

Практическое задание 1

Условное графическое изображение двухслойного конденсатора для всех вариантов задания показано на рис. 1.

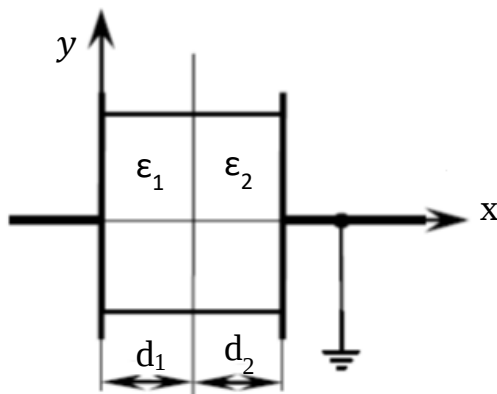


Рис. 1. Двухслойный конденсатор

Задание

Рассматривается двухслойный плоский конденсатор, подключенный к источнику напряжения U (рис. 1). Заданы пробивные напряженности слоев $E_{\text{проб1}}$ и $E_{\text{проб2}}$.

Требуется:

- рассчитать напряженность $\vec{E}$, электрическое смещение $\vec{D}$, поляризацию $\vec{P}$ для каждого слоя конденсатора;
- определить плотность свободных зарядов σ на обкладках конденсатора и плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{связ}}$ на границе раздела диэлектриков;
- определить электрическую емкость конденсатора на единицу площади;
- рассчитать пробивное напряжение $U_{\text{проб}}$.
- построить график распределения потенциала ϕ вдоль оси x .

Ответы привести к размерности: $E_1, E_2 - [\text{кВ/см}]$; $D_1, D_2, P_1, P_2, \sigma, \sigma_{\text{связ}} - [\text{пКл/см}^2]$; $U_{\text{проб}} - [\text{кВ}]$; $C - [\text{пФ/см}^2]$.

Сделать необходимые выводы.

Рекомендации по выполнению задания 1

1. Необходимо изучить тему «Закон Гаусса, постулат Максвелла, закон Кулона. Энергия электростатического поля. Граничные условия. Понятие емкости».

2. Выполнить необходимые расчеты согласно варианту, используя образец выполнения.

При рассмотрении напряженности электрического поля заряженного двухслойного конденсатора следует использовать формулу (1):

$$U = \int_a^b \vec{E} \, d\vec{l} . \quad (1)$$

Используя уравнения связи, следует рассчитать электрическое смещение $\vec{D}$ и поляризацию $\vec{P}$. Применив граничные условия, рассчитываются плотности зарядов.

Для определения пробивного напряжения необходимо пользоваться граничными условиями $D_{n1} = D_{n2}$ на границе раздела диэлектриков и определением напряжения. При этом следует выбирать вариант, при котором в одном диэлектрике достигается пробивная напряженность поля, а в другом согласно граничным условиям напряженность поля будет меньше пробивной.

Вариант задания определяется первой буквой фамилии.

Варианты задания 1

Первая буква фамилии	Вариант	U , кВ	$E_{\text{пр1}}$, кВ/см	$E_{\text{пр2}}$, кВ/см	d_1 , см	d_2 , см	ε_1	ε_2
А	1	21	23	38	3	1,6	6	3
Б	2	22	24	39	3,1	1,7	1	3,5
В	3	23	25	40	3,2	1,8	1,5	4
Г	4	24	26	41	3,3	1,9	2	4,5
Д	5	25	27	42	3,4	2	2,5	5
Е	6	26	28	13	3,5	2,1	3	5,5
Ж	7	27	29	14	2	2,2	3,5	6
З	8	28	30	15	2,1	2,3	4	6,5
И	9	29	31	16	2,2	2,4	4,5	1
К	10	30	32	17	2,3	2,5	5	1,5
Л	11	31	13	18	2,4	2,6	5,5	2
М	12	32	14	19	2,5	2,7	6	2,5
Н	13	33	15	20	2,6	2,8	1	3
О	14	34	16	21	2,7	2,9	1,5	3,5
П	15	35	17	22	2,8	2,2	2	4
Р	16	36	18	23	2,9	2,3	2,5	4,5
С	17	37	19	24	3	2,4	3	5
Т	18	38	20	25	3,1	2,5	3,5	5,5
У	19	39	21	26	3,2	2,6	4	6
Ф	20	40	22	27	3,3	2,7	4,5	6,5
Х	21	41	23	28	3,4	2,8	5	1
Ц	22	42	24	29	3,5	2,9	5,5	1,5
Ч	23	43	25	30	2	1,4	6	2
Ш	24	44	26	31	2,1	1,5	1	2,5
Щ	25	45	27	32	2,2	1,6	1,5	3
Э	26	46	28	33	2,3	1,7	2	3,5
Ю	27	47	29	34	2,4	1,8	2,5	4
Я	28	48	30	35	2,5	1,9	3	4,5

Образец выполнения практического задания 1

Исходные данные: $U = 11$ кВ, $E_{проб1} = 12$ кВ/см, $E_{проб2} = 24$ кВ/см, $d_1 = 2,6$ см; $d_2 = 1,6$ см; $\varepsilon_1 = 2$; $\varepsilon_2 = 1$; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

По условию задания конденсатор заряжен напряжением 11 кВ. Значит, на обкладках конденсатора имеются заряды противоположных знаков. Разность потенциалов между двумя слоями диэлектриков определяется по формуле (2):

$$U = \int_0^{d_1+d_2} \bar{E} \, d\bar{l}. \quad (2)$$

Применительно к скалярным величинам выражение (2) примет вид:

$$U = \int_0^{d_1+d_2} E \, dl. \quad (3)$$

Так как в каждом слое конденсатора существует однородное электрическое поле ($E_1 = \text{const}$, $E_2 = \text{const}$), то для определения разности потенциалов можно использовать формулу (4):

$$U = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2 = \frac{D_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} \cdot d_1 + \frac{D_0}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} \cdot d_2 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right), \quad (4)$$

где D_0 – электрическая индукция, одинаковая в каждом слое конденсатора.

Отсюда:

$$\frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{U}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{11 \cdot 10^3}{\frac{2,6 \cdot 10^{-2}}{2} + \frac{1,6 \cdot 10^{-2}}{1}} = 3,79 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}}. \quad (5)$$

Определим напряженности электрического поля в каждом слое диэлектриков:

$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{3,79 \cdot 10^5}{2} = 1,90 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 1,90 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}, \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{3,79 \cdot 10^5}{1} = 3,79 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 3,79 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}. \quad (7)$$

Определим электрическую индукцию в каждом слое диэлектриков:

$$D_0 = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{D_0}{\varepsilon_0} \right) = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,79 \cdot 10^5 = 33,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \quad (8)$$

$$D_1 = D_2 = D_0 = 33,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 335 \frac{\text{пКл}}{\text{см}^2}. \quad (9)$$

Определим поляризованность каждого слоя диэлектриков:

$$\begin{aligned} P_1 &= D_1 - \varepsilon_0 \cdot E_1 = (33,5 - 8,85 \cdot 1,90) \cdot 10^{-7} = \\ &= 16,7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 167 \frac{\text{пКл}}{\text{см}^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= D_2 - \varepsilon_0 \cdot E_2 = (33,5 - 8,85 \cdot 3,79) \cdot 10^{-7} = \\ &= 0 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 0 \frac{\text{пКл}}{\text{см}^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное значение $P_2 = 0 \frac{\text{пКл}}{\text{см}^2}$ указывает на то, что $\sigma_{\text{св}}$ (поверхностная плотность связанного заряда на границе раздела диэлектриков) создается только вторым диэлектриком (12):

$$\sigma_{\text{св1}} = P_1 = 167 \frac{\text{пКл}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{\text{св2}} = P_2 = 0 \frac{\text{пКл}}{\text{см}^2}. \quad (12)$$

Зависимость напряженности поля внутри конденсатора от плотности свободных зарядов и электрической постоянной выражается формулой (13):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} . \quad (13)$$

Отсюда:

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_0 = 1,90 \cdot 10^5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 33,54 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 335 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} . \quad (14)$$

Для определения емкости двухслойного конденсатора представим его в виде схемы последовательного соединения двух однослойных конденсаторов (рис. 2).



Рис. 2. Расчетная схема с двумя конденсаторами

Тогда электрическая емкость каждого конденсатора будет определяться по формуле (15):

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{d_1} , \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d_2} . \quad (15)$$

Результирующая емкость последовательно соединенных конденсаторов (16):

$$C_{\text{рез}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_1 d_2 \left(\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_2} \right)} . \quad (16)$$

Удельная емкость расчетного двухслойного конденсатора на единицу площади обкладки (17):

$$C_{уд} = \frac{C_{рез}}{S} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \varepsilon_2}{d_1 d_2 \left(\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_2} \right)} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 \cdot d_2 + \varepsilon_2 \cdot d_1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 2,6 \cdot 10^{-2}} = 3,05 \cdot 10^{-10} \frac{\Phi}{\text{м}^2} = 0,0305 \frac{\text{пФ}}{\text{см}^2}. \quad (17)$$

Для случая, когда напряженность примет значение пробивной напряженности, определим для электрической индукции следующие отношения для каждого конденсатора в отдельности:

$$\frac{D_{0 \text{ пр}}}{\varepsilon_0} = \varepsilon \cdot E, \quad (18)$$

$$\frac{D_{0 \text{ пр } 1}}{\varepsilon_0} = E_{\text{пр } 1} \cdot \varepsilon_1 = 12 \cdot 2 = 24 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}, \quad (19)$$

$$\frac{D_{0 \text{ пр } 2}}{\varepsilon_0} = E_{\text{пр } 2} \cdot \varepsilon_2 = 24 \cdot 1 = 24 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}. \quad (20)$$

Полученные значения равны между собой. Далее к расчету принимаем $\frac{D_{0 \text{ пр}}}{\varepsilon_0} = 24 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$. Тогда для определения пробивного напряжения конденсатора воспользуемся формулой (32):

$$U_{\text{пр}} = \frac{D_{0 \text{ пр}}}{\varepsilon_0} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right) = 24 \cdot \left(\frac{2,6}{2} + \frac{1,6}{1} \right) = 69,6 \text{ кВ}. \quad (21)$$

Для того чтобы построить график распределения потенциала φ вдоль оси x , необходимо вычислить электрический потенциал в различных областях конденсатора. Для вычисления потенциала необходимо составить уравнения. Связь между электрическим потенциалом и напряженностью электрического поля отражается в формуле (22):

$$\vec{E} = -grad \varphi. \quad (22)$$

По заданию потенциал изменяется только вдоль оси x , поэтому применим уравнение (23):

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \cdot \vec{l}. \quad (23)$$

В случае если потенциал между обкладками конденсатора изменяется только вдоль оси x , вектор напряженности сонаправлен с осью x , поэтому можно перейти от векторных единиц к их модулям:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad (24)$$

$$\int d\varphi = -\int E \cdot dx. \quad (25)$$

Так как электрическое поле между обкладками конденсатора является однородным (по заданию), то изменение потенциала соответствует формуле (26):

$$\varphi = -Ex + a, \quad (26)$$

где a – постоянная интегрирования.

Для первого диэлектрика:

$$\varphi = -E_1 \cdot x + a, \quad x \in [0; d_1]. \quad (27)$$

Для формулы (27) определим постоянную интегрирования a :

$$\varphi(0) = 11 \cdot 10^3 \text{ В},$$

$$11 \cdot 10^3 = 0 + a,$$

$$a = 11 \cdot 10^3,$$

$$\varphi = -1,90 \cdot 10^3 \cdot x + 11 \cdot 10^3.$$

Для второго диэлектрика:

$$\varphi = -E_2 \cdot x + b, \quad x \in [d_1; d_1 + d_2]. \quad (28)$$

Для формулы (28) определим постоянную интегрирования b :

$$\varphi(4,2) = 0 \text{ кВ},$$

$$0 = -4,2 \cdot 3,79 \cdot 10^3 + b,$$

$$b = 15,92 \cdot 10^3,$$

$$\varphi = -3,79 \cdot 10^3 \cdot x + 15,92 \cdot 10^3.$$

Определим электрический потенциал для различного расстояния относительно ширины первого и второго диэлектриков d_1 и d_2 .

Для области первого диэлектрика:

$$\varphi(x) = -1,90 \cdot 10^3 \cdot x + 11 \cdot 10^3 \text{ при } x \in [0; 2,6]. \quad (29)$$

Для области второго диэлектрика:

$$\varphi(x) = -3,79 \cdot 10^3 \cdot x + 15,92 \cdot 10^3 \text{ при } x \in [2,6; 4,2]. \quad (30)$$

По формулам (29) и (30) построим график зависимости $\varphi = f(x)$ для обеих обкладок конденсатора в одной координатной сетке (табл. 1, рис. 3).

Таблица 1. Данные для построения зависимости $\varphi = f(x)$ двухслойного конденсатора

Параметр	Первый слой		Второй слой	
x , см	0	2,6	2,6	4,2
$\varphi \cdot 10^3$ В	11	6,06	6,06	0

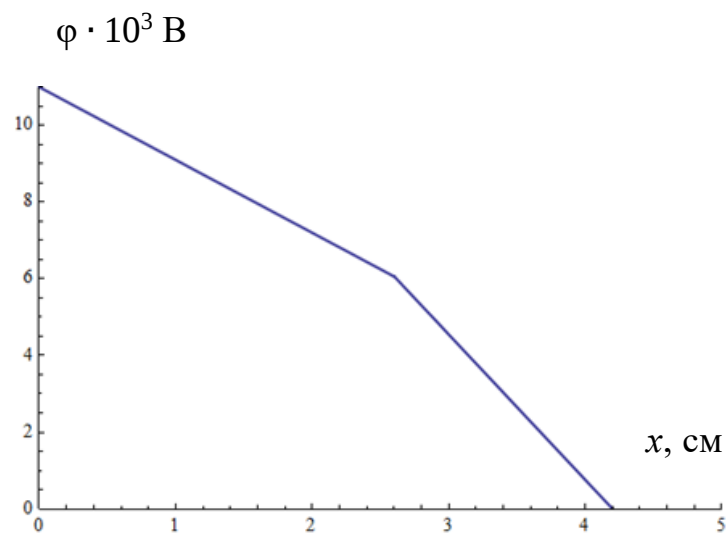


Рис. 3. Зависимости $\varphi = f(x)$ двухслойного конденсатора

Вывод: электрический потенциал непрерывен на границе раздела слоев диэлектрика в двухслойном конденсаторе. На границе раздела слоев конденсатора потенциал составляет 6.06 кВ.

Практическое задание 2

Задание

Дано: цилиндрический конденсатор имеет два слоя несовершенной изоляции (рис. 4).

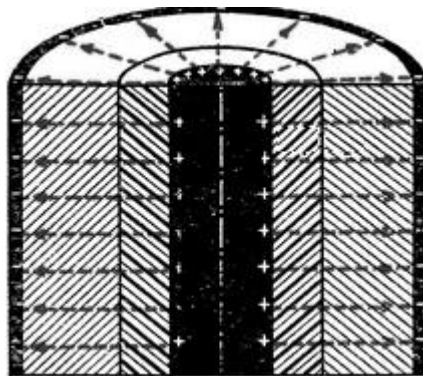


Рис. 4. Цилиндрический двухслойный конденсатор

Введены следующие обозначения: радиус внутреннего цилиндра r_0 [см], радиус поверхности раздела двух диэлектриков r_1 [см], внутренний радиус внешнего цилиндра r_2 [см]. Длина конденсатора l [см].

Заданы параметры: относительная диэлектрическая проницаемость внутреннего слоя $\varepsilon_1 = 5$, его удельная проводимость $\gamma_1 = 8,66 \cdot 10^{-5}$ См/м, для внешнего слоя $\varepsilon_2 = 3$, $\gamma_2 = 3 \cdot 10^{-5}$ См/м. Конденсатор подключен к источнику синусоидального тока $i = I_m \sin \omega t$ [А], частота которого f [Гц].

Найти: пренебрегая краевым эффектом, найти мгновенные значения радиальных составляющих вектора напряжённости электрического поля для точек, лежащих между обкладками конденсатора на расстоянии r от оси цилиндра. Определить мгновенное значение напряжения между обкладками конденсатора.

Решить задачу двумя способами, сравнить ответы.

Вариант задания определяется первой буквой фамилии.

Варианты задания 2

Первая буква фамилии	Вариант	r_0 , см	r_1 , см	r_2 , см	l , см	I_m , А	f , кГц
А	1	1,5	2	2,5	18	2	100
Б	2	1,6	2,1	2,6	19	2,1	90
В	3	1,7	2,2	2,7	20	2,2	80
Г	4	1,8	2,3	2,8	21	2,3	70
Д	5	1,9	2,4	2,9	22	2,4	60
Е	6	2	2,5	3	23	2,5	50
Ж	7	2,1	2,6	3,1	24	2,6	40
З	8	2,2	2,7	3,2	25	2,7	30
И	9	2,3	2,8	3,3	26	2,8	20
К	10	2,4	2,9	3,4	27	2,9	10
Л	11	0,5	1,1	1,7	28	3	200
М	12	0,6	1,2	1,8	29	3,1	190
Н	13	0,7	1,3	1,9	30	3,2	180
О	14	0,8	1,4	2	31	3,3	170
П	15	0,9	1,5	2,1	32	3,4	160
Р	16	1	1,6	2,2	33	3,5	150
С	17	1,1	1,7	2,3	8	3,6	140
Т	18	1,2	1,8	2,4	9	3,7	130
У	19	1,3	1,9	2,5	10	3,8	120
Ф	20	1,4	2	2,6	11	3,9	110
Х	21	1,5	2,1	2,7	12	4	100
Ц	22	1,6	2,2	2,8	13	4,1	90
Ч	23	1,7	2,3	2,9	14	4,2	80
Ш	24	1,8	2,4	3	15	4,3	70
Щ	25	1,9	2,5	3,1	16	4,4	60
Э	26	2	2,6	3,2	17	4,5	50
Ю	27	2,1	2,7	3,3	18	4,6	40
Я	28	2,2	2,8	3,4	19	4,7	30

Рекомендации по выполнению задания 2

Задачу можно решить двумя способами.

Способ 1

Используя теорию стационарных полей, рассчитываются проводимости и ёмкости каждого слоя несовершенного диэлектрика и строится схема замещения конденсатора в виде электрической цепи (рис. 5).

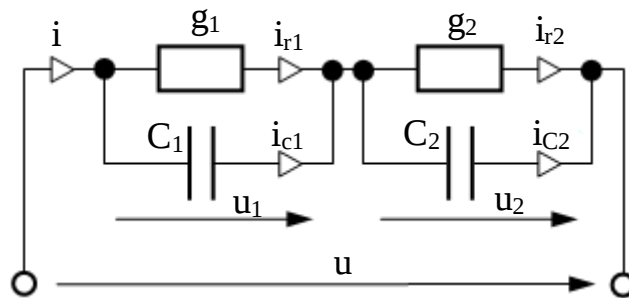


Рис. 5. Расчетная схема первого варианта решения

Способ 2

Ток общей части цепи рассматривается как ток источника тока, растекающийся с жилы на оболочку в радиальном направлении цилиндрического кабеля, причём $i = \oint_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S}$, а радиальная составляющая

плотности полного тока $\delta = \frac{i}{2\pi r l} = \frac{I_m \cdot \sin \omega t}{2\pi \cdot l \cdot r}$, причём $r[\text{м}]$, $\delta_m = \frac{I_m}{2\pi \cdot l \cdot r}$.

Комплексная амплитуда полного тока $\underline{\delta}_m = \delta_m e^{j\psi_i} = \delta_m$ при $\psi_i = 0$.

Плотность полного тока: $\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

При синусоидальной напряжённости поля:

$$E(\omega t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_E) = \text{Im}(E_m e^{j(\omega t + \Psi_E)}),$$

при этом $\underline{E}_m = E_m e^{j\Psi_E}$.

$$\begin{aligned}\delta(\omega t) &= \gamma E_m \sin(\omega t + \Psi_E) + \omega \varepsilon \varepsilon_0 E_m \cos(\omega t + \Psi_E) = \\ &= \operatorname{Im}[(\gamma + j\omega \varepsilon \varepsilon_0) \cdot E_m e^{j(\omega t + \Psi_E)}],\end{aligned}$$

при этом $\underline{\delta}_m = (\gamma + j\omega \varepsilon \varepsilon_0) \underline{E}_m$.

Далее рассчитываются закон изменения комплексных амплитуд радиальных составляющих напряжённостей электрического поля участков и другие параметры.

Образец выполнения практического задания 2

Исходные данные: $r_0 = 1$ см, $r_1 = 2$ см, $r_2 = 2,5$ см; $l = 20$ см; $I_m = 0,628$ А;
 $f = 18 \cdot 10^4$ Гц.

Решим задачу двумя способами.

Способ 1

Используя теорию стационарных полей, рассчитаем проводимости и ёмкости каждого слоя несовершенного диэлектрика и построим схему замещения конденсатора в виде электрической цепи (рис. 5):

$$g_1 = \frac{2\pi\gamma_1 l}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} = \frac{2\pi \cdot 8,66 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2}{\ln\left(\frac{2}{1}\right)} = 15,69 \cdot 10^{-5} \text{ См}, \quad (31)$$

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2}{\ln\left(\frac{2}{1}\right)} = 80,18 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}, \quad (32)$$

$$g_2 = \frac{2\pi\gamma_2 l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2}{\ln\left(\frac{2,5}{2}\right)} = 16,87 \cdot 10^{-5} \text{ См}, \quad (33)$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2}{\ln\left(\frac{2,5}{2}\right)} = 148,7 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}. \quad (34)$$

Определим ёмкостные проводимости для заданной частоты:

$$b_1 = \omega C_1 = 2\pi f C_1 = 18 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 80,18 \cdot 10^{-12} = 9,064 \cdot 10^{-5} \text{ См}, \quad (35)$$

$$b_2 = \omega C_2 = 2\pi f C_2 = 18 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 148,7 \cdot 10^{-12} = 16,81 \cdot 10^{-5} \text{ См}. \quad (36)$$

При части напряжения u_1 (рис. 10) токи параллельных ветвей определяются:

– ток через проводимость:

$$i_{r1}(\omega t) = U_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) g_1, \quad (37)$$

– ток через емкость:

$$i_{c1}(\omega t) = C_1 \frac{du_1}{dt} = \omega C_1 U_{1m} \cos(\omega t + \Psi_1), \quad (38)$$

– ток общей ветви:

$$i(\omega t) = i_{r1}(\omega t) + i_{c1}(\omega t). \quad (39)$$

По заданию ток общей ветви задан $i(\omega t) = I_m \sin \omega t$. Тогда:

$$I_m \sin \omega t = U_{1m} [g_1 \sin(\omega t + \Psi_1) + \omega C_1 \cos(\omega t + \Psi_1)].$$

Перейдём к символическому методу:

– комплексная амплитуда общего тока $\underline{I}_m = I_m$,

– комплексные амплитуды напряжений $\underline{U}_{1m} = U_{1m} e^{j\Psi_{u1}}$, $\underline{U}_{2m} = U_{2m} e^{j\Psi_{u2}}$,

– комплексные проводимости параллельных ветвей:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= g_1 + j\omega C_1 = (15,69 + j 9,064) \cdot 10^{-5} = \\ &= \sqrt{15,69^2 + 9,064^2} \cdot 10^{-5} \cdot e^{j \arctg \frac{9,064}{15,69}} = 18,12 e^{j30,0^\circ} 10^{-5} \text{ См}, \\ \underline{Y}_2 &= g_2 + j\omega C_2 = (16,87 + j16,81) 10^{-5} = \\ &= \sqrt{16,87^2 + 16,81^2} \cdot 10^{-5} \cdot e^{j \arctg \frac{16,81}{16,87}} = 23,82 e^{j44,9^\circ} 10^{-5} \text{ См}. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1m} &= \frac{\underline{I}_m}{\underline{Y}_1} = \frac{0,628}{18,12 \cdot 10^{-5} e^{j30^\circ}} = 3466 \cdot e^{-j30^\circ} = \\ &= 3466 \cdot [\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ)] = 3002 - j1733 \text{ В}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для второго разветвления получаем аналогично:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{2m} &= \frac{\underline{I}_m}{\underline{Y}_2} = \frac{0,628}{23,82 \cdot 10^{-5} e^{j44,9^\circ}} = 2637 \cdot e^{-j44,9^\circ} = \\ &= 2637 \cdot [\cos(-44,9^\circ) + j\sin(-44,9^\circ)] = 1868 - j1861 \text{ В.}\end{aligned}\quad (42)$$

Напряжение сети:

$$\begin{aligned}\underline{U}_m &= \underline{U}_{1m} + \underline{U}_{2m} = 3002 - j1733 + 1868 - j1861 = \\ &= 4870 - j3594 = \sqrt{4870^2 + 3594^2} \cdot e^{j \arctg \frac{3594}{4870}} = 6053 e^{-j36,4^\circ} \text{ В.}\end{aligned}\quad (43)$$

Мгновенное значение напряжения сети:

$$u(\omega t) = \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}) = 6,053 \sin(\omega t - 36,4^\circ) \text{ кВ.} \quad (44)$$

Способ 2

Ток общей части цепи рассматриваем как ток источника тока, растекающийся с жилы на оболочку в радиальном направлении цилиндрического кабеля, причём $i = \oint_S \vec{\delta} \cdot \vec{dS}$, а радиальная составляющая

плотности полного тока:

$$\delta = \frac{i}{2\pi r l} = \frac{0,628 \sin \omega t}{2\pi \cdot 0,2 \cdot r} = \frac{0,5}{r} \sin \omega t \text{ [А/м}^2\text{]}, \text{ причём } r[\text{м}]. \quad (45)$$

Комплексная амплитуда полного тока:

$$\underline{\delta}_m = \delta_m e^{j\psi_i} = \frac{0,5}{r} \quad \text{при } \psi_i = 0. \quad (46)$$

Плотность полного тока:

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (47)$$

При синусоидальном распределении напряжённость поля:

$$E(\omega t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_E) = \text{Im}(E_m e^{j(\omega t + \Psi_E)}), \quad (48)$$

при этом $\underline{E}_m = E_m e^{j\Psi_E}$.

При синусоидальном распределении плотность полного тока:

$$\begin{aligned} \delta(\omega t) &= \gamma E_m \sin(\omega t + \Psi_E) + \omega \varepsilon \varepsilon_0 E_m \cos(\omega t + \Psi_E) = \\ &= \text{Im}[(\gamma + j\omega \varepsilon \varepsilon_0) \cdot E_m e^{j(\omega t + \Psi_E)}], \end{aligned} \quad (49)$$

Рассчитаем закон изменения комплексных амплитуд радиальных составляющих напряжённостей электрического поля участков с разной диэлектрической проницаемостью:

$$\begin{aligned} \gamma_1 + j\omega \varepsilon_1 \varepsilon_0 &= 8,66 \cdot 10^{-5} + j2\pi \cdot 18 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = \\ &= (8,66 + j 5,00) \cdot 10^{-5} = 10,0 e^{j30,0^\circ} 10^{-5} \text{ См/м}, \\ \gamma_2 + j\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 &= 3 \cdot 10^{-5} + j2\pi \cdot 18 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = \\ &= (3 + j 3) \cdot 10^{-5} = 4,24 e^{j45,0^\circ} 10^{-5} \text{ См/м}. \end{aligned}$$

$$\underline{E}_{1m} = \frac{\underline{\delta}_m}{\gamma_1 + j\omega \varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{0,5}{r} \cdot \frac{1}{10,0 e^{j30,0^\circ} 10^{-5}} = \frac{5000}{r} e^{-j30^\circ} \text{ В/м}, \quad (50)$$

$$\underline{E}_{2m} = \frac{\underline{\delta}_m}{\gamma_2 + j\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{0,5}{r} \cdot \frac{1}{4,24 e^{j45,0^\circ} 10^{-5}} = \frac{11790}{r} e^{-j45^\circ} \text{ В/м}. \quad (51)$$

Комплексная амплитуда напряжения на первом слое диэлектрика:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1m} &= \int_{r_0}^{r_1} \underline{E}_{1m} dr = 5 \cdot 10^3 \cdot e^{-j30^\circ} \ln \frac{r_1}{r_0} = 5 \cdot 10^3 \cdot e^{-j30^\circ} \ln 2 = \\ &= 3466 e^{-j30^\circ} \text{ В} = 3466 \cos(30^\circ) - j 3466 \sin(30^\circ) = 3002 - j 1733 \text{ В}. \end{aligned} \quad (52)$$

Комплексная амплитуда напряжения на втором слое диэлектрика:

$$\underline{U}_{2m} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{E}_{2m} dr = 11,79 \cdot 10^3 \cdot e^{-j45^\circ} \ln \frac{r_2}{r_1} = 11,79 \cdot 10^3 \cdot e^{-j45^\circ} \ln \frac{2,5}{2,0} =$$

$$= 2637 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ В} = 2637 \cos(44,9^\circ) - j 2637 \sin(44,9^\circ) = 1868 - j1861 \text{ В. (53)}$$

Комплексная амплитуда напряжения между обкладками двухслойного цилиндрического конденсатора:

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{1m} + \underline{U}_{2m} = 3002 - j 1733 + 1868 - j 1861 =$$

$$= 4870 - j 3594 = \sqrt{4870^2 + 3594^2} \cdot \exp\left(j \arctg \frac{3594}{4870}\right) = 6053 e^{-j36,4^\circ} \text{ В. (54)}$$

Мгновенное значение напряжения между обкладками:

$$u(\omega t) = \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t}) = 6,053 \sin(\omega t - 36,4^\circ) \text{ кВ. (55)}$$

Вывод: результат расчета по первому способу совпал с результатом расчета по второму способу.