

Тема. Теория вероятности

1. Необходимый теоретический материал

1.1. Случайные события

Случайное событие — результат некоторого действия (испытания), который заранее неизвестен.

Например. Испытание – экзамен по математике, результат - случайное событие сдачи экзамена.

Случайные события обозначаются прописными буквами: А, В, С ...

Событие, которое обязательно произойдет при определенной совокупности условий, называется **достоверным** и обозначается символом Ω .

Событие, которое заведомо не произойдет при определенной совокупности условий, называется **невозможным** и обозначается символом $\emptyset$.

Вероятность случайного события

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m - число исходов, благоприятствующих появлению данного события, n – общее число всех равновозможных элементарных исходов. Вероятность – это число, являющееся мерой объективной возможности наступления события.

Вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$, вероятность невозможного события $P(\emptyset) = 0$. Следовательно, вероятность случайного события $0 \leq P(A) \leq 1$.

Для подсчета числа благоприятных исходов и числа равновозможных исходов пользуются комбинаторикой. Существуют два основных правила комбинаторики:

1. Правило сложения.

Если два альтернативных (взаимно исключающих) действия могут быть выполнены n и m способами, то выполнение одного из них возможно $n + m$ способами.

2. Правило умножения.

Если первое действие можно сделать n способами, а второе – m способами, то два действия можно сделать $n \times m$ способами.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения:

$$P(n) = P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Например. Пять машин смогут припарковаться на стоянке из 5-ти мест $P(5)$ способами, т.е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ способов.

Перестановки с повторениями:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}, \quad \text{где } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком:

$$A_n(m) = A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например. Пять машины смогут припарковаться на стоянке из 3-ех мест $A_5(3)$ способами, т.е. $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ способов.

Размещения с повторениями:

$$A_n^m = n^m.$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются составом элементов:

$$C_n(m) = C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Например. Из пяти студентов можно выбрать троих человек на конференцию $C_5(3)$ способами, т.е. $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 20$ способов.

Сочетания с повторениями:

$$C_n^m = C_{n+m-1}^m$$

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Два события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. Иначе, события называются **совместными**.

Например. На экзамене по математике Иванов получил 2 (событие А) и он же получил 5 (событие В). Эти события несовместные. Но если на экзамене по математике Иванов получил 2 (событие А) и Петров тоже получил 2 (событие В), то эти события совместные.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Группа событий называется **полной**, если в результате опыта наступает хотя бы одно из этих событий.

Два события называются **противоположными**, если это несовместные события, образующие полную группу. $\bar{A}$ - противоположное событие.

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ следовательно } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Произведением двух событий А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении этих событий.

Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от появления другого события.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) P(B).$$

Два события называются **зависимыми**, если вероятность появления одного из них зависит от появления или не появления другого события.

$P(A/B)$ – это **условная вероятность** события А при условии, что событие В уже произошло.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)P(A/B) = P(B)P(B/A).$$

Например. Имеется 5 билетов в театр из них 3 со скидкой. Событие А - Иванов купил билет со скидкой первым, событие В - Петров купил билет со скидкой вторым. Эти события зависимые. Тогда

$$P(AB) = P(B)P(B/A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3.$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда для любого события А, которое может произойти при условии наступления одного из событий H_i , имеет место **формула полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_k ($k = \overline{1, n}$) при условии, что событие А произошло, задается **формулой Байеса**

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

Формула Байеса показывает, как изменяется вероятность гипотезы $P(H_i)$ при реализации события А.

Схема Бернулли

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна p , а вероятность его не появления равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие А произойдет m раз определяется **формулой Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Число m_0 , при котором вероятность $P_n(m_0)$ достигает своего максимального значения, называют **наивероятнейшим числом успехов**:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

1.2. Случайные величины

Случайной величиной называют величину, которая в результате опыта принимает различные значения, заранее неизвестные.

Дискретная случайная величина принимает отдельные изолированные значения с определенными вероятностями. Законом распределения случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая случайная величина.

Числовые характеристики случайной величины

Числовыми характеристиками называют параметры, отражающие наиболее существенные черты закона распределения случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений возможных значений случайной величины и их вероятностей:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Свойства математического ожидания независимых случайных величин:

1. $M(C) = C$ (C – постоянная),
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$,
3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$,
4. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

Модой дискретной случайной величины называется ее наивероятнейшее значение.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию можно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$,
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$,
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$,
4. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Среднее квадратическое отклонение – это $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Этот параметр имеет размерность случайной величины.

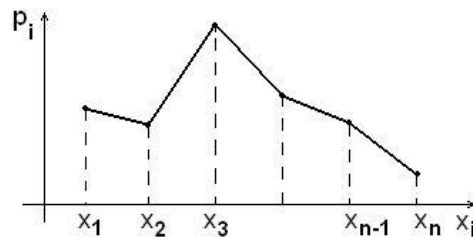
Законы распределения дискретной случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде ряда распределения, многоугольника распределения и функции распределения.

Ряд распределения:

X	x ₁	x ₂	x ₃	...	x _n
P	p ₁	p ₂	p ₃	...	p _n

Многоугольник распределения – это ломаная, вершинами которой являются точки с координатами $(x_i; p_i)$:



Биномиальное: Случайная величина X представляет собой число появлений события A в n независимых опытах и принимает целые неотрицательные значения. Вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз, вычисляется по формуле Бернулли.

Параметры биномиального распределения $M(X) = np, D(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Пуассоновское: Случайная величина X принимает целые неотрицательные значения $0, 1, 2, 3 \dots, n$, где n достаточно большое число. Вероятность появления события в одном опыте p является достаточно малым числом. Однако, $\lambda = np$ ограничено. Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз, вычисляется по формуле Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Параметры распределения Пуассона $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Геометрическое: Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие наступает с вероятностью p . Испытания заканчиваются, как только появится событие A . Вероятность появления события A не менее чем в m опытах, вычисляется по формуле

$$P(m) = q^{m-1}p.$$

Параметры геометрического распределения $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p^2}$.

Гипергеометрическое: Пусть имеется конечная совокупность, состоящая из N элементов, среди которых M обладают определенным свойством. Случайным образом из общей совокупности выбирается группа из n элементов. Вероятность того, что в данной выборке окажется ровно m элементов, обладающих указанным свойством, вычисляется по формуле

$$P(m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Параметры гипергеометрического распределения $M(X) = \frac{M \cdot n}{N}, D(X) = \frac{M \cdot n \cdot (N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

Законы распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Закон распределения непрерывной случайной величины можно представить в виде функции распределения и плотности распределения.

Функция распределения – это универсальная форма закона распределения, так как она характеризует не только непрерывную случайную величину, но и дискретную тоже.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для любого $x \in R$ равна вероятности события $(X < x)$: $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения:

1. $F(x)$ – неубывающая функция на R ,
2. $0 \leq F(x) \leq 1$,
3. $F(-\infty) = 0$,
4. $F(+\infty) = 1$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется производная от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Свойства плотности распределения:

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$,
4. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины на интервале $[a; b]$ равно: $M(x) = \int_a^b x f(x) dx$, дисперсия равна $D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx$. Дисперсию также можно вычислить по формуле: $D(x) = \int_a^b (x)^2 f(x) dx - M(X)^2$

Модой непрерывной случайной величины называется точка локального максимума функции плотности $f(x)$.

Корень уравнения $F(x) = 1/2$ называется медианой случайной величины.

Основные законы распределения непрерывной случайной величины:

Равномерное распределение задается плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b], \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Параметры равномерного распределения $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(X) = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$.

Показательное распределение задается функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Параметры показательного распределения $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Нормальное распределение задается функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Параметры нормального распределения $M(X) = a, D(X) = \sigma^2$.

2. Решение типового варианта и методические указания

Задача № 1.

На уроке присутствуют 10 учеников, из них 7 – юношей и 3 – девушки. Произвольным образом назначают 6 дежурных. Какова вероятность того, что среди этих дежурных окажется четверо юношей (событие A).

Решение. Воспользуемся следующей схемой. Пусть имеется N деталей, причем из них M деталей стандартных. Произвольным образом без возвращения извлекаются n деталей. Тогда вероятность того, что среди этих n деталей m деталей окажутся стандартными (событие A) определяется по формуле $P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

В условиях рассмотренной схемы имеем: $N = 10, M = 7, n = 6, m = 4$. Тогда

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_{10-7}^{6-4}}{C_{10}^6} = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 3}{\frac{10!}{6! \cdot 4!}} = \frac{7! \cdot 6!}{10! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $P(A) = 0,5$

Задача № 2.

Два предприятия производят разнотипную продукцию. Вероятности их банкротства в течение года равны 0,2 и 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что в течение года а) обанкротятся оба предприятия; б) обанкротится хотя бы одно предприятие; в) обанкротится только одно предприятие.

Решение.

а) Пусть событие A_1 – обанкротится первое предприятие, событие A_2 – обанкротится второе предприятие, событие A – обанкротятся оба предприятия. События A_1 и A_2 – независимы. Тогда вероятность того, что в течение года обанкротятся оба предприятия, равна

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

б) Пусть событие $\overline{A_1}$ – не обанкротится первое предприятие, $\overline{A_2}$ – не обанкротится второе предприятие. События A – обанкротится хотя бы одно

предприятие и $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ - противоположные. Поэтому вероятность того, что в течение года обанкротится хотя бы одно предприятие равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - 0,8 \cdot 0,7 = 0,44.$$

в) Пусть событие $\overline{A_1} \cdot A_2$ - не обанкротится первое предприятие, а второе предприятие обанкротится. Событие $A_1 \cdot \overline{A_2}$ - обанкротится первое предприятие, а второе не обанкротится. Событие A - обанкротится только одно предприятие (первое или второе). Тогда вероятность того, что в течение года обанкротится только одно предприятие, равна

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,38.$$

Задача № 3.

С первого автомата на сборку поступает 30% , со второго – 70% деталей. Первый автомат дает в среднем 2% брака, второй – 3%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Решение.

Пусть событие A - наугад взятая готовая деталь при проверке оказалась бракованной, событие B_1 – поступление детали для сборки с 1-го автомата, тогда $P(B_1) = 0,3$; событие B_2 – поступление детали для сборки со 2-го автомата, тогда $P(B_2) = 0,7$. При этом условная вероятность брака на первом автомате будет $P(A/B_1) = 0,02$, а на втором - $P(A/B_2) = 0,03$. Тогда вероятность того, что наудачу взятая готовая деталь при проверке оказалась бракованной найдем по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) = 0,3 \cdot 0,02 + 0,7 \cdot 0,03 = 0,027.$$

Задача № 4.

Дискретная случайная величина задана рядом распределения

X	2	5	8
P	p_1	0,2	0,5

Найти значение вероятности p_1 , числовые характеристики случайной величины X .

Решение.

1) Так как $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то $p_1 = 1 - 0,2 - 0,5 = 0,3$.

2) Найдем математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 2 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,5 = 5,6.$$

3) Найдем дисперсию

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - M^2(X) = 4 \cdot 0,3 + 25 \cdot 0,2 + 64 \cdot 0,5 - (5,6)^2 = 6,84.$$

4) Определим среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6,84} \approx 2,6.$$

Задача № 5.

Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы “Сони”. Наудачу для осмотра выбрано 3 телевизора с выставки.

- 1) Составить биномиальный закон распределения случайной величины числа телевизоров фирмы “Сони” среди трёх отобранных.
- 2) Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.
- 3) Составить функцию распределения и построить её график.

Решение.

- 1) Вероятность появления на выставке телевизора фирмы “Сони” при произвольном отборе постоянна и равна $p = m/n = 4/10 = 0,4$, $q = 1 - 0,4 = 0,6$. Вероятности того что среди трёх отобранных телевизоров окажется соответственно 0, 1, 2 или 3 фирмы “Сони”, вычислим по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^3 = 0,216$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 = 0,432$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1 = 0,288$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,064$$

Таким образом, дискретная случайная величина X - число телевизоров фирмы “Сони” среди трёх отобранных задаётся биномиальным законом распределения:

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

Найдем математическое ожидание и дисперсию полученного биномиального распределения

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,4 = 4;$$

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 2,4.$$

2) Составим функцию распределения

Если $x \leq 0$, то $F(x) = P(X < 0) = 0$.

Если $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X=0) = 0,216$.

Если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = 0,216 + 0,432 = 0,648$.

Если $2 < x \leq 3$, то $F(x) = P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,216 + 0,432 + 0,288 = 0,936$.

Если $x > 3$, то $F(x) = P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$.

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0,216 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0,648 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0,936 & 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Построим график $F(x)$ (рис.1):

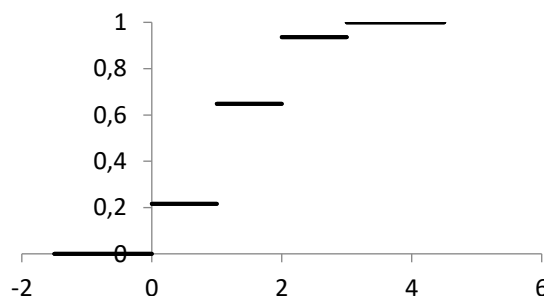


Рис.1. График функции распределения.

Задача № 6.

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{1}{2}, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 & \text{при } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найти:

- 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$;
- 2) функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$;
- 3) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

- 1) Для вычисления вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ можно применить одну из формул:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \text{ или } P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Применим первую формулу

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) &= F(x) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

- 2) Продифференцировав функцию распределения, получим функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{1}{2}, \\ 2\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{при } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- 3) Построим графики $F(x)$ и $f(x)$.

График функции распределения $F(x)$ (рис.2).

График функции плотности распределения $f(x)$ (рис.3).

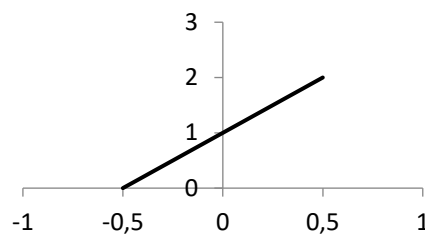
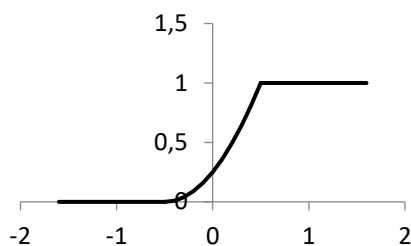


Рис.2. График функции $F(x)$. Рис.3. График функции $f(x)$.

3. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

Задача 1.1

В группе 20 студентов (8 – юношей, 12 – девушек). На конференцию произвольным образом отправили 5 человек из группы. Какова вероятность того, что среди них окажутся три девушки?

Задача 1.2

Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности их попадания равны 0.6, 0.7, и 0.8 соответственно. Найти вероятность того, что а) все трое промахнутся; б) попадет хотя бы один стрелок; в) попадет только один из трех.

Задача 1.3

В цехе 60% новых станков и 40% - старых (после ремонта). Новый станок дает в среднем 0,2% бракованных деталей, старый – 0,5%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 2

Задача 2.1

Из колоды (36 шт.) карт произвольным образом вытаскивают 4 карты. Какова вероятность того, что среди них окажутся три дамы и один туз?

Задача 2.2

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен 0.9, второй – 0.7, третий – 0.6. Найти вероятность того, что он а) сдаст все три экзамена; б) сдаст хотя бы один экзамен; в) сдаст только один из трех.

Задача 2.3

В первом ящике 7 красных и 9 синих шаров, во втором 4 красных и 11 синих. Из первого ящика наугад достают один шар и кладут его во второй ящик. Затем из второго ящика наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет красным?

Вариант 3

Задача 3.1

Студент пришел на экзамен, зная лишь 24 из 36-ти вопросов программы. Экзаменатор задал ему 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответил на все вопросы.

Задача 3.2

Трем клиентам назначена деловая встреча на 12 часов дня. Вероятности опоздания для каждого из них соответственно равны 0.2, 0.3, 0.15. Найти вероятность того, что а) все клиенты придут вовремя; б) хотя бы один клиент опоздает; в) опоздает только один из трех.

Задача 3.3

С первого автомата на сборку поступает 20% , со второго – 30%, с третьего – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0.2% брака, второй – 0.3%, третий – 0.1%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 4

Задача 4.1

В цехе работают 6 мужчин и 5 женщины. По табельным нормам наугад отобрано 4 человека. Какова вероятность того, что среди них окажутся две женщины ?

Задача 4.2

Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0.8, а после каждого выстрела уменьшается на 0.1. Найти вероятности того, что охотник а) все три раза промахнется; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет только два раза из трех.

Задача 4.3

Для участия в соревнованиях выделено из 1-ой группы 4 студента, из 2-ой - 6, из 3-ей – 5 студентов. Вероятности того, что отобранный студент из 1-ой, 2-й , 3-ей группы попадет в сборную института, соответственно равны 0.5, 0.4, 0.3. Какова вероятность того, что наугад выбранный участник соревнований попал в сборную?

Вариант 5

Задача 5.1

Библиотекарь наудачу выбирает 2 книги из 12 по математике. Найти вероятность того, что эти книги одного автора, если таких книг всего 4.

Задача 5.2

Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того в течении часа не потребует наладка, равна для 1-го станка 0.9, для 2-го - 0.8, для 3-го станка 0.7. Найти вероятность того, что в течении часа а) не один из станков не потребует наладки; б)

хотя бы один из станков не потребует наладки; в) только один из трех станков не потребует наладки.

Задача 5.3

В тире имеется три ружья, вероятности попаданий из которых соответственно равны 0.6, 0.7, 0.9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

Вариант 6

Задача 6.1

В группе 28 студентов (16 – юношей, 12 – девушек). На конференцию произвольным образом отправили 5 человек из группы. Какова вероятность того, что среди них окажутся три девушки ?

Задача 6.2

Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности их попадания равны 0.7, 0.7, и 0.9 соответственно. Найти вероятность того, что а) все трое промахнутся; б) попадет хотя бы один стрелок; в) попадет только один из трех.

Задача 6.3

В цехе 70% новых станков и 30% - старых (после ремонта). Новый станок дает в среднем 0,1% бракованных деталей, старый – 0,5%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 7

Задача 7.1

Из колоды (36 шт.) карт произвольным образом вытаскивают 5 карт. Какова вероятность того, что среди них окажутся три дамы и два туза?

Задача 7.2

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен 0.6, второй – 0.8, третий – 0.7. Найти вероятность того, что он а) сдаст все три экзамена; б) сдаст хотя бы один экзамен; в) сдаст только два из трех.

Задача 7.3

В первом ящике 8 красных и 10 синих шаров, во втором 9 красных и 8 синих. Из первого ящика наугад достают один шар и кладут его во второй ящик. Затем из второго ящика наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет синим?

Вариант 8

Задача 8.1

Студент пришел на экзамен, зная лишь 24 из 36-ти вопросов программы. Экзаменатор задал ему 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответил только на два вопроса.

Задача 8.2

Трем клиентам назначена деловая встреча на 12 часов дня. Вероятности опоздания для каждого из них соответственно равны 0.2, 0.3, 0.15. Найти вероятность того, что а) все клиенты опоздают ; б) хотя бы один клиент опоздает; в) опоздает только один из трех.

Задача 8.3

С первого автомата на сборку поступает 30% , со второго – 20%, с третьего – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0.2% брака, второй – 0.3%, третий – 0.5%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 9

Задача 9.1

В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным нормам наугад отобрано 3 человека. Какова вероятность того, что среди них окажутся две женщины ?

Задача 9.2

Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0.8, а после каждого выстрела уменьшается на 0.2. Найти вероятности того, что охотник а) все три раза промахнется; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет только два раза из трех.

Задача 9.3

Для участия в соревнованиях выделено из 1-ой группы 6 студентов, из 2-ой - 7, из 3-ей – 5 студентов. Вероятности того, что отобранный студент из 1-ой, 2-й , 3-ей попадет в сборную института, соответственно равны 0.5, 0.4, 0.3. Какова вероятность того, что наугад выбранный участник соревнований попал в сборную?

Вариант 10

Задача 10.1

Библиотекарь наудачу выбирает 3 книги из 10 по математике. Найти вероятность того, что эти книги одного автора, если таких книг всего 4.

Задача 10.2

Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того в течении часа не потребуется наладка, равна для 1-го станка 0.9, для 2-го - 0.8, для 3-го станка 0.7. Найти вероятность того, что в течении часа а) не один из станков не потребует наладки; б) хотя бы один из станков не потребует наладки; в) только один из трех станков потребует наладки.

Задача 10.3

В тире имеется три ружья, вероятности попаданий из которых соответственно равны 0.9, 0.7, 0.8. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

Вариант 11

Задача 11.1

В группе 30 студентов (18 – юношей, 12 – девушек). На конференцию произвольным образом отправили 6 человек из группы. Какова вероятность того, что среди них окажутся три девушки?

Задача 11.2

Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности их попадания равны 0.6, 0.7, и 0.8 соответственно. Найти вероятность того, что а) все трое промахнутся; б) попадет хотя бы один стрелок; в) попадут только два из трех.

Задача 11.3

В цехе 60% новых станков, 30% - после ремонта и 10% - старых. Новый станок дает в среднем 0,1% бракованных деталей, после ремонта - 0,3%, старый – 0,5%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 12

Задача 12.1

Из колоды (36 шт.) карт произвольным образом вытаскивают 5 карты. Какова вероятность того, что среди них окажутся три дамы и два туза?

Задача 12.2

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен 0.7, второй – 0.9, третий – 0.6. Найти вероятность того, что он а) сдаст все три экзамена; б) сдаст хотя бы один экзамен; в) не сдаст только один из трех.

Задача 12.3

В первом ящике 11 красных и 9 синих шаров, во втором 9 красных и 11 синих. Из первого ящика наугад достают один шар и кладут его во второй ящик. Затем из второго ящика наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет красным?

Вариант 13

Задача 13.1

Студент пришел на экзамен, зная лишь 30 из 36-ти вопросов программы. Экзаменатор задал ему 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответил только на два вопроса.

Задача 13.2

Трем клиентам назначена деловая встреча на 12 часов дня. Вероятности опоздания для каждого из них соответственно равны 0.2, 0.3, 0.5. Найти вероятность того, что а) все клиенты придут вовремя; б) хотя бы один клиент опоздает; в) опоздает только один из трех.

Задача 13.3

С первого автомата на сборку поступает 30% , со второго – 50%, с третьего – 20% деталей. Первый автомат дает в среднем 0.2% брака, второй – 0.3%, третий – 0.5%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 14

Задача 14.1

В цехе работают 6 мужчин и 10 женщин. По табельным нормам наугад отобрано 7 человек. Какова вероятность того, что среди них окажутся две женщины ?

Задача 14.2

Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0.8, а после каждого выстрела уменьшается на 0.1. Найти вероятности того, что охотник а) все три раза промахнется; б) промахнется хотя бы один раз; в) попадет только два раза из трех.

Задача 14.3

Для участия в соревнованиях выделено из 1-ой группы 5 студентов, из 2-ой - 6, из 3-ей – 7 студентов. Вероятности того, что отобранный студент из 1-ой, 2-й , 3-ей попадет в сборную института, соответственно равны 0.3, 0.4, 0.3. Какова вероятность того, что наугад выбранный участник соревнований попал в сборную?

Вариант 15

Задача 15.1

Библиотекарь наудачу выбирает 4 книги из 12 по математике. Найти вероятность того, что эти книги одного автора, если таких книг всего 5.

Задача 15.2

Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того в течении часа не потребуются наладка, равна для 1-го станка 0.9, для 2-го - 0.8, для 3-го станка 0.7. Найти вероятность того, что в течении часа а) не один из станков не потребует наладки; б) хотя бы один из станков потребует наладки; в) только один из трех станков потребует наладки.

Задача 15.3

В тире имеется три ружья, вероятности попаданий из которых соответственно равны 0.8, 0.7, 0.9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

Вариант 16

Задача 16.1

В группе 25 студентов (15 – юношей, 10 – девушек). На конференцию произвольным образом отправили 5 человек из группы. Какова вероятность того, что среди них окажутся трое юношей?

Задача 16.2

Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности их попадания равны 0.8, 0.7, и 0.9 соответственно. Найти вероятность того, что а) все трое промахнутся; б) попадет хотя бы один стрелок; в) попадет только один из трех.

Задача 16.3

В цехе 70% новых станков и 30% - старых (после ремонта). Новый станок дает в среднем 0,1% бракованных деталей, старый – 0,5%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 17

Задача 17.1

Из колоды (36 шт.) карт произвольным образом вытаскивают 6 карт. Какова вероятность того, что среди них окажутся три дамы и три туза?

Задача 17.2

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен 0.6, второй – 0.8, третий – 0.7. Найти вероятность того, что он а) сдаст все три экзамена; б) сдаст хотя бы один экзамен; в) сдаст только два из трех.

Задача 17.3

В первом ящике 8 красных и 10 синих шаров, во втором 9 красных и 8 синих. Из первого ящика наугад достают один шар и кладут его во второй ящик. Затем из второго ящика наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет синим?

Вариант 18

Задача 18.1

Студент пришел на экзамен, зная лишь 22 из 36-ти вопросов программы. Экзаменатор задал ему 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответил только на два вопроса.

Задача 18.2

Трем клиентам назначена деловая встреча на 12 часов дня. Вероятности опоздания для каждого из них соответственно равны 0.2, 0.3, 0.25. Найти вероятность того, что а) все клиенты не опоздают ; б) хотя бы один клиент опоздает; в) не опоздает только один из трех.

Задача 18.3

С первого автомата на сборку поступает 30% , со второго – 20%, с третьего – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0.4% брака, второй – 0.3%, третий – 0.5%. Какова вероятность того, что при проверке наугад взятая готовая деталь оказалась бракованной?

Вариант 19

Задача 19.1

В цехе работают 6 мужчин и 10 женщин. По табельным нормам наугад отобрано 5 человек. Какова вероятность того, что среди них окажутся три женщины ?

Задача 19.2

Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0.8, а после каждого выстрела уменьшается на 0.1. Найти вероятности того, что охотник а) все три раза промахнется; б) промахнется хотя бы один раз; в) попадет только два раза из трех.

Задача 19.3

Для участия в соревнованиях выделено из 1-ой группы 5 студентов, из 2-ой - 8, из 3-ей – 6 студентов. Вероятности того, что отобранный студент из 1-ой, 2-й , 3-ей попадет в сборную института, соответственно равны 0.5, 0.4, 0.2. Какова вероятность того, что наугад выбранный участник соревнований попал в сборную?

Вариант 20

Задача 20.1

Библиотекарь наудачу выбирает 4 книги из 10 по математике. Найти вероятность того, что эти книги одного автора, если таких книг всего 6.

Задача 20.2

Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того в течении часа не потребуется наладка, равна для 1-го станка 0.6, для 2-го - 0.8, для 3-го станка 0.7. Найти вероятность того, что в течении часа а) не один из станков не потребует наладки; б) хотя бы один из станков потребует наладки; в) только один из трех станков потребует наладки.

Задача 20.3

В тире имеется три ружья, вероятности попаданий из которых соответственно равны 0.6, 0.7, 0.8. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

Задача № 4.

Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти значение вероятности p_i и числовые характеристики случайной величины X .

Вариант						Вариант					
1	X	2	5	6	8	11	X	4	5	6	8
	P	p_1	0,2	0,1	0,4		P	p_1	0,2	0,1	0,4
2	X	2	5	6	8	12	X	3	5	6	8
	P	0,1	p_2	0,1	0,4		P	0,1	p_2	0,1	0,4
3	X	2	5	6	8	13	X	2	5	6	8
	P	p_1	0,2	0,1	0,2		P	p_1	0,2	0,1	0,2
4	X	2	5	7	8	14	X	1	5	7	8
	P	p_1	0,2	0,1	0,4		P	p_1	0,2	0,1	0,4
5	X	3	5	6	8	15	X	2	5	6	8
	P	p_1	0,2	0,1	0,4		P	p_1	0,2	0,1	0,4
6	X	2	5	6	8	16	X	3	5	6	8
	P	0,1	p_2	0,1	0,4		P	0,1	p_2	0,1	0,4
7	X	2	5	6	9	17	X	4	5	6	9
	P	0,3	0,2	0,1	p_4		P	0,3	0,2	0,1	p_4
8	X	1	3	6	8	18	X	2	3	6	8
	P	0,1	0,4	p_3	0,3		P	0,1	0,4	p_3	0,3
9	X	1	3	5	9	19	X	2	4	5	9
	P	0,3	0,2	0,1	p_4		P	0,3	0,2	0,1	p_4
10	X	2	3	5	8	20	X	3	4	5	8
	P	0,2	0,1	p_3	0,3		P	0,2	0,1	p_3	0,3

Задача № 5.

При проверке партии из $n=100$ деталей m деталей оказались бракованными. Наудачу для контроля выбрано 3 детали из этой партии.

- 1) Составить биномиальный закон распределения случайной величины X числа бракованных деталей среди трех отобранных.
- 2) Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.
- 3) Составить функцию распределения и построить её график.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

Задача № 6.

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

- 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$;
- 2) функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$;
- 3) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
β	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{8}$

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
β	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

