

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание: по заданным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Пример выполнения задания.

Дано:

$$\begin{aligned} x &= 4t; y = 16t^2 - 1; \\ t_1 &= 0,5 \quad (x \text{ и } y - \text{ в см, } t \text{ и } t_1 - \text{ в с}). \end{aligned} \quad (1)$$

Решение.

Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т.е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 1.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}$ - орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y - проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 4 \text{ см/с}; & a_x &= \ddot{x} = 0; \\ v_y &= \dot{y} = 32t; & a_y &= \ddot{y} = 32 \text{ см/с}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

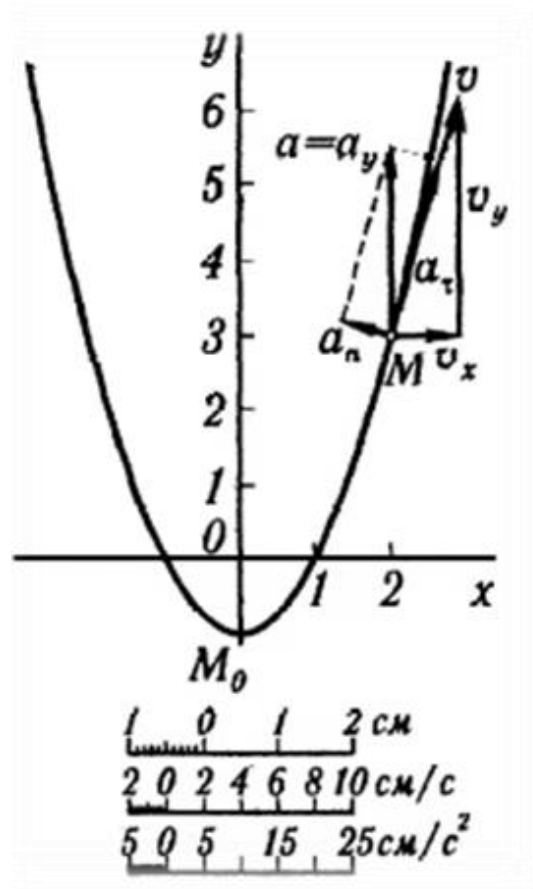


Рис. 1

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_T = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_T = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_T = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_T$ и $\vec{v}$ совпадают; знак «-», - что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2 / \rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}| / \rho. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x| / v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_T^2}. \quad (9)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2 / a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3) - (6), и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0,5$ с приведены в табл. 1.

Таблица 1

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²				Радиус кривизны, см	
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_t	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 1 показано положение точки М в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_t$ и $\vec{a}_n$. Совпадение величин a_t и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.