\omega_s^2 \delta_{ik} m_k + e_{ik} \right] \cdot \{Y_k^A\} = \{0\}, \text{ где } e_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}.$$

Здесь $\{Y_k^A\}$ — вектор амплитудных перемещений тяжелых точек

по направлениям эффективных динамических степеней свободы, а m_k — величина массы, создающей силу инерции в направлении k -й степени свободы. В процессе собственных колебаний вектор амплитудных перемещений не может быть тождественно нулевым, так как в противном случае в любой момент времени текущие перемещения обращаются в ноль — движение отсутствует. Этот вывод следует из гипотезы о характере движения k -й тяжелой точки $y_{k,s}(t) = Y_k^A \cos(\omega_s t)$, что соответствует колебаниям без начальных скоростей масс.

Выполнить условие $\{Y_k^A\} \neq \{0\}$ можно, если потребовать, чтобы определитель соответствующей системы уравнений был равен нулю. Таким образом, записав равенство нулю определителя, мы формулируем уравнение относительно частоты спектра ω_s^2 , так как все другие компоненты элементов определителя нам уже известны (см. рис. 11.2, б и формулы (11.4)):

$$\det \left[-\omega_s^2 \delta_{ik} m_k + e_{ik} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} -\omega_s^2 \delta_{11} m_1 + e_{11} & -\omega_s^2 \delta_{12} m_2 + e_{12} & -\omega_s^2 \delta_{13} m_3 + e_{13} \\ -\omega_s^2 \delta_{21} m_1 + e_{21} & -\omega_s^2 \delta_{22} m_2 + e_{22} & -\omega_s^2 \delta_{23} m_3 + e_{23} \\ -\omega_s^2 \delta_{31} m_1 + e_{31} & -\omega_s^2 \delta_{32} m_2 + e_{32} & -\omega_s^2 \delta_{33} m_3 + e_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\omega_s^2 \cdot \frac{0,2166a^3}{EJ} \cdot 3m + 1 & -\omega_s^2 \cdot \frac{0,1500a^3}{EJ} \cdot 4m & -\omega_s^2 \cdot \frac{0,0750a^3}{EJ} \cdot 2m \\ -\omega_s^2 \cdot \frac{0,1500a^3}{EJ} \cdot 3m & -\omega_s^2 \cdot \frac{11,70a^3}{EJ} \cdot 4m + 1 & -\omega_s^2 \cdot \frac{7,537a^3}{EJ} \cdot 2m \\ -\omega_s^2 \cdot \frac{0,0750a^3}{EJ} \cdot 3m & -\omega_s^2 \cdot \frac{7,537a^3}{EJ} \cdot 4m & -\omega_s^2 \cdot \frac{5,175a^3}{EJ} \cdot 2m + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решения сформулированного уравнения удобно получать, когда это уравнение записано в безразмерном виде. Для этого элементы каждой строки определителя поделим на общий размерный множитель $(-1) \cdot \omega_s^2 \cdot (a^3 / EJ) \cdot m$, тогда уравнение частот примет вид:

$$f(\lambda_s) = \begin{vmatrix} 0,6498 - \lambda_s & 0,6000 & 0,1500 \\ 0,4500 & 46,80 - \lambda_s & 15,07 \\ 0,2250 & 30,14 & 10,35 - \lambda_s \end{vmatrix} = 0, \text{ где } \lambda_s = \frac{EJ}{\omega_s^2 m a^3} > 0. \quad (11.6)$$

Процедура поиска решения этого уравнения не отличается от соответствующей процедуры в задаче устойчивости. Поэтому для отделения корня протабулируем функцию определителя с шагом 10,0 по аргументу λ (табл. 11.1). Назначение величины шага может быть основано на значениях границ интервала оценки минимальной частоты. По формуле (11.6) для левой границы имеем $\lambda_{лев} = 1/0,1328^2 = 56,70$, а для правой $\lambda_{пра} = 1/0,1342^2 = 55,26$. Длина интервала отделения для параметра λ составляет 1,44, откуда и следует выбор шага отделения корня уравнения.

Таблица 11.1

λ	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0
f	4131	13800	23030	25820	16180	-11900	-64430
λ	80,0	90,0	100,0	110,0	120,0	130,0	140,0
f	-147400	-266800	-428600	-638900	-903600	-1228000	-1620000

Данные табл. 11.1 показывают, что функция меняет знак на интервале (50,0; 60,0). Следовательно, уточнение значения корня нужно проводить именно в этом интервале. Для этого, как и в задаче устойчивости, применим метод половинного деления.

В табл. 11.2 приведены результаты, которые получаются в ходе реализации процедуры уточнения корня.

Таблица 11.2

v	50	60	55	57,5	56,25	56,87	56,56
f	+16180	-11900	+4816	-2828	+1167	-770,4	+209,2
v	56,71	56,63	56,59	56,61	56,62	56,62	...
f	-262,0	-10,05	+115,4	+52,72	+21,34	+21,34	...

Заметьте, что характер процедуры уточнения носит достаточно сложный характер: уточняется как положение левой, так и положение правой границы интервала, содержащего корень. Прекращение уточнения корня связано с тем, что с принятой погрешностью вычислений (четыре значащие цифры) уточнение продолжить невозможно. Поэтому принимаем значение корня уравнения частот равным 56,62.

Отметим также, что найденное значение корня не может быть единственным! Это следует из физического смысла задачи — каждой эффективной динамической степени свободы соответствуют колебания со своей частотой. Поэтому следует продолжить поиск корней, так как найденное значение не обязательно является минимальным.

Прежде всего, исследуем поведение функции определителя в интервале от 0 до 50. Во-первых этот интервал имеет ограниченную длину, а во-вторых, если мы обнаружим еще два корня, то они будут соответствовать заведомо большим частотам, нежели найденное выше, так как соответствуют меньшим значением параметра λ .

Поскольку с ранее назначенным шагом корни в интервале (0, 50) не были обнаружены, шаг поиска нужно уменьшить хотя бы до 1,0. Однако полученные результаты не дали ни одного интервала отделения. Поэтому вторая попытка проводилась с шагом, уменьшенным еще в 10 раз. Отделение корней с этим шагом отражено в табл. 11.3

Таблица 11.3

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
f	+13,04	+8,095	+4,290	+1,623	+0,08814	-0,32102	+0,3898
λ	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
f	+2,214	5,147	+9,182	+14,31	+20,534	+27,83	+36,22

Из данных табл. 11.3 следует наличие интервалов (0,5; 0,6) и (0,6; 0,7), содержащих корни, значения которых (0,5086 и 0,6633) меньше корня, найденного ранее. Таким образом, уточнять их значения имеет смысл только при необходимости определения всех частот заданной расчетной схемы. Но выполнять это надежнее с применением ЭВМ.

Итак, воспользовавшись выводами, сделанными при уточнении корня (табл. 11.2) и формулой (11.6), получим для первых трех частот собственных колебаний значения:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 \approx \frac{1}{56,62} \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}} \approx 0,1329 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}} \approx 0,133 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}; \\ \omega_2 &\approx \frac{1}{0,6633} \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}} \approx 1,23 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}; \quad \omega_3 \approx \frac{1}{0,5086} \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}} \approx 1,40 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}.\end{aligned}\quad (11.7)$$

11.5. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Как и в задаче устойчивости, мы не можем получить абсолютные значения амплитудных перемещений, поскольку определитель системы уравнений равновесия равен нулю (11.6). Поэтому выполним процедуру, аналогичную процедуре при построении формы потери устойчивости (см. главу 10, п. 10.4), когда мы приводили систему уравнений к безразмерному виду и вводили относительные перемещения, выбирая в качестве масштаба перемещение с наибольшим номером:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 0,6498 - \lambda_s & 0,6000 & 0,1500 \\ 0,4500 & 46,80 - \lambda_s & 15,07 \\ 0,2250 & 30,14 & 10,35 - \lambda_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{1,s}^A \\ Y_{2,s}^A \\ Y_{3,s}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\&\begin{bmatrix} 0,6498 - 56,62 & 0,6000 & 0,1500 \\ 0,4500 & 46,80 - 56,62 & 15,07 \\ 0,2250 & 30,14 & 10,35 - 56,62 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{1,1}^A \\ Y_{2,1}^A \\ Y_{3,1}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\&\begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{1,1}^A \\ \tilde{Y}_{2,1}^A \\ \tilde{Y}_{3,1}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{1,1}^A / Y_{3,1}^A \\ Y_{2,1}^A / Y_{3,1}^A \\ Y_{3,1}^A / Y_{3,1}^A \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -55,97 & 0,6000 & 0,1500 \\ 0,4500 & -9,820 & 15,07 \\ 0,2250 & 30,14 & -46,27 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{1,1}^A \\ \tilde{Y}_{2,1}^A \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\&\begin{bmatrix} -55,97 & 0,6000 \\ 0,4500 & -9,820 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{1,1}^A \\ \tilde{Y}_{2,1}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,1500 \\ -15,07 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{1,1}^A \\ \tilde{Y}_{2,1}^A \\ \tilde{Y}_{3,1}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,01914 \\ 1,535 \\ 1,000 \end{Bmatrix}. \quad (11.8)$$

По амплитудным значениям относительных перемещений строится картина деформирования рамы в процессе колебаний с минимальной частотой спектра (рис. 11.6). Правило знаков полученных относительных перемещений то же, что и в задаче устойчивости (глава 10, п. 10.4).

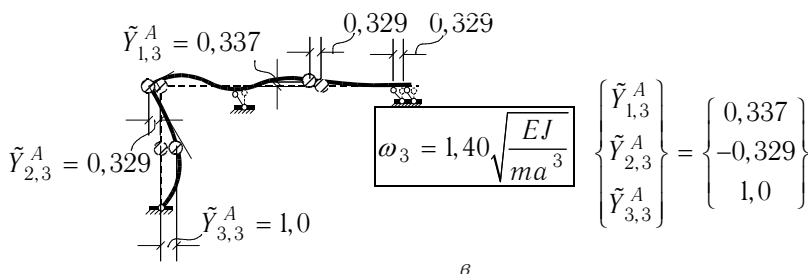
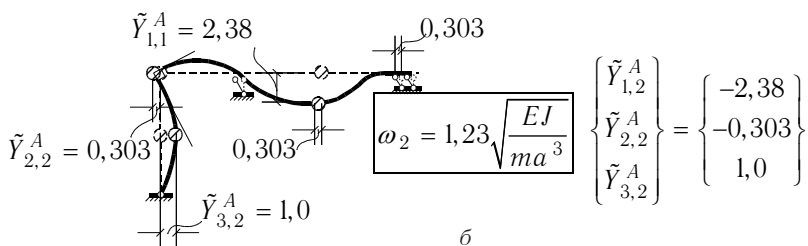
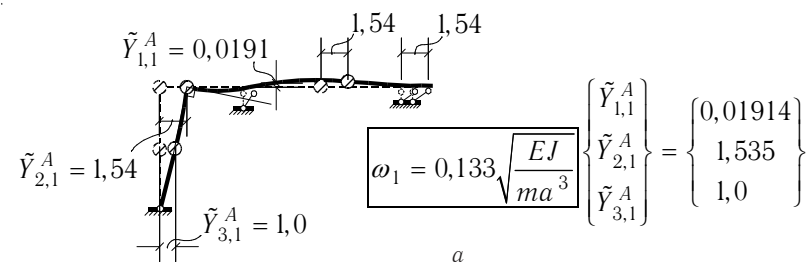


Рис. 11.6

Представляет интерес анализ различий в формах колебаний с ростом частоты. Сравнение форм может быть основано на том, что имеется общий масштаб — перемещение по третьему направлению, во всех формах равное единице. Итак, стойка наименее искривлена при минимальной частоте колебаний, и максимально — при высшей частоте. Ригель при минимальной частоте имеет две смены знака кривизны, а при третьей — три смены знака. При одной и той же длине ригеля это возможно только за счет увеличения кривизны. Если же сравнивать кривизны ригеля при первой и второй частотах, то видно, что во второй форме кривизны больше за счет больших прогибов.

Таким образом, колебания с большей частотой сопровождается большими деформациями искривления. Это означает, что для возбужде-

ния собственных колебаний соответствующих частот, нужно затратить большую работу при создании начального отклонения. Именно поэтому низшие частоты возбудить легче.

11.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Наличие динамической нагрузки может существенно изменить характер распределения усилий по сечениям расчетной схемы. Особенно этот эффект заметен, когда частота изменения внешних сил *близка* к одной из частот спектра собственных частот. С целью получения количественных характеристик упомянутого эффекта продолжим рассмотрение примера с учетом действия нагрузок, изображенных на рис. 11.1, б.

Поскольку исследуются *установившиеся* вынужденные колебания, постольку удастся вывести влияние времени за пределы разрешающей системы уравнений, которая записывается как система уравнения равновесия в произвольный момент времени. Равновесие в каждой тяжелой точке создается в результате взаимодействия упругих сил, сил инерции и внешних сил. Все действующие силы во времени изменяются по одному и тому же закону, причем, по такому же закону изменяются и прочие характеристики НДС. Система уравнений равновесия имеет вид:

$$\left[-\theta^2 \delta_{ik} m_k + e_{ik} \right] \cdot \{Y_i^{*A}\} + \{\Delta_i\} = \{0\}; \quad \{\Delta_i\} = (\bar{M}_{ik}^I)^T [B] \{M_p^A\},$$

где θ — частота вынуждающего воздействия; $\{\Delta_i\}$ — вектор перемещений тяжелых точек по направлениям эффективных динамических степеней свободы от действия *амплитудных* значений внешних сил, приложенных статическим образом; $\{Y_i^{*A}\}$ — амплитудные перемещения тяжелых точек по тем же направлениям (эти перемещения определяют значения амплитудных сил инерции); другие составляющие матричного уравнения имеют тот же смысл, что и составляющие аналогичного уравнения собственных колебаний.

11.6.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ АМПЛИТУДНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Определение перемещений Δ_i требует наличия эпюры изгибающих моментов, построенной от статически приложенных нагрузок, заданных своими амплитудными значениями (см. рис. 11.1, б). Способ построения этой эпюры в случае статической неопределимости ЗРС зависит от выбора исполнителя и основан на критерии минимальной трудоемкости.

Расчетная схема с амплитудными нагрузками и эпюра изгибающих моментов от них приведены на рис. 11.7. Ординаты эпюры вычислены в контролируемых сечениях схемы дискретизации, построенной на рис. 11.4.

Минимизируя размер грузовой матрицы, с учетом промежуточных результатов в виде формул (11.4), вычислим элементы матрицы $\{\Delta_i\}$:

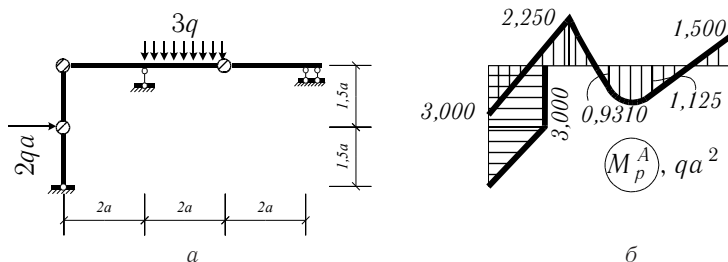


Рис. 11.7

$$\begin{aligned}
 \{M_p^A\} &= qa^2 \begin{Bmatrix} -3,000 \\ -3,000 \\ 2,250 \\ -0,9315 \\ -1,125 \\ 1,500 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta_i\} = (\bar{M}_{ik}^I)^T [B] \{M_p^A\} = \\
 &= \frac{a^2}{12EJ} \begin{pmatrix} 0 & -0,6000 & -1,800 & 1,000 & 2,100 & -1,300 \\ -27,00 & -33,30 & -2,400 & 3,000 & 0,3000 & -0,9000 \\ -22,50 & -18,90 & -1,200 & 1,500 & 0,1500 & -0,4500 \end{pmatrix} \{M_p^A\} = \\
 &= \frac{a^2}{12EJ} \begin{pmatrix} 0 & -0,6000 & -1,800 & 1,000 & 2,100 & -1,300 \\ -27,00 & -33,30 & -2,400 & 3,000 & 0,3000 & -0,9000 \\ -22,50 & -18,90 & -1,200 & 1,500 & 0,1500 & -0,4500 \end{pmatrix} \times \\
 &\times qa^2 \begin{Bmatrix} -3,000 \\ -3,000 \\ 2,250 \\ -0,9315 \\ -1,125 \\ 1,500 \end{Bmatrix} = \frac{qa^4}{12EJ} \begin{Bmatrix} -7,494 \\ 171,0 \\ 119,2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta_i\} = \frac{qa^4}{EJ} \begin{Bmatrix} -0,6245 \\ 14,25 \\ 9,938 \end{Bmatrix}. \quad (11.9)
 \end{aligned}$$

11.6.2. ФОРМИРОВАНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Задавшись значением $\beta_s = \theta / \omega_s$ (см. рис. 11.1, б), можно составить разрешающую систему уравнений задачи установившихся вынужденных колебаний для ЗРС. При этом удобно воспользоваться преобразованием, которое мы применяли в задаче собственных колебаний (11.6), (11.8), записывая уравнения с безразмерными коэффициентами.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0,6498 - \frac{\lambda_s}{\beta_s^2} & 0,6000 & 0,1500 \\ \hline 0,4500 & 46,80 - \frac{\lambda_s}{\beta_s^2} & 15,07 \\ \hline 0,2250 & 30,14 & 10,35 - \frac{\lambda_s}{\beta_s^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta_s^2}{\lambda_s} \cdot \frac{Y_{1,s}^{*A}}{\left(\frac{qa^4}{EJ}\right)} \\ \frac{\beta_s^2}{\lambda_s} \cdot \frac{Y_{2,s}^{*A}}{\left(\frac{qa^4}{EJ}\right)} \\ \frac{\beta_s^2}{\lambda_s} \cdot \frac{Y_{3,s}^{*A}}{\left(\frac{qa^4}{EJ}\right)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -0,6245 \\ 14,25 \\ 9,938 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0,6498 - \frac{\lambda_s}{\beta_s^2} & 0,6000 & 0,1500 \\ \hline 0,4500 & 46,80 - \frac{\lambda_s}{\beta_s^2} & 15,07 \\ \hline 2,250 & 30,14 & 10,35 - \frac{\lambda_s}{\beta_s^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}_{1,s}^{*A} \\ \tilde{Y}_{2,s}^{*A} \\ \tilde{Y}_{3,s}^{*A} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -0,6245 \\ 14,25 \\ 9,938 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\tilde{Y}_{i,s}^{*A} = \frac{\beta_s^2}{\lambda_s} \cdot \frac{Y_{i,s}^{*A}}{\left(\frac{qa^4}{EJ}\right)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, W_\partial).$$

Заметим, что проведенные преобразования не следует проводить для каждой задачи заново, поскольку они связаны только с операциями над масштабами и никак не затрагивают численные значения коэффициентов и свободных членов, а также не связаны с размерностью задачи, которая определяется значением W_∂ .

Составим и решим систему уравнений примера для $\beta_l = 0,8$.

$$\begin{bmatrix} 0,6498 - \frac{56,62}{0,8^2} & 0,6000 & 0,1500 \\ 0,4500 & 46,80 - \frac{56,62}{0,8^2} & 15,07 \\ 0,2250 & 30,14 & 10,35 - \frac{56,62}{0,8^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{1,1}^{*A} \\ \tilde{Y}_{2,1}^{*A} \\ \tilde{Y}_{3,1}^{*A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,6245 \\ 14,25 \\ 9,938 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (11.10)$$

$$\begin{bmatrix} -87,81 & 0,6000 & 0,1500 \\ 0,4500 & -41,66 & 15,07 \\ 0,2250 & 30,14 & -78,11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{1,1}^{*A} \\ \tilde{Y}_{2,1}^{*A} \\ \tilde{Y}_{3,1}^{*A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,6245 \\ 14,25 \\ 9,938 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{1,1}^{*A} \\ \tilde{Y}_{2,1}^{*A} \\ \tilde{Y}_{3,1}^{*A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,003516 \\ -0,4509 \\ -0,3011 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{1,1}^{*A} \\ Y_{2,1}^{*A} \\ Y_{3,1}^{*A} \end{Bmatrix} = \frac{\lambda_1}{\beta_1^2} \cdot \frac{qa^4}{EJ} \begin{Bmatrix} 0,003516 \\ -0,4509 \\ -0,3011 \end{Bmatrix} = \frac{56,62}{0,8^2} \cdot \frac{qa^4}{EJ} \begin{Bmatrix} 0,003516 \\ -0,4509 \\ -0,3011 \end{Bmatrix} = \frac{qa^4}{EJ} \begin{Bmatrix} 0,3110 \\ -39,89 \\ -26,64 \end{Bmatrix}.$$

11.6.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ АМПЛИТУДНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Найденные значения амплитудных перемещений позволяют определить амплитудные значения сил инерции, возникающих при вынужденных колебаниях, для чего используется принятый закон движения и второй закон Ньютона:

$$y_{i,s}(t) = Y_{i,s}^{*A} \cos(\theta_s t) \Rightarrow I_i(t) = I_{i,s}^A \cos(\theta_s t) = m_i \frac{d^2 y_{i,s}(t)}{dt^2} \Rightarrow$$

$$I_{i,s}^A = -m_i \theta_s^2 Y_{i,s}^{*A} = -m_i \beta_s^2 \omega_s^2 \Rightarrow \{I_{i,s}^A\} = -\beta_s^2 \omega_s^2 \{m_i Y_{i,s}^{*A}\} \Rightarrow \quad (11.11)$$

$$\begin{Bmatrix} I_{1,1}^A \\ I_{2,1}^A \\ I_{3,1}^A \end{Bmatrix} = -0,8^2 \cdot \left(0,133 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}} \right)^2 \cdot \frac{qa^4}{EJ} \begin{Bmatrix} 3m \cdot (0,3110) \\ 4m \cdot (-39,89) \\ 2m \cdot (-26,64) \end{Bmatrix} = qa \begin{Bmatrix} -0,01056 \\ 1,806 \\ 0,6031 \end{Bmatrix}.$$

Наличие значений сил инерции позволяет нам получить эпюру амплитудных значений изгибающих моментов, используя принцип наложения воздействий в форме:

$$\{M_{\partial,s}^A\} = \{M_p^A\} + \sum_{i=1}^{W_{\partial}} I_{i,s}^A \{\bar{M}_i^I\}.$$

Применительно к рассматриваемому примеру, получим:

$$\{M_{\partial,1}^A\} = \{M_p^A\} + I_{1,1}^A \{\bar{M}_1^I\} + I_{2,1}^A \{\bar{M}_2^I\} + I_{3,1}^A \{\bar{M}_3^I\}.$$

Реализация вычислений по этим формулам с учетом результатов (11.2), (11.9) и (11.11) позволяет получить матрицу амплитудных значений изгибающего момента при установившихся вынужденных колебаниях с частотой воздействия, составляющей 0,8 от минимальной частоты собственных колебаний:

$$\begin{aligned} \{M_{\partial,1}^A\} = qa^2 \cdot \begin{Bmatrix} 2 & -3,000 \\ 4 & -3,000 \\ 6 & 2,250 \\ 8 & -0,9315 \\ 9 & -1,125 \\ 11 & 1,500 \end{Bmatrix} + (-0,01056qa) \cdot a \cdot \begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 6 & -0,3000 \\ 8 & 0,1250 \\ 9 & 0,5500 \\ 11 & -0,6000 \end{Bmatrix} + \\ + (1,806qa) \cdot a \cdot \begin{Bmatrix} 2 & -1,500 \\ 4 & -3,000 \\ 6 & 0,6000 \\ 8 & 0,3750 \\ 9 & 0,1500 \\ 11 & -0,3000 \end{Bmatrix} + (0,6031qa) \cdot a \cdot \begin{Bmatrix} 2 & -1,500 \\ 4 & -1,500 \\ 6 & 0,3000 \\ 8 & 0,1875 \\ 9 & 0,0750 \\ 11 & -0,1500 \end{Bmatrix} = qa^2 \cdot \begin{Bmatrix} 2 & -6,61 \\ 4 & -9,32 \\ 6 & 3,52 \\ 8 & -0,142 \\ 9 & -0,815 \\ 11 & 0,874 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

По матричной форме (11.12) амплитудной эпюры изгибающих моментов на рис. 11.8, б восстановлена эпюра традиционного вида. Для наглядности рядом с ней отображена эпюра от статического действия тех же нагрузок (рис. 11.8, а), скопированная с рис. 11.7, б.

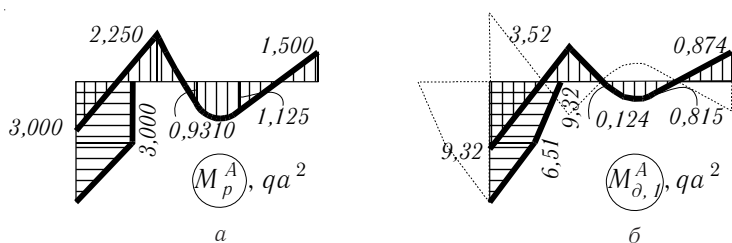


Рис. 11.8

Поскольку во времени все характеристики, в том числе и изгибающий момент, изменяются по закону косинуса, то через каждый промежуток времени, равный полупериоду π/θ_s , знак характеристики изменяется на противоположный. Смена знака для амплитудной эпюры изгибающего момента зафиксирована в виде пунктирной линии на рис. 11.8, б.

Сравнительный анализ эюр рис. 11.8 позволяет убедиться в том, что динамическое приложения нагрузки изменяет не только ординаты эюры по величине, но изменяет также и положение растянутых волокон в сечениях расчетной схемы.

Чтобы получить результаты, соответствующие другим частотам нашего примера, следует повторить операции, реализованные в формулах (11.10)-(11.12), при следующих значениях определяющих параметров

$$s = 2 \left(\omega_2 = 1,23 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}; \lambda_2 = 0,6633; \beta_2 = 0,8 \right);$$

$$s = 3 \left(\omega_3 = 1,40 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}; \lambda_3 = 0,5086; \beta_3 = 0,8 \right).$$

соответственно. Итоги этих вычислений представлены формулами (11.13) и отображаются эюрами на рис. 11.9.

$$\{M_{\partial,2}^A\} = qa^2 \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 11 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -2,45 \\ 1,60 \\ 3,32 \\ -2,34 \\ -5,01 \\ 5,95 \end{Bmatrix}; \quad \{M_{\partial,3}^A\} = qa^2 \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 11 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -4,92 \\ 3,02 \\ 6,78 \\ -4,07 \\ -11,9 \\ 13,6 \end{Bmatrix}. \quad (11.13)$$

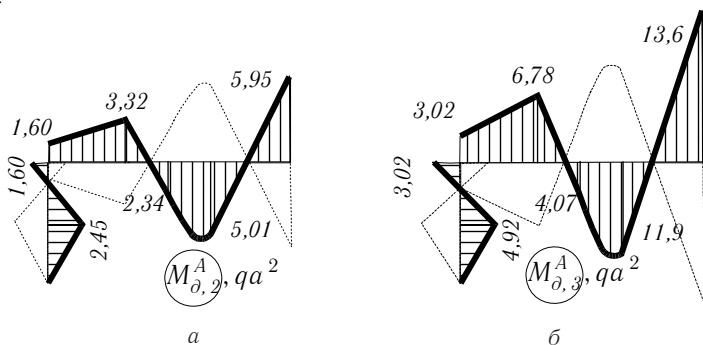


Рис. 11.9

По данным этого рисунка несложно вычислить силы инерции, возникающие при движении с соответствующими частотами.

Операционный алгоритм решения задачи колебаний системы с конечным числом динамических степеней свободы приведен на рис. 11.10.

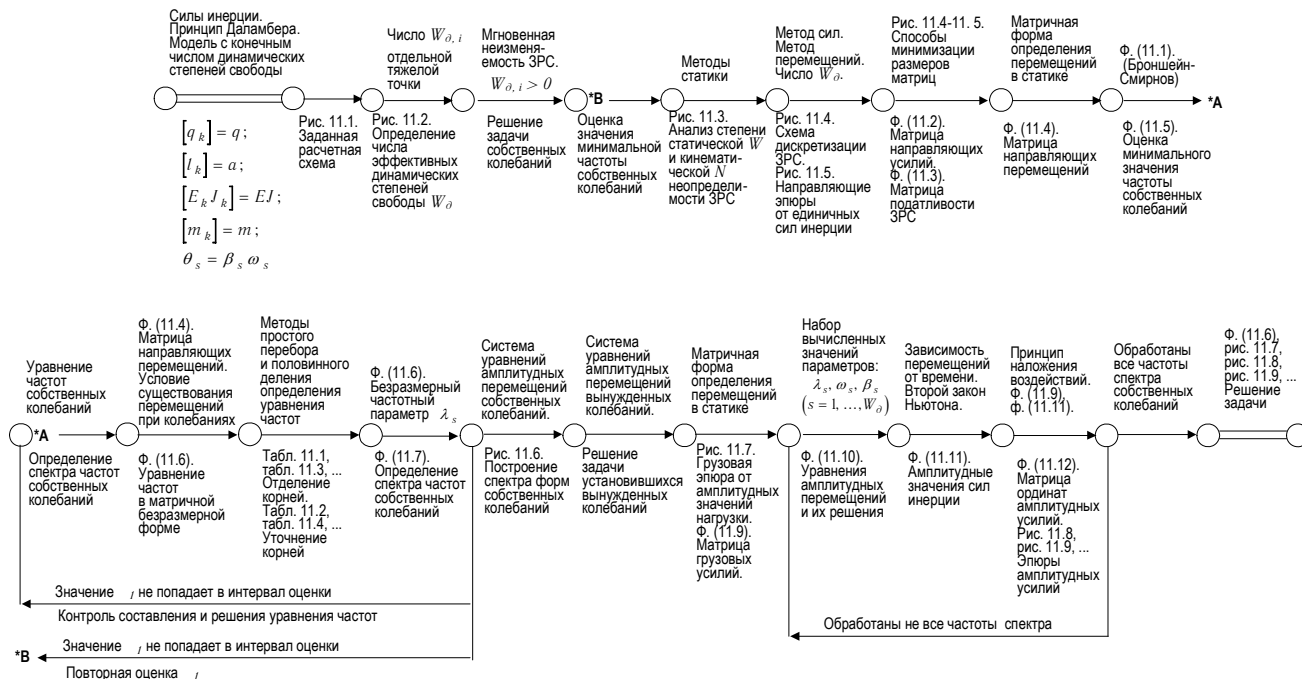


Рис. 11.10

Приложение 1

П1.4. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ

П1.4.1. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ РАМ НА ВИБРАЦИОННУЮ НАГРУЗКУ

1. Расчетные схемы выбираются на рис. П1.11-П1.12. Заданная на схемах нагрузка задана амплитудными значениями. Закон изменения нагрузки во времени является гармоническим. Отношение частоты возмущения к собственной частоте — 0,8.

2. Характерные размеры расчетной схемы определяются координатной сеткой рисунка (сторона квадрата равна a).

3. Учет сил инерции производится в форме сосредоточенных масс, величина которых пропорциональна длинам участков и их изгибной жесткости (EJ — для вертикальных участков и $2EJ$ — для горизонтальных).

П1.4.2. РАСЧЕТ РАМ С УЗЛОВОЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

1. Расчетные схемы (без нагрузки) выбираются на рис. П1.11-П1.12. Характерные размеры расчетной схемы определяются координатной сеткой рисунка (сторона квадрата равна a).

2. Значения узловой нагрузки в виде сосредоточенных сил задаются в масштабе P (горизонтальные равны P , а вертикальные $2P$).

3. Жесткостные характеристики участков: вертикальные имеют жесткость на изгиб, равную EJ , а горизонтальные участки — $2EJ$).

Приложение 1

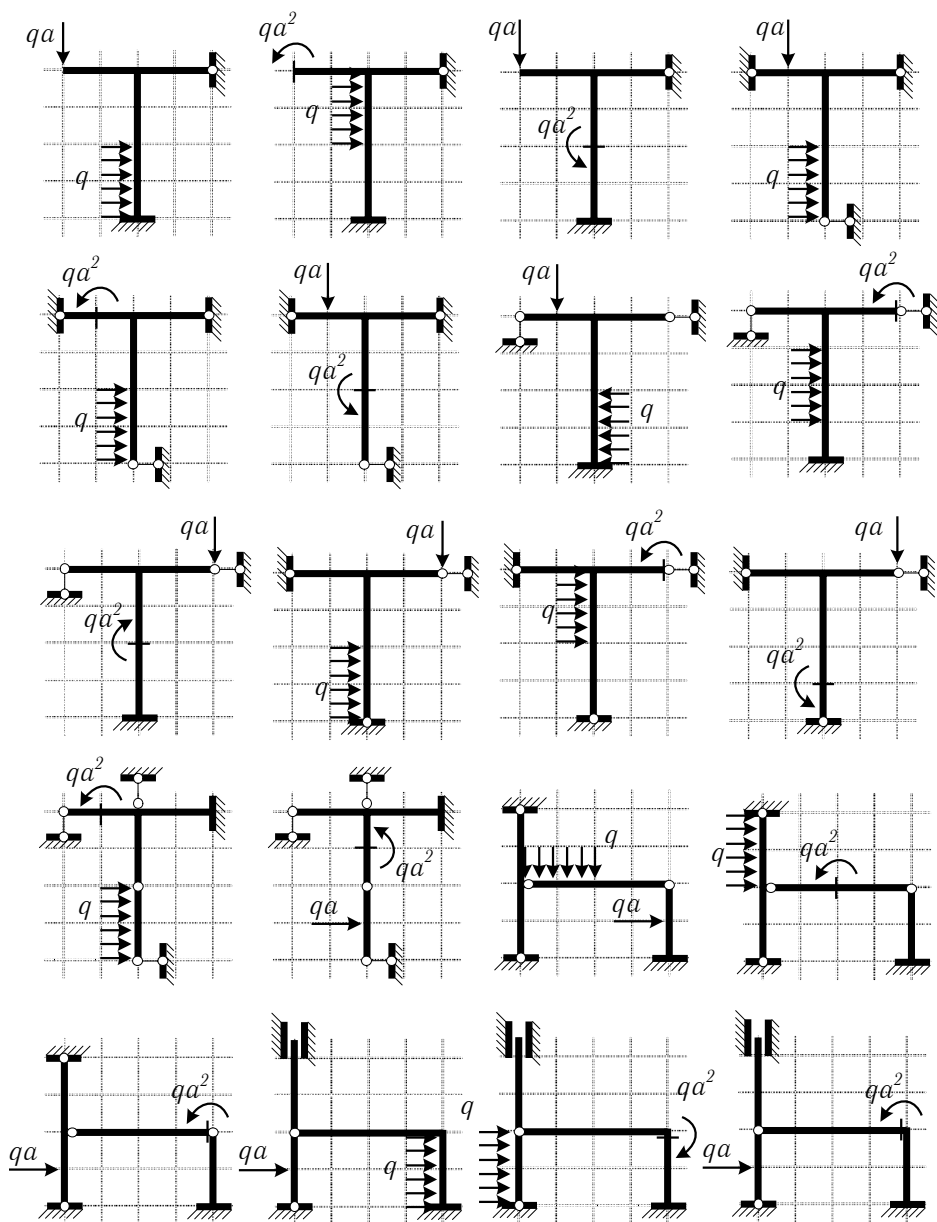


Рис. П1.11

Расчетные схемы для самостоятельного расчета

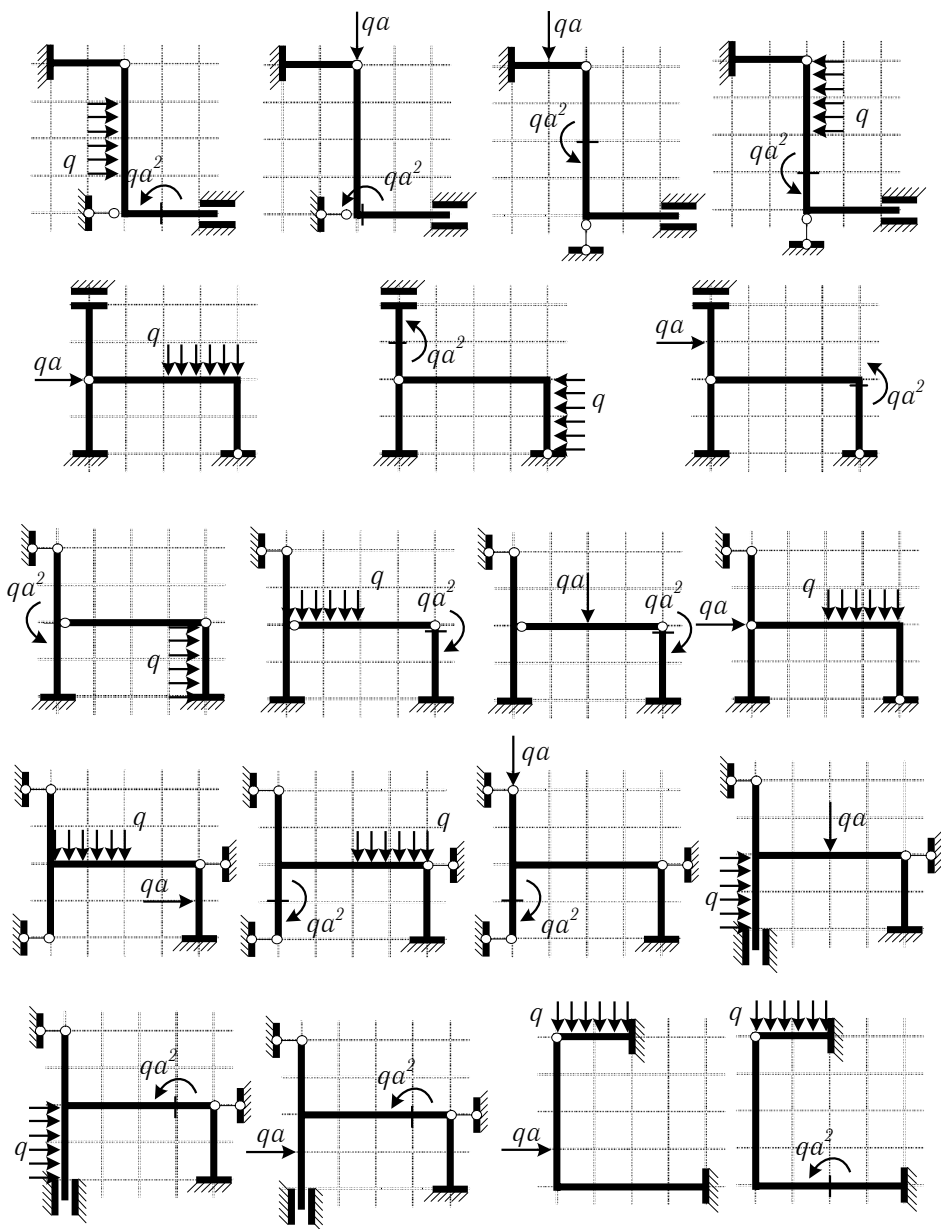


Рис. П1.12

Приложение 2

П2.5. РАСЧЕТ НА СТАТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ

2.5.1. Для расчетных схем табл. П2.22 установить соответствие между подмножеством значений коэффициентов свободной длины и формой потери устойчивости отдельного стержня.

Таблица П2.22

1 (1,0;0,7;0,7;0,5)	2 (2,0;1,0;1,0;0,7)	3 (∞ ;2,0;0,7;0,5)	4 (2,0;1,0;1,0;0,5)	5 (∞ ;2,0;0,7;0,7)
6 (∞ ;2,0;2,0;1,0)	7 (∞ ;2,0;1,0;0,5)	8 (2,0;1,0;1,0;0,7)	9 (∞ ;1,0;1,0;0,7)	10 (2,0;2,0;1,0;0,7)

Тестовые задания

Окончание табл. П2.22

11 (2,0;1,0;0,7;0,7)	12 (∞ ;2,0;2,0;0,7)	13 (2,0;1,0;0,7;0,5)	14 (∞ ;2,0;2,0;1,0)	15 (2,0;0,7;0,7;0,5)
16 (∞ ;2,0;1,0;0,7)	17 (2,0;1,0;1,0;0,7)	18 (∞ ;2,0;2,0;0,7)	19 (∞ ;2,0;1,0;0,7)	20 (2,0;2,0;0,7;0,7)

2.5.2. Для сжатого участка заданной расчетной схемы табл. П2.23 дать оценку значения коэффициента свободной длины.

Таблица П2.23

1 	2 	3 	4 	5
6 	7 	8 	9 	10
11 	12 	13 	14 	15
16 	17 	18 	19 	20

2.5.3. Для форм потери устойчивости табл. П2.24, дать оценку коэффициента свободной длины сжатого участка.

Таблица П2.24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

2.5.4. Для расчетных схем табл. П2.25 расположить формы потери устойчивости в порядке возрастания значения критической силы.

Таблица П2.25

1 (1,2,3,4)	2 (1,2,3,4)	3 (1,2,3,4)	4 (1,2,3,4)	5 (1,2,3,4)
6 (1,2,3,4)	7 (1,2,3,4)	8 (1,2,3,4)	9 (1,2,3,4)	10 (1,2,3,4)
11 (1,2,3,4)	12 (1,2,3,4)	13 (1,2,3,4)	14 (1,2,3,4)	15 (1,2,3,4)
16 (1,2,3,4)	17 (1,2,3,4)	18 (1,2,3,4)	19 (1,2,3,4)	20 (1,2,3,4)

2.5.5. Для расчетных схем табл. П2.26 указать условия для формирования уравнения устойчивости по методу начальных параметров

(отличающиеся по величине изгибные жесткости участков выделены толщиной линии).

Таблица П2.26

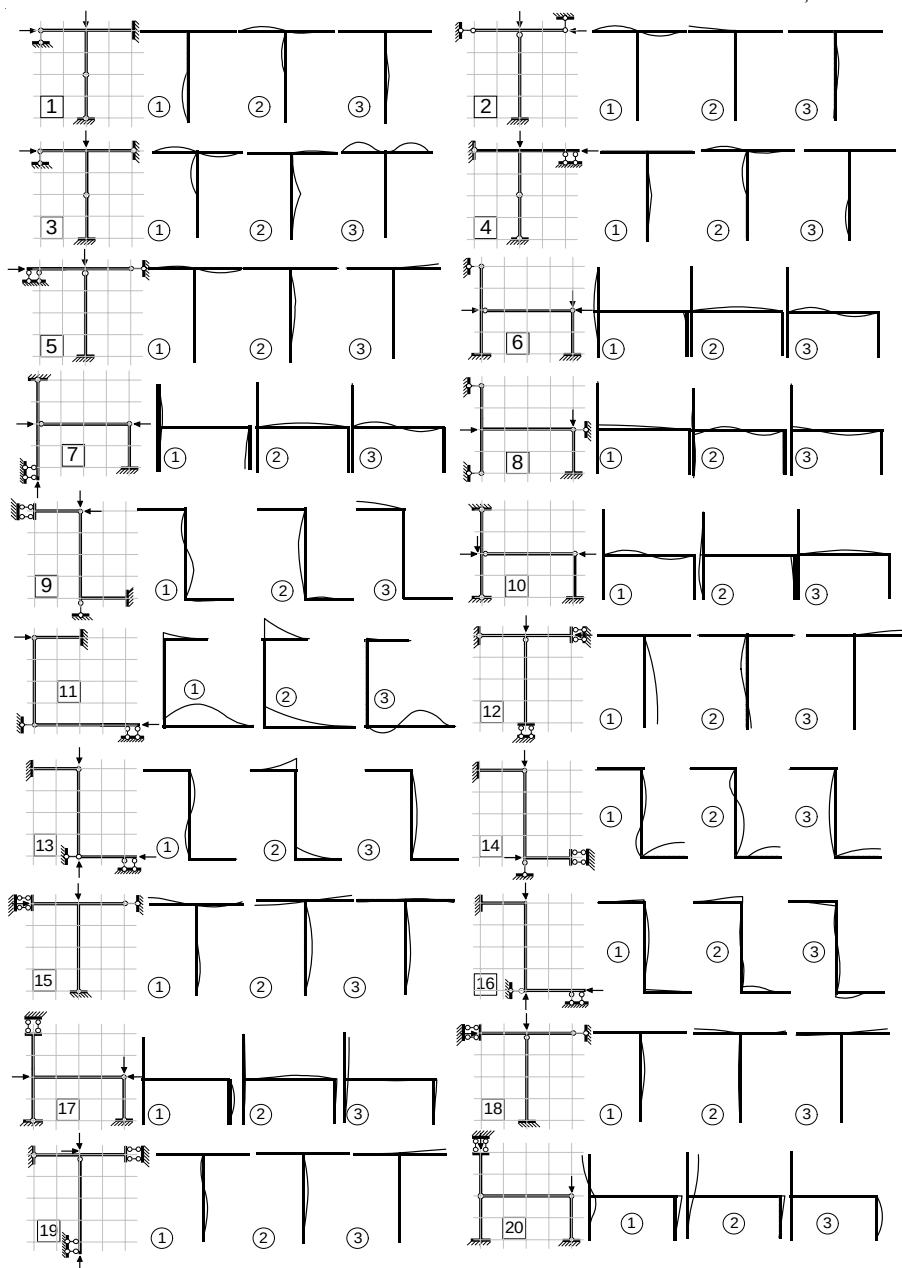
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

2.5.6. Для расчетных схем табл. П2.27 составить оценку значения критической силы.

Таблица П2.27

1 	2 	3 	4 	5
6 	7 	8 	9 	10
11 	12 	13 	14 	15
16 	17 	18 	19 	20

2.5.7. Для расчетных схем табл. П2.28 расположить формы потери устойчивости в порядке возрастания соответствующей нагрузки.



П2.6. РАСЧЕТ НА КОЛЕБАНИЯ

2.6.1. Для расчетных схем табл. П2.29 указать число *горизонтальных* деформирующих динамических степеней свободы.

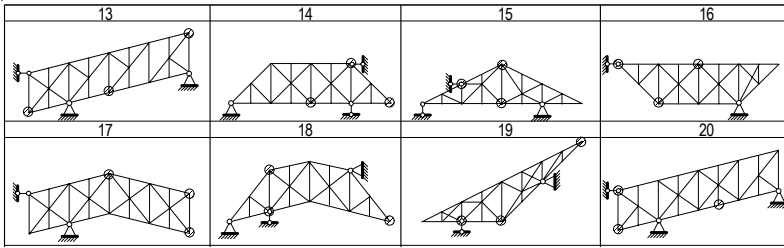
Таблица П2.29

2.6.2. Для расчетных схем табл. 29 указать число *вертикальных* деформирующих динамических степеней свободы.

2.6.3. Для расчетных схем табл. 29 указать число динамических степеней свободы, определяющих НДС.

2.6.4. Для расчетных схем табл. 30 указать *минимальное* число динамических степеней свободы, при котором гарантировано определение низшей частоты собственных колебаний.

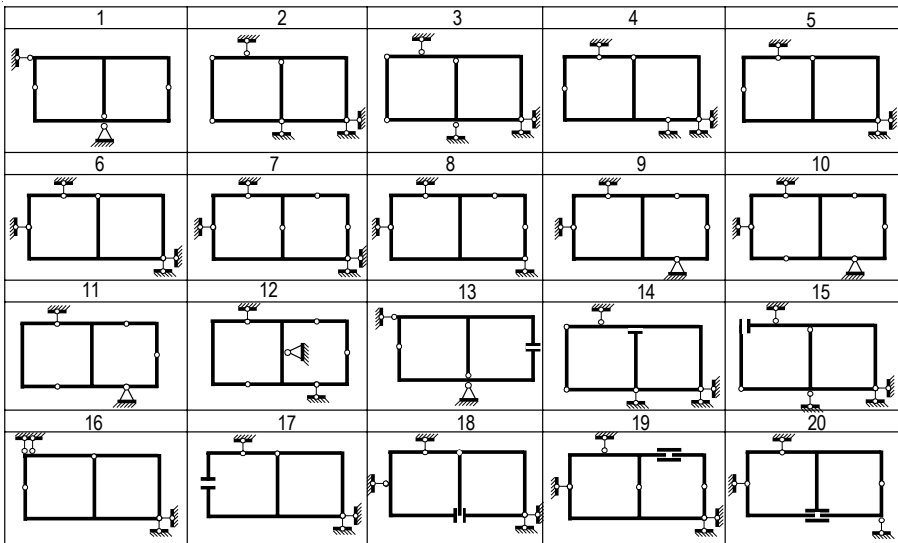
Таблица П2.30



2.6.5. Для расчетных схем табл. П2.30 указать число динамических степеней свободы, которыми можно пренебречь при определении низшей частоты собственных колебаний.

2.6.6. Для расчетных схем табл. П2.31 указать размер канонической системы уравнений по методу сил ($A=$) и по методу перемещений ($B=$) при решении задачи динамики.

Таблица П2.31



2.6.7. Для расчетных схем табл. П2.32 расположить формы собственных колебаний в порядке возрастания значения собственной частоты. Изгибные жесткости всех участков одинаковы, величина массы пропорциональна длине участка, с которого она собрана.

№ варианта задания	П.2.7.5. Расчет на статическую устойчивость							П.2.7.6. Расчет на колебания						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
1	0,5-0,7-0,7-1,0	0,7-1,0	0,35-0,35	2143	y, φ, M	2,0- ∞	312	2	1	3	2	4	3-10	312
2	1,0-2,0-0,7-1,0	0,7-1,0	0,25-0,25	4321	y, φ, M, R	0,7- ∞	231	1	1	2	1	4	1-5	231
3	0,5-0,7-2,0- ∞	0,5-0,7	0,33-0,50	423(32)1	y, φ, M	0,7-1,0	213	1	1	2	1	4	3-6	213
4	0,5-1,0-2,0-1,0	0,7-2,0	0,20-0,33	234(43)1	y, φ, M	0,7-1,0	132	2	0	2	1	5	1-8	132
5	2,0-0,7-0,7- ∞	0,7-1,0	0,33-0,50	24(42)13(32)	y, φ, M	2,0- ∞	321	1	2	3	2	3	1-8	321
6	1,0-2,0-2,0- ∞	0,7-2,0	0,25-0,33	4321	y, φ, M	2,0-2,0	231	3	1	4	2	4	2-7	231
7	0,5-1,0-2,0- ∞	1,0- ∞	0,50-0,70	214(41)3	y, φ, M	2,0- ∞	213	3	1	4	1	5	1-11	213
8	1,0-2,0-0,7-1,0	0,7-1,0	0,33-0,50	423(32)1	y, φ, M	0,5-0,7	132	2	1	3	2	4	1-11	132
9	1,0-0,7-1,0- ∞	2,0-2,0	0,33-0,50	413(31)2	y, φ, M	0,7-0,7	321	1	2	3	1	3	2-11	321
10	0,7-2,0-1,0-1,0	0,7-1,0	0,25-0,33	1243	y, φ, M	1,0- ∞	312	3	2	5	2	3	1-12	312
11	1,0-0,5-0,7-2,0	0,7-2,0	0,50-0,70	124(42)3	y, φ, R	1,0- ∞	213	0	3	3	2	3	1-12	213
12	∞ -2,0-0,7-2,0	0,5-2,0	0,33-0,50	14(41)32	y, φ	1,0- ∞	132	2	1	3	2	3	2-14	132
13	1,0-0,5-0,7-1,0	0,5-0,7	0,50-0,50	4132	y, φ	0,7-2,0	321	1	2	3	2	4	3-12	321
14	1,0- ∞ -2,0-2,0	0,5-0,7	0,33-0,33	413(31)2	y, φ	1,0- ∞	312	2	2	4	2	3	1-6	312
15	0,7-0,5-0,7-1,0	2,0-2,0	1,00-1,10	324(42)1	y, φ	0,7- ∞	231	1	2	3	1	4	3-7	231
16	∞ -2,0-0,7-1,0	1,0- ∞	0,50-0,70	214(41)3	y, φ, R	0,7-1,0	132	2	3	5	1	4	3-7	132
17	1,0-2,0-0,7-1,0	0,5-2,0	0,70-1,00	124(42)3	y, φ	1,0- ∞	321	3	1	4	1	5	1-10	321
18	∞ -2,0-0,7-2,0	2,0-2,0	2,00-3,00	1243	y, φ	0,7-1,0	312	1	1	2	1	4	1-10	312
19	∞ -2,0-0,7-1,0	0,7-1,0	1,00-2,00	4123(32)	y, φ	0,7-1,0	231	1	2	3	3	2	2-14	231
20	0,7-2,0-0,7-2,0	0,7-2,0	0,50-1,00	32(23)41	y, φ	2,0- ∞	213	2	1	3	2	3	1-14	213