

1. Цель и задачи работы.

Целью работы является приобретение навыков применения дифференциального исчисления для решения экстремальных задач.

©2008-2025, Интернет-институт ТулГУ

1. Цель и задачи работы.

2. Теоретические сведения и методические указания к выполнению работы

2.1. Экстремум функции одной переменной

Математическая формулировка задачи принятия решения часто эквивалентна задаче отыскания экстремума функции одной или многих переменных. Поэтому для решения подобных задач могут быть использованы различные методы исследования функций классического анализа, в частности, методы поиска экстремума. Эти методы применяют в тех случаях, когда известен аналитический вид зависимости оптимизируемой функции Q от независимых переменных u_i .

Большинство простейших задач принятия решений эквивалентно задачам отыскания экстремума функции одной переменной.

Пусть требуется найти экстремум функции одной переменной $Q(u)$ при отсутствии ограничений на диапазон изменения переменной u .

Необходимым условием существования экстремума непрерывной функции $Q(u)$ является равенство нулю первой производной ($dQ/du = 0$) или ее отсутствие. Графически равенство нулю производной означает, что касательная к кривой $Q(u)$ в этой точке параллельна оси абсцисс (см. рисунок 2.1, а), на рисунке 2.1, б изображен случай, когда производные в точках экстремума не существуют.

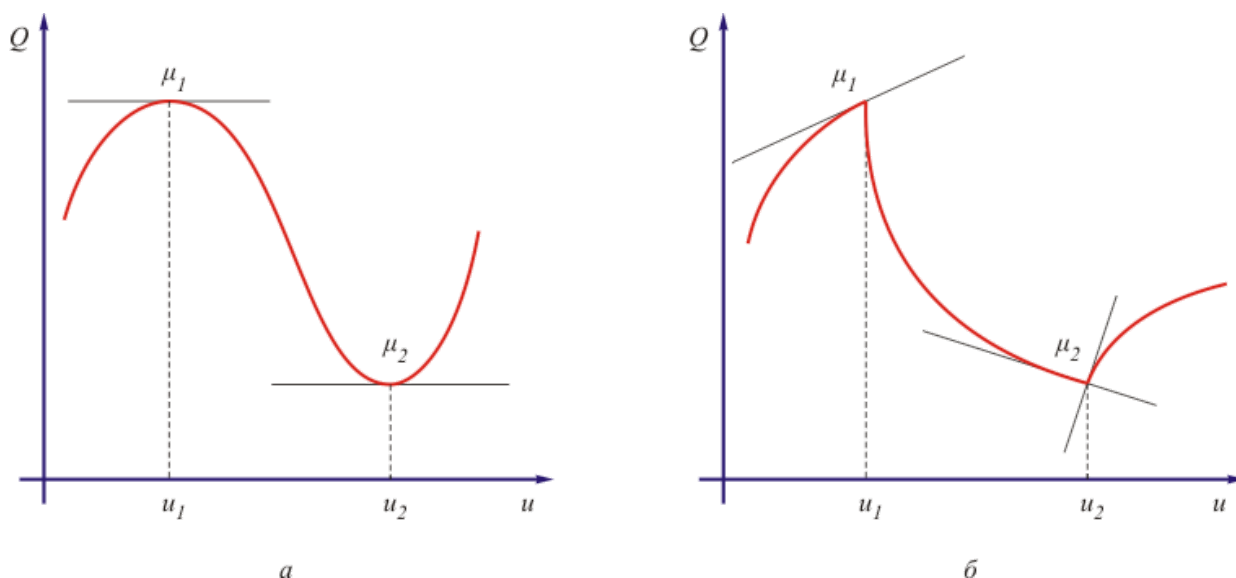


Рисунок 2.1 – Различные типы экстремума функции одной переменной:

а – производная в точке экстремума существует; б – производная в точке экстремума не существует

Названные условия являются лишь необходимыми условиями. Их выполнение не означает еще, что в данных точках функция имеет экстремум (см. рисунок 2.2).

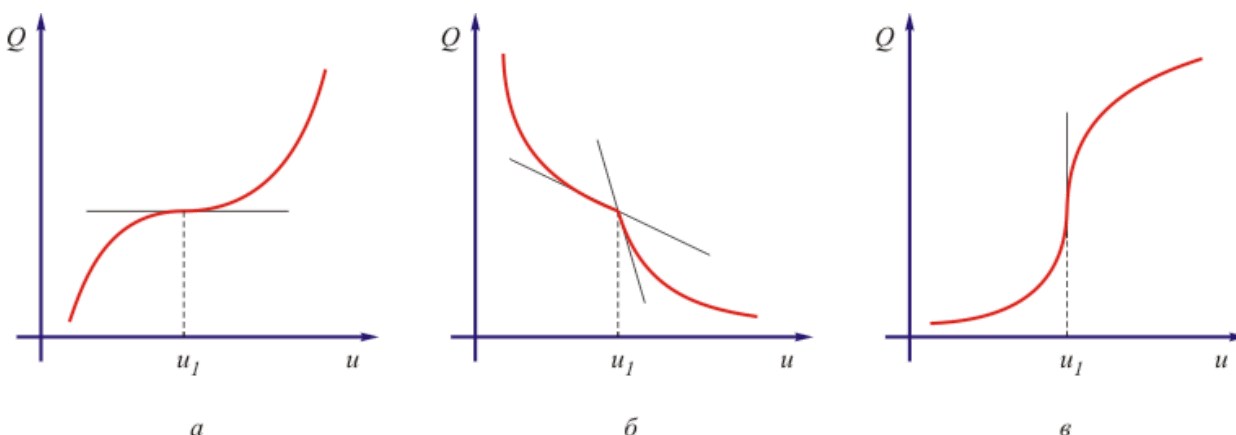


Рисунок 2.2 – Функции $Q(u)$, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума:

а – производная равна нулю; б – производная не существует; в – производная равна бесконечности

Для того, чтобы определить, действительно ли в исследуемой точке существует экстремум, необходимо проверить выполнение достаточных условий одним из методов, приведенных ниже.

1. Сравнение значений функций. Этот способ сводится к определению значений функции в точках, расположенных слева и справа в достаточной близости от исследуемой точки, т.е. в точках:

$$(u_1 - \varepsilon), (u_1 + \varepsilon),$$

2. Теоретические сведения и методические указания к выполнению работы

2.1. Экстремум функции одной переменной

Если знаки производных различны, то в точке u_1 имеется экстремум функции $Q(u)$, причем, если при переходе от точки $(u_1 - \varepsilon)$ к точке $(u_1 + \varepsilon)$ знак производной изменяется с "+" на "-", то в точке u_1 – максимум (см. рисунок 2.3, а).

Если же знак меняется с "-" на "+", то в точке u_1 – минимум (см. рисунок 2.3, б).

Если же знаки производных в точках $(u_1 - \varepsilon)$ и $(u_1 + \varepsilon)$ одинаковы, то в точке u_1 экстремума нет (см. рисунок 2.3, в).

3. Исследование знаков высших производных. Этот способ применяется в тех случаях, когда исследуемая функция имеет производные высших порядков. Если в точке u_1 выполняется необходимое условие экстремума, т.е. $\left. \frac{dQ}{du} \right|_{u_1} = 0$ и существует вторая производная –

$\frac{d^2Q}{du^2}$, значение которой вычисляется в "подозреваемой" точке u_1 , то точка u_1 является точкой максимума, если $\left. \frac{d^2Q}{du^2} \right|_{u_1} < 0$, и точкой

минимума, если $\left. \frac{d^2Q}{du^2} \right|_{u_1} > 0$.

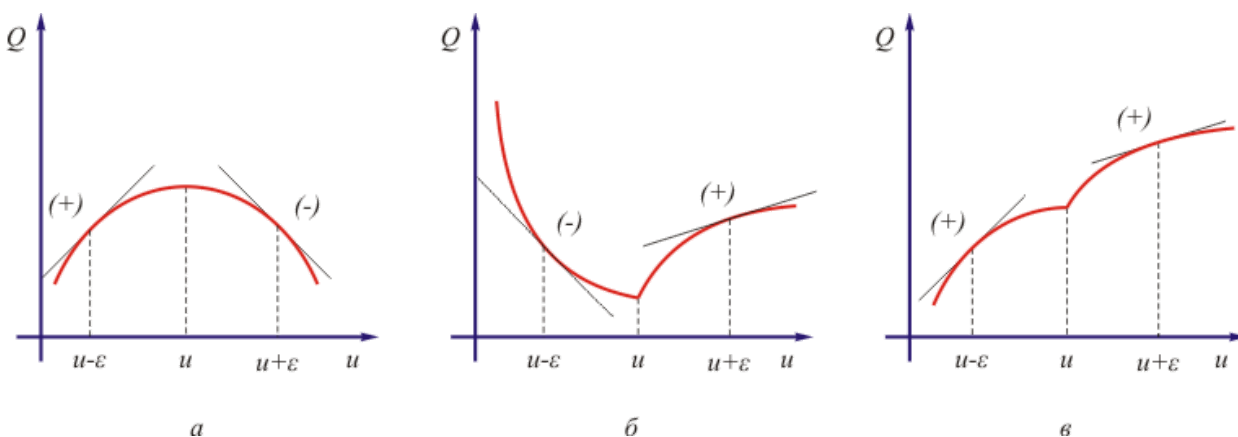


Рисунок 2.3 – Проверка достаточных условий экстремума:

а – максимум; б – минимум; в – экстремума нет

Если же $\left. \frac{d^2Q}{du^2} \right|_{u_1} = 0$, то для дальнейших исследований вычисляются $\left(\frac{d^3Q}{du^3}, \frac{d^4Q}{du^4} \right)$ и т.д.

При решении практических задач, как правило, приходится исследовать функции, имеющие несколько экстремумов. В этом случае говорят о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции, которые называют глобальными экстремумами. Остальные экстремумы называются локальными. Также в практических задачах диапазон изменения переменной u часто бывает ограничен заданным интервалом $[a, b]$, поэтому в число "подозреваемых" точек должны быть включены и крайние точки этого интервала, так как в них может достигаться глобальный экстремум.

2. Теоретические сведения и методические указания к выполнению работы

2.2. Экстремумы функций многих переменных

В большинстве задач оптимизации критерий оптимальности является функцией нескольких независимых переменных – $Q(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Если он является непрерывной функцией, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядка по всем переменным u_t ($t = \overline{1, n}$), то необходимым условием экстремума в точке $\{u^*\}$ является равенство нулю в этой точке первых производных по всем переменным, т.е. точки, в которой функция $Q(u_1, u_2, \dots, u_n)$ может достигать экстремума, определяются решением системы уравнений:

$$\left. \frac{\partial Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_t} \right|_{u^*} = 0, \quad t = \overline{1, n}. \quad (1.2.1)$$

Достаточные условия существования экстремума определяются в результате анализа знака квадратичной формы $B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, коэффициенты которой определяются соотношениями:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_j \partial u_i} = a_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Квадратичная форма может быть положительно определенной и отрицательно определенной. Ответ о знаке квадратичной формы дает теорема, которая формулируется следующим образом: для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия Сильвестра:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11} > 0; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \\ &\dots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

т.е. все главные миноры матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

должны быть строго положительны.

Квадратичная форма будет отрицательно определенной, если все главные миноры матрицы A , имеющие нечетный порядок, отрицательны, а, имеющие четный порядок, положительны, т.е. $\Delta_1 < 0, \Delta_3 < 0, \dots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0$.

Если квадратичная форма является положительно определенной, то исследуемая точка является точкой минимума, если же квадратичная форма будет отрицательно определенной, то в точке $\{u_i^*\}$ имеет место максимум.

Возможен случай, когда все главные миноры отличны от нуля, но условия положительной или отрицательной определенности квадратичной формы не выполняются, в этом случае в исследуемой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В случае обращения в нуль главных миноров матрицы A , вопрос о наличии экстремума в исследуемой точке решается более сложно с использованием производных более высокого порядка.

Пример 1

Найти экстремум функции:

$$Q(u_1, u_2) = u_1^4 + u_2^4 - 4u_1u_2$$

2. Теоретические сведения и методические указания к выполнению работы

2.2. Экстремумы функций многих переменных

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 Q}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12u_1^2 & -4 \\ -4 & 12u_2^2 \end{pmatrix}.$$

В найденных точках:

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(1, 1) = A(-1, -1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A(0, 0)$ – знаконеопределена, следовательно, точка $(0, 0)$ не является экстремальной. Матрицы $A(1, 1)$ и $A(-1, -1)$ положительно определенные ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 128 > 0$), поэтому в точках $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ будет минимум – $Q_{\min} = -2$.

2. Теоретические сведения и методические указания к выполнению работы

2.3. Метод неопределенных множителей Лагранжа

Условия экстремума функции, которые рассмотрены выше, позволяют найти, так называемый, безусловный экстремум. Однако, в большинстве практических задач принятия решения требуется принять решение – определить экстремум критерия оптимальности при условии, что на независимые переменные наложены ограничения, имеющие вид равенств. Типичными примерами подобных задач служат задачи, в которых требуется оптимальным образом распределить заданное количество ресурсов, чтобы принятая оценка эффективности процесса имела при этом максимальное или минимальное значение.

Для решения таких задач в классическом анализе используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Сами задачи получили название задач на условный экстремум.

Пусть требуется найти экстремум функции, например, минимум:

$$Q(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow \min$$

при условии:

$$\varphi_t(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, \quad t = \overline{1, k}. \quad (1.3.2)$$

Согласно методу Лагранжа для решения задач на условный экстремум функции составляется вспомогательная функция Лагранжа, которая определяется соотношением:

$$\bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \bar{Q}(u_1, \dots, u_n) + \sum_{t=1}^k \lambda_t \varphi_t(u_1, \dots, u_n), \quad (1.3.3)$$

где $\lambda_t, t = \overline{1, k}$ – неопределенные множители Лагранжа.

Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции (1.3.1) сводится к задаче нахождения безусловного экстремума функции (1.3.3), но число неизвестных в ней $n + k$ ($u_t, t = \overline{1, n}; \lambda_j, j = \overline{1, k}$).

Необходимым условием безусловного экстремума функции является равенство нулю частных производных, которые для данного конкретного случая записываются в виде

$$\frac{\partial Q(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_t} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_t} + \dots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_t} = 0, \quad t = \overline{1, n}, \quad (1.3.4)$$

и дает n уравнений для определения неизвестных.

Эта система уравнений дополняется к уравнениям (1.3.2) и, следовательно, получается $(n + k)$ неизвестных и $(n + k)$ уравнений.

Метод множителей Лагранжа дает лишь необходимые условия существования условного экстремума для непрерывных функций, имеющих также непрерывные производные, поэтому найденные значения переменных могут и не давать экстремума функции $Q(u_1, \dots, u_n)$, их надо проверить с использованием достаточных условий экстремума функции многих переменных.

В окончательном решении задачи фактически множители Лагранжа не известны, поэтому задача совместного решения системы (1.3.2), (1.3.4) иногда ставится как задача исключения " k " неизвестных переменных u_t с последующим решением остающейся системы n уравнений с n неизвестными.

Задача Лагранжа имеет " $n - k$ " степеней свободы.

Пример 2

Требуется найти минимум функции:

$$Q(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$$

при условии $u_1 + u_2 = 1$.

Для решения записывается функция Лагранжа:

$$\bar{Q}(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 + \lambda(u_1 + u_2 - 1),$$

2. Теоретические сведения и методические указания к выполнению работы

2.3. Метод неопределенных множителей лагранжа

Пример 3

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве u_1 изделий первым способом затраты равны $(4u_1 + u_1^2)$ р., а при изготовлении u_2 изделий вторым способом они составляют $(8u_2 + u_2^2)$ р. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции:

$$Q(u_1, u_2) = 4u_1 + u_1^2 + 8u_2 + u_2^2$$

при условиях $u_1 + u_2 = 180$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$.

Задача может быть решена методом множителей Лагранжа. Для этого без учета требования неотрицательности переменных составляется функция Лагранжа $\bar{Q}(u_1, u_2) = 4u_1 + u_1^2 + 8u_2 + u_2^2 + \lambda(180 - u_1 - u_2)$.

Необходимое условие экстремума функции Лагранжа дает:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{Q}(u_1, u_2)}{\partial u_1} = 4 + 2u_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \bar{Q}(u_1, u_2)}{\partial u_2} = 8 + 2u_2 - \lambda = 0, \end{cases}$$

$$\text{откуда } u_1 = \frac{\lambda - 4}{2}, u_2 = \frac{\lambda - 8}{2}.$$

Подстановка найденных значений в условие $u_1 + u_2 = 180$ дает:

$$\frac{\lambda - 4}{2} + \frac{\lambda - 8}{2} = 180$$

и, следовательно, $\lambda = 186$ и, соответственно, $u_1 = 91$, $u_2 = 89$.

По вторым частным производным можно показать, что найденная точка доставляет минимум функции $Q(u_1, u_2)$, т.е. если будет изготовлено 91 изделие первым технологическим способом и 89 изделий вторым технологическим способом, общие затраты будут минимальны и составят $Q_{\min} = 17\,278$ р

3. Использование Maple для нахождения экстремумов

Для поиска экстремумов необходимо использовать команду `extrema`

```
readlib(extrema):  
_EnvExplicit := true:
```

В следующем примере находятся экстремумы функции f при дополнительных ограничениях $g1$ и $g2$:

```
> f := (x^2+y^2)^(1/2)-z; g1 := x^2+y^2-16=0; g2 := x+y+z = 10;  
       $f := \sqrt{x^2 + y^2} - z,$   
       $g1 := x^2 + y^2 - 16 = 0,$   
       $g2 := x + y + z = 10.$ 
```

В команде `extrema` четвертым аргументом является имя, которому мы хотим присвоить значение переменных в точках экстремума.

```
> extrema(f, {g1, g2}, {x, y, z}, 's');  
       $(-6 + 4\sqrt{2}, -6 - 4\sqrt{2})$   
  
> s;  
       $((y = 2\sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}, z = -4\sqrt{2} + 10), (y = -2\sqrt{2}, x = -2\sqrt{2}, z = 4\sqrt{2} + 10))$ 
```

3. Использование Maple для нахождения экстремумов

4. Задание на работу

В соответствии с индивидуальным заданием повести:

- 1. Анализ экстремума функций одной и нескольких переменных;
- 2. Найти минимум функции Методом множителей Лагранжа.
- 3. Содержание отчета.
- 4. Исходные функции.
- 5. Расчетные зависимости.
- 6. Результаты и необходимые выводы

Индивидуальное задание

Задание 1

Таблица 1 – Индивидуальное задание для задания 1

Вариант	Задание
1	$f(x,y)=3x^2+xy+2y^2-x-4y$
2	$f(x,y)=y^2+2xy-4x-2y-3$
3	$f(x,y)=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$
4	$f(x,y)=e^{x+y}(x^2-2y^2)$
5	$f(x,y)=x^3-6xy+8y^3+5$
6	$f(x,y)=4+\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$
7	$f(x,y)=x^2-xy+y^2-3x-3y+3$
8	$f(x,y)=x^3-15xy+y^3+2$
9	$f(x,y)=x^3-6xy+y^3$
10	$f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$
11	$f(x,y)=4x^2-2xy+8y^2-3x-4y+8$
12	$f(x,y)=y^2+2xy-4x^2-6y+10$
13	$f(x,y)=x\sqrt{y}-2y^2-y+10x$
14	$f(x,y)=2^{2x+y}(2x^2-3y^2)$
15	$f(x,y)=x^3-3xy+8y^3-2x^2y$
16	$f(x,y)=2^{2x+y}(2x^2-3y^2)$
17	$f(x,y)=5x^2-2xy+y^2-6x+4y+2$
18	$f(x,y)=x^3-15xy+y^3+2x$
19	$f(x,y)=x^3-6xy+y^3-3y+x$
20	$f(x,y)=x^3+xy^2-2x-12y^2$

Задание 2

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить N изделий. Предприятие может изготавливать три типа изделий. При производстве u_1 изделий первого типа затраты равны $f_1(u_1)$ р., при изготовлении u_2 изделий второго типа они составляют $f_2(u_2)$ р., при изготовлении u_3 изделий третьего типа они составляют $f_3(u_3)$ р. . Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Таблица 2 – Индивидуальное задание для задания 2

4. Задание на работу

- 6 $N = 180, f_1(u_1) = u_1^4 + u_1^2, f_2(u_2) = u_2^2 + 0,5u_2, f_3(u_3) = 10u_3 + 0,3u_3^4$
- 7 $N = 220, f_1(u_1) = 2u_1 + 3u_1^3, f_2(u_2) = u_2^2 + 2u_2, f_3(u_3) = 2u_3 + 2u_3^2$
- 8 $N = 200, f_1(u_1) = u_1 + 4u_1^3, f_2(u_2) = 2u_2^2 + u_2, f_3(u_3) = -u_3 + 2u_3^2$
- 9 $N = 80, f_1(u_1) = u_1 + u_1^2, f_2(u_2) = 3u_2^3 + 2u_2, f_3(u_3) = 2u_3 + 6u_3^2$
- 10 $N = 300, f_1(u_1) = u_1 + 3u_1^3, f_2(u_2) = 2u_2^2 + 0,5u_2, f_3(u_3) = 5u_3 + u_3^2 + 3u_3^3$
- 11 $N = 100, f_1(u_1) = 2u_1 + u_1^2, f_2(u_2) = u_2^2 + 2u_2, f_3(u_3) = 8u_3 + u_3^2$
- 12 $N = 110, f_1(u_1) = u_1 + 2u_1^2, f_2(u_2) = u_2^2 + 0,5u_2, f_3(u_3) = u_3 + 0,5u_3^2$
- 13 $N = 220, f_1(u_1) = u_1 + u_1^3, f_2(u_2) = u_2^2 + 3u_2, f_3(u_3) = 0,5u_3^2 + u_3^3$
- 14 $N = 150, f_1(u_1) = u_1 + u_1^2 + u_1^3, f_2(u_2) = 6u_2^2 - 4u_2, f_3(u_3) = u_3 + 0,5u_3^2$
- 15 $N = 1000, f_1(u_1) = 4u_1 + 2u_1^2, f_2(u_2) = 8u_2^2 + u_2, f_3(u_3) = 2u_3 + 3u_3^2$
- 16 $N = 500, f_1(u_1) = u_1^4 + u_1, f_2(u_2) = u_2^2 + 0,5u_2, f_3(u_3) = 10u_3 + 0,3u_3^4$
- 17 $N = 50, f_1(u_1) = u_1 + 3u_1^3, f_2(u_2) = u_2^2 + 2,5u_2, f_3(u_3) = -2u_3 + 2u_3^2$
- 18 $N = 90, f_1(u_1) = u_1 + u_1^3, f_2(u_2) = 2u_2^2 + 3u_2, f_3(u_3) = u_3 + 2u_3^2$
- 19 $N = 250, f_1(u_1) = u_1 + 0,3u_1^2, f_2(u_2) = 3u_2^3 + 2u_2, f_3(u_3) = -2u_3 + 6u_3^2$
- 20 $N = 75, f_1(u_1) = u_1 + 1,5u_1^3, f_2(u_2) = 2u_2^2 + u_2, f_3(u_3) = -u_3 + u_3^2 + 2u_3^3$