

Задание №1:

«Перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую»

Системой счисления называется совокупность приемов наименования и записи чисел. В любой системе счисления для представления чисел выбираются некоторые символы (их называют *цифрами*), а остальные числа получаются в результате каких-либо операций над цифрами данной системы счисления.

Система называется *позиционной*, если значение каждой цифры (ее вес) изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число.

Число единиц какого-либо разряда, объединяемых в единицу более старшего разряда, называют *основанием позиционной системы счисления*. Если количество таких цифр равно P , то система счисления называется P -ичной. Основание системы счисления совпадает с количеством цифр, используемых для записи чисел в этой системе счисления.

Запись произвольного числа x в P -ичной позиционной системе счисления основывается на представлении этого числа в виде многочлена

$$x = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P^1 + a_0 P^0 + a_{-1} P^{-1} + \dots + a_{-m} P^{-m}$$

Арифметические действия над числами в любой позиционной системе счисления производятся по тем же правилам, что и десятичной системе, так как все они основываются на правилах выполнения действий над соответствующими многочленами. При этом нужно только пользоваться теми таблицами сложения и умножения, которые соответствуют данному основанию P системы счисления.

При переводе чисел из десятичной системы счисления в систему с основанием $P > 1$ обычно используют следующий алгоритм:

1) если переводится целая часть числа, то она делится на P , после чего запоминается остаток от деления. Полученное частное вновь делится на P , остаток запоминается. Процедура продолжается до тех пор, пока частное не станет равным нулю. Остатки от деления на P выписываются в порядке, обратном их получению;

2) если переводится дробная часть числа, то она умножается на P , после чего целая часть запоминается и отбрасывается. Вновь полученная дробная часть умножается на P и т.д. Процедура продолжается до тех пор, пока дробная часть не станет равной нулю. Целые части выписываются после запятой в порядке их получения. Результатом может быть либо конечная, либо периодическая дробь в системе счисления с основанием P . Поэтому, когда дробь является периодической, приходится обрывать умножение на каком-либо шаге и довольствоваться приближенной записью исходного числа в системе с основанием P .

Примеры решения задач

1. Перевести данное число из десятичной системы счисления в двоичную:
а) $464_{(10)}$; б) $380,1875_{(10)}$; в) $115,94_{(10)}$ (получить пять знаков после запятой в двоичном представлении).

Решение.

	464		0		380		0		1875		115		1		94
	232		0		190		0		0 375		57		1		1 88
	116		0		95		1		0 75		28		0		1 76
	58		0		47		1		1 5		14		0		1 52
a)	29		1	б)	23		1		1 0	в)	7		1		1 04
	14		0		11		1				3		1		0 08
	7		1		5		1				1		1		0 16
	3		1		2		0								
	1		1		1		1								

а) $464_{(10)} = 111010000_{(2)}$; б) $380,1875_{(10)} = 101111100,0011_{(2)}$; в) $115,94_{(10)} \gg 1110011,11110_{(2)}$ (в настоящем случае было получено шесть знаков после запятой, после чего результат был округлен).

Если необходимо перевести число из двоичной системы счисления в систему счисления, основанием которой является степень двойки, достаточно объединить цифры двоичного числа в группы по столько цифр, каков показатель степени, и использовать приведенный ниже алгоритм. Например, если перевод осуществляется в восьмеричную систему, то группы будут содержать три цифры ($8 = 2^3$). Итак, в целой части будем производить группировку справа налево, в дробной — слева направо. Если в последней группе недостает цифр, дописываем нули: в целой части — слева, в дробной — справа. Затем каждая группа заменяется соответствующей цифрой новой системы. Соответствия приведены в таблицах.

P	2	00	01	10	11
	4	0	1	2	3

P	2	000	001	010	011	100	101	110	111
	8	0	1	2	3	4	5	6	7

P	2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Переведем из двоичной системы в восьмеричную число $1111010101,11_{(2)}$.

$$\underline{001} \ \underline{111} \ \underline{010} \ \underline{101}, \underline{110}_{(2)} = 1725,6_{(8)}.$$

Переведем из двоичной системы в шестнадцатеричную число $1111010101,11_{(2)}$.

$$\underline{0011} \underline{1101} \underline{0101}, \underline{1100}_{(2)} = 3D5, C_{(16)}.$$

Соответствие между шестнадцатеричными цифрами и десятичными числами

16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

При переводе чисел из системы счисления с основанием P в десятичную систему счисления необходимо пронумеровать разряды целой части справа налево, начиная с нулевого, и в дробной части, начиная с разряда сразу после запятой слева направо (начальный номер -1). Затем вычислить сумму произведений соответствующих значений разрядов на основание системы счисления в степени, равной номеру разряда. Это и есть представление исходного числа в десятичной системе счисления.

2. Перевести данное число в десятичную систему счисления.

Некоторые неотрицательные степени числа 2 (в десятичной системе счисления)

Показатель	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Степень	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

Некоторые отрицательные степени числа 2 (в десятичной системе счисления)

Показатель	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
Степень	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125

а) $1000001_{(2)}$.

$$1000001_{(2)} = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 64 + 1 = 65_{(10)}.$$

Замечание. Очевидно, что если в каком-либо разряде стоит нуль, то соответствующее слагаемое можно опускать.

б) $1000011111,0101_{(2)}$.

$$1000011111,0101_{(2)} = 1 \times 2^9 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-4} = 512 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 0,25 + 0,0625 = 543,3125_{(10)}.$$

Некоторые неотрицательные степени числа 8 (в десятичной системе счисления):

Показатель	0	1	2	3	4
Степень	1	8	64	512	4096

Некоторые отрицательные степени числа 8 (в десятичной системе счисления)

Показатель	-1	-2
Степень	0,125	0,015625

в) $1216,04_{(8)}$.

$$1216,04_{(8)} = 1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 6 \times 8^0 + 4 \times 8^{-2} = 512 + 128 + 8 + 6 + 0,0625 = 654,0625_{(10)}.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

- а) 563;
- б) 264;
- в) 234,25;
- г) 53,125;
- д) 286,16.

2. Переведите числа в десятичную систему счисления.

- а) 1100010010_2 ;
- б) 10011011_2 ;
- в) $1111000001,01_2$;
- г) $10110111,01_2$;
- д) $416,1_8$;
- е) $215,7_{16}$.

3. Выпишите натуральные целые числа принадлежащие следующим числовым промежуткам:

- а) $(101_2; 1000_2)$,
- б) $(76_8; 102_8)$,
- в) $(122_5; 210_5)$.

Задание №2:

«Арифметические операции с числами в позиционных системах счисления»

Для выполнения арифметических операций в системе счисления с основанием P необходимо иметь соответствующие таблицы сложения и умножения. Для $P = 2, 8$ и 16 таблицы представлены ниже.

Для двоичной СС:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Для восьмеричной СС:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Для шестнадцатеричной СС:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

3. Сложить числа:

а) $10000000100_{(2)} + 111000010_{(2)} = 10111000110_{(2)}$.

б) $223,2_{(8)} + 427,54_{(8)} = 652,74_{(8)}$.

в) $3B3,6_{(16)} + 38B,4_{(16)} = 73E,A_{(16)}$.

Решение:

10000000100	223,2	3B3,6
+ 111000010	+ 427,54	+38B,4
-----	-----	-----
10111000110	652,74	73E,A

Выполним проверку результатов расчетов переводом в десятичную систему счисления. Для этого переведем каждое слагаемое и сумму в десятичную систему счисления, выполним сложение слагаемых в десятичной системе счисления. Результат должен совпасть с суммой.

- а) $10000000100_{(2)} = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^2 = 1024 + 4 = 1028_{(10)}$
 $111000010_{(2)} = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^1 = 256 + 128 + 64 + 2 = 450_{(10)}$
 $10111000110_{(2)} = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 =$
 $1024 + 256 + 128 + 64 + 4 + 2 = 1478_{(10)}$
 $1028_{(10)} + 450_{(10)} = 1478_{(10)}$
- б) $223,2_{(8)} = 2 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1} = 128 + 16 + 3 + 0,25 = 147,25_{(10)}$
 $427,54_{(8)} = 4 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1} + 4 \times 8^{-2} =$
 $256 + 16 + 7 + 0,625 + 0,0625 = 279,6875_{(10)}$
 $652,74_{(8)} = 6 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0 + 7 \times 8^{-1} + 4 \times 8^{-2} =$
 $384 + 40 + 2 + 0,875 + 0,0625 = 426,9375_{(10)}$
 $147,25_{(10)} + 279,6875_{(10)} = 426,9375_{(10)}$
- в) $3B3,6_{(16)} = 3 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 3 \times 16^0 + 6 \times 16^{-1} = 768 + 176 + 3 + 0,375 = 947,375_{(10)}$
 $38B,4_{(16)} = 3 \times 16^2 + 8 \times 16^1 + 11 \times 16^0 + 4 \times 16^{-1} = 768 + 128 + 11 + 0,25 = 907,25_{(10)}$
 $73E,A_{(16)} = 7 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 14 \times 8^0 + 10 \times 8^{-1} = 1792 + 48 + 14 + 0,625 = 1854,625_{(10)}$
 $947,375_{(10)} + 907,25_{(10)} = 1854,625_{(10)}$

4. Выполнить вычитание:

- а) $1100000011,011_{(2)} - 101010111,1_{(2)} = 110101011,111_{(2)}$.
б) $1510,2_{(8)} - 1230,54_{(8)} = 257,44_{(8)}$.
в) $27D,D8_{(16)} - 191,2_{(16)} = EC,B8_{(16)}$.

Решение:

1100000011,011	1510,2	27D,D8
- 101010111,1	-1230,54	-191,2
-----	-----	-----
110101011,111	257,44	EC,B8

5. Выполнить умножение:

- а) $100111_{(2)} \cdot 1000111_{(2)} = 101011010001_{(2)}$.
б) $1170,64_{(8)} \cdot 46,3_{(8)} = 57334,134_{(8)}$.
в) $61,A_{(16)} \cdot 40,D_{(16)} = 18B7,52_{(16)}$.

Решение:

$ \begin{array}{r} 100111 \\ *1000111 \\ \hline 100111 \\ + 100111 \\ 100111 \\ 100111 \\ \hline 101011010001 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1170,64 \\ * 46,3 \\ \hline 355\ 234 \\ + 7324\ 70 \\ 47432\ 0 \\ \hline 57334,134 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 61, A \\ *40, D \\ \hline 4F\ 52 \\ + 1868 \\ \hline 18B7,52 \end{array} $
---	--	---

6. Выполнить деление:

а) $100110010011000_{(2)} : 101011_{(2)} = 111001000_{(2)}$;

б) $46230_{(8)} : 53_{(8)} = 710_{(8)}$;

в) $4C98_{(16)} : 2B_{(16)} = 1C8_{(16)}$.

Решение:

$$\begin{array}{r}
 100110010011000 \overline{) 101011} \\
 \underline{101011} \\
 1000011 \\
 \underline{101011} \\
 110000 \\
 \underline{101011} \\
 101011 \\
 \underline{101011} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 46230 \overline{) 53} \\
 \underline{455} \\
 53 \\
 \underline{53} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4C98 \overline{) 2B} \\
 \underline{2B} \\
 219 \\
 \underline{204} \\
 158 \\
 \underline{158} \\
 0
 \end{array}$$

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Выполнить сложение:

а) $10000011_{(2)} + 1000011_{(2)}$; б) $1010010000_{(2)} + 1101111011_{(2)}$; в)

$110010,101_{(2)} + 1011010011,01_{(2)}$; г) $356,5_{(8)} + 1757,04_{(8)}$; д) $293,8_{(16)} + 3CC,98_{(16)}$.

2. Выполнить вычитание:

а) $100111001_{(2)} - 110110_{(2)}$; б) $1111001110_{(2)} - 111011010_{(2)}$; в) $1101111011,01_{(2)} -$

$101000010,0111_{(2)}$; г) $2025,2_{(8)} - 131,2_{(8)}$; д) $2D8,4_{(16)} - A3,B_{(16)}$.

3. Выполнить умножение:

а) $1100110_{(2)} \times 1011010_{(2)}$; б) $2001,6_{(8)} \times 125,2_{(8)}$; в) $2C,4_{(16)} \times 12,98_{(16)}$.

4. Выполнить деление:

а) $110011000_{(2)} : 10001_{(2)}$; б) $2410_{(8)} : 27_{(8)}$; в) $D4A_{(16)} : 1B_{(16)}$;