МИНИСТЕРСТВОИ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт горного дела и строительства

Кафедра «Охрана труда и окружающей среды»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К КОНТРОЛЬНО-РАСЧЕТНОМУ ЗАДАНИЮ

по дисциплине

Теория принятия решений

Уровень профессионального образования: *(высшее образование – магистратура)*

Направление *(специальность)* подготовки: *20.04.01 Техносферная безопасность*

Профиль *(специализация)* подготовки: Производственная безопасность

Квалификация (степень) выпускника: магистр

Форма обучения: очно-заочная

Тула 2018 г.

Методические указания к контрольно-расчетному заданию составлены профессором Л.Э. Шейнкманом и обсуждены на заседании кафедры «Охрана труда и окружающей среды» Института горного дела и строительства

протокол № 1 от 30 августа 2018 г.

Зав. кафедрой_____В.М. Панарин

1. Цель и задачи контрольно-расчетного задания

Ознакомиться с **Методом анализа иерархий** для принятия решений в условиях определенности.

2. Общие понятия

Модели линейного программирования являются примером принятия решений в условиях определенности. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями. В этом разделе рассматривается иной подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественных показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как М**етод анализа иерархий**.

Рассмотрим пример, демонстрирующий способ, с помощью которого оцениваются различные альтернативные решения.

Пример. Выпускник средней школы, который получил приглашение от трех университетов: A, B и C. В целях выбора университета он сформулировал два основных критерия: местонахождение университета и его академическая репутация. Будучи отличным учеником, он оценивает академическую репутацию университета в пять раз выше, чем его местонахождение. Это приводит к тому, что репутации университета приписывается вес примерно 83 %, а его местонахождению – 17 % (5 к 1). Далее он использует системный анализ (сущность его излагается ниже) для оценки трех университетов с точки зрения их местонахождения и репутации. Проведенный анализ дает следующие оценки.

	Университет		
	A	B	C
Местонахождение	12,9 %	27,7 %	59,4 %
Репутация	54,5 %	27,3 %	18,2 %

Структура задачи принятия решений приведена на рис. 1. Задача имеет единственный иерархический уровень с двумя критериями (местонахождение и репутация) и три альтернативных решения (университеты A, B и C).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ. Сущность метода анализа иерархий заключается в определении относительных весовых коэффициентов для оценки альтернативных решений. Если имеется n критериев на заданном уровне иерархии, соответствующая процедура создает матрицу A размерности n x n, именуемую *матрицей парных сравнений,* которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев. Парное сравнение выполняется таким образом, что критерий в строке i ($i = 1, 2, ..., n$) оценивается относительно каждого из критериев, представленных n столбцами. Обозначим через a_{ij} элемент матрицы A, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца. В соответствии с методом

анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются целые числа от 1 до 9. При этом $a_{ij} = 1$ означает, что *i*-й и *j*-й критерии *одинаково важны,* a_{ij} - 5 отражает мнение, что *i*-и критерий *значительно важнее,* чем *j*-й, а $a_{ij} = 9$ указывает, что *i*-й критерий *чрезвычайно важнее* *j*-го. Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. Согласованность таких обозначений обеспечивается следующим условием: если $a_{ij} = k$, то автоматически $a_{ji} = 1/k$. Кроме того, все диагональные элементы a_{ii} матрицы А должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самих себя.

Покажем, как определяется матрица сравнения А для задачи выбора выпускником школы университета для обучения. Начнем с главного иерархического уровня, который имеет дело с критериями академической репутации университета и его местонахождения. С точки зрения выпускника академическая репутация университета *значительно важнее* его местонахождения. Следовательно, он приписывает элементу (1,2) матрицы А значение 5, т.е. $a_{12} = 5$. Это автоматически предполагает, что $a_{21} = 1/5$. Обозначив через *R* и *L* критерии репутации университета и его местонахождения, можно записать матрицу сравнения следующим образом:

$$A = \begin{array}{c|cc} & R & L \\ R & 1 & 5 \\ L & 1/5 & 1 \end{array}$$

Относительные веса критериев *R* и *L* могут быть определены путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Следовательно, для нормализации матрицы А делим элементы первого столбца на величину 6 (5+1). Искомые относительные веса w_R и w_L критериев вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы А. Следовательно,

		R	*L*	Средние значения элементов строк
N =	*R*	0.83	0.83	w_R=(0.83 + 0.83)/2 = 0.83,
	L	0.17	0.17	w_L =(0.17 + 0.17)/2 = 0.17.

В результате вычислений получили $w_R = 0.83$ и $w_L = 0.17$, т.е. те веса, которые показаны на рис. 1. Столбцы матрицы N одинаковы, что имеет место лишь в случае, когда лицо, принимающее решение, проявляет идеальную *согласованность* в определении элементов матрицы А.

Относительные веса альтернативных решений, соответствующих университетам А, В и С, вычисляются в пределах каждого критерия *R* и *L* с использованием следующих двух матриц сравнения

$$\mathbf{A_R} = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ A & 1 & 2 & 3 \\ B & 1/2 & 1 & 3/2 \\ C & 1`/3 & 2/3 & 1 \end{array}$$

Сумма элементов столбцов = [1.83, 3.67, 5.5],

$$\mathbf{A_L} = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ A & 1 & 1/2 & 1/5 \\ B & 2 & 1 & 1/2 \\ C & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

Сумма элементов столбцов = [8, 3.5, 1.7].

При делении элементов каждого столбца матриц $\mathbf{A_R}$ и $\mathbf{A_L}$ на сумму элементов этих же столбцов получаем нормализованные матрицы

$$\mathbf{N_R} = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ A & 0.545 & 0.545 & 0.545 \\ B & 0.273 & 0.273 & 0.273 \\ C & 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{array}$$

Средние значения элементов строк

$w_{RA} = (0.545 + 0.545 + 0.545)/ 3 = 0.545,$

$w_{RB} = (0.273 + 0.273 + 0.273)/3 = 0.273,$

$w_{RC} = (0.182 + 0.182 + 0.182)/3 = 0.182,$

$$\mathbf{N_L} = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ A & 0.125 & 0.143 & 0.118 \\ B & 0.250 & 0.286 & 0.294 \\ C & 0.625 & 0.571 & 0.588 \end{array}$$

Средние значения элементов строк матрицы N_L:

$W_{LA} = (0.125 + 0.143 + 0.118)/3 = 0.129,$

$W_{LB} = (0.250 + 0.286 + 0.294)/ 3 = 0.277,$

$W_{LC} = (0.625 + 0.571 + 0.588)/3 = 0.594.$

Величины $(W_{RA}, W_{RB}, W_{RC}) = (0.545, 0.273, 0.182)$ дают соответствующие веса для университетов A, B и C с точки зрения академической репутации. Аналогично величины $(w_{LA}, w_{LB}, w_{LC}) = (0.129, 0.277, 0.594)$ являются относительными весами, касающимися местонахождения университетов.

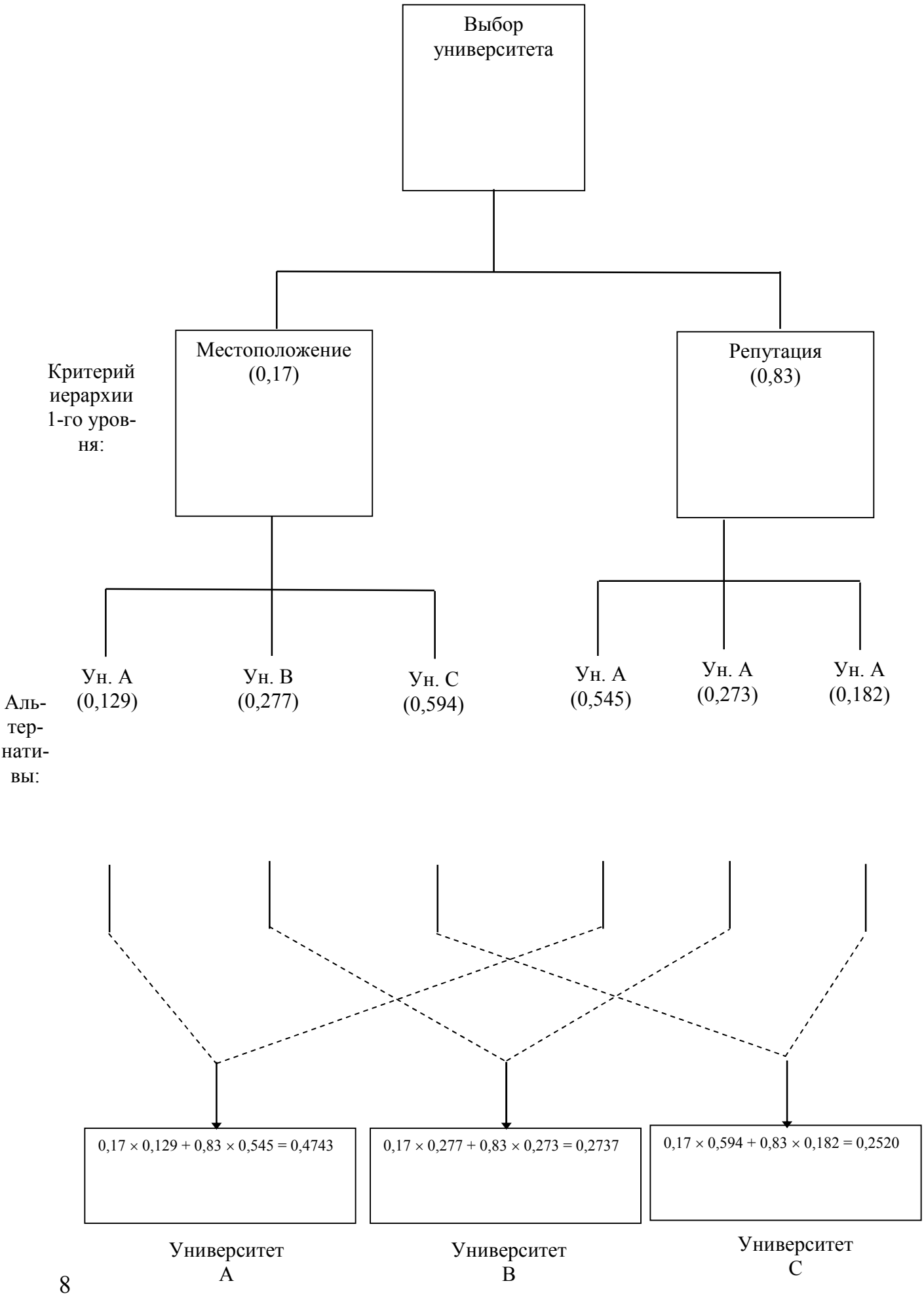

Выбор университета
Критерий иерархии 1-го уровня:
Местоположение (0,17)
Репутация (0,83)
Альтернативы:
Ун. А (0,129)
Ун. В (0,277)
Ун. С (0,594)
Ун. А (0,545)
Ун. А (0,273)
Ун. А (0,182)
0,17 × 0,129 + 0,83 × 0,545 = 0,4743
0,17 × 0,277 + 0,83 × 0,273 = 0,2737
0,17 × 0,594 + 0,83 × 0,182 = 0,2520
Университет А
Университет В
Университет С

Рис. 1

Оценка трех университетов основана на вычислении комбинированного весового коэффициента для каждого из них.

Университет А: 0,17 × 0,129 + 0,83 × 0,545 = **0,4743**.

Университет В: 0,17 × 0,277 + 0,83 × 0,273 = 0,2737.

Университет С: 0,17 × 0,594 + 0,83 × 0,182 = 0,2520.

На основе этих вычислений университет А получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором выпускника школы.

СОГЛАСОВАННОСТЬ МАТРИЦЫ СРАВНЕНИЙ.

В примере мы отмечали, что все столбцы нормализованных матриц N и N_R идентичны, а столбцы матрицы N_L таковыми не являются. Одинаковые столбцы указывают на то, что результирующие относительные веса сохраняют одно и то же значение независимо от того, как выполняется сравнение. В этом случае говорят, что исходные матрицы сравнения А и A_R являются *согласованными.* Следовательно, матрица A_L не является таковой.

Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения согласованность матрицы А означает, что $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ для всех *i, j и к.* Например, в матрице A_R из примера $a_{13} = 3$ и $a_{12}a_{23} = 2x3/2 = 3$. Свойство согласованности требует линейной зависимости столбцов (и строк) матрицы А. В частности, столбцы любой матрицы сравнений размерностью 2 x 2 являются зависимыми, и, следовательно, такая матрица всегда является согласованной. Не все матрицы сравнений являются согласованными. Действительно, принимая во внимание, что такие матрицы строятся на основе человеческих суждений, можно ожидать некоторую степень несогласованности, и к ней следует относиться терпимо при условии, что она не выходит за определенные "допустимые" рамки.

Чтобы выяснить, является ли уровень согласованности "допустимым", необходимо определить соответствующую количественную меру для матрицы сравнений А. В примере мы видели, что идеально согласованная

матрица А порождает нормализованную матрицу N, в которой все столбцы одинаковы.

В компактной форме условие согласованности матрицы А формулируется следующим образом. Матрица А будет согласованной тогда и только тогда, когда

$$Aw = nw,$$

где w — вектор-столбец относительных весов w_i, $i = 1,2,..., n$.

Когда матрица А не является согласованной, относительный вес w_i аппроксимируется средним значением n элементов i--й строки нормализованной матрицы N (см. пример) . Обозначив через $\bar{w}$ вычисленную оценку (среднее значение), можно показать, что

$$A\bar{w} = n_{max}\bar{w},$$

где $n_{max} \geq n$. В этом случае, чем ближе n_{max} к n, тем более согласованной является матрица сравнения А. В результате в соответствии с методом анализа иерархий вычисляется *коэффициент согласованности* в виде

$$CR=CI/RI,$$

где $CI= (n_{max}-n)/(n-1)$ — коэффициент согласованности матрицы А,

RI = 1.98 (n-2)/n - стохастический коэффициент согласованности матрицы А.

Стохастический коэффициент согласованности ***RI*** определяется эмпирическим путем как среднее значение коэффициента ***CI*** для большой выборки генерированных случайным образом матриц сравнения А.

Коэффициент согласованности ***CR*** используется для проверки согласованности матрицы сравнения А следующим образом. Если $CR \leq 0.1$, уровень несогласованности является приемлемым. В противном случае уровень несогласованности матрицы сравнения А является высоким и лицу, принимающему решение, рекомендуется проверить элементы парного сравнения a_{ij} матрицы А в целях получения более согласованной матрицы.

Значение n_{max} вычисляется на основе матричного уравнения $A\bar{w} = n_{max}\bar{w}$,

В примере матрица A_L является несогласованной, так как столбцы матрицы N_L неодинаковы. Требуется исследовать согласованность матрицы A_L.

Вычислим значение n_{max}. Из данных примера средние значения w_1= 0.129, w_2 = 0.277, w_3 = 0.594.

Следовательно,

$$\mathbf{A_L}\,\overline{w} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0.129 \\ 0.277 \\ 0.594 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.7930 \end{matrix}$$

Отсюда получаем

n_{max} = 0.3863 +0.8320 + 1.7930 = 3.0113.

Следовательно, для n = 3 имеем

CI= $(n_{max} - n) / (n-1) = (3.0113-3)/3 = 0.00565$,

RI = 1.98 (n-2)/n = (1.98 x 1)/3 = 0.66,

CR=CI/RI = 0.00565 / 0.66 = 0.00856.

Так как CR меньше 0.1, уровень несогласованности матрицы A_L является приемлемым.

3. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

Работа включает решение задачи по данным таблицы для соответствующего варианта.

3. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

Решив купить автомобиль, человек сузил свой выбор до трех моделей: *Ml, М2* и *М3.* Факторами, влияющими на его решение, являются: стоимость автомобиля (С), стоимость обслуживания (О), стоимость поездки по городу (Г) и сельской местности (М). Таблица содержит необходимые данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля.

Построить матрицы парных сравнений, используя указанные в таблице стоимости. Оцените согласованность матриц и определите модель автомобиля, которую следует выбрать в своем варианте задания.

Таблица

Вариант задания	**Модель автомобиля**	**Стоимость автомобиля (С)**	**Стоимость обслуживания (О)**	**Стоимость поездки по городу (Г)**	**Стоимость поездки по сельской местности (М)**
1	M1 M2 M3	6000 8000 10000	1800 1200 600	4500 2250 1125	1500 750 600
2	M1 M2 M3	8000 6000 10000	1800 1200 600	5500 5250 1125	2500 1750 600
3	M1 M2 M3	6000 9000 10000	1800 1500 600	4500 2050 2100	1500 1850 1600
4	M1 M2 M3	6000 10000 10000	1800 1200 1600	4500 2250 2125	1500 750 1600
5	M1 M2	8000 9000	1800 1200	3500 2250	1600 750

	M3	10000	1000	1200	600
6	M1 M2 M3	8000 8000 10000	2000 1900 1600	4500 2250 1125	1500 750 600
7	M1 M2 M3	6000 8000 10000	2000 2100 600	4500 2000 1125	1500 1750 1600
8	M1 M2 M3	6000 8000 10000	1800 1200 600	7500 5250 3125	1500 1750 1600
9	M1 M2 M3	6000 8000 9000	2200 1900 1600	4500 2000 1125	1500 950 800
10	M1 M2 M3	6000 9000 10000	1800 1100 600	4500 2300 1200	2500 1000 800