

ГЛАВА 5

КОРРЕЛАТНЫЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

5.1. Обоснование метода наименьших квадратов с позиции коррелятного способа.

Статистические свойства результатов уравнивания

Несмотря на то, что в настоящее время коррелятный способ (или условий) практически не применяется из-за сложности составления условных уравнений и оценки точности функций на ЭВМ, его теория представляет значительный интерес, расширяет понимание многих процессов и облегчает выводы ряда фундаментальных формул. В качестве иллюстрации приведем теорию коррелятного способа вместе с новым обоснованием МНК.

Наличие в сети r избыточных измерений приводит к образованию точных математических зависимостей вида $\varphi_j(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = 0$, $j = 1, 2, \dots, r$, Y_i — истинные значения измеряемых величин, или в матричной форме в виде вектор-функции

$$\varphi(\mathbf{Y}) = 0. \quad (5.1)$$

Эти уравнения называют исходными уравнениями связи.

После приведения вектор-функции $\varphi(\mathbf{Y})$ к линейному виду вместо (5.1) получим матричную систему

$$\mathbf{B}(\mathbf{Y} - \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}) = 0 \quad (5.2)$$

(в качестве приближенного вектора $\mathbf{Y}^{(0)}$ принят вектор резуль-

татов измерений y). Элементами матрицы являются произ-

$$\text{водные } B_{ji} = \left(\frac{\partial \varphi_j(\mathbf{Y})}{\partial Y_i} \right)_{Y_i=y_i}.$$

Так как вектор истинных ошибок $\Delta = y - Y$, выражение (5.2) можно переписать в виде

$$\mathbf{B}(-\Delta) + \mathbf{W} = 0, \quad (5.3)$$

причем вектор $\mathbf{W} = \varphi(y)$ называют вектором невязок. Точно также, как и вектор $\mathbf{X}^{(0)}$, если он получен по результатам измерений, $\mathbf{W}$ является случайным вектором.

Так как в системе (5.3) уравнений меньше, чем неизвестных, можно подобрать бесчисленное множество удовлетворяющих ей векторов Δ .

Но выделить из них единственный вектор, соответствующий измеренному y , невозможно из-за недостатка информации. При этом из всех решений системы можно выбрать наилучшее. Математически такая задача может быть поставлена так.

Пусть имеется совокупность некоторых функций $F_s = F_s(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, $s=1, 2, \dots, m$ или вектор-функция

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(Y). \quad (5.4)$$

Линеаризация ее при $Y^{(0)} = y$ приводит к выражению $\mathbf{F} = \mathbf{f}(Y - y) + \mathbf{F}(y)$ или

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(y) - \mathbf{f}\Delta, \quad (5.5)$$

где элементами матрицы $\mathbf{f}$ размера $m \times n$ являются частные производные

$$f_{si} = \left(\frac{\partial F_s}{\partial Y_i} \right)_{Y_i=y_i}.$$

Выражение (5.5) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}(y) = \mathbf{F} + \mathbf{f}\Delta \quad (5.6)$$

и принять $\mathbf{F}^*$ в качестве оценки для $\mathbf{F}$.

Недостатком оценки $\mathbf{F}^*$ является неоднозначность ее значений, так как она зависит от тех измерений, по которым выполнены вычисления, и не учитывает избыточную информацию.

Иными словами, $\mathbf{F}^*$ можно назвать оценкой до уравнивания, матрицей обратных весов которой будет

$$\mathbf{Q}_{F^*} = \mathbf{f} \mathbf{Q} \mathbf{f}^T. \quad (5.7)$$

Избыточная информация (вектор невязок $\mathbf{W}$) должна улучшить оценку $\mathbf{F}^*$ вектор-функции $\mathbf{F}$. Это можно сделать, введя в $\mathbf{F}^*$ вектор поправок $\mathbf{V}_F$ в виде линейной комбинации вектора $\mathbf{W}$:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^* + \mathbf{V}_F = \mathbf{F}^* + \rho^T \mathbf{W}, \quad (5.8)$$

Учитывая выражения (5.3) и (5.6), можно найти оценку

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \mathbf{f} \Delta + \rho^T \mathbf{B} \Delta = \mathbf{F} + (\mathbf{f} + \rho^T \mathbf{B}) \Delta$$

и матрицу ее обратных весов $\mathbf{Q}_{\hat{F}} = (\mathbf{f} + \rho^T \mathbf{B}) \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{f} + \mathbf{B} \rho)^T$ или

$$\mathbf{Q}_{\hat{F}} = \mathbf{N}_{ff} + \mathbf{N}_f \rho + \rho^T (\mathbf{N} \rho + \mathbf{N}_f), \quad (5.9)$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T$; $\mathbf{N}_f = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}^T$.

Если обозначить

$$\mathbf{N} \rho + \mathbf{N}_f = \mathbf{C}_f, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{C}$, так же как и ρ — произвольная матрица, то

$$\rho = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}_f - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_f \mathbf{C}_f. \quad (5.11)$$

Подстановка формулы (5.11) в выражение (5.9) приводит к формуле

$$\mathbf{Q}_{\hat{F}} = \mathbf{N}_{ff} + \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_f + \mathbf{C}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}_f. \quad (5.12)$$

Вектор оценок при этом будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(y) - \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{W} + \mathbf{C}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{W}. \quad (5.13)$$

Если матрица $\mathbf{C}_f = 0$, то оценка $\hat{\mathbf{F}}$ становится следующей:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(y) - \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{W}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{Q}_{\tilde{F}} = \mathbf{N}_{ff} - \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_f. \quad (5.15)$$

Так как матрицу $\mathbf{N}$ предполагаем невырожденной, то матрица $\mathbf{C}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}_f$ положительно определена. Поэтому

$\mathbf{Q}_{\hat{F}} - \mathbf{Q}_{\tilde{F}} = \mathbf{C}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}_f \geq 0$. Это означает, что матрица $\mathbf{Q}_{\tilde{F}}$ и определитель $|\mathbf{Q}_{\tilde{F}}|$ удовлетворяют неравенствам: $\mathbf{Q}_{\tilde{F}} \leq \mathbf{Q}_{\hat{F}}$, $|\mathbf{Q}_{\tilde{F}}| \leq |\mathbf{Q}_{\hat{F}}|$. Величина $|\sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\tilde{F}}|$ является обобщенной дисперсией вектора функции $\tilde{\mathbf{F}}$. Можно доказать, что и $\text{Sp}(\mathbf{Q}_{\tilde{F}}) \leq \text{Sp}(\mathbf{Q}_{\hat{F}})$, а также и то, что

$$\sigma_{\tilde{F}}^2 \leq \sigma_{\hat{F}}^2. \quad (5.16)$$

Таким образом, оценка функции будет наиболее точной при определении матрицы ρ из решения системы

$$\mathbf{N}\rho + \mathbf{N}_f = 0. \quad (5.17)$$

Такое уравнивание назовем строгим, а уравнивание с матрицей $\mathbf{C}_f \neq 0$ — приближенным. Им соответствуют оценки (5.14) и (5.13) с матрицами обратных весов (5.15) и (5.12). Математическое ожидание вектора будет

$$\mathbf{M}[\hat{\mathbf{F}}] = \mathbf{F} + (\mathbf{f} + \rho^T \mathbf{B}) \mathbf{M}[\Delta].$$

Если измерения не содержат систематических ошибок, то $\mathbf{M}[\Delta] = 0$ и $\mathbf{M}[\hat{\mathbf{F}}] = \mathbf{F}$, т. е. процедура уравнивания, как строгого, так и приближенного, не вносит смещений в результаты, и корреляционная матрица $\mathbf{K}_{\hat{F}}$ характеризует точность уравненных функций относительно их истинных значений (с точностью до остатка разложения в ряд исходных функций), что приводит к методу наименьших квадратов.

Действительно, если вектор-функция $\mathbf{F} = \mathbf{Y}$, т. е. оценке подлежат сами измеряемые величины, то матрица $\mathbf{f}$ преобразуется в единичную $\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{E}^{n \times n}$; матрицы $\mathbf{N}_{ff} = \mathbf{P}^{-1}$; $\mathbf{N}_f = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$;

вектор оценок

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{W}, \quad (5.18)$$

или $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{V}$, где $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}$; $\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{W}$.

Частным случаем выражения (5.15) при $\mathbf{f} = \mathbf{E}$ является формула

$$\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \quad (5.19)$$

для матрицы обратных весов уравненного вектора $\tilde{\mathbf{y}}$.

Такой же результат можно получить, если вектор $-\Delta$ заменить вектором $\mathbf{V}$, который называют вектором поправок, удовлетворяющим условию

$$\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min. \quad (5.20)$$

Для определения условного минимума (5.20) при условии

$$\mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{W} = 0 \quad (5.21)$$

составляют функцию Лагранжа $\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} + \lambda^T (\mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{W})$ где $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^T$ — вектор вспомогательных множителей. Для удобства выводов следует ввести обозначение: $\lambda = -2\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ — вектор коррелат).

$$\text{Из равенства частной производной нулю } \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{V}} = 2\mathbf{V}^T \mathbf{P} - 2\mathbf{K}^T \mathbf{B} = 0$$

следует, что $\mathbf{V}^T = \mathbf{K}^T \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1}$ и $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}$, что следует также из (5.18).

Подстановка вектора $\mathbf{V}$ в систему условных уравнений (5.21) приводит к системе нормальных уравнений коррелат

$$\mathbf{N} \mathbf{K} + \mathbf{W} = 0, \quad (5.22)$$

где $\mathbf{N}$ — матрица, как и ранее, равная

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T. \quad (5.23)$$

Таким образом, алгебраическое условие метода наименьших квадратов (5.20) приобретает более богатый вероятностный смысл, заключенный в доказанной выше обобщенной на совокупность функций теореме Гаусса-Маркова. При этом сама теорема Гаусса-Маркова становится частным случаем. Действительно, из выражения (4.8)

$$\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X}^{(0)}) + \mathbf{A} \Delta \mathbf{X}$$

следует, что вектор истинных поправок определяется выражением $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{Y} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \varphi(\mathbf{X}^{(0)})$, а $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)} + \Delta \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Поэтому матрица $\mathbf{f}$ размера $m \times n$ преобразуется к виду (здесь для простоты вектор $\mathbf{X}^{(0)}$ рассматривается неслучайным)

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \quad \text{и вектор поправок } \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда приближенное уравнение выполняется заменой матрицы $\mathbf{P}$ на $\mathbf{S}$. Тогда вместо условия (5.20) следует поставить условие $\Phi = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{V}} = \min$. В ре-

зультате получим матричное нормальное уравнение коррелат $\bar{N}\bar{K} + W = 0$ с матрицей $\bar{N} = BS^{-1}B^T$. Тогда вектор поправок $\bar{V} = S^{-1}B^TK$. Вектор $\bar{y} = y + \bar{V}$ будет несмещенным. Так как вектор

$$\bar{y} = Y + \Delta - S^{-1}B^T\bar{N}^{-1}W = Y + \Delta - S^{-1}B^T\bar{N}^{-1}B\Delta$$

или

$$\bar{y} = Y + (E - S^{-1}B^T\bar{N}^{-1}B)\Delta = Y + U\Delta,$$

то матрица его обратных весов

$$Q_{\bar{y}} = UP^{-1}U^T, \quad (5.24)$$

где матрица $U = E - S^{-1}B^T\bar{N}^{-1}B$.

Опуская несложные преобразования, после прибавления и вычитания в правой части матрицы $P^{-1}B^TN^{-1}BP^{-1}$ получим выражение

$$Q_{\bar{y}} = P^{-1} - P^{-1}B^TN^{-1}BP^{-1} + C^TN^{-1}C, \quad (5.25)$$

где матрица

$$C = BP^{-1} - N\bar{N}^{-1}BS^{-1}. \quad (5.26)$$

Условие $C=0$ (строгое уравнивание) выполняется всегда, когда матрица $\bar{N} = Nd^{rr}$, где d — произвольная невырожденная матрица [25]. Вектор $\bar{V}$ получим равным $\bar{V} = V + C^TN^{-1}W$. Так как $B\bar{V} + W = 0$, то $BV + BC^TN^{-1}W = 0$ и, следовательно, должно выполняться условие $BC^T = 0$. Действительно, при матрице C , определенной согласно (9.26),

$$BC^T = BP^{-1}B^T - BS^{-1}\bar{N}^{-1}N = N - N\bar{N}^{-1}N = 0.$$

Для оценки точности функции при приближенном уравнивании можно применять формулу (5.12) с матрицей

$$C_f = Cf^T = N_f - N\bar{N}^{-1}\bar{N}_f.$$

Тогда $Q_{\bar{F}} = Q_{\bar{f}} + C_f^TN^{-1}C_f$.

Но, как видно, для этого необходимо иметь матрицу N^{-1} . Однако является справедливой формула [22]

$$Q_{\bar{F}} = N_{ff} + N_{ff}^T\rho + \rho^TC_f, \quad (5.28)$$

где матрицы $\bar{\rho} = -\bar{N}^{-1}\bar{N}_f$, $\bar{N}_f = BS^{-1}f^T$.

Так, если на станции измерены три угла способом круговых приемов (рис. 5.1) (фактически они вычислены по направлениям), то матрица их обратных весов

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ & 1 & -0,5 \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

(при весе уравниваемого на станции направления $p_N=2$).

При приближенном уравнивании углов с заменой матрицы Q на $S^{-1}=E$ составляем условное уравнение $v_1+v_2+v_3=0$ (матрица $B=(1 \ 1 \ 1)$). Далее находим матрицу

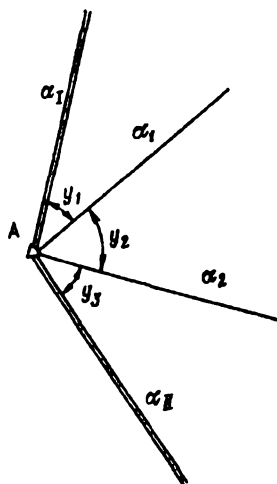


Рис. 5.1

$$N = BQB^T = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\text{и } \bar{N} = BS^{-1}B^T = BB^T = 3.$$

Для функции $\tilde{F} = \alpha_1 + \bar{y}_1 = \tilde{\alpha}_1$, матрицы $f = (1 \ 0 \ 0)$ и $N_f = BQf^T = 0,5$, $\bar{N}_f = 1$. Поэтому по формуле (5.27)

$$C_f = 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0,167. \text{ Матрица } N_{ff} = 1 \text{ и } Q_{\tilde{F}} = Q_{\tilde{F}} + C_f N^{-1} C_f = \\ = N_{ff} - N_f N^{-1} N_f + C_f^T N^{-1} N_f = 0,75 + 0,167^2 = 0,778.$$

Если вычисления выполнить по формуле (5.28), то мат-

$$\text{рица } \rho = \bar{N}^{-1}\bar{N}_f = -\frac{1}{3} \text{ и } Q_{\tilde{F}} = 1 + 0,5 \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \cdot 0,167 = 0,778.$$

Часто допускают ошибку, применяя для оценки точности функций, полученных при приближенном уравнивании как в параметрическом так и в коррелятном способах формулы, справедливые только для строгого уравнивания. Например, при коррелятном способе для оценки точности функции справедлива

формула ее обратного веса $\frac{1}{p_i} = [\pi_i ff \cdot r]$, где $\pi_i = \frac{1}{p_i}$. Но при при-

ближенном уравнивании заменяя веса p_i на приближенные значения (в рассматриваемом примере, равные 1), получим невер-

ный результат $\frac{1}{p_i} = 0,67$.

Как и для параметрического способа, приведем матрицу обратных весов векторов y , $\bar{y}$ и V . Поскольку для строгого уравнивания вектор

$$Z = \begin{pmatrix} y \\ \bar{y} \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y + \Delta \\ Y + (E - P^{-1}M)\Delta \\ P^{-1}M\Delta \end{pmatrix},$$

где матрица $M = B^T N^{-1} B$, то матрица

$$T = \frac{\partial Y}{\partial \Delta} = \begin{pmatrix} E \\ E - P^{-1}M + C^T N^{-1} B \\ P^{-1}M + C^T N^{-1} B \end{pmatrix}$$

Тогда на основании формулы $Q_z = T P^{-1} T^T$ составим таблицу для блоков матрицы Q_z (табл. 5.1)

Т а б л и ц а 5.1

Вектор	Вектор		
	y	$\bar{y}$	V
y	P^{-1}	$P^{-1} - P^{-1} M P^{-1}$	$P^{-1} M P^{-1}$
$\bar{y}$		$P^{-1} - P^{-1} M P^{-1}$	0
V			$P^{-1} M P^{-1}$

Для квадратичной формы справедливы такие выражения $\Phi = -\mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{W}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{W} = \mathbf{K}^T \mathbf{N} \mathbf{K} = -[\mathbf{w}_{r+1} \cdot \mathbf{r}]$. Последний алгоритм получается в столбце невязок в результате преобразования его по схеме Гаусса или Холесского. Величина $w_{r+1} = 0$.

5.2. Связь параметрического и коррелятного способов

Приведем ряд формул, связывающих параметрический и коррелятный способы.

Систему уравнений поправок $\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{L}$ разделим на две группы

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \mathbf{A}_1 \Delta\mathbf{x} + \mathbf{L}_1; \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{A}_2 \Delta\mathbf{x} + \mathbf{L}_2\end{aligned}\tag{5.30}$$

таким образом, что матрица $\mathbf{A}_1$ — квадратная порядка K и существует обратная матрица $\mathbf{A}_1^{-1}$ (т.е. в первую группу отнесены все необходимые измерения). Тогда можно вектор $\Delta\mathbf{x}$ выразить через вектор $\mathbf{V}_1$ следующим образом

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{V}_1 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{L}_1.\tag{5.31}$$

Подставив это выражение во второе уравнение (5.30), получим систему

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{V}_1 + \mathbf{L}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{L}_1,\tag{5.32}$$

или с обозначением $\mathbf{G} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{G} \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}$, где вектор $\mathbf{W} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{G} \mathbf{L}_1$.

Уравнение поправок (5.32) можно переписать в виде условного уравнения $\mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{W} = 0$ с блочной матрицей $\mathbf{B} = (\mathbf{G}^{r \times k} - \mathbf{E})$.

При некоррелированных векторах $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ матрица

$$\mathbf{N} = (\mathbf{G} - \mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^T \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_2^{-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T,\tag{5.33}$$

где матрица $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1$.

Умножив матрицу **B** на **A** получим

$$\left(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} - \mathbf{E}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2 = 0,$$

что доказывает важное свойство

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = 0. \quad (5.34)$$

Оценим теперь точность уравненного вектора $\Delta \mathbf{x}$. Поскольку в задаче $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{V}_1 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{L}_1 = -\mathbf{A}_1^{-1} \left(\varphi(\mathbf{X}^{(0)}) - \mathbf{y}_1 \right)$, так как вектор $\mathbf{V}_1$ при включении в сеть только необходимых измерений равен нулю, то матрица

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица

$$\mathbf{N} = \mathbf{f} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1^{-1},$$

где матрица $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1$.

Матрица

$$\mathbf{N}_f = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}^T = (\mathbf{G} - \mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-T} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_1^{-T} = \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_1^{-1}.$$

(напомним, что $\mathbf{A}_1^{-T} = (\mathbf{A}_1^{-1})^T$).

С учетом этих выражений получим матрицу $\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{F}}} = \mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_{ff} - \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_f$ или $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_1^{-1} - \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_1^{-1}$. Но, с другой стороны, $\mathbf{Q} = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)^{-1} = \mathbf{R}^{-1}$. Поэтому получаем связь между матрицами $\mathbf{R}^{-1}$ и $\mathbf{N}^{-1}$:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}_1^{-1} - \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_1^{-1}. \quad (5.35)$$

Опуская выводы, приведем также формулу $\bar{\mathbf{R}}^{-1} = \mathbf{R}_1^{-1} - \mathbf{M} - \mathbf{M}^T + \bar{\mathbf{R}}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{R}}_1^{-1}$, аналогичную (5.35), но

для случая приближенного уравнивания с матрицей весов $S \neq P$. Здесь матрицы $\bar{M} = \bar{R}_1^{-1} A_2^T \bar{N}^{-1} A_2 R_1^{-1}$, $\bar{R}_1 = A_1^T S A_1$.

Можно показать, что если векторы y_1 и y_2 коррелированы и име-

ют матрицу обратных весов $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$, то в этом случае

$$R^{-1} = \hat{R} - (\hat{R}_1^{-1} A_2^T - A_1^{-1} Q_{12}) N^{-1} (A_2 \hat{R}_1^{-1} - Q_{21} A_1^T),$$

где $\hat{R}_1^{-1} = A_1^{-1} Q_{11} A_1^T$.

Исходя из коррелятного уравнивания вновь получим формулу (4.25), которую следует переписать в виде

$$Q_x = \bar{R}^{-1} A^T S P^{-1} S A \bar{R}^{-1}. \quad (5.36)$$

Так, если $\bar{F} = \bar{x} = X^0 - \bar{R}^{-1} A^T S L$, то матрица $f = \bar{R}^{-1} A^T S$,

так как $L = \varphi(X^{(0)}) - y$, а $f = \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}$.

В этом случае в формуле (5.12) матрицы

$$N_{ff} = \bar{R}^{-1} A^T S P^{-1} S A \bar{R}^{-1}, \quad N_f = B P^{-1} S A \bar{R}^{-1},$$

$$N_{f^T} N_f = \bar{R}^{-1} A^T S P^{-1} B^T N^{-1} B P^{-1} S A \bar{R}^{-1} \text{ и}$$

$$C_f = -N \bar{N}^{-1} N_f = B P^{-1} S A \bar{R}^{-1} - N \bar{N}^{-1} B S^{-1} S A \bar{R}^{-1}.$$

Но так как $BA=0$, то . Поэтому в формуле (5.12)

$$C_f^T N^{-1} C_f = \bar{R}^{-1} A^T S P^{-1} B^T N^{-1} B P^{-1} S A \bar{R}^{-1} = N_f^T N^{-1} N_f,$$

и $Q_{\bar{F}} = Q_x = N_{ff}$, что совпадает с (5.36).

5.3 Контроль грубых ошибок и ср.кв. ошибка единицы веса

Одним из достоинств коррелятного способа является возможность выполнять контроль грубых ошибок по невязкам условных уравнений. Действительно, в условиях отсутствия в измерениях систематических ошибок ($M[\Delta]=0$) случайный вектор невязок

$$W = B \Delta \quad (5.37)$$

имеет математическое ожидание $M[W]=0$. Поэтому можно написать формулу

$$(W_j)_{\partial on} = \pm t \sigma_{w_j}.$$

Найдем СКО невязки W_j . Из выражения (5.37) следует, что вектор невязок W имеет корреляционную матрицу

$$K_w = BK_{\Delta}B^T = \sigma_0^2 BP^{-1}B^T = \sigma_0^2 N, \quad (5.38)$$

поэтому $\sigma_{w_j} = \sigma_0^2 N_{jj}$, где N_{jj} — j -й диагональный элемент коэффициентов нормальных уравнений N . Таким образом, допустимое значение невязки

$$(W_j)_{\partial on} = \pm t \sigma_0 \sqrt{N_{jj}}. \quad (5.39)$$

Для равноточных измерений

$$(W_j)_{\partial on} = \pm t \sigma_0 \sqrt{N_{jj}}. \quad (5.39a)$$

Эта формула предполагает, что точно известны веса измерений или СКО одного измерения. В противном случае вместо σ_0 или σ следует пользоваться их оценками μ или m , а вместо t — коэффициентом Стьюдента.

Однако эти формулы применяются все реже из-за сложности составления условных уравнений на ЭВМ. Можно доказать (см. раздел 6.5), что их эквивалентом являются формулы контроля грубых ошибок при рекуррентном уравнивании (см. главу 6).

Пример. Пусть имеем модель нивелирной сети (рис. 5.2) с весами ходов $p_i=1$. Имеем матрицу коэффициентов условных уравнений

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

составленную для полигонов I и II. Вектор невязок

$$W = \begin{pmatrix} 0,050 \\ 0,030 \end{pmatrix}.$$

Нормальные уравнения будут такими

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,050 \\ 0,030 \end{pmatrix} = 0.$$

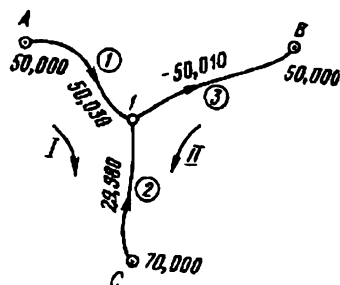


Рис. 5.2. Нивелирная сеть с одним узлом

Решим эту систему по схеме Гаусса (табл. 5.2).

Т а б л и ц а 5.2

k_1	k_2	W
2	1 -0,5	0,050 -0,0250
	1,5	0,005 -0,0033
0,0234	-0,0033	$-[W_3 \cdot 2] = [VV] =$ 0,00127

Квадратичная форма $[VV] = 0,00127$. Вектор поправок

$$V^T = B^T K = \begin{pmatrix} -0,023 \\ 0,027 \\ 0,003 \end{pmatrix}.$$

Уравненное значение высоты узловой точки

$$x = 50 + (50,030 - 0,023) = 100,007.$$

Величины $N_{11} = 2$, $[N_{22} \cdot 1] = 1,5$. Далее следует выполнить вычисления по формуле (5.39). Оценим точность отметки репера 1: $X_1 = X_A + y_1$.

Согласно с формулой (5.15) находим матрицы:

$$f = (1 \ 0 \ 0), \quad N_{ff} = ff^T = 1, \quad N_f = Bf^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица обратных весов будет такой

$$Q_F = 1 - \frac{1}{3} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,333.$$

5.4. Некоторые виды условных уравнений

Излагая теорию коррелятного уравнивания, мы не будем подробно рассматривать виды условных уравнений, учитывая, что в настоящее время этот способ применяется редко ввиду сложной логики программирования на ЭВМ. Даже его преимущество перед параметрическим способом — возможность контроля грубых ошибок — теряет своё значение, так как эта за-

дача решается значительно проще при помощи рекуррентного уравнивания (см. раздел 6).

Тем не менее приведём лишь некоторые виды условных уравнений.

Как и в параметрическом способе они делятся на два вида: линейные и нелинейные. К первым и самым простым, относятся условия фигур, например суммы углов в треугольнике или многоугольнике, условия дирекционных углов в сети триангуляции или полигонометрии, условия горизонта, полигонные условия в нивелирных сетях и др.

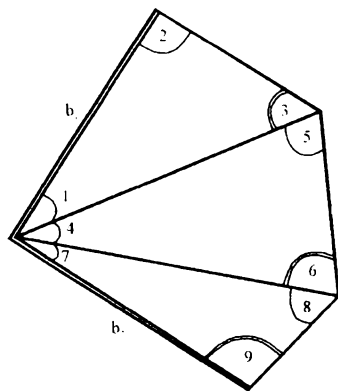


Рис. 5.3

Среди нелинейных в качестве примера приведём так называемое *базисное* условие. Оно возникает когда в сети имеются две или более измеренные стороны (базисы) и выражает требование, чтобы длина одного базиса, вычисленная по уравненным углам от другого базиса, равнялась бы его заданному значению. Так, для построения на рис. 5.3 применяя теорему синусов последовательно по треугольникам, начиная с базиса b_1 , придём к исходному уравнению связи (относительно истинных значений измеренных величин)

$$\frac{\bar{b}_1}{b_2} \times \frac{\sin Y_2 \sin Y_5 \sin Y_8}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} - 1 = 0,$$

или после логарифмирования

$$\lg b_1 - \lg b_2 + \sum_{i=2,5,8} \lg \sin Y_i - \sum_{i=3,6,9} \lg \sin Y_i = 0.$$

Коэффициенты условного уравнения при поправках в углы получим такими

$$a_i = \pm \left(\frac{\partial (\lg \sin Y_i)}{\partial Y_i} \right)_{Y_i=y_i} = \pm \frac{M}{\rho''} \operatorname{ctg} y_i$$

а при поправках в базисы равными $\frac{-M}{b_1}$ и $\frac{-M}{b_2}$, где $M=0,43$ — модуль перехода от десятичных логарифмов к натуральным, а знаменатель $\rho''=206265$ введён для того, чтобы поправки в углы выражать в секундах.

Условное уравнение теперь можно записать в виде

$$\frac{\rho''}{b_1 v_{b_1}} - \frac{\rho''}{b_2 v_{b_2}} + \sum_{i \in s} \pm \operatorname{ctg} y_i v_i + \bar{w} = 0,$$

где через s обозначено множество связующих углов, входящих в это уравнение, «+», если угол лежит против передней по ходу стороны, а «-», если против задней. Невязка

$$w = \lg \left(\frac{b_1 \sin y_2 \sin y_5 \sin y_8}{b_2 \sin y_3 \sin y_6 \sin y_9} \right) \times \frac{\rho''}{M}.$$

Можно указать правило составления базисного уравнения:

- выбираем направление подхода от первого базиса ко второму по цепочке треугольников;
- последовательно по каждому треугольнику записываем номера «передних» и «задних» связующих углов и записываем базисное условное уравнение, вычисляем невязку и её допустимое значение.

Полюсное условное уравнение возникает в замкнутых относительно какой-либо стороны цепочках треугольников. Оно имеет тот же вид, что и базисное с тем различием, что базисы $b_1=b_2$ и в вычислениях не участвуют.

Построение на рис.5.4 называется геодезическим четырёхугольником. В нём возникают 4 условных уравнения: 3 условия фигур (хотя можно составить и 4 таких условия, но одно из них будет линейной комбинацией трёх остальных, что недопустимо) и одно полюсное уравнение. Для его составления за полюс удобно принять точку О.

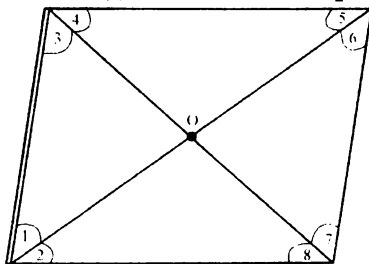


Рис. 5.4

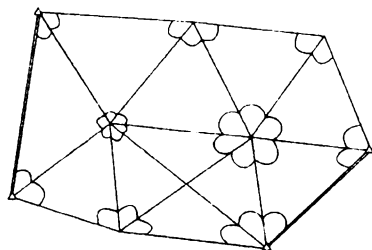


Рис. 5.5

Координатные условные уравнения возникают в плановой сети, в которой имеется s изолированных групп исходных пунктов. Их число равно $2(s-1)$.

Предлагается подсчитать число и назвать, какие условные уравнения возникают в сети триангуляции, изображённой на рис. 5.5.

Как видно, составление даже этих уравнений не является простым делом для программирования. Ещё более сложны для составления условные уравнения координат в сети триангуляции и условные уравнения в сетях трилатерации и мы не будем их рассматривать.

5.5. Средняя квадратическая ошибка единицы веса

Получим теперь формулу для вычисления оценки *дисперсии единицы веса*, полагая для общности, что в измерениях присутствуют систематические ошибки. Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{W}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{W}. \quad (5.40)$$

Найдем ее математическое ожидание, переписав выражение (5.40) в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^r W_i^2 (N^{-1})_{ii} + 2 \sum_{i < j} W_i W_j (N^{-1})_{ij}. \quad (5.41)$$

Тогда

$$M[\Phi] = \sum_{i=1}^r (N^{-1})_{ii} M[W_i^2] + 2 \sum_{i < j} (N^{-1})_{ij} M[W_i W_j]. \quad (5.42)$$

Обозначим вектор систематических ошибок вектора невязок $\mathbf{W}_i$, через $\mathbf{C}_{W_i}$, т. е. $M[W_i] = \mathbf{C}_{W_i}$. Так как $\mathbf{W} = \mathbf{B}\Delta$, то

$$\mathbf{C}_W = M_{[W]} = \mathbf{B} M[\Delta] = \mathbf{B} \mathbf{C}, \quad (5.43)$$

где $C=M[\Delta]$ — вектор систематических ошибок измерений.

Корреляционная матрица вектора невязок согласно с выражением (5.38) будет равна $K_w = \sigma_0^2 N + C_w C_w^T$. Поэтому имеем:

$$M[w_i^2] = \sigma_0^2 N_{ii} C_{w_i};$$

$$M[w_i w_j] = \sigma_0^2 N_{ij} + C_{w_i} C_{w_j}.$$

С учетом полученных выражений формула (5.42) примет вид

$$M[\Phi] = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^e (N^{-1})_{ii} N_{ii} + 2\sigma_0^2 \sum_{ij} (N^{-1})_{ij} N_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^r (N^{-1})_{ii} C_{w_i}^2 + 2 \sum_{ij} (N^{-1})_{ij} C_{w_i} C_{w_j}.$$

Первые два слагаемые в этом выражении представляют собой величину, равную $\sigma_0^2 \text{Sp}(N^{-1}N) = \sigma_0^2 \text{Sp} E^{r \times r} = \sigma_0^2 r$, а два последних, есть ни что иное, как произведение $C_w^T N^{-1} C_w$. Поэтому $M[\Phi] = \sigma_0^2 r + C_w^T N^{-1} C_w$. Подставляя сюда выражение (5.43), получим, что $M[\Phi] = \sigma_0^2 + C^T H C$, где матрица $H = B^T N^{-1} B$. Следовательно, дисперсия единицы веса

$$\sigma_0^2 = \frac{M[\Phi] - C^T H C}{r},$$

а ее несмещенная оценка

$$\mu^2 = \frac{V^T P V - C^T H C}{r}. \quad (5.44)$$

При $C=0$ получаем формулу

$$\mu^2 = \frac{V^T P V}{r}. \quad (5.45)$$

Не трудно показать, что если уравнивание выполняется параметрическим способом, то матрица $H = P - P A R^{-1} A^T P$.

Наконец, выполнив аналогичный вывод, получим формулу

$$\mu^2 = \frac{\Delta^T P \Delta - b^T P b}{r}, \quad (5.46)$$

справедливую для несмещенного оценивания дисперсии единицы веса по вектору истинных ошибок коррелированных измерений.

Следует также отметить, что оценка μ , в отличие от μ^2 будет смещенной. Практически несмещенной является оценка [14]

$$\mu = \frac{\sqrt{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}}{r - 1,5}.$$

5.6. Двугрупповые способы уравнивания

Коррелятная форма

Так называемые двухгрупповые способы широко применялись с целью уменьшения числа совместно решаемых нормальных уравнений. Для того, чтобы дать оценку их актуальности в настоящее время приведём наиболее простые выводы необходимых для этого формул.

Пусть система условных уравнений разделена на две группы

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{V} + \mathbf{W}_1 = 0, \quad (5.47)$$

и

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{V} + \mathbf{W}_2 = 0 \quad (5.48)$$

с числом уравнений r_1 и r_2 в каждой группе. Тогда система нормальных уравнений будет такой

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (5.49)$$

Здесь матрицы

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_1^T, \quad \mathbf{N}_{12} = \mathbf{B}_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_2^T, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_2^T. \quad (5.50)$$

Выражая из уравнения (5.47) вектор

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{K}_2 - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{W}_1 \quad (5.51)$$

и подставляя его во второе нормальное уравнение системы (5.49) получим систему

$$[\mathbf{N}_2 \cdot 1] \mathbf{K}_2 + \bar{\mathbf{W}}_2 = 0 \quad (5.52)$$

с матрицей

$$[N_2 \cdot 1] = N_2 - N_{21}N_1^{-1}N_{12} \quad (5.53)$$

и вектором

$$\bar{W}_2 = W_2 - N_{21}N_1^{-1}W_1. \quad (5.54)$$

По существу мы применили обобщённую схему Гаусса.

Далее исходя из общей формулы $V = P^{-1}B^TK$ напомним выражение для вектора поправок $V = P^{-1}B_1^TK_1 + P^{-1}B_2^TK_2$, или с учётом (5.51)

$$V = -P^{-1}B_1^TN_1^{-1}W_1 - P^{-1}B_1^TN_1^{-1}N_{12}K_2 + P^{-1}B_2^TK_2. \quad (5.55)$$

Теперь напомним нормальное уравнение

$$N_1\tilde{K}_1 + W_1 = 0$$

Решая его, получим вектор коррелат $\tilde{K}_1 = -N_1^{-1}W_1$ и обозначив через $V_1 = P^{-1}B_1^T\tilde{K}_1$ (вектор первичных поправок), выражение (5.55) перепишем в виде, $V = V_1 + V_2$, где вектор вторичных поправок $V_2 = (-P^{-1}B_1^TN_1^{-1}N_{12} + P^{-1}B_2^T)K_2$.

С учётом выражения матрицы $N_{12} = B_1^TP^{-1}B_2^T$ получим $V_2 = (P^{-1} - P^{-1}B_1^TN_1^{-1}B_1P^{-1})B_2^TK_2$.

Введём матрицу $U = E - P^{-1}B_1^TN_1^{-1}B_1$. Не трудно убедиться, что она обладает свойством $U^2 = U$. Тогда вектор $V_2 = P^{-1}\bar{B}_2^TK_2$, где матрица

$$\bar{B}_2 = B_2U. \quad (5.56)$$

Можно также написать, что матрица

$$[N_2 \cdot 1] = B_2P^{-1}B_2^T - B_2P^{-1}B_1^TN_1^{-1}B_1P^{-1}B_2^T$$

или

$$[N_2 \cdot 1] = B_2(P^{-1} - P^{-1}B_1^TN_1^{-1}B_1P^{-1})B_2^T = B_2Q_{\bar{y}}B_2^T,$$

где

$$Q_{\bar{y}} = P^{-1} - P^{-1}B_1^TN_1^{-1}B_1P^{-1} \quad (5.57)$$

есть матрица предварительно уравненного (в группе 1) вектора измерений $\bar{y}' = y + V_1$.

Матрицу (5.53) можно представить в виде

$$[N_2 \cdot 1] = \bar{N}_2 = B_2 Q_{\bar{y}} B_2^T = \bar{B}_2 P^{-1} \bar{B}_2^T. \quad (5.58)$$

Такое преобразование матрицы B_2 в $\bar{B}_2$ приводит к условию ортогональности

$$\bar{N}_{12} = B_1 P^{-1} \bar{B}_2^T = B_1 P^{-1} B_2^T - N_1 N_1^{-1} B_1 P^{-1} B_2^T = 0 \quad (5.59)$$

и с его учётом к выражению

$$\Phi = V^T P V = V_1^T P V_1 + V_2^T P V_2. \quad (5.60)$$

Таким образом, двухгрупповое уравнивание сводится к решению, независимо друг от друга, двух нормальных уравнений $N_1 \tilde{K}_1 + W_1 = 0$, $\bar{N}_2 K_2 + \bar{W}_2 = 0$.

Покажем ещё, что вектор преобразованных невязок второй группы $\bar{W}_2$ можно получить не по формуле (5.54), а по предварительно уравненным измерениям (хотя это и так следует из трактовки группового уравнивания как уравнивания коррелированных измерений). В самом деле, так как вектор $\bar{W}_2 = \varphi_2(y + V_1)$ то после приведения функции φ_2 к линейному виду получим, что $\bar{W}_2 = \varphi_2(y) + B_2 V_1 = W_2 - B_2 P^{-1} B_1^T N_1^{-1} W_1$, что и должно быть.

Заметим, что если матрица $Q_{\bar{y}}$ в выражении (5.58) определяется по формуле (5.57), то двухгрупповой способ называют способом Крюгера, а если исходя из параметрического способа по формуле $Q_{\bar{y}} = A_1 R_1^{-1} A_1^T$, то способом Бесселя.

Несмотря на то, что разработка двухгруппового способа занимала значительное место в теории уравнивательных вычислений, её практическое применение весьма ограничено. Это вызвано трудоёмкостью вычислений при преобразовании матрицы B_2 в $\bar{B}_2$. И до сих пор можно привести только два примера применения этого способа. Оба они связаны с теми случаями, когда матрицу U удаётся получить алгебраически и когда она имеет квазидиагональный вид.

Так, например при уравнивании сетей триангуляции в первую группу относят условные уравнения фигур треуголь-

ников, не имеющих общих углов. В этом случае для равно- точных измерений ($P^{-1}=E$), учитывая, что матрица $B=(1\ 1\ 1)$ и $N_1=B_1B_1^T=3$ получим матрицу

$$U=E-B_1^TN_1^{-1}B_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ & 2 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование (5.56) выполняется одинаково для каждого условного уравнения второй группы и отдельно для его коэффициентов при углах одного треугольника по простой

формуле (способ Крюгера-Урмаева) $(\bar{B}_2)_{i \in j} = (B_2)_{i \in j} - \frac{[B_2]_j}{3}$ для углов i треугольника j . Суммы преобразованных коэффициентов в каждом треугольнике равны нулю как суммы уклонений от арифметической середины (что приводит к выполнению условия (5.59)).

Однако следует отметить, что в сетях триангуляции измеряют не углы, а направления. Поэтому вычисленные по ним углы становятся коррелированными и матрица U перестаёт быть квазидиагональной. Неучёт этого обстоятельства приводит к потере строгости уравнивания.

При уравнивании углов в полигонометрическом ходе из n вершин матрица

$$U=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & n-1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $\bar{B}_2=\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \\ -\xi_1 & -\xi_2 & \dots & -\xi_n \end{pmatrix}$, где $\xi_i=x_i-x_0$,

$$\eta_i=y_i-y_0, \text{ а } x_0=\frac{[x]}{n}, \quad y_0=\frac{[y]}{n}.$$

Применение двухгруппового способа к уравниванию полигонометрических ходов и сетей не потеряло своей актуальности (см. раздел 12.2).

Заметим, что треугольное разложение матрицы N в схеме Гаусса или квадратных корней есть частный случай преобразования вида (5.52) в многогрупповой форме. Очевидно, что вряд ли кто будет последовательно преобразовывать коэффициенты всех условных уравнений вместо составления и решения системы нормальных уравнений. Это лишний раз показывает неэффективность в общем случае двухгруппового коррелятного уравнивания. Вместо преобразования матрицы B_2 целесообразно матрицу коэффициентов нормальных уравнений и вектор невязок получать по формулам (5.52) и (5.53), особенно тогда, когда матрица N_1 диагональная.

Иногда целесообразным во второй группе является уравнивание не предварительно уравненных измерений, а их функций.

Положим, что вектор поправок V_2 связан с вектором поправок функций соотношением $V_2 = T_1 V_F$, а обратное преобразование есть $V_F = T_2 V_2$, причем матрицы T_1 и T_2 связаны соотношением $T_1 T_2 = E$. Тогда условное уравнение будет $B_F V_F + \bar{W}_2 = 0$, где $B_F = B_2 T_1$. Так как матрица $Q_F = T_2 Q_{\bar{y}} T_2^T$, то приходим к нормальному уравнению с матрицей коэффициентов $N_F = B_F Q_F B_F^T = B_2 T_1 T_2 Q_{\bar{y}} T_2^T T_1^T B_2^T = B_2 Q_{\bar{y}} B_2^T + \bar{N}_2$, что и доказывает это положение. Примером может служить уравнивание дирекционных углов сторон в полигонометрических и триангуляционных сетях, вычисленных по предварительно уравненным угловым измерениям.

Часто двухгрупповой способ применяют, решая совместно, без преобразования матрицы B_2 , систему условных уравнений

$$\begin{cases} B_1 V_2 = 0 \\ B_2 V_2 + \bar{W}_2 = 0 \end{cases}, \quad (5.61)$$

которая возникает после исправления измерений первичными поправками, получаемыми из решения условных уравнений первой группы $B_1 V_1 + W_1 = 0$. Тогда возникает система нормальных уравнений коррелат

$$\begin{pmatrix} N_1 & N_{12} \\ N_{21} & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{W}_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Преобразованная система в этом случае получает вид $\bar{N}_2 K_2 + \bar{W}_2 = 0$. Как видно, вектор коррелят K_2 совпадает с вектором коррелят $\bar{N}_2 K_2 + \bar{W}_2 = 0$.

Вектор коррелят K_1 получим равным $K = -N_1^{-1} N_{12} K_2$, а вектор вторичных поправок

$$V_2 = P^{-1} (B_1^T B_2^T) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = P^{-1} (B_1^T B_2^T) \begin{pmatrix} -\bar{N}_1^{-1} N_{12} \\ E \end{pmatrix} K_2,$$

или

$$V_2 = P^{-1} (B_2^T - B_1^T N_1^{-1} N_{12}) K_2 = P^{-1} \bar{B}_2^T K_2.$$

Следовательно, и в этом случае справедливо выражение (5.60).

Такая процедура целесообразна для предварительной оценки точности измерений и контроля грубых ошибок.

При оценке точности функций при двухгрупповом способе все их относят во вторую группу (это следует из трактовки двухгруппового способа как уравнивания коррелированных измерений, которые становятся таковыми в результате уравнивания в первой группе) и выполняют преобразование коэффициентов матрицы f в матрицу $F = \bar{f}$.

Параметрическая форма.

Параметрическому двухгрупповому способу в литературе уделяется значительно меньшее внимание, чем коррелятному. Однако в связи с тем, что коррелятный способ применяется все реже, рассмотрение этого вопроса заслуживает внимания.

Пусть при предварительном уравнивании возникает система уравнений поправок

$$V_1 = A_1^{n \times k} \Delta_1 + L, \quad (5.62)$$

решение которой эквивалентно решению условных уравнений первой группы в (5.47). Размер вектора необходимых неизвестных Δ_1 равен $n - r_1 = k_1$. Так как $r_1 < r$, то $k_1 > k$, где, как и ранее, r

и k числа избыточных измерений и необходимых неизвестных. Поэтому при предварительном уравнивании вектор параметров $\mathbf{x}^{k+1}$ не совпадает с вектором параметров $\mathbf{x}^{k_1+1}$, определяемым при обычном (без деления на группы) уравнении. Например, при предварительном уравнивании сети триангуляции в качестве $\mathbf{x}_1$ можно принять вектор дирекционных углов сторон и ориентирующих углов, тогда как $\mathbf{x}_2$ — вектор координат и ориентирующих углов.

Во второй группе составим уравнения поправок

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{A}_2 \Delta_2 + \mathbf{L}_2. \quad (5.63)$$

Здесь $\Delta_2 = \Delta_2^{k_1+1}$, а вектор $\mathbf{L}_2$ вычислен по предварительно уравненным измерениям. Решение системы (5.63) под условием $\mathbf{V}_2^T \mathbf{Q}^+ \mathbf{V}_2 = \min$ приводит к нормальным уравнениям $\mathbf{R}_2 \Delta_2 + \mathbf{b}_2 = 0$ с матрицей $\mathbf{R}_2 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{Q}^+ \mathbf{A}_2$ и вектором $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{Q}^+ \mathbf{L}_2$.

В этих формулах так называемая главная псевдообратная матрица (см. раздел 10.1) $\mathbf{Q}^+$ заменяет матрицу весов $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ в случае, когда матрица $\mathbf{Q}$ не вырождена.

Можно доказать, что в общем случае матрица $\mathbf{Q}^+ = \mathbf{A} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A}^T$, где $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Для случая равноточных измерений $\mathbf{Q}^+ = \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}$.

При двухгрупповом уравнивании она совпадает с матрицей $\mathbf{Q}_{\bar{y}}$.

Векторы Δ_1 и Δ_2 можно связать между собой соотношением $\Delta_1^{k_1+1} = \mathbf{G} \Delta_2^{k_2+1}$. Тогда в уравнении (12.63) $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{G}$. Так как в нашей задаче $\mathbf{Q}^+ = \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{R}}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \bar{\mathbf{R}}_1^{-1} \mathbf{A}_1^T$, то $\mathbf{R}_2 = \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{R}}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \bar{\mathbf{R}}_1^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{G}$. Учитывая, что $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1$, а $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1$, получим матрицу $\mathbf{R}_2 = \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T \times \mathbf{P} \times \mathbf{A}_1 \mathbf{G} = \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2$.

Вектор свободных членов

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \mathbf{A}_2^T \mathbf{Q}^+ \mathbf{L}_2 = \mathbf{G}^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \times \mathbf{R}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{L}_2 = \\ &= \mathbf{Q}^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \left\{ \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \right\} \mathbf{L}_2 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{U} \mathbf{L}_2. \end{aligned}$$

Но вырожденная матрица $U = A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T$ есть матрица проектирования, так как $U^2 = U$ и $U^T = U$, а вектор L_2 , если он вычисляется по предварительным измерениям, принадлежит пространству столбцов матрицы A_1 . Поэтому $UL^2 = L_2$ и $b_2 = A_2^T P L_2$.

Таким образом, уравнивание параметрическим способом во второй группе выполняется без преобразования матрицы коэффициентов уравнений поправок A_2 , а вектор $\tilde{y}'$ имеет матрицу весов измерений P . Вектор свободных членов L_2 при этом должен быть вычислен по предварительно уравненным измерениям.

Справедлива также лемма Гаусса $A_2^T P V_2 = 0$, что легко доказать, а квадратичная форма имеет вид

$$\Phi = V_1^T P V_1 + V_2^T P V_2. \quad (5.64)$$

Групповое уравнивание параметрическим способом соответствует такому коррелятному уравниванию, при котором из первой группы условных уравнений $B_1 V_1 + W_1 = 0$ определяют вектор V_1 . Затем, представив вектор V в виде суммы $V = V_1 + V_2$, вместо системы условных уравнений (5.54) получают систему (5.61), которой соответствует система уравнений поправок (5.63). Важно отметить, что при таком уравнивании справедливо разложение квадратичной формы (5.64). При параметрическом способе предварительное уравнивание хотя и является дополнительным вычислительным процессом, но оно позволяет вычислить более точные значения приближенных координат, отбраковать грубые ошибки, оценить точность измерений.

Проиллюстрируем применение двухгруппового уравнивания на примере сети триангуляции (рис. 5.6).

При уравнивании направлений в первой группе уравнения поправок для измеренных направлений состав-

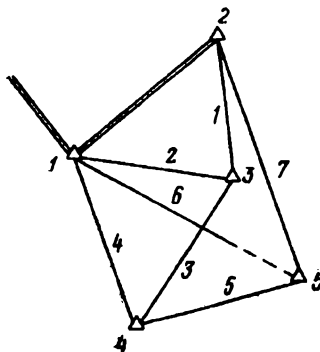


Рис. 5.6

вим относительно неизвестных — поправок дирекционных углов сторон и ориентирующих углов. В этом случае число измерений $n=15$, а число неизвестных $k_1=7+5=12$. Число избыточных измерений $r=15-12=3$ (угловые условные уравнения). Во второй группе число неизвестных (поправок координат и ориентирующих углов) $k=11$. Поэтому число избыточных измерений $r=15-11=4$ (угловые и синусные условные уравнения).

Как и в коррелятном при групповом параметрическом способе во второй группе можно выполнить уравнивание функций, составив уравнения поправок

$$\mathbf{V}_F = \mathbf{A}_F^{n_F \times k} \Delta^{k \times 1} + \mathbf{L}_F. \quad (5.65)$$

Примером может служить уравнивание на первом этапе направлений в сети триангуляции с вычислением дирекционных углов сторон и составлением невырожденной матрицы $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{Q}_F^{-1}$. Число избыточных в системе (5.65) совпадает с числом всех синусных условных уравнений, равное 1.

Преобразования типа Шрейбера

К разновидностям двухгруппового уравнивания можно отнести так называемые преобразования уравнений поправок параметрического способа по правилам Шрейбера.

Часто из системы уравнений поправок, представленных в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_1 \Delta x_1 + \mathbf{A}_2 \Delta x_2 + \mathbf{L} \quad (5.66)$$

легко исключить вектор x_1 . В этом случае будем иметь систему нормальных уравнений с матрицей

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}.$$

Её блочное обращение приводит к обратной матрице

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11}^{-1} + \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{12} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^{-1} & -\mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{12} \bar{\mathbf{R}}^{-1} \\ -\bar{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^{-1} & \bar{\mathbf{R}}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.67)$$

где матрица

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{22} - \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{12}. \quad (5.68)$$

Если составить уравнения поправок

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= A_2 \Delta x_2 + L, \\ V_2 &= R_{12} \Delta x_2 + b_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

с матрицей $R_{12} = A_1^T P A_2$ и вектором $b_1 = A_1^T P L$, то с матрицами весов P и $-R_{11}^{-1}$ получим систему нормальных уравнений

$$\bar{R} \Delta x_2 + \bar{b}_2 = 0 \quad (5.70)$$

совпадающей с матрицей (5.68).

Решая систему (5.70) с вектором $\bar{b}_2 = b_2 - R_{21} R_{11}^{-1} R_{12}$, находим вектор Δx_2 . Вектор $\Delta x_1 = -R_{11}^{-1} R_{12} \Delta x_2 - R_{11}^{-1} b_1$. Квадратичная форма $\Phi = L^T P L - b_1^T R_{11}^{-1} b_1$.

Такой вычислительный процесс целесообразен, когда матрица R_{11} — диагональная. В случае, когда возникает система уравнений $V_i = A \Delta x + L_i$ с одной и той же матрицей A и матрицей весов P можно составить одну систему уравнений поправок $\bar{V} = A \Delta x + \frac{1}{s} \bar{L}$, где вектор свободных членов $\bar{L} = \sum_{i=1}^s L_i$, и приписать ей матрицу весов $\bar{P} = sP$. Квадратичная форма в этом случае $\Phi = \sum_{i=1}^s L_i^T P L_i + A^T P \bar{L} \Delta x$.

Рассмотренные два преобразования (правила Шрейбера) применяются при исключении поправок ориентирующих углов при уравнивании сети триангуляции.