Разработка практического задания на формирование УМЕНИЙ
Кейс-задание «Анализ экономико-математических моделей методами дифференциального и интегрального исчисления»
(макс. – 15 баллов)

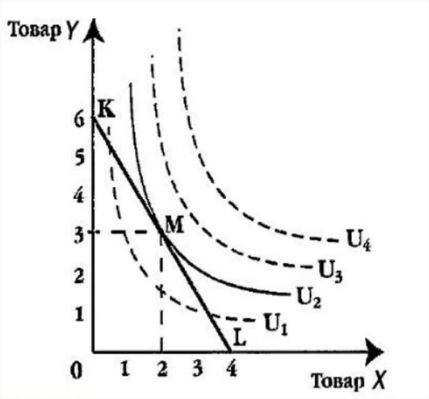
Задание 1. (Анализ функции полезности и кривых безразличия)

Цель работы – ознакомление с понятием функции полезности, кривой безразличия и их исследование с использованием методов аналитической геометрии и дифференциального исчисления.

Краткие теоретические сведения

Функция полезности является мерой соотношения между объемами потребляемых благ и уровнем полезности: $U = U(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; где U – полезность набора благ, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - объемы потребления благ

Кривая безразличия – это линия, каждая точка которой представляет комбинацию двух товаров, которые имеют для потребления одинаковую общую полезность



Основные характеристики функции полезности

1) *Средняя полезность* - это отношение общей полезности к количеству потреблённых единиц блага $u_i = \frac{U}{y_i}$

2) *Предельная полезность* — это увеличение общей полезности при потреблении одной дополнительной единицы блага $U_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}$

Задача о максимальном наборе потребителя сводится к решению задачи на условный экстремум:

$$\begin{cases} U(y_1, y_2, \ldots, y_n) \to \max \\ P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n = l - \text{уравнение связи (бюджетное ограничение)} \end{cases}$$

Где P_i – цена i-го товара, l –доход потребителя

Условие задачи. Потребитель имеет функцию полезности: $U(x, y) = \sqrt{xy}$

и может на свой доход равный 100 единицам приобретать только эти два товара по ценам: $P_x = 2$ и $P_y = 5$.

Поставлены задачи(ОПК-2, У2):

1)Построить несколько кривых безразличия (линий уровня) для заданной функции полезности.

2) Определить уравнение средней и предельной полезности по каждому благу.

3) Записать математическую модель задачи оптимального выбора потребителя. Определить оптимальный набор, методом исключения сведя задачу на условный эксремум к задаче на безусловный экстремум. Определить максимальный уровень полезности.

4) Используя понятие дифференциала, записать приближенную формулу для нахождения изменения полезности при уменьшении блага *x* на 1 единицу и увеличении блага *y* на 1 единицу.

Задание 2. (Анализ производственных функций)

Цель работы – ознакомление с понятием кривой безразличия, производственной функции и ее исследование с использованием методов дифференциального исчисления.

Краткие теоретические сведения

Производственная функция – это экономико-математическая модель, которая отражает зависимость результатов деятельности производственных объектов (выпуска продукции) от обусловивших эти результаты факторов (ресурсов).

$Q = a_0 L^a K^b$ – производственная функция Кобба-Дугласа, где где L – затраты труда, K – капитальные ресурсы, включающие основные и (не всегда) оборотные фонды производственного объекта.

Величина L измеряется в натуральном (например, в человеко-часах, днях, месяцах или в количестве среднегодовых работников) или в стоимостном выражении, а величина K – в стоимостном выражении.

Конкретные числовые значения параметров a_0, a, b определяются на основе статистических данных за ряд предшествующих лет с помощью методов корреляционно-регрессионного анализа.

Линия уровня производственной функции, т.е. линия, в каждой точке которой объем выпуска при разных значениях и один и тот же, называется *изоквантой* или *кривой безразличия* производства. Уравнение изокванты имеет вид $f(K, L) = \text{const}$.

Изокванты не пересекаются; большему объему производства отвечают изокванты, более удаленные от начала координат; касательные к изоквантам имеют отрицательный угловой коэффициент.

Основные характеристики производственной функции

1) *Уравнение предельной производительности труда* - частная производная выпуска продукции по затратам труда. $Q'_L = \dfrac{\partial f(K,L)}{\partial L}$

2) Показатель предельной фондоотдачи определяется как частная производная выпуска продукции по объему фондов. $Q'_K = \dfrac{\partial f(K,L)}{\partial K}$

3)*Эластичность выпуска по труду* E_L *и эластичность выпуска по капиталу* E_K - безразмерные показатели показывают, на сколько процентов произойдет относительное увеличение выпуска при относительном увеличении соответствующего ресурса на 1%.

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} \; ; \; E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q}$$

Условие задачи. Предприниматель решил выделить на расширение своего дела 150 тыс. руб. Известно, что если затратить на новое оборудование *x* тыс. руб., а на зарплату вновь приобретённых работников *y* тыс.руб., то прирост объёма продукции составит $Q=0{,}001K^{0.6}L^{0,4}$.

Поставлены задачи(ОПК-2, У2):

5) Найти предельные показатели по каждому ресурсу

6) Найти коэффициент элластичности по труду

7) используя метод Лагранжа, распределить выделенные денежные ресурсы так, чтобы прирост объёма продукции был максимальным.

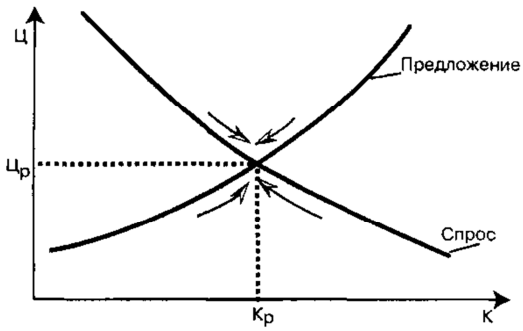
Задание 3. (Анализ модели спроса и предложения)

Цель работы – ознакомление с понятием понятиями спроса и предложения и проведение математического анализа модели спроса и предложения с использованием интнегрального исчисления.

Краткие теоретические сведения

Закон спроса и предложения — экономический закон, объединяющий в себе закон спроса и закон предложения. *Закон спроса* — величина (объём) спроса уменьшается по мере увеличения цены товара. *Закон предложения* — при прочих неизменных факторах величина (объём) предложения увеличивается по мере увеличения цены на товар.

Обычно цена устанавливается в точке равновесия между предложением и спросом. При прочих равных условиях, снижение цены на товар увеличивает спрос (готовность покупать) и уменьшает предложение (готовность продавать).

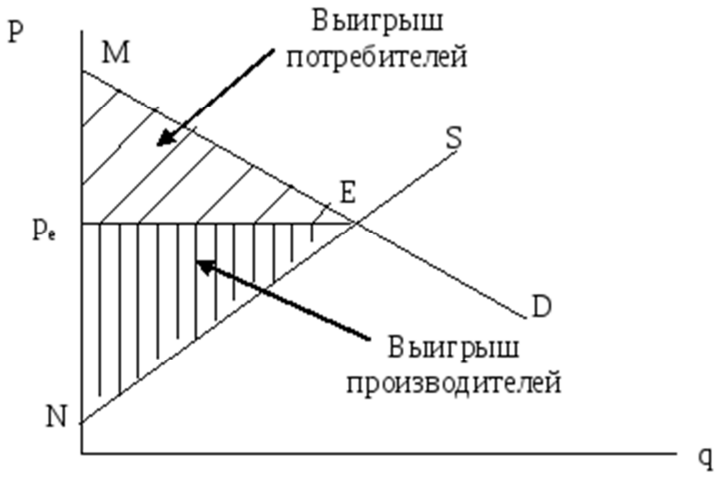


Любой потребитель хотел бы купить товар как можно дешевле, но для каждого из них существует максимальная цена, которую он согласен заплатить за данную единицу товара, прежде чем откажется от ее покупки. Такая цена называется *ценой спроса*. Совокупность цен спроса всех потребителей образует кривую рыночного спроса.

Вместе с тем, все потребители независимо от их цен спроса покупают товар по единой рыночной цене. Разница между индивидуальной ценой спроса и рыночной ценой составляет *выигрыш потребителя* (потребительский излишек) при покупке данной единицы товара. Это своего рода прибыль потребителя.

Любой производитель хотел бы продать товар как можно дороже, но для каждого из них существует минимальная цена, по которой он еще согласится продавать данную единицу товара, прежде чем откажется от ее производства и продажи. Такая цена называется *ценой предложения*. Совокупность цен предложения всех производителей образует кривую рыночного предложения.

Вместе с тем все производители независимо от их цен предложения продают товар по единой рыночной цене. Разница между рыночной ценой и индивидуальной ценой предложения и составляет *выигрыш производителя* (излишек производителя) при продаже данной единицы товара.



Условие задачи(ОПК-2, У2):

Пусть спрос и предложение на товар определяются соответственно соотношениями

$D=44-q^2$, $S=q^2+2q+20$.

Поставлены задачи:

8) построить кривые спроса и предложения, указав на рисунке выигрыш поставщиков и потребителей,

9) найти аналитически координаты точки рыночного равновесия;

10) найти выигрыш потребителей и поставщиков товара.

Пусть спрос и предложение на товар определяются соответственно соотношениями

$$D = 4p' - 2p + 39, \quad S = 44p' + 2p - 1$$

где p– цена товара; p' - тенденция формирования цены (производная цены по времени).

Пусть также в начальный момент времени цена p за единицу товара составляла 1 ден. ед.

Поставлены задачи:

11) найти общий закон изменения цены в зависимости от времени;

12) найти закон изменения цены в зависимости от времени с учетом начального условия.

Задание 4. (Анализ модели статистического прогнозирования)

Цель работы – ознакомление с понятием динамического ряда и исследование общей тенденции развития экономического процесса с использованием приема аналитического выравнивания.

Краткие теоретические сведения

Одной из важнейших задач статистики является изучение изменений анализируемых показателей во времени, то есть их *динамика*. Эта задача решается при помощи анализа *рядов динамики* (временных рядов).

Ряд динамики (или временной ряд) – это числовые значения определенного статистического показателя в последовательные моменты или периоды времени (т.е. расположенные в хронологическом порядке).

Числовые значения того или иного статистического показателя, составляющего ряд динамики, называют *уровнями ряда* и обычно обозначают буквой y. Первый член ряда y_1 называют начальным или *базисным уровнем*, а последний y_n – *конечным*. Моменты или периоды времени, к которым относятся уровни, обозначают через t.

Ряды динамики, как правило, представляют в виде таблицы или графика, причем по оси абсцисс строится шкала времени *t*, а по оси ординат – шкала уровней ряда *y*.

Условие задачи(ОПК-2, У2):

. Прибыль предприятия за пять лет деятельности приведена в таблице.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	4,8	7,8	9,3

Поставлены задачи:

13) представить графически ряд динамики прибыли предприятия;

14) используя метод наименьших квадратов, составить линейную зависимость прибыли по годам деятельности предприятия;

15) определить ожидаемую прибыль для 6-го года деятельности.

Внимание!

1.Округление результатов проводить до сотых долей.

2.В СДО Moodle необходимо загрузить отчет с подробным обоснованием результатов анализа экономико-математических моделей. .

Графическое представление результатов исследования может быть выполнено в любом графическом редакторе и представлено сканами или выполняется на клетчатой бумаге.

3. Правильное выполнение каждой задачи оценивается в один балл.