

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Факультет дистанционного обучения (ФДО)

А. Г. Карпов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Учебное методическое пособие

Томск 2026

Корректор: А. Н. Миронова

Карпов А. Г.

Математические основы теории систем : учебное методическое пособие / А. Г. Карпов. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2026. – 57 с.

В пособии даются рекомендации по организации самостоятельной работы студентов и выполнению лабораторных работ, представлены варианты исходных данных.

Для студентов заочной формы обучения, в том числе с применением дистанционных образовательных технологий.

© Карпов А. Г., 2026
© Оформление
ФДО, ТУСУР, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1 Организация самостоятельной работы	5
1.1 Рабочая программа и план обучения	6
1.2 Содержание дисциплины	7
1.3 Рекомендации по изучению дисциплины.....	10
1.4 Консультации.....	18
1.5 Лабораторные работы.....	18
1.6 Контрольные мероприятия.....	19
1.7 Итоговая аттестация.....	19
2 Лабораторные работы	20
2.1 Лабораторная работа № 1 «Исследование конечных автоматов»	20
2.2 Лабораторная работа № 2 «Решение дифференциальных и разностных уравнений».....	21
2.3 Лабораторная работа № 3 «Решение уравнений состояния»	22
Литература	24
Приложение А Таблица преобразования Лапласа и z-преобразования	25
Приложение Б Варианты исходных данных к лабораторной работе № 1	26
Приложение В Варианты исходных данных к лабораторной работе № 2.....	46
Приложение Г Варианты исходных данных к лабораторной работе № 3	53

ВВЕДЕНИЕ

В рамках дисциплины «Математические основы теории систем» изучаются специальные разделы высшей математики, предназначенные для математического описания, а в дальнейшем для анализа и синтеза динамических систем. Хотя с упомянутыми разделами математики обучающийся первоначально знакомится в курсах высшей математики и линейной алгебры, дальнейшее развитие, углубление и приложение этих знаний для описания различных систем происходит именно в представляемом курсе.

В период освоения дисциплины необходимо самостоятельно изучить и проработать материалы учебного пособия [1] и дополнительные предлагаемые литературные источники [2–7].

Целью предлагаемого пособия является знакомство с порядком организации самостоятельной работы по изучению дисциплины и порядком выполнения лабораторных работ.

В рабочем учебном плане (<https://edu.tusur.ru/opops>) приведен перечень компетенций, формируемых в результате изучения дисциплины, а также указана совокупность тех знаний, умений и навыков, которые должны стать результатом освоения материалов курса.

1 ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа – основной вид учебной деятельности студентов ФДО ТУСУР, который позволяет овладевать фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками в конкретных областях науки и (или) виде (видах) деятельности, на которые ориентирована программа бакалавриата; получать опыт творческой и исследовательской деятельности; развивать такие качества личности, как самостоятельность в принятии решений, ответственность, организованность; использовать творческий подход к решению проблем учебного и профессионального уровней.

Задачи самостоятельной работы студента:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений;
- углубление и расширение теоретической подготовки; формирование умения использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к зачетам и экзаменам.

Основные черты самостоятельной деятельности в высшей школе:

- *целенаправленность*, т. е. такая активность, которая направлена на достижение сознательно поставленной цели;
- *продуманность*, т. е. анализ ситуации и выбор способов и средств достижения цели и последовательности будущих действий;

- *осознанность*, планирование и предвидение возможного результата, наличие логической схемы;
- *структурность*, специфический набор действий и последовательность их осуществления;
- *результативность*, когда деятельность находит свое завершение в результате.

Этапы и виды деятельности самостоятельной работы

Изучение дисциплины включает следующие виды деятельности:

- 1) знакомство с рабочей программой дисциплины.
- 2) составление плана обучения по дисциплине.
- 3) изучение теоретического материала.
- 4) выполнение лабораторных работ.
- 5) прохождение промежуточной аттестации (контрольные работы).
- 6) прохождение итоговой аттестации (зачет, экзамен).

Необходимо отметить, что приведенный перечень не предполагает строгой последовательности действий. На любом этапе возможно внесение корректировок в план работы. Возвращение к теоретическому материалу необходимо при подготовке ко всем видам контрольных мероприятий, итоговой аттестации и т. д.

Все теоретические и вспомогательные материалы по дисциплине размещаются в соответствующем электронном курсе.

1.1 Рабочая программа и план обучения

В рабочей программе дана общая информация по дисциплине: цели и задачи дисциплины, место в образовательной программе, требование к результатам освоения дисциплины (на формирование каких компетенций направлена), объем и виды учебной работы, формы аттестации, основная и дополнительная литература, примерные оценочные материалы.

Рабочая программа дисциплины доступна из рабочего учебного плана соответствующей основной профессиональной образовательной программы (<https://edu.tusur.ru/opops>);

Рабочая программа позволяет представить объем предстоящей работы по дисциплине и составить план самостоятельного обучения.

План должен включать следующие важные составляющие:

- изучение теоретического материала дисциплины, освоение терминологии, ознакомление с классификациями и др. (для этого необходимо оценить объем материалов электронного курса и дополнительной литературы);
- подготовку и выполнение контрольных работ;
- подготовку и прохождение итоговой аттестации по дисциплине.

1.2 Содержание дисциплины

Цели и задачи дисциплины

Целью дисциплины является изучение материала из тех областей современной математики и теории систем, которые служат для составления и описания моделей систем и позволяют в конечном итоге эффективно проводить анализ и синтез технических систем. Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с основными понятиями и методами теории систем;
- привитие студентам навыков практической работы с математическим описанием технических систем.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен:

- *знать* основные виды математического описания разных классов динамических систем;

- *уметь* составлять и решать уравнения, описывающие динамику дискретных, дискретно-непрерывных, непрерывных систем;
- *владеть* методами и приемами анализа и синтеза систем на уровне математических моделей систем.

Общие понятия о системах и их моделях

Исторический аспект понятия «система». Системность человеческой практики. Системность познания. Системность как всеобщее свойство материи. Системность как объект исследования. Основные свойства систем.

Модели и моделирование. Понятие модели и его развитие. Модель как способ существования знаний. Целевой характер моделей. Классификация моделей: модели познавательные и прагматические, статические и динамические, абстрактные и материальные. Иерархия моделей: от естественного языка до математических моделей. Свойства моделей: конечность, приближенность, адекватность, истинность. Множественность моделей систем.

Системы, их общее описание и классификация. Первое определение системы. Уровни модельного описания систем: модель «черного ящика», модель состава, модель структуры, структурная схема системы. Второе определение системы. Динамические системы. Функционирование и развитие. Типы отображений динамики систем. Общая математическая модель систем. Понятие состояния систем. Классификация систем: по происхождению, по описанию переменных, по способу управления, по типу операторов, по ресурсной обеспеченности.

Автоматное описание систем. Теория конечных автоматов

Определение автомата и способы его задания. Автоматы синхронные и асинхронные, автоматы первого и второго рода, автоматы Мили и Мура. Отображения, инициируемые автоматом. Гомоморфизм, изоморфизм, эквивалентность автоматов. Минимизация конечных автоматов. Частичные автоматы.

Эквивалентное и изоморфное продолжение автоматов. Проблема минимизации частичных автоматов. Представление событий в автоматах. Алгебра регулярных событий. Постановка задач исследования конечных автоматов. Представление событий орграфом. Алгоритмы абстрактного синтеза и анализа автоматов. Операции над автоматами: теоретико-множественные и алгебраические. Соединения автоматов, автоматные сети. Структурный синтез автоматов. Комбинационный автомат и автомат с памятью. Кодирование внутренних состояний автомата. Программная реализация комбинационных автоматов.

Системы с непрерывными во времени переменными

Дифференциальные уравнения динамики систем. Классический метод решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка. Интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Карсона – Хевисайда. Изображения основных функций. Теоремы об интегральных преобразованиях. Обратные преобразования Фурье, Лапласа и их вычисление. Теорема о вычетах. Передаточная функция системы. Описание систем в частотной области. Частотные характеристики систем. Решение дифференциальных уравнений с помощью интегральных преобразований. Учет начальных условий.

Операторное описание дискретных по времени систем

Дискретное представление сигналов. Оператор сдвига и разностный оператор. Обратный разностный оператор. Виды разностных уравнений систем. Свойства разностных уравнений. Классический метод решения неоднородных разностных уравнений.

Методы преобразований. Дискретное преобразование Фурье и Лапласа. Теория z -преобразования. Определение z -преобразования и его свойства. Обратное z -преобразование, методы его вычисления. Дискретные передаточные функции линейных дискретных систем. Решение разностных уравнений методом z -преобразования.

Матрицы и линейные пространства

Основные понятия и определения матричной теории. Типы матриц и основные операции над матрицами. Векторы и линейные преобразования. Задача о собственных числах и собственных векторах. Модальная матрица. Линейные преобразования матриц. Диагонализация матриц. Матрицы специального вида: каноническая и жорданова формы, матрица Фробениуса.

Матричные функции. Матричные ряды. Теорема Кэли – Гамильтона, её применение для вычисления матричных функций. Теорема разложения Сильвестра.

Векторно-матричные дифференциальные уравнения

Уравнения состояния систем. Канонические формы уравнений. Решение уравнений стационарных систем. Переходная (фундаментальная) матрица. Методы вычисления переходной матрицы: метод Кэли – Гамильтона, метод Сильвестра, метод преобразования Лапласа, метод модальной матрицы.

Нестационарные разностные уравнения. Переходная нестационарная матрица и ее свойства. Матрицант. Решение неоднородного векторно-матричного уравнения.

1.3 Рекомендации по изучению дисциплины

При изучении отдельных тем дисциплины целесообразно ответить на вопросы, сформулированные в конце каждой темы (главы) в учебном пособии [1].

Тема 1. Общие понятия о системах и их моделях

Изучение математических основ теории систем начинается с освоения основных терминов, понятий и определений. Необходимо четко представлять себе, какие свойства объекта исследования позволяют рассматривать этот объект как систему.

Исследование любой системы начинается с построения её модели, поэтому важно знать, что такое модель, виды и свойства моделей, место, которое занимают математические модели в иерархии моделей.

Когда мы начинаем различать системы по их свойствам, мы тем самым вводим их классификацию. Основания классификации, т. е. те свойства, по которым различаются системы, могут быть самыми разными. Чаще всего классифицируют системы по происхождению, по виду математического описания, по характеру воздействий в системе, по ресурсообеспеченности.

При рассмотрении математического описания динамической системы очень важно понять, что такое переменные состояния системы. Весьма важным является также понимание физической реализуемости математической модели системы, под которой подразумевается появление реакции системы только после появления входного воздействия.

Тема 2. Автоматное описание систем

Перед изучением этой темы следует познакомиться и усвоить профессиональный язык теории конечных автоматов, то есть основные определения и понятия теории конечных автоматов: алфавитные и автоматные отображения, входной и выходной алфавиты, конечный автомат, события, регулярные события и т. п.

Описание системы в виде конечного автомата предполагает, что множества входных, выходных и внутренних переменных системы являются конечными. При задании автомата следует обратить внимание на различные формы представления автоматов и связи между этими формами. Нужно четко понять различия между произвольными алфавитными отображениями и автоматными отображениями. При изучении различных видов автоматов следует понимать, что автомат Мили и автомат Мура – это по сути разные формы описания одного и того же автомата. Важным моментом является понятие эквивалентности

автоматов (в смысле равенства их автоматных отображений). В плане эквивалентных преобразований автоматов одной из важнейших задач является минимизация автоматов, под которой понимается поиск в классе эквивалентных автоматов автомата с минимальным числом внутренних состояний. В рамках конструктивной реализации это означает минимальное число элементов памяти автомата.

Автоматы могут использоваться как переработчики (преобразователи) входной дискретной информации в выходную либо как распознаватели некоторых множеств. В последнем случае важно понять, что такое регулярные операции, регулярные события, регулярные выражения и связь между регулярными событиями и автоматами. Особое внимание следует уделить процедурам синтеза и анализа автоматов и внимательно разобрать соответствующие примеры в учебном пособии.

В процедуре синтеза автоматов первостепенное значение имеет правильное построение источника по регулярному выражению. Здесь не следует забывать о правилах введения пустых ребер. В процедуре детерминизации основное значение имеет правильное составление замкнутых подмножеств состояний (вершин источника).

При анализе автоматов важно установить все циклы, существующие в графе автомата, и правильным образом их учесть в регулярном выражении согласно графическому алгоритму анализа.

Рассмотрение различных операций над автоматами требуется при изучении соединений автоматов. Важно понять, какие операции можно производить с автоматами и как эти операции определяются. Следует внимательно ознакомиться с примерами операций, приведёнными в учебном пособии.

При структурном исследовании автоматов, то есть при изучении внутреннего устройства автоматов, нужно обратить внимание на понятие автоматного базиса и тех элементов, из которых он (базис) может состоять. Изучение комбинационных автоматов, их анализа и синтеза предполагает, что студент знаком

с основными соотношениями булевой алгебры, понятиями функционально полных базисов булевых формул, эквивалентными преобразованиями и свойствами булевых выражений. Поэтому в процессе изучения данного раздела целесообразно освежить в памяти соответствующие разделы дискретной математики.

Тема 3. Системы с непрерывными во времени переменными

В динамической системе с непрерывными во времени переменными связь выходного воздействия с входным сигналом устанавливается дифференциальным уравнением высокого порядка. Как правило, уравнения реальных систем являются нелинейными. Необходимо четко представлять, в каких случаях и как возможно упрощенное описание таких систем в виде линейных (а точнее линеаризованных) уравнений.

Решение линейных (или линеаризованных) уравнений состоит из суммы решения соответствующего однородного (с нулевым входным воздействием, то есть нулевой правой частью) уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Следует понимать, что общее решение интерпретируется как переходной процесс, а частное решение – как установившийся процесс в системе. Нужно четко знать, помнить и уметь применять на практике этапы классического метода нахождения общего решения однородного уравнения:

- 1) составление характеристического уравнения;
- 2) вычисление корней характеристического уравнения;
- 3) запись общего решения на основе корней характеристического уравнения по известной форме;
- 4) вычисление постоянных интегрирования по заданным начальным условиям.

При выполнении п. 3 нужно помнить особенности записи решения для комплексных и кратных (одинаковых) корней характеристического уравнения.

Для определения частного решения можно применять два стандартных метода – метод неопределённых коэффициентов и метод вариации параметров. В большинстве случаев метод неопределённых коэффициентов проще метода вариации параметров, но последний является более универсальным, так как пригоден для любой функции, описывающей входное воздействие. Это необходимо помнить и по возможности применять более простой метод.

Альтернативный метод решения дифференциальных уравнений состоит в применении интегральных преобразований. Рекомендуется запомнить формулы интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Карсона – Хевисайда. Следует внимательно изучить свойства преобразования Лапласа с тем, чтобы без затруднений применять эти свойства для определения преобразований различных сложных функций. Особое внимание необходимо обратить на нахождение обратного преобразования Лапласа, то есть на определение оригинала. Рекомендуется использование стандартного приёма – применение теоремы разложения, заключающегося в разложении оригинала на простые дроби с последующим применением таблицы преобразований Лапласа. Можно также воспользоваться теоремой о вычетах. В вычислительном плане эти методы совпадают. При применении преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений не нужно забывать о начальных условиях (в случае ненулевых их значений).

Очень важным понятием является передаточная функция. Нужно знать, что это такое и как получить передаточную функцию из дифференциального уравнения (и наоборот, как записать дифференциальное уравнение по передаточной функции).

Тема 4. Операторное описание дискретных по времени систем

Квантование сигнала по времени приводит к переходу от дифференциальных уравнений к уравнениям разностным. При изучении уравнений с дискретным временем следует знать, что такое оператор сдвига и разностный оператор и как они связаны друг с другом, а также что такое обратный разностный оператор

и его свойства. Применение оператора сдвига или разностного оператора приводит к разным формам записи разностных уравнений.

Процедура решения однородных разностных уравнений состоит из тех же этапов, что и решение дифференциальных уравнений:

- 1) составление характеристического уравнения;
- 2) вычисление корней характеристического уравнения;
- 3) запись общего решения на основе корней характеристического уравнения по известной форме;
- 4) вычисление постоянных суммирования по заданным начальным условиям.

Особое внимание следует обратить на то, что форма записи общего решения (п. 3) отличается от соответствующей формы при записи решения уравнения дифференциального. Необходимо понимать, что начальные условия в разностных уравнениях налагаются не на производные выходной переменной, а на выходную переменную с оператором сдвига, то есть для уравнения n -го порядка с оператором сдвига начальные условия налагаются на $y(0)$, $y(1), \dots, y(n-1)$.

Для частного решения неоднородного разностного уравнения применяют те же методы, что и для дифференциальных уравнений. Но не нужно забывать и о различиях в формах записи решений в том и другом случае.

Аналогом преобразования Лапласа для дискретного времени является z -преобразование, которое вытекает из преобразования Лапласа. Свойства z -преобразования похожи на свойства преобразования Лапласа и вытекают из них. Следует внимательно изучить эти свойства.

При определении обратного z -преобразования нужно помнить, что в отличие от преобразования Лапласа нет взаимно-однозначного соответствия между оригиналом и изображением. То есть обратное z -преобразование даст функцию дискретного, а не непрерывного времени, хотя от функции непрерывного времени всегда можно получить соответствующее z -преобразование.

Тема 5. Матрицы и линейные пространства

Перед изучением этой темы целесообразно повторить разделы математики, связанные с линейной алгеброй, матрицами и векторами.

Основополагающими являются определения и понятия матрицы, вектора и операций с ними: сложение, умножение на скаляр, умножение матриц и векторов. Следует также вспомнить или познакомиться с такими понятиями и определениями, как квадратная матрица, диагональная матрица, транспонированная матрица, определитель матрицы, минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы, ранг и дефект (вырожденность) матрицы, присоединённая и обратная матрица.

Одной из основных задач теории матриц является задача о собственных числах и собственных векторах. Поэтому нужно ясно понимать суть собственных чисел и собственных векторов, знать и уметь составлять и решать соответствующие уравнения. Из собственных векторов формируется модальная матрица, которая играет важную роль в матричных преобразованиях.

Важнейшим матричным преобразованием является преобразование подобия, которое в случае модальной матрицы позволяет упрощать (приводить к диагональной форме) различные матрицы. Нужно понимать, что не всякая матрица может быть приведена к канонической диагональной форме. Такое возможно только в случае различных собственных чисел или при кратных собственных значениях, если дефект характеристической матрицы для этого корня равен его кратности (случай полной вырожденности). Но если дефект характеристической матрицы для кратного корня меньше его кратности, возможно приведение матрицы к канонической форме Жордана.

При рассмотрении матричных функций важно понимать, что из любой скалярной функции, допускающей представление в виде степенного ряда, может быть получена соответствующая функция от матрицы. Основными методами вычисления матричных функций являются метод Кэли – Гамильтона

и метод разложения Сильвестра. Нужно уметь пользоваться этими методами, а для этого необходимо знать формулировки теоремы Кэли – Гамильтона и теоремы разложения Сильвестра.

Тема 6. Векторно-матричные дифференциальные уравнения

При рассмотрении этой темы для понимания сути векторно-матричных уравнений состояния нужно вспомнить, что такое переменные состояния (см. тему 1). Следует иметь в виду, что введение переменных состояния и переход к уравнениям состояния $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Br}$ и уравнениям выхода $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dr}$ возможен бесчисленным множеством способов. Две формы уравнений состояния имеют при этом особое значение – каноническая форма фазовой переменной (стандартная форма), когда матрица $\mathbf{A}$ в уравнениях состояния является матрицей Фробениуса, и каноническая (нормальная) форма, когда матрица $\mathbf{A}$ является диагональной.

Решение однородных уравнений состояния для стационарных систем, как и в скалярном случае, ищется в виде экспоненты, только для векторно-матричных уравнений это будет не скалярная экспонента, а матричная $e^{\mathbf{A}t}$. Матричная экспонента $e^{\mathbf{A}t}$ в данном случае называется переходной (фундаментальной) матрицей. Нужно знать и уметь вычислять переходную матрицу несколькими методами: помимо разобранных в теме 5 методов Кэли – Гамильтона и Сильвестра, это метод преобразования Лапласа и метод диагонализации с применением модальной матрицы. Решение неоднородных уравнений не должно вызывать особых трудностей. Следует только внимательно относиться к вычислению соответствующих интегралов в формуле для вектора состояния и выхода системы.

Решение нестационарных уравнений состояния связано со значительно большими трудностями. Здесь следует знать, в каком случае переходная матрица будет также являться матричной экспонентой. В других же случаях можно прийти к переходной матрице в виде матрицанта.

1.4 Консультации

В связи с тем, что не всегда возможно самостоятельно найти ответы на возникшие в ходе изучения дисциплины вопросы, на факультете существует возможность задать вопрос преподавателю, записавшись к нему на консультацию. Вопросы можно задавать как по теоретическому материалу, так и по подготовке, оформлению отчетов любого вида работ.

Предусмотрено несколько ресурсов, где можно задать вопрос:

- на учебном форуме, воспользовавшись формой отправки из учебного плана или почтового агента в личном кабинете;
- написав письмо с любого другого почтового сервера на адрес problems@fdo.tusur.ru.

Также существует возможность обсудить любой учебный вопрос на форуме с другими студентами, коллективно найти решение. Однако следует помнить, что мнения других студентов могут быть ошибочными, и критически относиться к высказанным идеям.

1.5 Лабораторные работы

Лабораторные работы являются основным видом деятельности, направленным на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений. Выполнение студентами лабораторных работ необходимо:

- для формирования практических умений в соответствии с требованиями к уровню подготовки студентов, установленными рабочей программой дисциплины по конкретным разделам (темам);
- обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний;
- совершенствования умений применять полученные знания на практике, реализации единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развития интеллектуальных умений;
- выработки при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

С условиями и требованиями по организации и выполнению лабораторных работ вы можете ознакомиться в разделе 2 данного пособия.

1.6 Контрольные мероприятия

Цель выполнения контрольной работы – закрепить знания, полученные студентами при изучении материалов электронного курса, а также, в ряде случаев, отработать навыки решения практических задач. К выполнению контрольной работы следует серьезно подготовиться, повторив весь теоретический материал и потренировавшись в решении задач.

Дистанционное обучение ориентировано на повышенные требования к системе контроля, который при этом имеет свою специфику. В данной дисциплине предусмотрено выполнение компьютерной контрольной работы.

Компьютерная контрольная работа представляет собой совокупность тестовых заданий. Здесь могут быть представлены как теоретические вопросы, так и практические задачи. Тестовые вопросы могут быть разных типов: как на выбор одного либо нескольких вариантов, так и на ввод ответа.

1.7 Итоговая аттестация

Для получения зачета достаточно успешно выполнить все оцениваемые работы по дисциплине (лабораторные и контрольные работы).

Экзамен представляет собой итоговое электронное тестирование по всем темам курса. Тестовые вопросы могут быть разных типов: как на выбор одного либо нескольких вариантов, так и на ввод ответа. Все экзамены сдаются в период сессии. Результат оценивается по пятибалльной шкале.

2 ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

В процессе изучения дисциплины предусмотрено выполнение лабораторных работ. Каждая лабораторная работа предполагает 20 вариантов исходных данных. Выбор варианта лабораторных работ осуществляется автоматически. Номер варианта лабораторной работы представлен в личном кабинете студента.

При выполнении лабораторных работ № 2 и № 3 можно пользоваться таблицами преобразований Лапласа и z-преобразований (приложение А).

2.1 Лабораторная работа № 1

«Исследование конечных автоматов»

Цель лабораторной работы – освоить основные понятия теории автоматов и основные методы анализа и синтеза конечных автоматов на абстрактном и структурном уровне.

Автоматы в лабораторной работе заданы автоматной таблицей, в которой строки представляют собой состояния, а столбцы – буквы входного алфавита: на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит номер состояния, в которое переходит автомат из i -го состояния по j -й входной букве, и через запятую – буква выходного алфавита, появляющаяся при этом на выходе автомата (для автоматов Мили). В таком же виде следует представлять и результаты заданий (где это необходимо).

Задание

Исходные данные для выполнения лабораторной работы № 1 приведены в приложении Б.

1. По автомату Мили построить эквивалентный ему автомат Мура, используя теорему 2.1 [1].
2. По автомату Мура построить эквивалентный ему автомат Мили.

3. Составить формулу в алгебре Клини, задающую регулярное событие в алфавите $\{a, b, c\}$ по его словесному описанию.

4. Синтезировать автомат (на абстрактном уровне), представляющий заданное регулярным выражением регулярное событие. При выполнении данного задания следует привести полученный источник и автоматную таблицу, получающуюся в процессе детерминизации (по теореме 2.7 [1]).

5. Провести анализ автомата, то есть написать выражение регулярного события, представляемого автоматом. Начальное состояние – 1, заключительное – 4.

6. В заданном базисе синтезировать комбинационный автомат, реализующий булеву формулу F . Результат представить в виде структурной схемы.

7. Написать бинарную программу, реализующую комбинационный автомат, вычисляющий формулу F из п. 6. Результат представить в виде графа программы.

2.2 Лабораторная работа № 2

«Решение дифференциальных и разностных уравнений»

Цель лабораторной работы – освоить и закрепить на практике методы решения обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений.

Варианты исходных данных к лабораторной работе № 2 приведены в приложении В.

Задание

1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Решить это уравнение классическим методом с учетом заданных начальных условий. Право выбора метода определения частного решения предоставляется студенту.

2. Решить уравнение, приведенное в п. 1, с помощью преобразования Лапласа.

3. Дано уравнение в прямых разностях. Необходимо перейти от уравнения, использующего прямые разности, к уравнению с применением оператора сдвига.

4. Решить полученное в п. 3 разностное уравнение классическим методом с учетом заданных начальных условий. *Не забудьте пересчитать начальные условия для переменной с разностным оператором в начальные условия для переменной с оператором сдвига!*

5. Решить полученное в п. 3 разностное уравнение с применением z-преобразования. *Не забудьте учесть начальные условия, полученные в п. 4!*

2.3 Лабораторная работа № 3

«Решение уравнений состояния»

Цель лабораторной работы – освоить на практике методы решения уравнений состояния.

Варианты исходных данных к лабораторной работе № 3 приведены в приложении Г.

Уравнения состояния заданы в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

где $\dot{\mathbf{x}}(t)$ – вектор-столбец переменных состояний;

$u(t)$ – скалярное входное воздействие (вынуждающая функция);

$y(t)$ – скалярный выход системы;

$\mathbf{A}$ – основная матрица системы;

$\mathbf{B}$ – матрица-столбец связи вынуждающей функции (входа) с переменными состояниями;

$\mathbf{C}$ – матрица-строка связи переменных состояния с выходом системы.

Задание

1. Найти собственные числа и модальную матрицу, соответствующую матрице A .
2. С помощью метода Кэли – Гамильтона найти переходную матрицу, соответствующую заданной матрице A .
3. Определить переходную матрицу, используя теорему разложения Сильвестра.
4. Вычислить переходную матрицу с применением преобразования Лапласа.
5. Решить уравнение состояния, то есть найти вектор состояния $x(t)$ и выход системы $y(t)$ по полученной переходной матрице, заданному входному воздействию $u(t)$ и вектору начального состояния $x(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпов, А. Г. Математические основы теории систем : учеб. пособие / А. Г. Карпов. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2026. – 227 с.
2. Вунш, Г. Теория систем / Г. Вунш. – М. : Совет. радио, 1978. – 288 с.
3. Деруссо, П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М. : Наука, 1970. – 620 с.
4. Закревский, А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов / А. Д. Закревский. – М. : Наука, 1971. – 512 с.
5. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
6. Мелихов, А. Н. Ориентированные графы и конечные автоматы / А. Н. Мелихов. – М. : Наука, 1971. – 416 с.
7. Перегудов, Ф. И. Основы системного анализа / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – Томск : НТЛ, 2003. – 396 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица преобразования Лапласа и z-преобразования

Функция времени	Преобразование Лапласа	z-преобразование
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \cdot \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Варианты исходных данных к лабораторной работе № 1

Вариант 1

q_i/x_j	x_1	x_2
1. 1	2, y_1	1, y_2
2	1, y_3	1, y_2

q/x	x_1	x_2	μ
1	2	3	y_1
2. 2	1	2	y_2
3	4	3	y_3
4	1	3	y_4

3. Все слова, содержащие s ровно два раза.

4. $(cb \vee a)^* (a \vee b)^*$.

$q/$	a	b	c
1	2	4	—
5. 2	3	2	4
3	—	—	4
4	4	3	—

6. Базис ДНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x_2})x_3x_4$.

Вариант 2

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$1, y_1$	$2, y_1$
	2	$1, y_2$	$2, y_3$

q/x		x_1	x_2	μ
2.	1	1	3	y_1
	2	2	4	y_3
	3	1	2	y_2
	4	4	1	y_4

3. Все слова, начинающиеся на a или на ba и не заканчивающиеся на a .

4. $(a^*bc)^*a$.

$q/$		a	b	c
5.	1	2	—	4
	2	4	1	3
	3	3	1	4
	4	—	4	—

6. Базис КНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_3) \overline{x_2 x_4}$.

Вариант 3

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$2, y_1$	$2, y_2$
	2	$1, y_3$	$2, y_4$

q/x	x_1	x_2	μ
1	4	2	y_1
2.	2	1	y_1
	3	2	y_3
	4	1	y_2

3. Все слова, содержащие s четное число раз и заканчивающиеся на ab или ba .

4. $(b^* ac^*)^* (b \vee a)$.

$q/$	a	b	c
1	2	3	1
5.	2	3	4
	3	4	—
	4	—	—
4	4	—	3

6. Базис элементов «И-НЕ» (штрих Шеффера).

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(x_2 \vee \overline{x_3})\overline{x_4}.$$

Вариант 4

q_i/x_j	x_1	x_2
1. 1	$1, y_2$	$2, y_2$
2	$1, y_3$	$2, y_1$

q/x	x_1	x_2	μ
1	2	4	y_2
2. 2	1	3	y_1
3	4	2	y_4
4	1	3	y_3

3. Все слова, имеющие сочетание bca хотя бы один раз.

4. $(a^* b \vee ca) b^*$.

$q/$	a	b	c
1	4	2	2
5. 2	2	3	—
3	2	—	4
4	—	—	4

6. Базис элементов «ИЛИ-НЕ» (стрелка Пирса).

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_4.$$

Вариант 5

q_i/x_j	x_1	x_2
1. 1	$2, y_2$	$1, y_1$
2	$2, y_3$	$1, y_4$

q/x	x_1	x_2	μ
1	2	1	y_1
2. 2	3	4	y_2
3	2	4	y_3
4	1	2	y_2

3. Все слова, имеющие сочетание abc .

4. $(ac^* \vee b \vee c) ac$.

$q/$	a	b	c
1	4	—	2
5. 2	3	—	3
3	3	4	—
4	4	—	—

6. Базис ДНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2} (x_3 \vee x_4)$.

Вариант 6

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$1, y_1$	$2, y_2$
	2	$1, y_2$	$2, y_2$

q/x	x_1	x_2	μ	
2.	1	3	2	y_1
	2	4	1	y_1
	3	4	2	y_2
	4	2	1	y_3

3. Все слова, не оканчивающиеся на ac .

4. $(c \vee b^* a)^* a^*$.

$q/$	a	b	c
1	—	4	2
2	2	3	—
3	3	2	4
4	—	4	—

6. Базис КНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \vee x_3)x_4\overline{x_2}$.

Вариант 7

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$2, y_1$	$2, y_2$
	2	$2, y_1$	$1, y_3$

q/x		x_1	x_2	μ
2.	1	2	3	y_1
	2	1	4	y_3
	3	2	1	y_2
	4	4	2	y_4

3. Все слова, не начинающиеся на ac или ab .

4. $(bc^*)^* b \vee a$.

$q/$		a	b	c
5.	1	1	2	4
	2	—	—	3
	3	3	3	4
	4	—	4	4

6. Базис элементов «ИЛИ-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(x_2 \vee x_3 \overline{x_4}).$$

Вариант 8

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$1, y_2$	$2, y_1$
	2	$2, y_2$	$2, y_3$

q/x	x_1	x_2	μ
1	4	3	y_1
2.	2	1	y_1
	3	4	y_2
	4	1	y_3

3. Все слова, начинающиеся на ab и не заканчивающиеся на a .

4. $(ca \vee ba^*)^* (b \vee c)^*$.

$q/$	a	b	c
1	2	3	4
5.	2	3	2
	3	4	—
	4	—	4

6. Базис элементов «И-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_2(x_3 \vee \overline{x_4}).$$

Вариант 9

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$1, y_1$	$1, y_2$
	2	$1, y_3$	$2, y_4$

q/x	x_1	x_2	μ
1	3	1	y_4
2.	2	4	y_3
	3	2	y_2
	4	1	y_1

3. Все слова, начинающиеся на bc или cb .

4. $(a \vee b)^* c^* \vee ba$.

$q/$	a	b	c
1	—	2	4
5.	2	3	4
	3	2	3
	4	—	—

6. Базис элементов «ИЛИ-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \overline{x_2} (x_3 \vee \overline{x_4}).$$

Вариант 10

q_i/x_j	x_1	x_2
1. 1	$2, y_1$	$1, y_1$
2	$1, y_2$	$2, y_3$

q/x	x_1	x_2	μ
1	2	4	y_4
2. 2	3	1	y_1
3	1	2	y_2
4	3	1	y_3

3. Все слова, начинающиеся на a и имеющие сочетание ab хотя бы один раз.

4. $(a \vee c^*) b^* (ac)^*$.

$q/$	a	b	c
1	2	1	4
5. 2	2	3	4
3	4	2	—
4	—	—	—

6. Базис элементов «И-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 \overline{x_1} (x_2 \vee x_1 \overline{x_3}).$$

Вариант 11

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$1, y_2$	$2, y_3$
	2	$1, y_1$	$1, y_2$

q/x	x_1	x_2	μ	
2.	1	3	4	y_2
	2	2	3	y_1
	3	4	2	y_2
	4	1	4	y_3

3. Все слова, начинающиеся на a или ba и не заканчивающиеся на a .

4. $(a^* \vee c) b^* c^* a$.

$q/$	a	b	c
1	3	4	—
2	—	—	4
3	2	3	4
4	4	2	—

6. Базис ДНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_3} \vee x_4)$.

Вариант 12

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$2, y_1$	$1, y_3$
	2	$1, y_2$	$2, y_2$

q/x	x_1	x_2	μ
1	4	2	y_3
2.	2	3	y_2
	3	2	y_1
	4	3	y_1

3. Все слова, содержащие c ровно два раза.

4. $(b \vee (ac)^*)ab^*$.

$q/$	a	b	c
1	3	—	4
5.	2	2	1
	3	4	1
	4	—	4

6. Базис КНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$.

Вариант 13

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$1, y_2$	$2, y_2$
	2	$2, y_1$	$1, y_3$

q/x		x_1	x_2	μ
2.	1	3	1	y_2
	2	2	4	y_1
	3	1	2	y_4
	4	2	1	y_3

3. Все слова, содержащие s четное число раз и заканчивающееся на ab или ba .

4. $(c \vee ab)^* c^*$.

$q/$		a	b	c
5.	1	3	2	1
	2	—	4	—
	3	2	4	—
	4	2	—	4

6. Базис ДНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x_3})x_2\overline{x_4}$.

Вариант 14

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$2, y_3$	$2, y_2$
	2	$1, y_1$	$2, y_2$

q/x	x_1	x_2	μ
1	2	3	y_1
2.	2	1	y_2
	3	4	y_3
	4	1	y_1

3. Все слова, имеющие сочетание bca хотя бы один раз.

4. $(a^* \vee b)^* (a \vee c) b^*$.

$q/$	a	b	c
1	4	3	3
5.	2	3	—
	3	3	2
	4	4	—

6. Базис КНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \overline{x_3 x_4}$.

Вариант 15

q_i/x_j	x_1	x_2
1. 1	$1, y_3$	$2, y_4$
2	$1, y_1$	$1, y_2$

q/x	x_1	x_2	μ
1	1	2	y_2
2. 2	3	4	y_2
3	2	1	y_3
4	3	2	y_1

3. Все слова, имеющие сочетание abc и не заканчивающиеся на ba .

4. $(c \vee ba)(c^* a^*)^*$.

$q/$	a	b	c
1	4	—	3
5. 2	2	4	—
3	2	—	2
4	—	4	—

6. Базис элементов «ИЛИ-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_1 x_3 x_4}.$$

Вариант 16

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$1, y_1$	$2, y_4$
	2	$1, y_2$	$1, y_3$

q/x	x_1	x_2	μ
1	4	3	y_4
2.	2	1	y_1
	3	2	y_2
	4	1	y_3

3. Все слова, не оканчивающиеся на ac .

4. $(a \vee b)^* c^* a$.

$q/$	a	b	c
1	—	4	3
5.	2	3	4
	3	2	—
	4	—	4

6. Базис элементов «И-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_3 x_4) x_2 \overline{x_3}.$$

Вариант 17

q_i/x_j	x_1	x_2
1. 1	$1, y_3$	$1, y_2$
2	$2, y_1$	$1, y_3$

q/x	x_1	x_2	μ
1	2	3	y_1
2. 2	4	3	y_2
3	2	1	y_3
4	3	1	y_4

3. Все слова, не начинающиеся на ac или ab .

4. $(a \vee cb^* a)(a \vee c)^*$.

$q/$	a	b	c
1	1	3	4
5. 2	2	2	4
3	—	—	2
4	—	4	—

6. Базис ДНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)(x_2 \overline{x_3} \vee x_3 \vee x_4)$.

Вариант 18

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$2, y_2$	$1, y_3$
	2	$1, y_1$	$1, y_2$

q/x		x_1	x_2	μ
2.	1	3	2	y_1
	2	1	3	y_2
	3	4	2	y_4
	4	3	1	y_3

3. Все слова, начинающиеся на bc или cb .

4. $(a \vee b \vee (ac)^*)^* a$.

$q/$		a	b	c
5.	1	2	1	—
	2	3	4	2
	3	—	4	1
	4	4	3	—

6. Базис элементов «ИЛИ-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x_3})x_4x_2.$$

Вариант 19

q_i/x_j		x_1	x_2
1.	1	$2, y_4$	$1, y_1$
	2	$2, y_2$	$2, y_3$

q/x	x_1	x_2	μ
1	4	2	y_4
2.	2	3	y_3
	3	4	y_2
	4	2	y_1

3. Все слова, начинающиеся на ab и не заканчивающиеся на a .

4. $(b \vee ca)a^*(b \vee c)^*$.

$q/$	a	b	c
1	—	3	4
5.	2	3	2
	3	2	4
	4	4	—

6. Базис КНФ. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2 \vee x_3x_4)\overline{x_1x_2}$.

Вариант 20

q_i/x_j	x_1	x_2
1. 1	$1, y_4$	$2, y_1$
2	$2, y_3$	$2, y_2$

q/x	x_1	x_2	μ
1	2	4	y_2
2. 2	3	2	y_3
3	1	3	y_1
4	2	1	y_2

3. Все слова, начинающиеся на a и имеющие сочетание ab хотя бы один раз.

4. $(a \vee c)(b \vee c)^* a^*$.

$q/$	a	b	c
1	3	1	4
5. 2	4	3	—
3	3	2	4
4	4	—	—

6. Базис элементов «И-НЕ».

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x_2}x_4 \vee x_1x_2)\overline{x_3}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Варианты исходных данных к лабораторной работе № 2

Вариант 1

1. $\ddot{y} + 3\dot{y} + 3y = 1(t),$
н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

2. $\Delta^2 y(k) + \Delta y(k) + y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k(-1)^k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0. \end{cases}$
н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 2

1. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 3\dot{r} + 2r, \quad r = \begin{cases} e^{-2t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$
н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$

2. $\Delta^2 y(k) + 2\Delta y(k) - y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0. \end{cases}$
н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 0.$

Вариант 3

1. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = r, \quad r = \begin{cases} e^{-2t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$
н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$

2. $\Delta^2 y(k) - 2\Delta y(k) + y(k) = 1(k),$
н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 4

$$1. \quad \ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = r, \quad r = \begin{cases} e^{-2t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$$

$$2. \quad \Delta^2 y(k) + 3\Delta y(k) - y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$$

Вариант 5

$$1. \quad \ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = r, \quad r = \begin{cases} e^{-4t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

$$2. \quad \Delta^2 y(k) - 3\Delta y(k) + 4y(k) = 1(k),$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$$

Вариант 6

$$1. \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = r, \quad r = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$$

$$2. \quad \Delta^2 y(k) + \Delta y(k) + 2y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k(-1)^k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 0.$$

Вариант 7

$$1. \ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = r, \quad r = \begin{cases} \sin t & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

$$2. \Delta^2 y(k) + \Delta y(k) + 0,5y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$$

Вариант 8

$$1. \ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 3\dot{r} + 10r, \quad r = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

$$2. 2\Delta^2 y(k) - \Delta y(k) + y(k) = 1(k),$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$$

Вариант 9

$$1. \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 3\dot{r} + 2r, \quad r = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

$$2. 2\Delta^2 y(k) - 2\Delta y(k) - 3y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$$

Вариант 10

1. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 1(k),$
 н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$

2. $2\Delta^2 y(k) - 2\Delta y(k) - 3y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$
 н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 11

1. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 3\dot{r} + 2r, \quad r = \begin{cases} e^{-2t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$
 н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$

2. $\Delta^2 y(k) + 3\Delta y(k) + 3y(k) = 1(k),$
 н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 12

1. $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 2\dot{r} + r, \quad r = \begin{cases} e^{-3t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$
 н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$

2. $3\Delta^2 y(k) - \Delta y(k) + 2y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k(-1)^k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$
 н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 13

1. $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 1(t),$
 н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

2. $\Delta^2 y(k) + 2\Delta y(k) + 4y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$
 н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 14

1. $\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = r, \quad r = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$
 н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$

2. $\Delta^2 y(k) - \Delta y(k) + 2y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$
 н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 15

1. $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 2\dot{r} + r, \quad r = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$
 н. у.: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

2. $\Delta^2 y(k) + 2\Delta y(k) + 4y(k) = 1(k),$
 н. у.: $y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$

Вариант 16

$$1. \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 2\dot{r} + r, \quad r = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases},$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$$

$$2. \quad 2\Delta^2 y(k) + 4\Delta y(k) - 4y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k(-1)^k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$$

Вариант 17

$$1. \quad \ddot{y} + \dot{y} + 2y = 2\dot{r} + 2r, \quad r = \begin{cases} \sin 2t & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

$$2. \quad 2\Delta^2 y(k) - 3\Delta y(k) + y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 1, \Delta y(0) = 0.$$

Вариант 18

$$1. \quad \ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 2r, \quad r = \begin{cases} \sin 2t & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$$

$$2. \quad \Delta^2 y(k) - 4\Delta y(k) - 4y(k) = 1(k),$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 1, \Delta y(0) = 1.$$

Вариант 19

$$1. \quad \ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 2r, \quad r = \begin{cases} e^{-3t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$$

$$2. \quad \Delta^2 y(k) + 4\Delta y(k) - 4y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k(-1)^k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 0.$$

Вариант 20

$$1. \quad 2\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{r} + 2r, \quad r = \begin{cases} e^{-3t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

$$2. \quad \Delta^2 y(k) + 3\Delta y(k) - 3y(k) = r(k), \quad r(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\text{н. у.: } y(0) = 0, \Delta y(0) = 1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г**Варианты исходных данных к лабораторной работе № 3****Вариант 1**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1], \quad u(t) = e^{-t},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1], \quad u(t) = e^{-t},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вариант 5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 6

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1], \quad u(t) = e^{-t},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 8

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 9

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = e^{-t},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 10

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 11

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 12

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 13

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = e^{-t},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 14

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 15

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 16

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вариант 17

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 18

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вариант 19

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = e^{-t},$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 20

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad u(t) = 1(t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$