



Южно-Уральский
государственный
университет

Национальный
исследовательский
университет

Теория автоматического управления

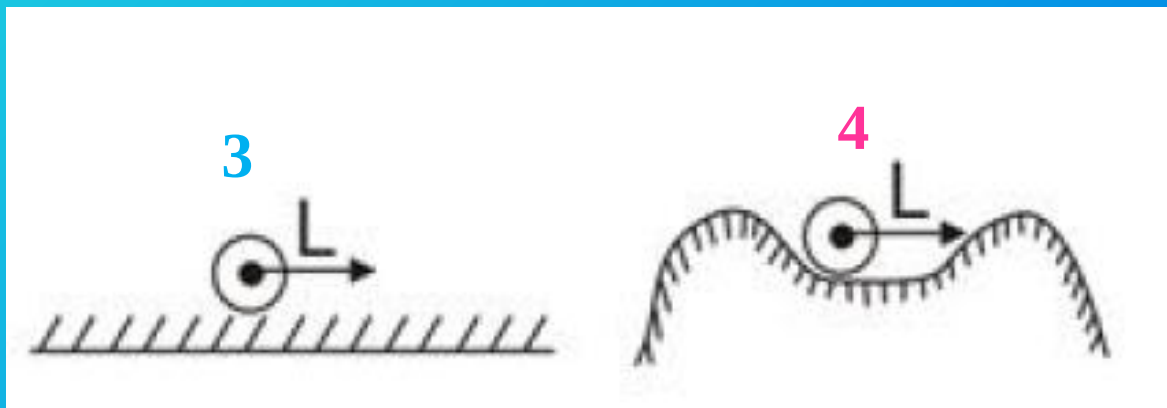
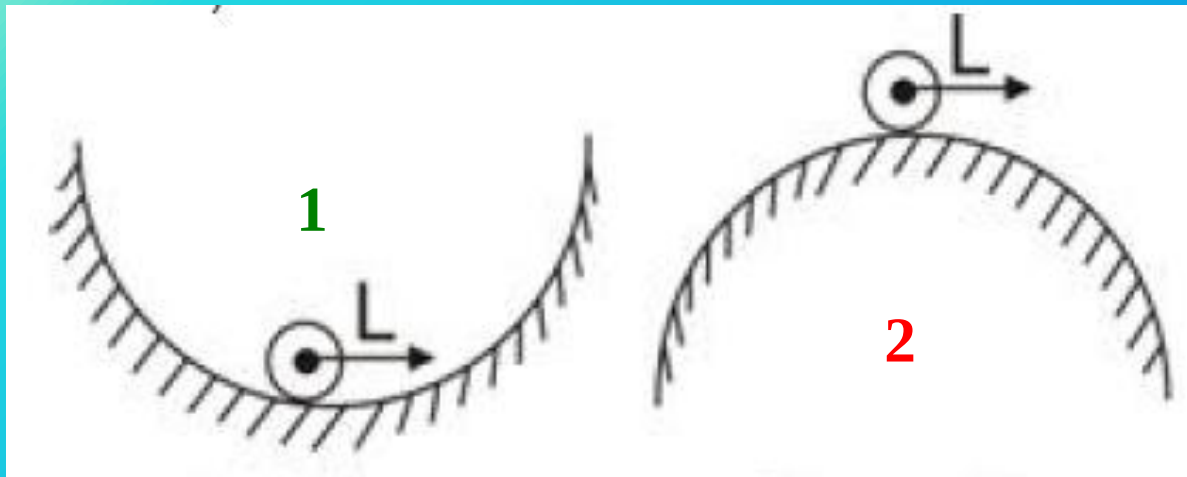
тема вебинара:

«Критерии устойчивости систем автоматического управления»

канд. техн. наук Виноградов К.М.

Устойчивость –
свойство системы
возвращаться в прежнее
состояние равновесия
после вывода ее из этого
состояния задающим и
(или) возмущающим
воздействием!

Устойчивость САУ

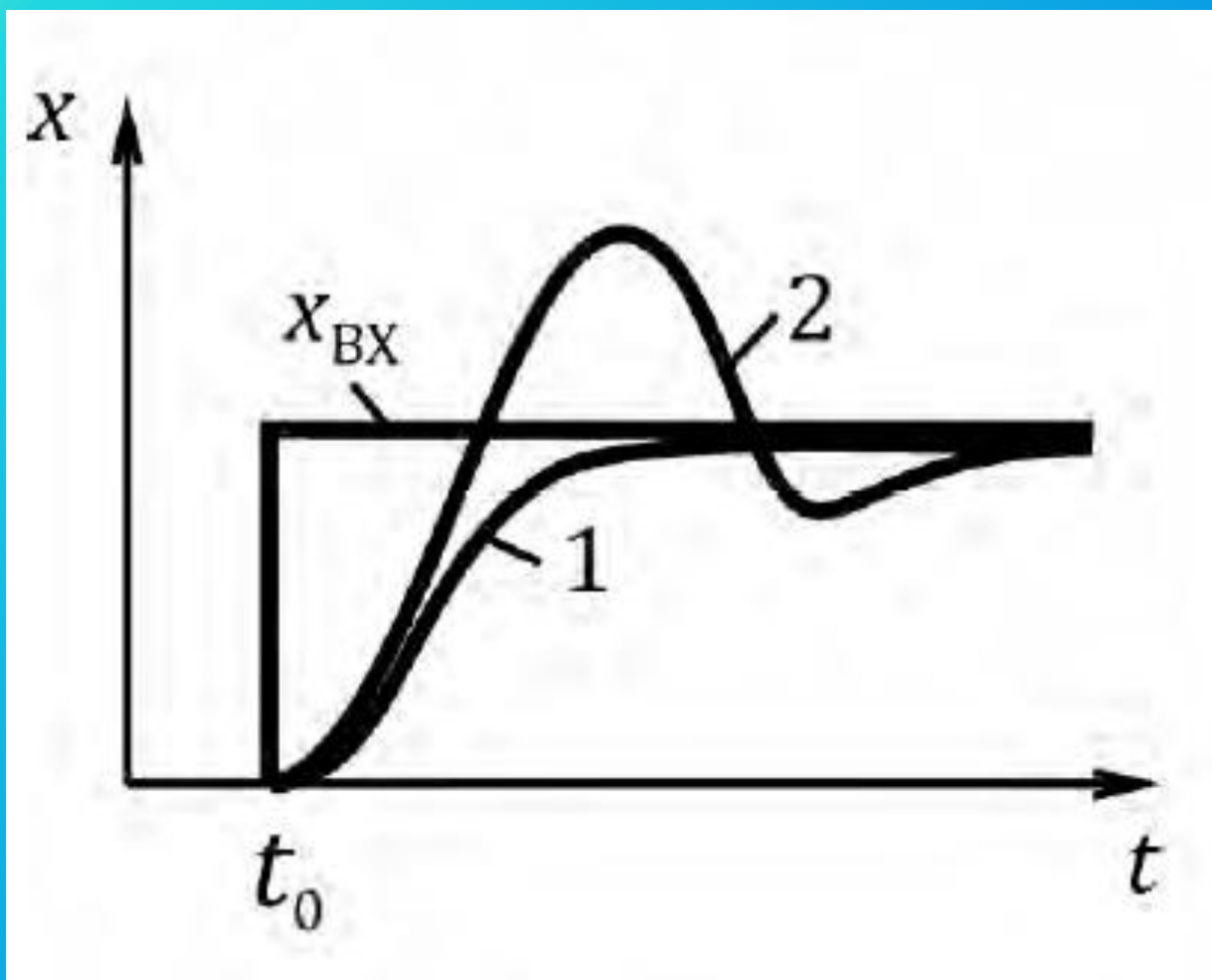


Устойчивость САУ

Устойчивость системы автоматического управления – это способность системы автоматического управления(САУ) нормально функционировать и противостоять различным неизбежным возмущениям (воздействиям)!

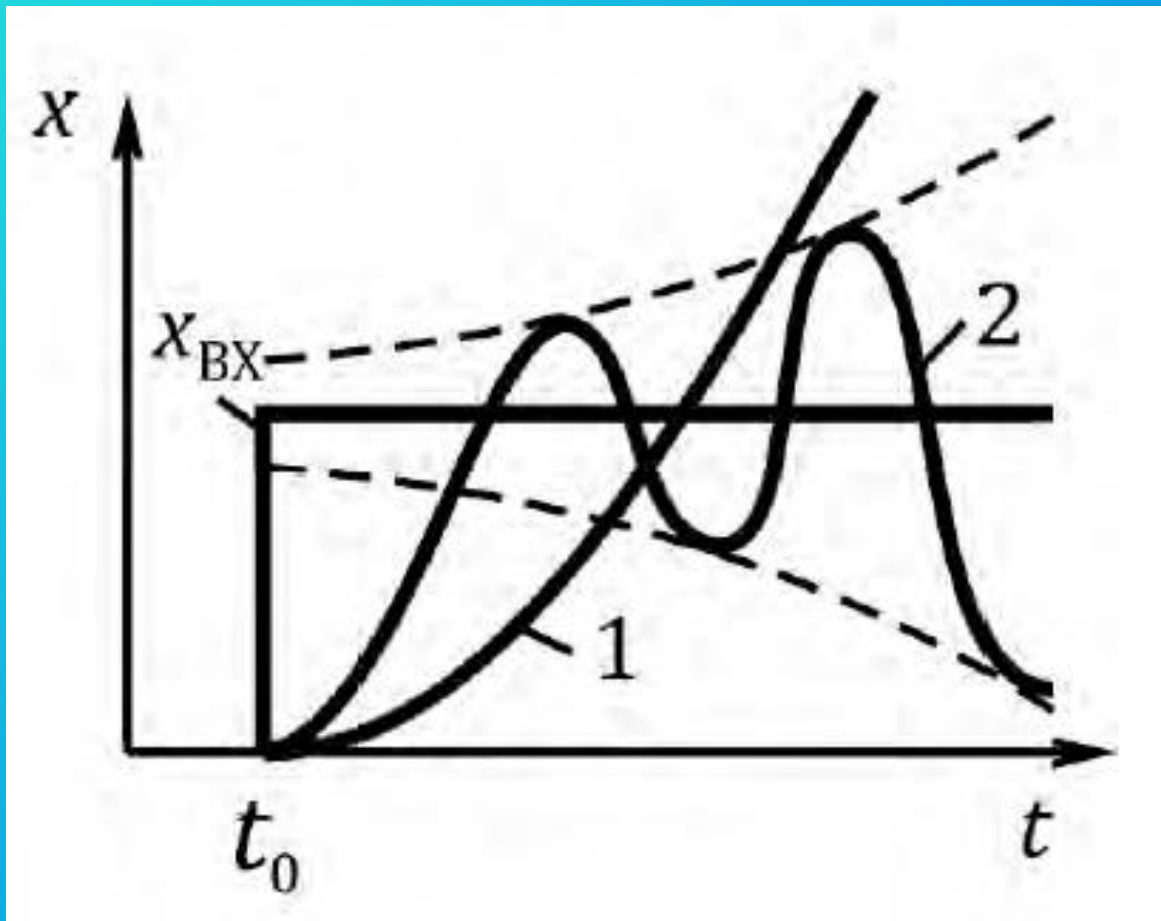
Пример устойчивой САУ

*Переходный процесс в
устойчивой САУ:*



Пример неустойчивой САУ

Переходный процесс в неустойчивой САУ:



Классическое определение устойчивости САУ

САУ устойчива, если все ее вещественные корни характеристического уравнения отрицательны и (или) отрицательны вещественные части комплексных корней!

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_m x + cf.$$

Классическое определение устойчивости САУ

Для получения характеристического уравнения необходимо перевести дифференциальное уравнение САУ в операторную форму!

Для этого нужно заменить операцию дифференцирования на оператор Лапласа «Р»:

$$\frac{d}{dt} = p$$

Такая операция называется алгебраизацией дифференциального уравнения.

Классическое определение устойчивости САУ

В итоге получим алгебраическое выражение:

$$y(a_0 p^n + \dots + a_{n-1} p + a_n) = x(b_0 p^m + \dots + b_m) + cf.$$

Характеристическое уравнение получается приравниванием к нулю выражения в скобках перед Y :

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Пример дифференциального уравнения

$$y + T \frac{dy}{dt} = kx$$

$$K = 10$$

$$T = 0,1 \text{ с}$$

Пример дифференциального уравнения

Переведем дифференциальное уравнение в операторную форму

$$y(1 + Tp) = kx$$

Приравняем к нулю скобку перед y

$$(1 + Tp) = 0$$

Пример дифференциального уравнения

Подставим численные значения и решим это характеристическое уравнение:

$$1 + 0,1P = 0$$

$$P = -10$$

Вывод: такая САУ будет УСТОЙЧИВА!!!

Пример решения алгебраического уравнения второго порядка

Решить квадратное уравнение:

$$4x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

Пример решения алгебраического уравнения второго порядка

Решить квадратное уравнение:

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

Пример решения алгебраического уравнения второго порядка

Решить квадратное уравнение:

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = -16$$

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{-16}}{2} = 2 - i4$$

$$X_2 = \frac{4 + \sqrt{-16}}{2} = 2 + i4$$

Решение уравнений высоких
порядков (показателя степени)

Решить уравнение:

$$x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 10x + 8 = 0$$

???

Решение уравнений высоких порядков (показателя степени)

Решение уравнений высоких порядков задача достаточно сложная!

Поэтому появилась необходимость судить об устойчивости системы без нахождения корней характеристического уравнения!

Решение уравнений высоких
порядков (показателя степени)

Критерий устойчивости –

**это правило, которое
позволяет анализировать
устойчивость системы без
нахождения корней
характеристического
уравнения системы!**

Анализ устойчивости САУ

Критерии устойчивости



алгебраические

частотные

Алгебраические критерии

1. Критерий Гурвица
2. Критерий Рауса
3. Критерий Лъенара-Шипара

Частотные критерии

1. Критерий Михайлова
2. Критерий Найквиста
3. Логарифмический критерий Найквиста-Михайлова

Критерий Гурвица (1895 г.)

Критерий позволяет судить об устойчивости по коэффициентам характеристического уравнения!

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Для этого из коэффициентов строят специальный определитель n-го порядка – главный определитель Гурвица.

Критерий Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

По главной диагонали слева направо располагают коэффициенты от a_1 до a_n , затем вверх записывают коэффициенты с возрастающими индексами, а вниз — с убывающими индексами.

Критерий Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Затем записывают вспомогательные определители низких порядков вдоль главной диагонали!

Критерий Гурвица

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Критерий Гурвица

Система автоматического управления устойчива, если все определители Гурвица по знаку совпадают с коэффициентом a_0 !!!

Если a_0 положителен, то и все определители должны быть положительными!

Критерий Гурвица

Пример вычисления определителя

Пусть имеется характеристическое уравнение:

$$2x^3 + 5x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$a_0 = 2 \quad a_1 = 5 \quad a_2 = -10 \quad a_3 = 8$$

Критерий Гурвица

Составим главный определитель
Гурвица:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Критерий Гурвица

Составим вспомогательные определители Гурвица:

$$\Delta_1 = 5$$

$$\Delta_2 =$$

5

8

2

-10

Критерий Гурвица

Вывод:

**Система автоматического
управления с характеристическим
уравнением**

$$2x^3 + 5x^2 - 10x + 8 = 0$$

УСТОЙЧИВА

НЕУСТОЙЧИВА

Критерий Лъенара-Шипара (1914 г.)

Система автоматического управления устойчива, если все *четные* или все *нечетные* определители Гурвица по положительны!!!

Этот критерий позволяет сократить количество вычислений в 2 раза!

Критерий Лъенара-Шипара

Определить устойчивость САУ, у которого следующее характеристическое уравнение:

$$2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 8x + 2 = 0$$

$$3x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

Критерий Михайлова (1936 г.)

Пусть имеется характеристическое уравнение САУ:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Михайлов заменил оператор дифференцирования на мнимую частоту, т.е. сделал замену:

$$p = j\omega$$

В итоге получилась комплексная функция $F(j\omega)$

Критерий Михайлова

$$F(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + \dots + a_n$$

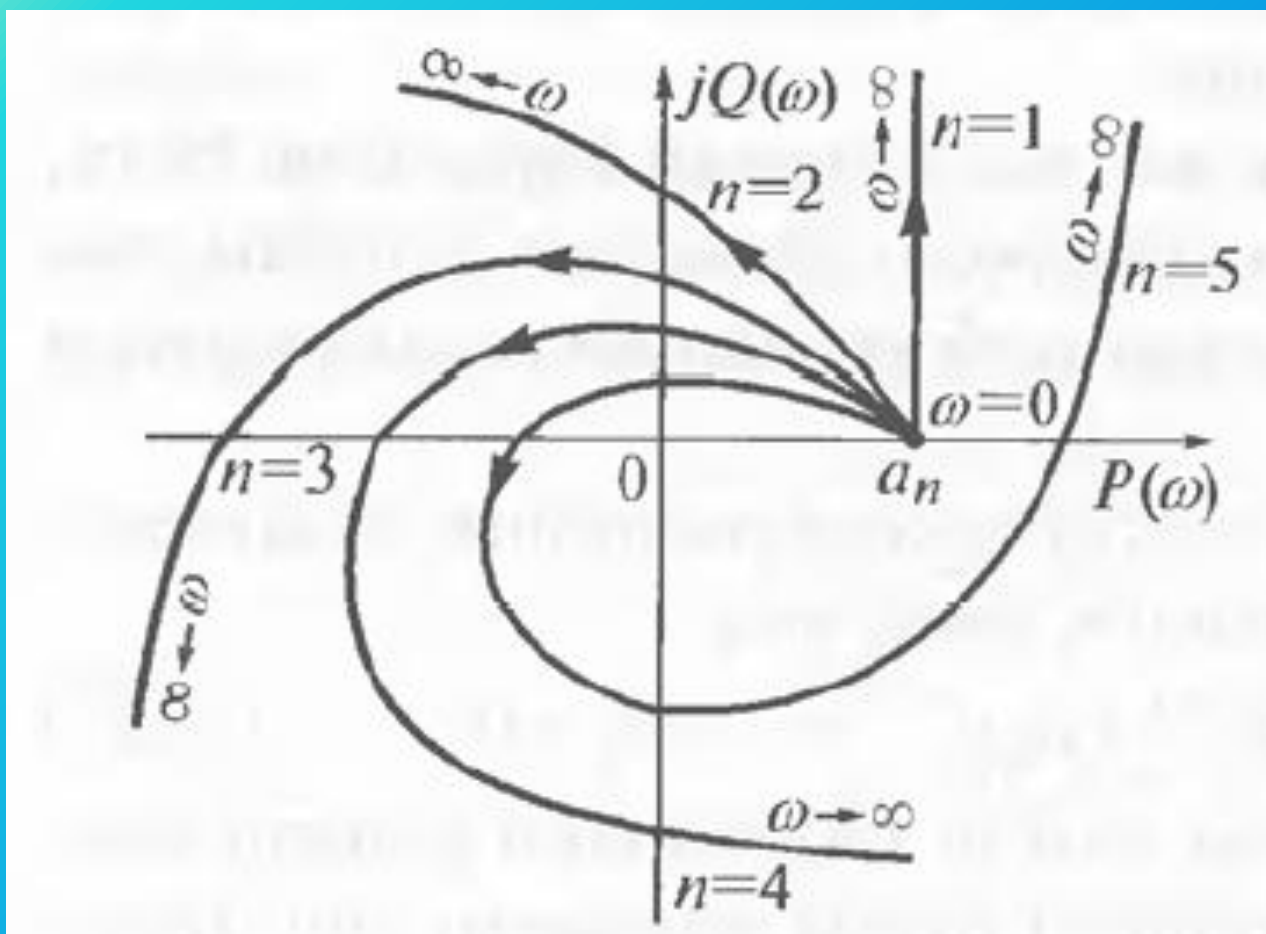
Её можно представить в виде суммы действительной и мнимой составляющих:

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Меняя частоту от 0 до ∞ на комплексной плоскости строится график – **ГОДОГРАФ** Михайлова

Критерий Михайлова

САУ устойчива если годограф Михайлова начинается на положительной полуоси и последовательно проходит n квадрантов!



Критерий Найквиста (1932 г)

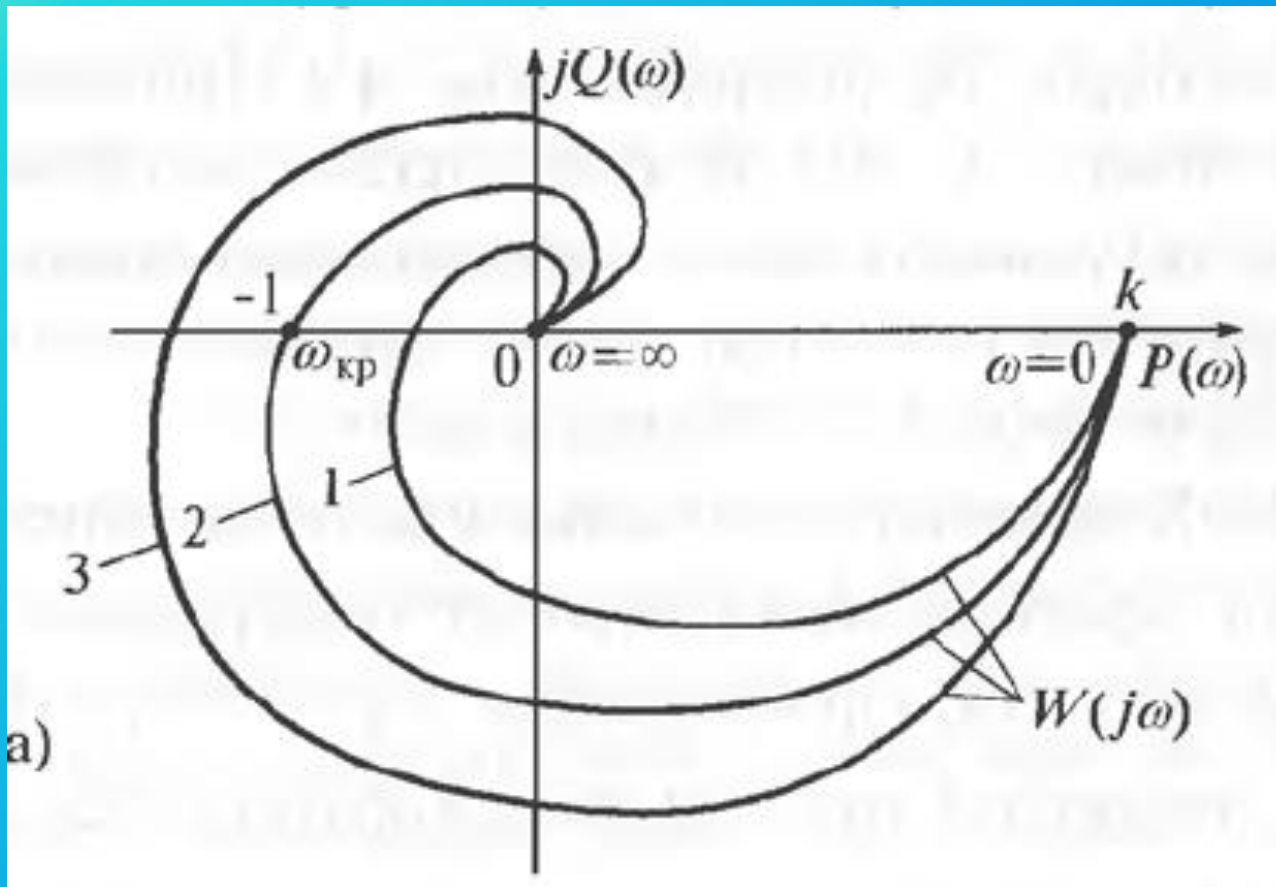
- 1. Позволяет судить об устойчивости замкнутой САУ по ее разомкнутой АФЧХ!**
- 2. Вместо нахождения характеристического уравнения используется передаточная функция!**
- 3. В передаточной функции САУ делается замена оператора на мнимую частоту.**

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

$$p = j\omega$$

Критерий Найквиста (1932 г)

Замкнутая САУ устойчива, если ее разомкнутая АФЧХ не охватывает точку критической (граничной) частоты $(-1, j0)!!$

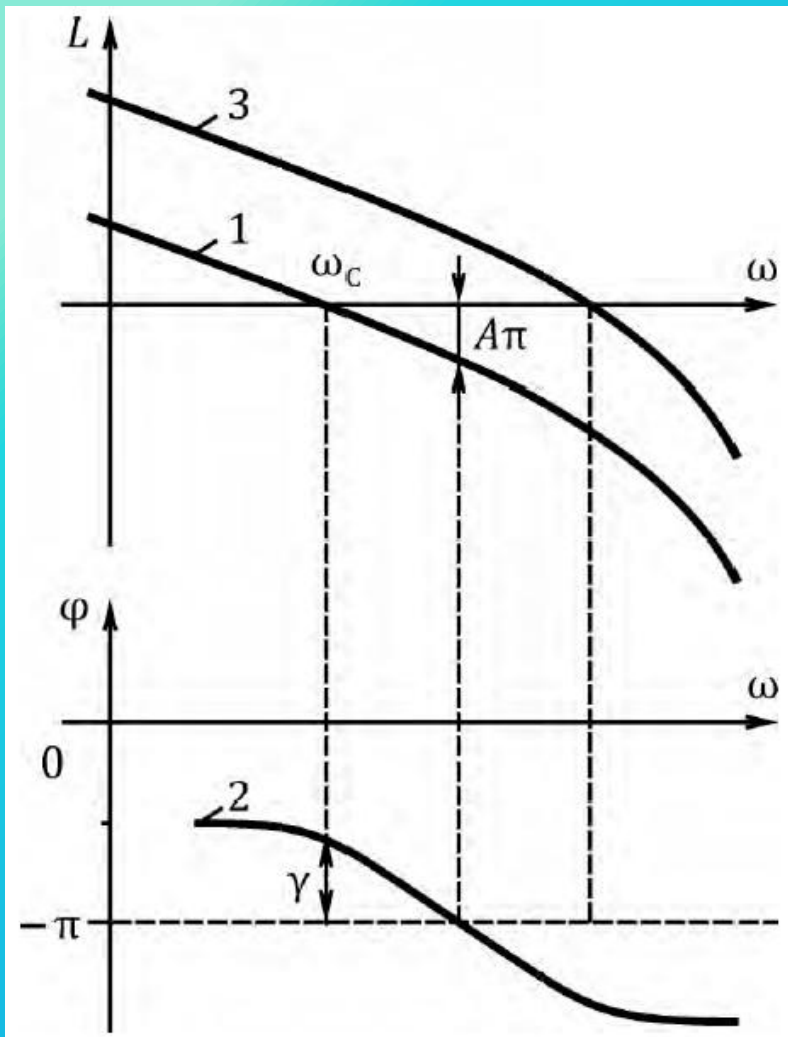


Логарифмический критерий Найквиста-Михайлова

Замкнутая САУ устойчива, если ее ЛФЧХ на частоте среза $\omega_{ср}$ проходит выше уровня 180° !

Частота среза $\omega_{ср}$ - это точка пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс (частот)

Логарифмический критерий Найквиста-Михайлова



γ – это запас по фазе!

$A\pi$ – это запас по амплитуде!

Логарифмический критерий Найквиста-Михайлова

В технических системах запас по фазе делают:

- 1. $0...30^\circ$ для колебательного процесса*
- 2. $30...60^\circ$ для апериодического процесса*
- 3. более 60° для монотонного процесса*

Примеры задач

Определить устойчивость САУ

5. Проверьте условия устойчивости системы, в которой звено прямого канала с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{10}{(1+p)(1+0,3p)}$$

охвачено отрицательной обратной связью с передаточной функцией

$$W_{oc}(p) = \frac{10}{1+0,2p}.$$

Примеры задач

Определить устойчивость САУ

$$p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1.$$



Южно-Уральский
государственный
университет

Национальный
исследовательский
университет

Спасибо за внимание!

канд. техн. наук Виноградов К.М.