

Задача 1. Найти неопределённый интеграл. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

Вариант 1. а) $\int \frac{\cos 3x}{\sin^4 3x} dx$, б) $\int e^{2-5x} dx$, в) $\int \frac{2x}{3x^2+1} dx$, г) $\int (x^2 + 4)e^{2x} dx$.

Вариант 2. а) $\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[5]{x^3} + 4 \right) dx$, б) $\int \cos(6x + 1) dx$, в) $\int \frac{5x^2}{x^3+7} dx$, г) $\int x \cos 3x dx$.

Вариант 3. а) $\int \frac{7x^2+3}{2x^3+x^5} dx$ б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, в) $\int \sin(8x - 5) dx$, г) $\int \arcsin 5x dx$.

Вариант 4. а) $\int \frac{dx}{5x-4}$, б) $\int \sqrt{3-2x} dx$, в) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2-7}} dx$, г) $\int \ln(6x + 1) dx$.

Вариант 5. а) $\int \frac{3dx}{6x^2+1}$, б) $\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx$, в) $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + 1 \right) dx$, г) $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

Вариант 6. а) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\sin 2x-2}}$, б) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$, в) $\int (4x^3 + 1)^3 x^2 dx$, г) $\int (x^2 + 1)e^{3x} dx$.

Вариант 7. а) $\int \frac{e^{7x}}{e^{7x}-2} dx$, б) $\int \sin^2 2x \cos 2x dx$, в) $\int \frac{3}{\sqrt{3x-4}} dx$, г) $\int x \cos \frac{x}{2} dx$.

Вариант 8. а) $\int \frac{\sin(5x+1)}{\sqrt[3]{\cos(2x+1)}} dx$, б) $\int 3 \cos 4x dx$, в) $\int e^{3x^2} x dx$, г) $\int \arcsin 3x dx$.

Вариант 9. а) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} + 1 \right) dx$, б) $\int \frac{3dx}{5x-2}$, в) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\cos^2 2x} dx$, г) $\int \frac{1}{7} x \sin \frac{x}{2} dx$.

Вариант 10. а) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x} dx$, б) $\int \frac{dx}{1-4x}$, в) $\int (2x^3 + 3)^{10} x^2 dx$, г) $\int \ln(x + 1) dx$.

Задача 2. Вычислить определённый интеграл.

- | | | |
|-------------|--|--|
| Вариант 1. | $a) \int_0^1 x\sqrt{4-x^2} dx,$ | $b) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{4 \sin x}{\cos^3 x} dx .$ |
| Вариант 2. | $a) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} ,$ | $b) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx .$ |
| Вариант 3. | $a) \int_2^4 \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} dx,$ | $b) \int_0^{\pi} \cos x \sin^2 x dx .$ |
| Вариант 4. | $a) \int_0^3 \frac{3x dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} dx,$ | $b) \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} .$ |
| Вариант 5. | $a) \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} x\sqrt{1-x^2} dx,$ | $b) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx .$ |
| Вариант 6. | $a) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} ,$ | $b) \int_0^{\pi/5} \sin 5x \cos 5x dx .$ |
| Вариант 7. | $a) \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} ,$ | $b) \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} dx .$ |
| Вариант 8. | $a) \int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2} dx,$ | $b) \int_0^{\pi/2} \frac{3 \cos x}{\sin^2 x + 1} dx .$ |
| Вариант 9. | $a) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx,$ | $b) \int_0^{\pi/32} (32 \cos^2 3x - 16) dx .$ |
| Вариант 10. | $a) \int_0^1 x\sqrt{(1-x^2)^3} dx,$ | $b) \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx .$ |

Задача 3. Вычислить несобственный интеграл и исследовать его сходимость.

(Цифра перед интегралом – номер варианта)

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 1. | $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx;$ | 6. | $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$ |
| 2. | $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$ | 7. | $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$ |
| 3. | $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)};$ | 8. | $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-3x} dx;$ |
| 4. | $\int_0^{\infty} x \cdot \sin x dx;$ | 9. | $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2};$ |

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}. \quad 10. \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2};$$

Задача 4. Вычислить длину дуги, заданной плоской кривой.

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1.	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 9\sin^3 t, \\ \pi \leq t \leq 3\pi/2. \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} y = \sqrt{3x - x^2} - 1, \\ 1/4 \leq x \leq 1. \end{cases}$	7.	$\begin{cases} y = 1 - \ln \cos x, \\ 0 \leq x \leq \pi/6. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x = 3\sqrt[3]{y^2}, \\ 0 \leq y \leq 4. \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 15(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} y = 3 \ln \sin x, \\ \pi/3 \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$	9.	$\begin{cases} x = 1 + \sqrt[3]{y^2}, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \\ 1 \leq y \leq 4. \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x = \sqrt{2y - y^2} - 1, \\ 1/4 \leq y \leq 1. \end{cases}$

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1.	$y = \frac{x^2}{2}, y = 2 - 3x/2.$	6.	$y = \sin x, y = \cos x, x = 0, 0 \leq x \leq \pi/4.$
2.	$y = e^{-x}, x = 0, x = 1, y = 0$	7.	$y = 3^x, y = 3, x = 0.$
3.	$y = 2x - x^2, x + y = 0,$	8.	$y = 2x^2, y = \frac{x^3}{4}.$
4.	$y = \sqrt{x}, x = 0, y = x - 2.$	9.	$2x = y^2, 2y = x^2.$
5.	$y = (x - 2)^3, x \geq 2, y = x - 2.$	10.	$y = 2x^2, x + y = 1$

Задача 6. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг указанной координатной оси фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертёж.

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1.	$y^3 = x^2, y = 1, Oy$	6.	$y^2 = \frac{4x}{3}, x = 3, Ox$
2.	$y^2 = 4 - x, x = 0, Ox$	7.	$y^2 = \frac{4x}{3}, y = 2, x = 0, Oy$
3.	$y^2 = 4 - x, x = 0, Oy$	8.	$y = \sin 2x, y = 0, Ox$ $0 \leq x \leq \pi/2$
4.	$y^2 = x^3, x = 1, Ox$	9.	$y = \arcsin x, y = \pi/2,$ $x = 0, Oy$
5.	$y^2 = x^3, x = 0, y = 1, Oy$	10.	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, y = 0, x = \frac{1}{4}, x$ $= 1, Ox$