



МАТЕМАТИКА

**Методические указания по выполнению контрольных работ
для бакалавров технического профиля заочной формы
обучения**



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Иркутского государственного технического университета

2012



Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Иркутского государственного технического университета

Математика : метод. указ. по выполнению контрольных работ для бакалавров технического профиля заочной формы обучения / сост. : Л.Г. Белякова, Е.А. Лукьянова, А.П. Миронов, Л.С. Сергиенко. – Иркутск : Изд-во ИрГТУ, 2012. – 60 с.

Методические указания соответствуют требованиям ФГОС по направлениям: 140400 «Электроэнергетика и электротехника» (ЭЭбз), 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника» (ТЭбз), 270800 «Строительство» (СОбз), 240100 «Химическая технология» (ХТбз), 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение», 150700 «Машиностроение» (МТбз), 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы» (НКбз), 162300 «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей» (ЭЛбз), 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» (ЭТбз), 190700 «Технология транспортных процессов» (ТТбз), 131000 «Нефтегазовое дело» (НДбз), 260100 «Продукты питания из растительного сырья» (ТПбз), 150400 «Металлургия» (МЦбз), 220700 «Автоматизация технологических процессов и производств» (АТбз), 230100 «Информатика и вычислительная техника» (ИТбз).

Предлагаются задания контрольных работ по математике и подробные рекомендации по их выполнению.

Могут быть использованы студентами первого курса заочной формы обучения, изучающими дисциплину «Математика» по программе подготовки бакалавров.

Рецензент канд. техн. наук, доцент кафедры математики ИрГТУ *И.А. Огнёв*

Оглавление

Общие указания по самостоятельной работе	
Правила оформления и защиты контрольных работ	
Основная литература	5
Дополнительная литература	5
Электронные пособия	5
Контрольные вопросы и задания	6
Контрольные работы	7
Контрольная работа 1	7
Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	7
Введение в математический анализ	10
Дифференциальное исчисление функции одной переменной	13
Контрольная работа 2	17
Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	17
Интегральное исчисление функции одной переменной	18
Рекомендации по выполнению контрольных работ	24
Контрольная работа 1	24
Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	24
Введение в математический анализ	41
Дифференциальное исчисление функции одной переменной	45
Контрольная работа 2	50
Функции нескольких переменных	50
Интегральное исчисление функции одной переменной	51
Приложения определённого интеграла в геометрии	55

Общие указания по самостоятельной работе

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа. Изучение высшей математики основано на материалах, предоставляемых на лекциях и практических занятиях, проводимых во время сессий. Дополнительные сведения студент может почерпнуть из учебной и специальной литературы, соответствующих WEB-страниц в сети Интернет и из других информационных источников.

Подробные рекомендации по организации самостоятельной работы студенту даются во время сессий на установочных и обзорных лекциях и практических занятиях, а также на индивидуальных консультациях, регулярно проводимых в учебном заведении в течение всего учебного года, и дистанционно – по интернету, на сайтах ЗВФ НИ ИрГТУ и/или по электронной переписке с преподавателем.

Итоговой формой отчёта о самостоятельной работе студента в соответствии с рабочим планом по математике для первого курса является выполнение двух контрольных работ из данного методического пособия, которые должны быть сданы на проверку преподавателю до начала или во время экзаменационной сессии.

Правила оформления и защиты контрольных работ

Перед началом сессии в соответствии с учебной программой по математике студентам первого курса необходимо выполнить две контрольные работы. Задания выбираются по индивидуальному варианту, номер которого равен $(10 - n)$, если фамилия студента начинается с буквы из первой части алфавита (от А до Л), или $(20 - n)$, если фамилия начинается с буквы из второй части алфавита (от М до Я), где n – последняя цифра номера зачётной книжки студента.

На титульном листе работы указываются ФИО, название дисциплины, номер контрольной работы, шифр специальности (группа), номер зачётной книжки, в конце ставится личная роспись студента. Работа должна оформляться в рукописном варианте, решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, при этом сохраняя номера задач. Условие задания необходимо переписывать полностью, решение описывать подробно и ясно, сопровождая его при необходимости таблицами и рисунками, оставляя поля и пробелы после каждой задачи для замечаний рецензента.

После успешной защиты самостоятельно решённых и правильно оформленных контрольных заданий студент допускается к сдаче текущего зачёта или

экзамена. Если он не смог получить положительную оценку своих знаний, то должен заново представить контрольные работы во время следующей сессии. Сдача другому преподавателю, не принимавшему зачёт или экзамен, производится только при наличии разрешения заведующего кафедрой ООД или администрации деканата, заверенного подписью ответственного лица на индивидуальном экзаменационном листке, полученном у специалиста по УМР.

Основная литература

1. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П.Е. Данко [и др.]. – М. : Высш. шк., 2008. – Ч. 1. – 368 с.
2. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. – Минск : Высш. шк., 2009 – Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко. – 4-е изд. – 303 с.
3. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М. : Айрис-Пресс, 2009. – 602 с.
4. Курс высшей математики : учеб. для вузов / В.С. Щипачёв; под ред. А.Н. Тихонова. – 3-е изд. – М. : ОНИКС, 2007. – 599 с.
5. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие для вузов / В.П. Минорский. – 15-е изд. – М. : Изд-во физ.-мат. лит., 2010. – 336 с.

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ : конспект лекций за 1-й семестр для технических специальностей / ИрГТУ; сост. : В.А. Трупшова, Б.В. Агалаков. – Иркутск : Изд-во ИрГТУ, 2010. – 92 с.
2. Практические занятия по высшей математике. 1 курс : учеб. пособие для студентов инж. и экон. специальностей / под ред. В.Г. Власова. – Иркутск : Изд-во ИрГТУ, 2008. – 172 с.
3. Справочник для студентов технических вузов : высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов / А.Д. Полянин [и др.]. – 3-е изд. – М. : АСТ : Астрель, 2008. – 735 с.

Электронные пособия

1. Контент по математике кафедры общеобразовательных дисциплин (ООД) заочно-вечернего факультета (ЗВФ) НИ Ир ГТУ. – Режим доступа : e-mail: ood@istu.edu.
2. Сайт Гос. публ. науч.-техн. библ. (ГПНТБ), открытый в режиме онлайн в научно-технической библиотеке НИ ИрГТ. – Режим доступа : [http:// www.gpntb.ru](http://www.gpntb.ru).
3. Сайт кафедры математики НИ Ир ГТУ. – Режим доступа : [http:// www.mathtest.ru](http://www.mathtest.ru).

Контрольные вопросы и задания

1. Вычисление определителей 2-го, 3-го, 4-го порядков.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методами Гаусса и Крамера.
3. Определение вектора и его координат в декартовой системе.
4. Постройте вектор $\overline{NM} = (1; -2; 3)$, если $M(1; 1; 1)$.
5. Какие векторы называются равными, свободными, связанными, коллинеарными, компланарными и как связаны их декартовы координаты?
6. Выведите формулы для вычисления длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой прямоугольной системе координат.
7. Что называется направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости?
8. Какой геометрический смысл в декартовой системе координат имеет угловой коэффициент прямой на плоскости?
9. Поясните геометрический смысл неравенства первой степени с двумя и тремя переменными.
10. Постройте точку $N(1; 2; 3)$ в декартовой системе координат и точку $M(2; 3)$ в полярной системе координат.
11. Запишите каноническое уравнение и постройте окружность $3x^2 - 12x + 3y^2 = 0$ в полярной системе координат.
12. Охарактеризуйте три различные формы записи комплексных чисел.
13. Выведите формулы дифференцирования $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arcctg} x$.
14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
15. Когда формула Тейлора называется формулой Маклорена, и какой вид она принимает в этом случае?
16. Напишите формулы Маклорена для функций $\sin x$, $\cos x$.
17. Изложите схему общего исследования функции и построения её графика.
18. Укажите геометрический смысл совокупности первообразных функций.
19. Что называется неопределённым интегралом?
20. Напишите таблицу основных интегралов.
21. Выведите формулу интегрирования по частям.
22. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей.
23. В чем состоит идея рационализации при интегрировании иррациональных функций?
24. Поясните геометрический смысл определённого интеграла.
25. Какие физические приложения имеет определённый интеграл?

Контрольные работы

Контрольная работа 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задача 1. Данную систему линейных уравнений решить двумя способами: методом Крамера и методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ 5x - y - z = 10 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + y - 2z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - y + 2z = 13 \\ 2x + y - z = 0 \\ 5x + 3y + 7z = 28 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ 7x + z = 22 \\ -x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + 2y + 5z = 10 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x - y + 4z = 7 \\ 7x + 3y - z = 3 \\ 5x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = 12 \\ 4x + 3y - 3z = 9 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + 3y - 4z = 5 \\ 2x - 3y + 6z = 11 \\ 8x + 3y + 10z = 21 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y + 3z = 7 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ 7x - y + z = 17 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 7x + 7y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 13x + 2y + z = 13 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 3x + 2y - 4z = 15 \\ 4x + 3y + 7z = 19 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ 5x + 4y - 7z = 15 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x + 4y - 3z = -7 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Задача 2. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения её с прямой $Ax + By + C = 0$. Построить графики прямой и кривой.

$f(x, y) = 0$	$Ax + By + C = 0$
1. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$	$3x + y - 3 = 0$
2. $x + 2y^2 + 4y + 1 = 0$	$x + 2y + 1 = 0$
3. $2x^2 + 4x + y^2 - 2 = 0$	$2x + y + 2 = 0$
4. $x^2 + 2y^2 - 12y + 10 = 0$	$x + y - 3 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$	$2x + y - 6 = 0$
6. $y^2 + x + 4y + 3 = 0$	$x + 2y + 2 = 0$
7. $x^2 + 2y^2 + 8y + 4 = 0$	$5y + 4 = 0$
8. $x^2 + 4x + y + 3 = 0$	$x - y + 3 = 0$
9. $x^2 - 2x + y - 3 = 0$	$3x - y - 2 = 0$
10. $x^2 + 2x + y - 2 = 0$	$2x - y + 4 = 0$
11. $y^2 + x - 4y + 6 = 0$	$3x + 10 = 0$
12. $2x^2 + y^2 - 12x + 10 = 0$	$x + y - 2 = 0$
13. $2x^2 - 4x - y + 3 = 0$	$2x - y - 1 = 0$
14. $x - 2y^2 + 4y - 3 = 0$	$x - 2y + 1 = 0$
15. $x^2 - 2x - y + 2 = 0$	$x - y = 0$
16. $x - y^2 + 2y - 2 = 0$	$x + y - 2 = 0$
17. $x^2 - 2x + y + 2 = 0$	$x - y = 0$
18. $y^2 - 2y + 3 = 0$	$x + y + 1 = 0$
19. $2x^2 + 8x + y + 7 = 0$	$2x + y + 3 = 0$
20. $x + 2y^2 - 4y + 4 = 0$	$x - 2y + 4 = 0$

Задача 3. В полярной системе координат построить кривую, заданную уравнением в декартовых координатах.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2xy}$ | 11. $y^6 = (x^2 + y^2)(3y^2 - x^2)$ |
| 2. $(x^2 + y^2)^2 = 2(4x^2 + y^2)$ | 12. $x^6 = (x^2 + y^2)(3x^2 - y^2)$ |

- | | |
|--|--|
| 3. $(x^2 + y^2)^3 = 2x^2y^2$ | 13. $y^4 = y^2 - 3x^2$ |
| 4. $(x^2 + y^2)^2 = 2(3x^2 + 2y^2)$ | 14. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2(3x^2 - y^2)$ |
| 5. $(x^2 + y^2)^3 = 2x^2(4x^2 + 3y^2)$ | 15. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ |
| 6. $x^4 = 6(3x^2 - y^2)$ | 16. $(x^2 + y^2)^3 = 4y^2(3x^2 - y^2)$ |
| 7. $x^6 = 4(x^4 - y^4)$ | 17. $(x^2 + y^2)^2 = 4(3x^2 - y^2)$ |
| 8. $x^4 = 2(x^2 - 3y^2)$ | 18. $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$ |
| 9. $y^6 = 6(y^4 - x^4)$ | 19. $(x^2 + y^2)^3 = 4(x^4 + y^4)$ |
| 10. $(x^2 + y^2)^2 = 2(2x^2 + 3y^2)$ | 20. $y^4 = 3y^2 - x^2$ |

Задача 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Найти: 1) длину ребра A_1A_2 ; 2) уравнение прямой A_1A_2 ; 3) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4 ; 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 5) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 6) площадь грани $A_1A_2A_3$; 7) объём пирамиды. Сделать чертёж.

1. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;2), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0);$
2. $A_1(4;4;10), A_2(4;10;2), A_3(0;8;4), A_4(9;6;4);$
3. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9);$
4. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8);$
5. $A_1(10;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3);$
6. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9);$
7. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3);$
8. $A_1(7;2;2), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(2;3;7);$
9. $A_1(8;6;4), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(10;8;7);$
10. $A_1(7;7;3), A_2(6;5;8), A_3(3;5;8), A_4(8;4;1);$
11. $A_1(1;2;5), A_2(0;7;3), A_3(0;2;4), A_4(1;6;0);$
12. $A_1(4;1;10), A_2(4;10;3), A_3(0;8;1), A_4(9;6;3);$
13. $A_1(4;6;6), A_2(6;9;1), A_3(3;10;10), A_4(7;6;9);$
14. $A_1(5;5;4), A_2(8;9;4), A_3(5;10;1), A_4(1;7;8);$
15. $A_1(15;6;6), A_2(-2;8;3), A_3(6;8;9), A_4(7;10;9);$
16. $A_1(4;8;2), A_2(6;2;6), A_3(6;7;4), A_4(1;10;9);$
17. $A_1(6;6;3), A_2(1;9;5), A_3(1;6;11), A_4(6;9;8);$

18. $A_1(7;3;2), A_2(5;9;7), A_3(6;3;1), A_4(2;3;9);$
 19. $A_1(8;6;1), A_2(10;5;6), A_3(6;6;8), A_4(10;8;9);$
 20. $A_1(7;7;8), A_2(6;6;8), A_3(8;5;8), A_4(8;1;1).$

Задача 5. Дано комплексное число z . Представить z в алгебраической, тригонометрической и показательной форме записи.

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $z = 2\sqrt{2}/(1+i)$ | 11. $z = 4/(-1+i\sqrt{3})$ |
| 2. $z = 1/(\sqrt{3}-i)$ | 12. $z = 2i/(\sqrt{3}+i)$ |
| 3. $z = 2\sqrt{2}/(1-i)$ | 13. $z = 4/(1-i\sqrt{3})$ |
| 4. $z = 1/(\sqrt{3}+i)$ | 14. $z = -i/(\sqrt{3}-i)$ |
| 5. $z = 2\sqrt{2}/(-1-i)$ | 15. $z = 4/(-1-i\sqrt{3})$ |
| 6. $z = 1/(-\sqrt{3}-i)$ | 16. $z = 3i/(-\sqrt{3}+i)$ |
| 7. $z = 2\sqrt{2}/(-1+i)$ | 17. $z = i\sqrt{2}/(1+i)$ |
| 8. $z = 1/(-\sqrt{3}+i)$ | 18. $z = 4i/(1+i\sqrt{3})$ |
| 9. $z = 4/(1+i\sqrt{3})$ | 19. $z = i\sqrt{2}/(1-i)$ |
| 10. $z = i\sqrt{2}/(-1+i)$ | 20. $z = 4i/(-1+i)$ |

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Задача 6. Найти пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

1. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x};$ 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x + 3}; x_0 = -1, x_0 = 2.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x};$ 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x};$ 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x;$
2. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^3 + 4x - 5};$ 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}; x_0 = 5, x_0 = -2;$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7};$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\ln(1+2x)};$ 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x;$
3. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + x^2 - 8}{6x^3 - x + 2};$ 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}; x_0 = 1, x_0 = 2.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1};$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{5x};$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}};$

4. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+1}{2x^3-4x+2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$; $x_0 = -2, x_0 = 1$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 4x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-2} \right)^x$;
5. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+5x^2-3}{5x^4-2x^3-4x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2-7x+3}{x^2-4x+3}$; $x_0 = 3, x_0 = -2$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\ln(1+8x)}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{2}{x}}$;
6. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x-5x^4}{x^4+12x-3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2-7x-4}{x^2-3x-4}$; $x_0 = 4, x_0 = 0$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^3-8}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{2x}$;
7. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{2+2x^2-x^4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2-13x+20}{x^2-6x+8}$; $x_0 = 4, x_0 = -2$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+2x^2}{\arcsin^2 x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x$;
8. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+1}{x-5+3x^3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$; $x_0 = 5, x_0 = 2$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\ln(1+x^2)}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{1}{3x-3}}$;
9. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4-2x^3+2x}{x^4+3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3+3x+1}{x^2-2x-3}$; $x_0 = -1, x_0 = 2$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\operatorname{tg} 5x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{2}{x-2}}$;
10. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2-5}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2+5x+3}{x^2-x-2}$; $x_0 = -1, x_0 = 3$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{x^2-6x+5}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$;

11. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-4x}{5x-2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2+x-10}{x^2-5x+6}$; $x_0=2, x_0=-2$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\arctg(x-4)}{x^2-3x-4}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-2} \right)^x$;
12. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3+4}{3x^3-2x+6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3-13x+20}{x^2-2x-8}$; $x_0=4, x_0=1$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-49}$; 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arccos 3x}{6x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^x$;
13. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+x^2-6}{4x+3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2-7x+3}{x^2+4x-21}$; $x_0=3, x_0=-2$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^{2x}$;
14. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6-2x^4+x}{x-2x^6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2+10x+21}{2x^2+5x-3}$; $x_0=-3, x_0=2$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4x}{\sqrt{1+4x}-1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{14x}{\arctg 2x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$;
15. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-2x^3-x}{x-8x^2-5x^4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2+x-10}{x^2-5x+6}$; $x_0=2, x_0=3$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-4} \right)^{3x}$;
16. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-3x+1}{3x^2+5x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$; $x_0=3, x_0=-1$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{2x^2-2x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arctg 5x^2}{\ln(1+x^3)}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} (7-3x)^{\frac{4}{x-2}}$;
17. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-2x^2}{3x-2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2+2x-8}{2x^2+7x-4}$; $x_0=-4, x_0=1$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$; 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arcsin 2x}{x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 4} (9-2x)^{\frac{3}{4-x}}$;

18. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 - 3}{1 - 3x^3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 8x + 15}{2x^2 + 5x - 3}$; $x_0 = -3, x_0 = 2$.
 3) $\lim_{y \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2y-1} - \sqrt{5}}{y-3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\arcsin(x-5)}{x^2 - 7x + 10}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$;
 19. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + x - 2}{3x^3 + 2x - 3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - x - 1}$; $x_0 = 1, x_0 = -1$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2}{2-x}}$;
 20. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 - 3x^3 + 1}{2x^5 - 4x^6 + 3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$; $x_0 = 2, x_0 = -3$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2x} - 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{\ln(1-3x)}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 7. Найти производные первого порядка данных функций, используя правила дифференцирования.

1. а) $y = e^{\operatorname{arctg} \frac{x}{3}}$, з) $y = \frac{4 \sin^3 7x}{\cos 5x}$,
 б) $y = \frac{9}{3\sqrt[3]{x^5}}$, д) $y = x^{\operatorname{tg} 3x}$.
 в) $y = \sin^3 \frac{x}{4} \cdot \operatorname{tg} 5x$;
 2. а) $y = 10x^7 + 5 \operatorname{arccos} 3x$, з) $y = \frac{2\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x^3+2x-4}}$,
 б) $y = \frac{5 \ln 6x}{\sqrt[3]{x}}$, д) $y = x^{\cos 2x}$.
 в) $y = e^{8x} \cdot \operatorname{ctg} 10x$,
 3. а) $y = \frac{2}{\sqrt{2x+5}} + \operatorname{ctg} 3x$, з) $y = \frac{e^{4x}}{\operatorname{arccos} 5x}$,
 б) $y = \sqrt{x + \frac{6}{x^2}} - \sqrt[3]{x^4}$, д) $y = (\sin 4x)^x$.
 в) $y = \ln 4x \cdot \cos^4 6x$,

4. а) $y = \cos \ln(1 - x^3)$, з) $y = \frac{5 \arcsin 2x}{(5x^2 + 6)^3}$,
 б) $y = \frac{7}{5\sqrt[5]{x^2}}$, д) $y = (tg 3x)^{3x}$,
 в) $y = tg^4 5x \cdot \sin \frac{2x}{5}$,
5. а) $y = ctg e^{7x} + \sqrt[3]{2x} - \frac{3}{x}$, з) $y = \frac{5 \operatorname{arctg} 2x}{5x^2 + 1}$,
 б) $y = \frac{6}{4\sqrt[4]{x^3}}$, д) $y = (3x + 5)^{x^3}$,
 в) $y = 5 \cos^3 \frac{4x}{3} \cdot \ln(7x + 2)$,
6. а) $y = \arcsin \sqrt[3]{(4 - 5x^3)}$, з) $y = \frac{4x^2 + 8}{5 \cos^6 3x}$,
 б) $y = \frac{6}{7\sqrt[5]{x^3}} + \cos \frac{\pi}{4}$, д) $y = (4 \sin 6x)^{5x}$,
 в) $y = ctg \frac{x}{4} \cdot \sin^3 7x$,
7. а) $y = e^{\arcsin(2x+6)}$, з) $y = \frac{\sqrt{6x+4}}{(2x^5 - 1)^2}$,
 б) $y = \frac{5}{\sqrt[7]{(3x^2 + 8)}} - ctg \frac{\pi}{4}$, д) $y = (5 \sin 4x)^{\ln 5x}$,
 в) $y = \ln^4 \frac{x}{5} \cdot (4^x + \frac{6}{x^3})$,
8. а) $y = 6\sqrt[3]{x^2} - 7tgx$, з) $y = \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{4x + 2}}$,
 б) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \cdot \cos x^3$, д) $y = (x + 3)^{\ln 7x}$,
 в) $y = 4 \ln \sqrt{5x + 4}$,
9. а) $y = 10x^3 + 2 \cos 4x$, з) $y = \frac{\ln 5x}{\arcsin 2x}$,
 б) $y = \sqrt{3x^2 + 5x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$, д) $y = (\sin 4x)^{9x^2}$,
 в) $y = \sin 4x \cdot tg^4 6x$,

10. a) $y = 5\sqrt[5]{x} - 7\operatorname{arctg} x^3$,
 б) $y = \cos x^5 + \frac{6}{x^2} - \sin \frac{\pi}{6}$
 в) $y = \cos 5x \cdot (x^3 + 5)$,
 г) $y = \frac{5x + 4}{\cos^3 2x}$,
 д) $y = (\sin 4x)^{\frac{3}{x}}$.
11. a) $y = 4\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg} x^4$,
 б) $y = \cos^{-1}(2x + 4)$,
 в) $y = x^5 \cdot e^{(4\cos 5x + 1)}$,
 г) $y = \frac{4x^2 - 5}{\sin^3(3x - 1)}$,
 д) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{(4x+1)}$.
12. a) $y = 9x^3 - 5\operatorname{arcsin} 3x$,
 б) $y = \frac{6}{x^3} - \sqrt[7]{x^2} + \sin \frac{\pi}{6}$,
 в) $y = 5\cos^4 3x \cdot \ln(6x + 4)$,
 г) $y = \frac{\sqrt[3]{4x+5}}{e^{7x}}$,
 д) $y = (x + 4)^{\sin 5x}$.
13. a) $y = 3\sqrt[5]{3x+5} - 5/x^8$,
 б) $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{4x} - \frac{x}{5} + 4x$,
 в) $y = \sin^3(3x + 4) \cdot \sqrt{4x + 5}$,
 г) $y = \frac{ctg(7x + 2)}{(4x - 5)^2}$,
 д) $y = (\sin 6x)^{\frac{4}{x}}$.
14. a) $y = 4x^4 + \sqrt{4x - 9} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$,
 б) $y = ctg 7x + 5^{2x} - x/5$,
 в) $y = x^7 \cdot \cos^3 6x$,
 г) $y = \frac{(5x + 1)^4}{\operatorname{arcsin} 8x}$,
 д) $y = (5x + 2)e^{7x}$.
15. a) $y = 5x^4 + \sin x^3 - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$,
 б) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \sqrt{\frac{5}{x^2}}$,
 в) $y = \cos^5 6x \cdot (5x + 1)^5$,
 г) $y = \frac{\sin x^3}{(2x - 7)}$,
 д) $y = (\sin 9x)^{x^3}$.
16. a) $y = \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}} + \sqrt{x^3} - \sin \frac{\pi}{6}$,
 б) $y = \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{\cos 3x}{4}} - e^{6x}$,
 в) $y = e^{\frac{x}{5}} \cdot \sqrt{\ln(2x + 1)}$,
 г) $y = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{6^{4x}}$,
 д) $y = (5x + 4)^{\ln 9x}$.

17. а) $y = \ln(x - \cos 4x) - \frac{7}{x^2}$, з) $y = \frac{\sin 8x}{5x + 2}$,
 б) $y = \arcsin^5 \frac{5x}{4} + \frac{5}{\sqrt{x^3}}$, д) $y = (7x)^{\cos 4x}$,
 е) $y = \frac{5}{4x} \cdot \cos^3(4x^2 + 2)$,
 18. а) $y = \sin \ln(x^3 + 1) + \frac{6}{\sqrt{x^5}} - 6$, з) $y = \frac{\arcsin 4x}{\cos^5 2x}$,
 б) $y = \frac{\cos 5x}{3} + e^{4x} - \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^2}}$, д) $y = (\ln 9x)^{5x}$,
 е) $y = (x^3 + 5)^2 \cdot \sin(3x + 1)$,
 19. а) $y = \ln(6 - \cos^5 2x) + \ln 3$, з) $y = \frac{3x + 2}{\operatorname{tg} 6x}$,
 б) $y = \frac{6}{\sqrt[3]{x^5}} + 5^{2x} - \arcsin 5x$, д) $y = (\arctg 7x)^{(x+7)}$,
 е) $y = (2e^{4x} + 6)^5 \cdot \sin^4 5x$,
 20. а) $y = \arcsin(4x^3 + 5) + \frac{x}{3}$, з) $y = \frac{e^{5x+1}}{\arcsin 9x}$,
 б) $y = 5\cos(\ln(3x + 1))$, д) $y = (\sin 6x)^{6x^2}$,
 е) $y = (8x^3 + \frac{1}{x})^4 \cdot \operatorname{tg} 7x$,

Задача 8. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ параметрически заданной функции.

- | | |
|---|--|
| 1. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2\sec^2 t \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x = 7(t - \sin t) \\ y = 7(1 - \cos t) \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ | 13. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$ |
| 4. $\begin{cases} x = 7\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ |

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 6. | $\begin{cases} x = \sqrt{1 - \sin t^2} \\ y = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$ | 16. | $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$ |
| 7. | $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$ | 17. | $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 4(2 + \cos t) \end{cases}$ |
| 8. | $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases}$ | 18. | $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$ |
| 9. | $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$ | 19. | $\begin{cases} x = \sqrt{t-3} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$ |
| 10. | $\begin{cases} x = 5(\cos t + t \sin t), \\ y = 5(\sin t - t \cos t), \end{cases}$ | 20. | $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ |

Контрольная работа 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача 9. Дана функция $z = f(x, y)$. Найти частные производные первого и второго порядка $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yx}, f''_{yy}$.

- | | | | |
|-----|-------------------------------|-----|---------------------------------|
| 1. | $z = \ln(2x - 3y)$ | 11. | $z = \ln(4xy + 3)$ |
| 2. | $z = e^{2x^2 + y^2}$ | 12. | $z = e^{x^2 y^2}$ |
| 3. | $z = \cos(2xy)$ | 13. | $z = \sin(x^2 y)$ |
| 4. | $z = x^2 e^{3y}$ | 14. | $z = y^3 e^{4x}$ |
| 5. | $z = y^{3x}$ | 15. | $z = x^{2y}$ |
| 6. | $z = \frac{\cos y^2}{x}$ | 16. | $z = \frac{\sin x^3}{y^2}$ |
| 7. | $z = \frac{e^y}{x+1}$ | 17. | $z = \frac{e^{2x}}{y-3}$ |
| 8. | $z = \frac{\ln x}{y^3}$ | 18. | $z = \frac{y+1}{\ln x}$ |
| 9. | $z = e^{5x}(y^2 + 7)$ | 19. | $z = \frac{e^{5x}}{y+1}$ |
| 10. | $z = \operatorname{tg}(xy^2)$ | 20. | $z = \operatorname{ctg}(x^2 y)$ |

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 10. Найти неопределённый интеграл. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1. а) $\int \frac{5x}{4x^2 + 2} dx$, б) $\int \cos 3x dx$, в) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 5}} dx$,
 г) $\int (3x + 2) \sin 2x dx$, д) $\int \frac{(x + 4) dx}{x^2 - 4x - 12}$.
2. а) $\int \frac{dx}{\sin \frac{2x}{5}}$, б) $\int \operatorname{tg}(5x + 2) dx$, в) $\int (4x^2 + 7)^{10} 2x dx$,
 г) $\int x \ln 5x dx$, д) $\int \frac{(x + 3) dx}{x^3 + x^2 - 2x}$.
3. а) $\int \frac{x^2}{7 + 3x^3} dx$, б) $\int \frac{4x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, в) $\int (1 - 4x)^4 dx$,
 г) $\int x \cos 2x dx$, д) $\int \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$.
4. а) $\int \sin(2 - 3x) dx$, б) $\int \frac{dx}{(4x - 2)}$, в) $\int \sqrt[5]{(3x - 2)} dx$,
 г) $\int (5x + 1) e^{4x} dx$, д) $\int \frac{12 dx}{(x - 2)(x^2 - 2x - 3)}$.
5. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 - 4x)^5}}$, б) $\int \frac{dx}{5x^2 + 4}$, в) $\int \sin^3 4x \cos 4x dx$,
 г) $\int (x^2 + x) e^{-2x} dx$, д) $\int \frac{43x - 67}{(x - 1)(x^2 - x - 12)} dx$.
6. а) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^5 2x} dx$, б) $\int e^{4 - 3x} dx$, в) $\int \frac{5x}{4x^2 + 7} dx$,
 г) $\int (x^2 + 4) e^{2x} dx$, д) $\int \frac{8x}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx$.
7. а) $\int (\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2) dx$, б) $\int \cos(7x + 3) dx$, в) $\int \frac{3x^3}{x^4 + 2} dx$,
 г) $\int (x^2 + 6) \cos 5x dx$, д) $\int \frac{6x^2 + 6x + 6}{(x + 1)(x^2 + x - 2)} dx$.
8. а) $\int \frac{12x^2 + 5x^4}{4x^3 + x^5} dx$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, в) $\int \sin(8x - 5) dx$,
 г) $\int \arcsin 5x dx$, д) $\int \frac{37x - 85}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx$.
9. а) $\int \frac{dx}{3x - 2}$, б) $\int \sqrt{5 - 4x} dx$, в) $\int \frac{2x}{\sqrt{8x^2 - 9}} dx$,

- $r) \int \ln(3x+2) dx, \quad d) \int \frac{3x^2 + 3x - 24}{(x^2 - x - 2)(x - 3)} dx.$
- $10. a) \int \frac{3}{4x^2 + 7} dx, \quad б) \int \frac{(\ln 2x)^5}{x} dx, \quad в) \int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx,$
- $r) \int \sqrt{x} \ln x dx, \quad d) \int \frac{3x^2 - 15}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)} dx.$
- $11. a) \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x - 2}} dx, \quad б) \int \frac{3}{\sin^2 5x} dx, \quad в) \int (5x^3 + 7)^5 x^2 dx,$
- $r) \int (x^2 - x + 1)e^{3x} dx, \quad d) \int \frac{x^2 - 19x + 6}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)} dx.$
- $12. a) \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 3} dx, \quad б) \int \sin^4 5x \cos 5x dx, \quad в) \int \frac{3}{\sqrt{5x - 4}} dx,$
- $r) \int x^2 \cos \frac{x}{3} dx, \quad d) \int \frac{6x}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx.$
- $13. a) \int \frac{\sin(3x + 2)}{\sqrt[3]{\cos(3x + 2)}} dx, \quad б) \int 2 \cos 5x dx, \quad в) \int e^{4x^2} x dx,$
- $r) \int 5 \arcsin 8x dx, \quad d) \int \frac{4x^2 + 32x + 52}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx.$
- $14. a) \int \left(\sqrt{x} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^3}} + 2 \right) dx, \quad б) \int \frac{6}{5x - 2} dx, \quad в) \int \frac{\operatorname{tg}^5 2x}{\cos^2 2x} dx,$
- $r) \int \frac{1}{9} x \sin \frac{x}{3} dx, \quad d) \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx.$
- $15. a) \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x} dx, \quad б) \int \frac{dx}{3 - 8x}, \quad в) \int (5x^4 + 7)^{10} x^3 dx,$
- $r) \int \ln(x + 4) dx, \quad d) \int \frac{6x^2}{(x - 1)(x^2 + 3x + 2)} dx.$
- $16. a) \int \frac{dx}{x \ln 6x}, \quad б) \int \frac{3x}{\sqrt{9x^2 + 3}} dx, \quad в) \int e^{6x-1} dx,$
- $r) \int \frac{3x}{\cos^2 5x} dx, \quad d) \int \frac{2x^2 - 26}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx.$
- $17. a) \int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx, \quad б) \int \frac{5x}{\sqrt{3 - 5x^2}} dx, \quad в) \int 5 \sin(4x - 6) dx,$
- $r) \int (4x^2 + 1)e^{6x} dx, \quad d) \int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x + 1)(x^2 + 8x + 15)} dx.$
- $18. a) \int \frac{8x^4}{5x^5 + 9} dx, \quad б) \int e^{\cos 3x} \sin 3x dx, \quad в) \int \frac{dx}{\sqrt{8x + 9}},$
- $r) \int \left(\frac{1}{2}x + 5 \right) \sin 4x dx, \quad d) \int \frac{7x^2 - 17x}{(x - 2)(x^2 - 2x - 3)} dx.$

$$\begin{aligned}
 19. \quad & \text{a) } \int \cos^9 5x \sin 5x \, dx, \quad \text{б) } \int \frac{9x}{7x^2 - 9} \, dx, \quad \text{в) } \int \sqrt{4x + 1} \, dx, \\
 & \text{г) } \int (8x - 9) e^{10x} \, dx, \quad \text{д) } \int \frac{3x^2 - 17x + 2}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)} \, dx. \\
 20. \quad & \text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2} \arccos^3 5x}, \quad \text{б) } \int e^{6x+7} \, dx, \quad \text{в) } \int \frac{dx}{9x^2 + 16}, \\
 & \text{г) } \int (10x - 1) \sin 2x \, dx, \quad \text{д) } \int \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} \, dx.
 \end{aligned}$$

Задача 11. Вычислить определённый интеграл.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \text{a) } \int_0^2 x^2 \sqrt{x - x^2} \, dx, \quad \text{б) } \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} \, dx. \\
 2. \quad & \text{a) } \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6 - x^2} \, dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} \, dx. \\
 3. \quad & \text{a) } \int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}} \, dx, \quad \text{б) } \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}. \\
 4. \quad & \text{a) } \int_0^3 x^4 \sqrt{9 - x^2} \, dx, \quad \text{б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x \, dx. \\
 5. \quad & \text{a) } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx. \\
 6. \quad & \text{a) } \int_0^{\sqrt{7/3}} x^3 \sqrt{7 + x^2} \, dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/8} \sin x \sin 3x \, dx. \\
 7. \quad & \text{a) } \int_2^4 \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^4} \, dx, \quad \text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^3 x} \, dx. \\
 8. \quad & \text{a) } \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1 - x^2) \sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx.
 \end{aligned}$$

$$9. \text{ a) } \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx,$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx.$$

$$10. \text{ a) } \int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}.$$

$$11. \text{ a) } \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1 - x^2} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$12. \text{ a) } \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx.$$

$$13. \text{ a) } \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}, \quad \text{б) } \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$$

$$14. \text{ a) } \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1} dx.$$

$$15. \text{ a) } \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/32} (32 \cos^2 4x - 16) dx.$$

$$16. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$17. \text{ a) } \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} 2 \cos x \sin 3x dx.$$

$$18. \text{ a) } \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

$$19. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx.$$

$$20. \text{ а) } \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx,$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx.$$

Задача 12. Вычислить длину дуги заданной плоской кривой.

$$1. \quad \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} y = 2x\sqrt{x}, \\ 0 \leq x \leq 11. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \\ 1 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x = 7\cos^3 t, \\ y = 7\sin^3 t, \\ \pi \leq t \leq 3\pi/2. \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} y = \sqrt{2x - x^2} - 1, \\ 1/4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{y^2}, \\ 0 \leq x \leq 11. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} y = 1 - \ln \cos x, \\ 0 \leq x \leq \pi/6. \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{y^2}, \\ 0 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} x = 9(t - \sin t), \\ y = 9(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} y = \ln \sin x, \\ \pi/3 \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x = 5(\cos t + t \sin t), \\ y = 5(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} x = \sqrt{2y - y^2} - 1, \\ 1/4 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \\ \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{2}{3}x^{3/4}, \\ 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ \pi \leq t \leq 3\pi/2. \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} x = \ln \sin y, \\ \pi/3 \leq y \leq 2\pi/3. \end{cases}$$

Задача 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1. $3x = y^2,$
 $3y = x^2.$
2. $y = x^2,$
 $x + y = 2.$
3. $y = 2x - x^2,$
 $x + y = 0.$
4. $y = 2^x,$ $y = 2,$
 $x = 0.$
5. $y = -x^2,$
 $x + y + 2 = 0.$
6. $y = 1/x,$ $y = x,$
 $x = 2.$
7. $y = 0,25x^2,$
 $y = 3x - 0,5x^2.$
8. $y = \sin x,$ $y = 0,$
 $0 \leq x \leq \pi.$
9. $y = 1/x,$ $y = 0,$
 $x = e,$ $x = e^2.$
10. $y = e^{-x},$ $x = 0,$
 $x = 1,$ $y = 0.$
11. $y = \frac{x^2}{2},$
 $y = 2 - 3x/2.$
12. $y = 2x - x^2,$
 $y = x.$
13. $y = x - \pi/2,$ $y = \cos x,$
 $x = 0.$
14. $y = \sin x,$ $y = \cos x,$
 $x = 0,$ $0 \leq x \leq \pi/4.$
15. $y = -x^2,$
 $y = x^2 - 2x - 4.$
16. $y = 2x^2,$
 $y = x^3/3.$
17. $y = \sqrt{x},$ $x = 0,$
 $y = x - 2.$
18. $y^2 + x = 4,$
 $x = 0.$
19. $y = (x - 2)^3,$ $x \geq 2,$
 $y = 4x - 8.$
20. $y = 1/(3x),$ $x = 1,$
 $y = 1.$

Задача 14. В полярной системе координат вычислить площадь фигуры, заданной уравнением в декартовых координатах (см. задачу 3).

1. $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2xy}$
2. $(x^2 + y^2)^2 = 2(4x^2 + y^2)$
3. $(x^2 + y^2)^3 = 2x^2y^2$
4. $(x^2 + y^2)^2 = 2(3x^2 + 2y^2)$
5. $(x^2 + y^2)^3 = 2x^2(4x^2 + 3y^2)$
6. $x^4 = 6(3x^2 - y^2)$
7. $x^6 = 4(x^4 - y^4)$
8. $x^4 = 2(x^2 - 3y^2)$
9. $y^6 = 6(y^4 - x^4)$
11. $y^6 = (x^2 + y^2)(3y^2 - x^2)$
12. $x^6 = (x^2 + y^2)(3x^2 - y^2)$
13. $y^4 = y^2 - 3x^2$
14. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2(3x^2 - y^2)$
15. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$
16. $(x^2 + y^2)^3 = 4y^2(3x^2 - y^2)$
17. $(x^2 + y^2)^2 = 4(3x^2 - y^2)$
18. $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$
19. $(x^2 + y^2)^3 = 4(x^4 + y^4)$

$$10. (x^2 + y^2)^2 = 2(2x^2 + 3y^2) \quad 20. y^4 = 3y^2 - x^2$$

Задача 15. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг указанной координатной оси фигуры, ограниченной заданными линиями.

$$1. \quad 3x = y^2, 3y = x^2, Ox$$

$$11. \quad y = x^2/2, y = x^3/8, Ox$$

$$2. \quad 3x = y^2, 3y = x^2, Oy$$

$$12. \quad y = x^2/4, y = x^3/8, Oy$$

$$3. \quad y^3 = x^2, y = 1, Ox$$

$$13. \quad y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0, Ox$$

$$4. \quad y^3 = x^2, y = 1, Oy$$

$$14. \quad x = 2^y, y = 1, y = 0, Oy$$

$$5. \quad y^2 = 4 - x, x = 0, Ox$$

$$15. \quad y^2 = \frac{4x}{3}, x = 3, Ox$$

$$6. \quad y^2 = 4 - x, x = 0, Oy$$

$$16. \quad y^2 = \frac{4x}{3}, y = 2, x = 0, Oy$$

$$7. \quad y^2 = x^3, x = 1, Ox$$

$$17. \quad y = \sin 2x, y = 0, Ox \\ 0 \leq x \leq \pi/2$$

$$8. \quad y^2 = x^3, x = 0, y = 1, Oy$$

$$18. \quad y = \arcsin x, y = \pi/2, \\ x = 0, Oy$$

$$9. \quad y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, Ox$$

$$19. \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}, y = 0, x = \frac{1}{4}, x = 1, Ox$$

$$10. \quad y = \arccos x, y = 0, x = 0, Oy \quad 20. \quad y = 1/\sqrt[4]{x}, y = 1, y = 2, Oy$$

Рекомендации по выполнению контрольных работ

Контрольная работа 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Использование аппарата матриц позволяет решать систему линейных алгебраических уравнений с помощью определённых арифметических операций над элементами таблиц, состоящих из коэффициентов системы.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент матрицы a_{ik} имеет два индекса: i – номер строки и k – номер столбца. Краткая форма записи матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$, где $i = \overline{1; m}$, (т. е.

$i = 1; 2; 3; \dots; m$, $j = \overline{1; n}$ (т. е. $j = 1; 2; 3; \dots; n$). Используются также обозначения матрицы $A = [a_{ik}]_{m,n}$ или $A = \|a_{ik}\|_{m,n}$.

Определителем или детерминантом квадратной матрицы называется число Δ (обозначается также $|A|$ или $\det A$), которое вычисляется с помощью элементов матрицы по определённом правилу в зависимости от её порядка n .

При $n = 1$ $\det A = |a_{11}| = a_{11}$;

при $n = 2$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

при $n = 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}).$$

Определитель 3-го порядка можно вычислить через определители 2-го порядка разложением по элементам 1-й строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Произведением матрицы на число называется матрица $C = \lambda \cdot A$, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на это число λ :

$$C = \lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Суммой матриц $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $D = (d_{ik})_{m,n}$ той же размерности $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц: $d_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

Разностью матриц A и B называется матрица $E = A + (-1) \times B$.

Произведением матриц $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называется матрица $P = A \times B$, элементы которой являются суммами произведений элементов строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы:

$$p_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}, \quad i = \overline{1; m}, \quad l = \overline{1; r}:$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}}$$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \dots + a_{1n}b_{nr} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1r} + a_{22}b_{2r} + \dots + a_{2n}b_{nr} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \dots + a_{mn}b_{nr} \end{pmatrix}$$

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_{ik}, b_i, i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n}$ – заданные параметры, x_k – искомые числа. Запишем систему (1) в виде одного матричного уравнения $AX = B$. Для этого введём обозначения: A – матрица коэффициентов системы, или основная матрица, B – матрица свободных членов, X – матрица неизвестных.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Приравняв матрицу C к матрице B , получаем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ или } A \cdot X = B \blacktriangleleft$$

Метод Крамера. Если $\Delta = \det A \neq 0$, то единственное решение системы (1) можно вычислить по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1; n}. \quad (2)$$

Частные определители Δ_i находятся путём замены i -го столбца в главном определителе Δ на столбец свободных членов с числами b_i .

Метод Гаусса. При увеличении размерности системы линейных уравнений (1) её решение матричным методом или методом Крамера приводит к довольно громоздким вычислениям. В этом случае оптимальным может оказаться метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных.

Основной идеей в методе Гаусса является приведение системы (1) элементарными преобразованиями к системе треугольного вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + \cdots + t_{1n}x_n = c_1, \\ \quad x_2 + t_{23}x_3 + \cdots + t_{2n}x_n = c_2, \\ \quad \quad x_3 + \cdots + t_{3n}x_n = c_3, \\ \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad \quad x_{n-1} + t_{n-1,n}x_n = c_{n-1}, \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_n = c_n, \end{array} \right.$$

из которой неизвестные, начиная с x_{n-1} , легко определяются через x_n подстановкой. Для этого составляется расширенная матрица системы (1):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которая элементарными преобразованиями приводится к треугольному виду.

К элементарным преобразованиям матрицы, не меняющим решение исходной системы линейных уравнений, относятся:

- 1) перестановка строк матрицы;
- 2) умножение любой строки на ненулевое число;
- 3) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число.

В результате получается матрица T (4), эквивалентная расширенной матрице, $T \sim \tilde{A}$:

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} & c_1 \\ & 1 & t_{23} & \cdots & t_{2n} & c_2 \\ & & 1 & \cdots & t_{3n} & c_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & t_{n-1,n} & c_{n-1} \\ & & & & & t_{n,n} & c_n \end{array} \right). \quad (4)$$

Задача 1. Данную систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$$
 решить

двумя способами: методом Крамера и методом Гаусса.

Решение. Вычислив определители 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -7,$$

по формулам Крамера (2) определяем значения неизвестных:

$$x = \frac{-21}{7} = -3, \quad y = \frac{14}{7} = 2, \quad z = \frac{-7}{7} = -1.$$

Ответ: $x = -3, y = 2, z = -1$. ◀

Чтобы привести расширенную матрицу данной системы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

к треугольному виду (4), выполним следующие преобразования.

1. Сформируем новую матрицу $\tilde{A}^1$, в первом столбце которой все элементы, кроме первого, равного 1, нули:

- поставим 1-ю строку $\tilde{A}$, умноженную на -1 , на первое место в $\tilde{A}^1$;
- прибавим к 3-й строке $\tilde{A}$ строку 2, умноженную на 3, и поставим её 2-й в $\tilde{A}^1$;
- прибавим к 1-й строке $\tilde{A}$ 2-ю, умноженную на 2, и поставим её третьей в $\tilde{A}^1$:

$$\tilde{A} \sim \tilde{A}^1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 11 & 4 & 18 \\ 0 & 10 & 3 & 17 \end{array} \right).$$

2. Сформируем из $\tilde{A}^1$ новую матрицу $\tilde{A}^2$, у которой во втором столбце предпоследний элемент равен 1:

- оставим 1-ю строку $\tilde{A}$ на первом месте в $\tilde{A}^2$;
- прибавим ко 2-й строке $\tilde{A}^1$ строку 3, умноженную на -1 , и поставим её 2-й в $\tilde{A}^2$. Получим матрицу

$$\tilde{A}^1 \sim \tilde{A}^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 17 \end{array} \right).$$

3. Сформируем из $\tilde{A}^2$ новую матрицу $\tilde{A}^3$, у которой во втором столбце последний элемент равен 0:

- прибавим к 3-й строке $\tilde{A}^2$ строку 2, умноженную на (-10) , и поставим её 3-й строкой в матрице $\tilde{A}^3$:

$$\tilde{A}^2 \sim \tilde{A}^3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array} \right).$$

Последняя матрица соответствует следующей системе:

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -7, \\ y + z = 1, \\ 7z = -7, \end{cases}$$

из которой легко определяем

$$\begin{cases} z = -1, \\ y = 1 - z = 1 + 1 = 2, \\ x = -7 + 3y + 2z = -7 + 6 - 2 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x = -3, y = 2, z = -1$. ◀

Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости может быть задано в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \text{ где } A^2 + C^2 \neq 0.$$

К кривым второго порядка относятся эллипс, окружность, гипербола и парабола.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная $2a$ (рис. 1).

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

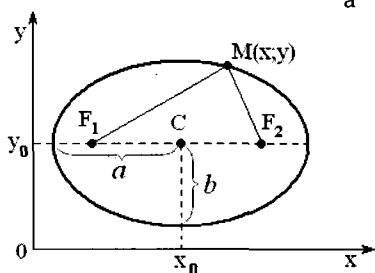


Рис. 1

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от одной точки – центра C (рис. 2).

Окружность – частный случай эллипса при $a=b=R$.

Каноническое уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

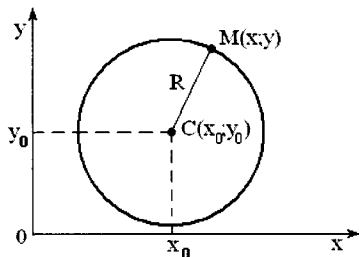


Рис. 2

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$, причём $2a$ меньше расстояния между F_1 и F_2 (рис. 3). Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы.

Канонические уравнения гипербол:

$$a) \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad б) \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1 \quad (6)$$

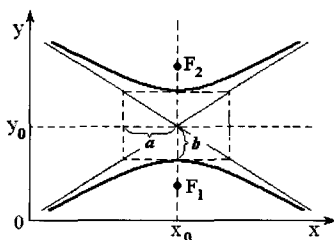
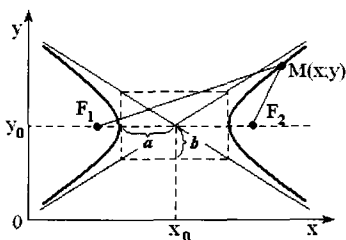


Рис. 3

Параболой называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой l (рис. 4). Точка F называется *фокусом*, а прямая l – *директрисой* параболы.

Канонические уравнения парабол при $p > 0$ (рис. 4):

$$a) (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

$$б) (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (7)$$

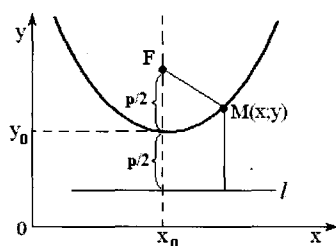
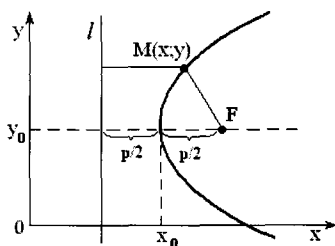


Рис. 4

При $p < 0$ ветви парабол будут направлены в стороны, соответственно противоположные тем, что изображены на рис. 4.

Задача 2. Привести уравнение кривой $4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения её с прямой $x + 2y - 1 = 0$. Построить графики прямой и кривой.

Решение. Чтобы привести уравнение кривой к каноническому виду, выделим полный квадрат в многочлене второго порядка:

$$4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = \begin{cases} az^2 + bz = a \left[z^2 + 2z \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = \\ = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} \end{cases}$$

$$= 4[(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2) - 4] + [(y^2 + 2y \cdot 1 + 1^2) - 1] + 13 = 4(x - 2)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 13 = 4(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 4.$$

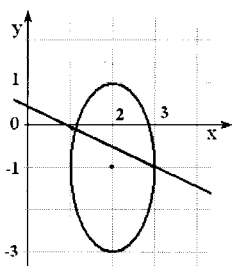
Пользуясь полученным результатом, данное уравнение кривой можно преобразовать к каноническому виду (1) уравнения эллипса:

$$\begin{aligned}\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= 1, \\ 4(x-2)^2 + (y+1)^2 &= 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} &= \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.\end{aligned}$$

Точки пересечения эллипса с прямой определяются решением системы:

$$\begin{aligned}\begin{cases} 4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4(x-2)^2 + y^2 + 2y = 3, \\ x - 2 = -2y - 1, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 4(-2y-1)^2 + y^2 + 2y = 3, \\ x = -2y + 1, \end{cases} &\Rightarrow 17y^2 + 18y + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = -\frac{1}{17}, x_1 = 3, x_2 = \frac{19}{17} &= 1\frac{2}{17}.\end{aligned}$$

Таким образом, прямая пересекает эллипс в точках $A(3; -1)$ и $B(1\frac{2}{17}; -\frac{1}{17})$.



Построим графики данных линий. Из канонического уравнения эллипса

$$\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

найдем координаты центра $C(2; -1)$ и длины полуосей $a = 1$, $b = 2$.

По двум точкам $A(3; -1)$ и $B(1\frac{2}{17}; -\frac{1}{17})$ строим прямую $x + 2y - 1 = 0$ (рис. 5). ◀

Рис. 5

Полярные координаты

Полярной системой координат называется выходящий из точки O (полюс) масштабированный луч Or (полярная ось).

Положение точки M на плоскости в полярной системе координат определяется упорядоченной парой чисел $(\varphi, \rho) \in \{0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq \rho < +\infty\}$. Значение φ равно величине полярного угла между осью Or и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемого от полярной оси в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Значение ρ равно расстоянию точки M до полюса: $\rho = |\overrightarrow{OM}|$. Совмещая полярную ось Or с положительной полуосью Ox декартовой системы координат, получим формулы связи между прямоугольными (x, y) и криволинейными (φ, ρ) координатами точки M :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (8)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg \varphi = \frac{y}{x}. \quad (9)$$

Пример 1. Построить точку М с полярными координатами $(2; \sqrt{3})$ в полярной и декартовой системах координат.

Решение. Точка М лежит на пересечении луча ОМ: $\varphi = 2$, образующего угол $\varphi = 2 \text{ (rad)} = \frac{180^\circ \cdot 2}{\pi} \approx 114,6^\circ$ с осью Or и окружности $\rho = \sqrt{3}$ с центром О и радиусом $\sqrt{3} \approx 1,7$ (рис. 6).

Декартовы координаты точки М определяются по формулам (8):

$$x = \sqrt{3} \cos 2 \approx 1,73 \cdot (-0,41) \approx -0,7, \quad y = \sqrt{3} \sin 2 \approx 1,73 \cdot 0,91 \approx 1,6.$$

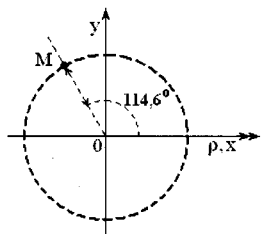


Рис. 6

Замечания: 1. Если $\varphi \notin [0; 2\pi)$, нарушается взаимно однозначное соответствие между парами чисел (φ, ρ) в полярной системе координат и точками плоскости. В этом случае бесконечное множество пар чисел $(\varphi_0 \pm 2\pi k; \rho)$, $k = 1; 2; 3; \dots$, изобразится одной точкой (φ_0, ρ) , где $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$; $0 \leq \rho < +\infty$.

2. Если $\rho < 0$, нарушается взаимно однозначное соответствие между парами чисел (φ, ρ) и точками плоскости. В этом случае точка с координатами $(\varphi_0; \rho_0)$,

$\rho_0 < 0$ совпадёт с точкой $(\varphi_0 + \pi; -\rho_0)$ при $0 \leq \varphi_0 < \pi$ или с точкой $(\varphi_0 - \pi; -\rho_0)$ при $\pi \leq \varphi_0 < 2\pi$.

При построении графика функции в полярной системе координат полезно использовать информацию о свойствах кривой в декартовой системе координат.

Задача 3. В полярной системе координат построить кривую, заданную уравнением в декартовых координатах $x^4 = 3x^2 - y^2$.

Решение. Переменные x и y в уравнении имеют чётные показатели степени. Поэтому достаточно построить кривую в первой четверти, т. е. при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, а затем симметрично отобразить её относительно обеих декартовых осей координат в другие квадранты.

Подставляя $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ в заданное уравнение, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \rho^4 \cos^4 \varphi &= \rho^2 (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0, \\ \rho^2 \cos^4 \varphi = 3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0, \\ \rho^2 \cos^4 \varphi = 4 \cos^2 \varphi - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

График пройдёт через начало координат – вырожденную в точку О окружность $\rho = 0$ с нулевым радиусом. Находим область допустимых значений (см. рис. 7):

$$4 \cos^2 \varphi - 1 \geq 0 \Rightarrow 2 \cos^2 \varphi \geq 1 \Leftrightarrow \cos \varphi \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}}.$$

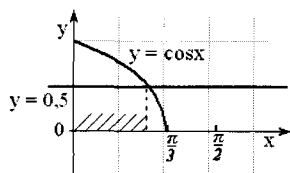


Рис. 7

Составляем расчётную таблицу для построения кривой $\rho = \frac{\sqrt{4\cos^2 \varphi - 1}}{\cos^2 \varphi}$ в первом квадранте. Симметрично достраиваем полный график функции в остальные четверти (рис. 8).

φ	$\cos \varphi$	$A = \cos^2 \varphi$	$B = 4A - 1$	$C = \sqrt{B}$	$\rho = \frac{C}{A}$	точки
0°	1	1	3	$\sqrt{3} \approx 1,7$	1,7	М (0; 1,7)
30°	$\sqrt{3}/2$	3/4	2	$\sqrt{2} \approx 1,4$	1,9	Н ($\pi/6$; 1,9)
45°	$\sqrt{2}/2$	1/2	1	1	2	Р ($\pi/4$; 2)
60°	1/2	1/4	0	0	0	О ($\pi/3$; 0)

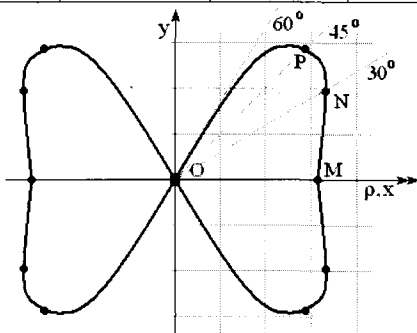


Рис. 8

Векторы

Если при моделировании какого-либо процесса достаточно определить только численное значение величины, то она называется *скалярной величиной*. Если для характеристики величины помимо её модуля необходимо указывать направление её изменения, то она называется *векторной величиной*. Скалярные величины геометрически изображаются точками, у которых число координат равно размерности пространства моделирования. Векторные величины геометрически изображаются направленными отрезками, которые называются *векторами*. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$, или $\vec{a}$, или $\vec{d}$. Вектор, имеющий длину (*модуль вектора*), равную единице, называется *ортом*.

Коллинеарными векторами называются векторы, принадлежащие одной прямой или параллельным прямым.

Компланарными векторами называются векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейные операции над векторами

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям: 1) $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$ и $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) при $\lambda > 0$ вектор $\vec{b}$ направлен одинаково (сонаправлен) с вектором $\vec{a}$;

3) при $\lambda < 0$ вектор $\vec{b}$ направлен противоположно вектору $\vec{a}$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который идёт из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ (при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$).

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{d}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$.

Геометрической проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось называется вектор $\overline{A_1B_1}$, ограниченный проекциями A_1 и B_1 точек A и B на эту ось.

Координатами вектора $\overline{AB}$ называются коэффициенты пропорциональности, связывающие единичные векторы на координатных осях (*базисные орты*) с геометрическими проекциями вектора на эти оси.

В векторной алгебре при выполнении многих операций с вектором работают, как с матрицей-строкой или матрицей-столбцом из его координат, количество которых равно размерности пространства моделирования.

Длина вектора $\overline{AB} = \vec{a}$ обозначается $|\overline{AB}| = |\vec{a}|$ и вычисляется как расстояние между точками. В пространстве R^3 для точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и вектора $\overline{AB} = \vec{a} = (x_a; y_a; z_a) = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ длина вектора рассчитывается по формулам:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$, λ - число, то

$$1. \lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a), \quad |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|.$$

$$2. \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = (x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b).$$

$$3. \vec{a} - \vec{b} = \vec{c} = (x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b).$$

Условие параллельности (коллинеарности) двух векторов $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$ при $x_b \neq 0, y_b \neq 0, z_b \neq 0$:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda. \quad (11)$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число c (скаляр), равное произведению их модулей на косинус угла φ , образованного при вращении вектора $\vec{a}$ до направления вектора $\vec{b}$ против часовой стрелки:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = c. \quad (12)$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
3. $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ – скалярный квадрат вектора $\vec{a}$.
4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
5. $\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$, λ – число.

Скалярные произведения базисных ортов $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \in R^3$:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \quad (13)$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \quad (14)$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 9), что если начало векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ поместить в одну точку O , то:

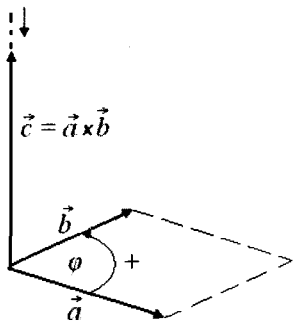


Рис. 9

- 1) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$);
- 2) векторы $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образуют *правую тройку векторов* (вектор $\vec{c}$ ориентирован так, что из его конца кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ наблюдается против часовой стрелки);
- 3) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (15)$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi, \quad (16)$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Понятие векторного произведения имеет смысл только в пространстве R^3 .

Свойства векторного произведения:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
2. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
3. $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
5. $\lambda[\vec{a}, \vec{b}] = [\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}]$, λ – число.

Декартовы координаты вектора $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = (x_c; y_c; z_c)$ определяются с помощью символического определителя:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \quad (17)$$

Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} \times \vec{c}$, т. е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}.$$

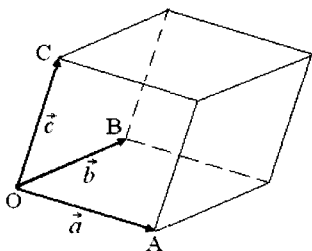


Рис. 10

Объём параллелепипеда, построенного на трёх некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 10), равен модулю их смешанного произведения:

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|, \quad (18)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}.$$

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \Rightarrow \text{если } \vec{m} = [\vec{a}, \vec{b}], \text{ то } V = |\vec{m} \cdot \vec{c}|.$$

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно определителю третьего порядка из их координат:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (19)$$

Прямая и плоскость в пространстве

Общим уравнением плоскости в пространстве является уравнение первой степени:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *нормальным вектором плоскости*. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и M_3 , не лежащие на одной прямой, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Угол (двугранный) между двумя плоскостями определяется с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad (21)$$

где плоскости заданы общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ и } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через данную точку пространства (x_1, y_1, z_1) и имеющей направляющий вектор (a, b, c) , записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две различные точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (22)$$

Если две прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями с направляющими векторами (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) , то угол между этими двумя прямыми определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (23)$$

Если плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая каноническим уравнением $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$, то угол φ между ними определяется из формулы

$$\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (24)$$

Задача 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2; -1; -2)$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2 ; 2) уравнение прямой A_1A_2 ; 3) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ; 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 5) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 6) площадь грани $A_1A_2A_3$; 7) объём пирамиды. Сделать чертёж.

Решение. 1. Длину ребра A_1A_2 найдем как длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ по формуле (10)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_1A_2}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ (ед. дл.)}. \end{aligned}$$

Ответ: $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ (ед. дл.)}$.

2. Уравнение прямой A_1A_2 , проходящей через две точки $A_1(2; 1; 0)$ и $A_2(3; 2; -1)$, находим по формуле (22)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \Rightarrow \frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{z - 0}{-1 - 0}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{-1}.$$

3. Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 найдем как угол φ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2} = (1; 1; -1)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (0; -2; -2)$ с модулями $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{1 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ и $|\overrightarrow{A_1A_4}| = \sqrt{0 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ из соотношения (23)

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}|} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}} = \frac{0}{2\sqrt{6}} = 0.$$

$$\text{Ответ: } A_1A_2A_4 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

4. Для того чтобы составить уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, возьмём текущую точку $M(x, y, z)$ плоскости. Векторы $\overrightarrow{A_1M} = (x-2; y-1; z)$, $\overrightarrow{A_1A_2} = (1; 1; -1)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-1; 1; 2)$ лежат в этой плоскости, т. е. они являются компланарными. Воспользуемся условием компланарности трёх векторов:

$$\overrightarrow{A_1M} \times \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(x-2) - (y-1) + 2z = \\ = 3x - y + 2z - 5.$$

Ответ: уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид $3x - y + 2z - 5 = 0$.

5. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ – это угол между вектором $\overrightarrow{A_1A_4}(0; -2; -2)$ с длиной $|\overrightarrow{A_1A_4}| = \sqrt{8}$ и гранью $A_1A_2A_3$ – плоскостью $3x - y + 2z - 5 = 0$. Найдем его по формуле (24)

$$\sin(\overrightarrow{A_1A_4} \wedge \vec{n}) = \frac{|\overrightarrow{A_1A_4} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1A_4}| \cdot |\vec{n}|},$$

где $\vec{n} = (3; -1; 2)$ нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$,

$$\sin(\overrightarrow{A_1A_4} \wedge \vec{n}) = \frac{0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|0 + 2 - 4|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \approx 0,1889,$$

$$(\overrightarrow{A_1A_4} \wedge \vec{n} \approx \arcsin 0,1889 \approx 0,1912(\text{рад}) \approx 11^{\circ}27').$$

Ответ: угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ приближённо составляет $11^{\circ}27'$ или $0,19 \text{ рад}$.

6. Площадь грани $A_1A_2A_3$ вычислим с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = (1; 1; -1)$ и $\overrightarrow{A_1A_3} = (-1; 1; 2)$. Найдём площадь треугольника $A_1A_2A_3$ как половину площади параллелограмма по формуле (15):

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|.$$

Применяя символический определитель (17), найдём векторное произведение:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

$$\text{Ответ: } S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{14} \approx 1,87 \text{ (ед.пл.)}.$$

7. Объём пирамиды $A_1A_2A_3$ вычислим как одну шестую объёма параллелепипеда с помощью смешанного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = (1; 1; -1)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-1; 1; 2)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (0; -2; -2)$, на которых построена пирамида (рис. 11), по формулам (18), (19):

$$[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}] \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \\ = -2 + 0 - 2 + 0 - 2 + 4 = -2 \Rightarrow$$

$$V_{\text{нпр}} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}] \cdot \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{1}{6} \cdot |(-2)| = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } V_{\text{нпр}} = \frac{1}{3} \approx 0,33 \text{ (ед. объёма)}.$$

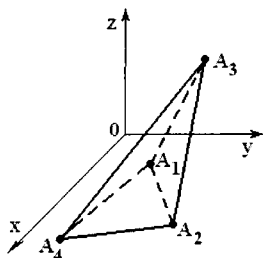


Рис. 11

Комплексные числа

На множестве действительных или вещественных чисел не выполнима операция извлечения корней чётной степени из отрицательных величин. Поэтому помимо десяти цифр $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$ была введена *мнимая единица* i , удовлетворяющая равенству $i^2 = -1$.

Пример 1. Пользуясь мнимой единицей, найти корни квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ с заданными вещественными коэффициентами a, b, c и отрицательным дискриминантом $D = b^2 - 4ac$.

Решение. При $D < 0$ имеем $(-D) > 0$, следовательно

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1) \cdot (-D)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{i^2 \cdot (-D)}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ = -\frac{b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{-D}}{2a} = x \pm iy, \text{ где } x = -\frac{b}{2a}, \quad y = \frac{\sqrt{-D}}{2a}. \quad \blacktriangleleft$$

Алгебраическая форма записи комплексных или мнимых чисел имеет вид

$$z = x + iy \quad (25)$$

с действительными числами x и y и мнимой единицей i .

Замечание. В технической литературе для обозначения мнимой единицы используется буква j (в отличие от силы тока i).

Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряжённым* числу z .

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2.$$

Переходя к полярным координатам $(\varphi, \rho) \in \{0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq \rho < +\infty\}$, по формулам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

получим *тригонометрическую форму* записи комплексных чисел:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (26)$$

Наряду с выражениями (25) и (26), пользуются *показательной формой* записи комплексных чисел

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

полученной из уравнения (26) с помощью формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

(иррациональное число $e = 2,71828\dots \approx 2,72$).

Замечание. В инженерных расчётах используют полярные координаты при $0 \leq \rho < +\infty, -\pi < \varphi \leq \pi$, где полагают главное значение аргумента

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y \geq 0; \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \quad y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Задача 5. Дано комплексное число $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{1-i}$. Представить z в алгебраической, тригонометрической и показательной форме записи.

Решение.
$$z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{1-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(1-i)(1-i)} =$$
$$= \frac{(1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2)(\sqrt{3} + i)}{1^2 - i^2} = \frac{(1 + 2i - 1)(\sqrt{3} + i)}{1 - (-1)} = \frac{2i(\sqrt{3} + i)}{2} =$$
$$= i(\sqrt{3} + i) = i\sqrt{3} + i^2 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Определим полярные координаты по формулам (8) и (9):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\varphi = \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{(-1)} = \pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) =$$
$$= \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ (rad.)} = 120^\circ.$$

Ответ: $z = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$ ◀

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Предел функции

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x из интервала $|x - x_0| < \Delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение предела функции в точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и имеют конечные пределы при $x \rightarrow x_0$. Тогда

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, где $C = \text{const}$;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (в частности, $\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$);
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Часто используются следующие следствия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть x_0 и A – постоянные числа или один из символов ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, обозначающих соответственно положительные или отрицательные переменные величины, неограниченно возрастающие по абсолютному значению. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = A$. Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций раскрывает следующая теорема:

Если $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и не обращается в ноль, то $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \rightarrow \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\gamma} = 1$, то функции α и γ называются *эквивалентными бесконечно малыми* (обозначают $\alpha \sim \gamma$). Данное определение особенно важно на практике, так как оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые.

Приведём следующие эквивалентности:

$$\sin \alpha \sim \alpha, \quad 1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha, \quad \arcsin \alpha \sim \alpha, \quad \operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha,$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha, \quad b^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln b, \quad (\text{в частности, } e^{\alpha} - 1 \sim \alpha), \quad \sqrt[n]{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{n}.$$

В простейших случаях нахождение предела функции сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределёностям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^{∞} . Нахождение предела функции в этих случаях называется *раскрытием неопределённостей*. Для этого необходимо провести преобразования данного выражения.

Задача 6. Найти пределы (не пользуясь правилом Лопиталья):

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}; \quad & 2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}, \quad x_0 = 1, x_0 = 2; \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}; \quad & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} \\ 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}; \quad & 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x. \end{aligned}$$

Решение. 1. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$. Непосредственная подстановка в данное выражение предельного значения аргумента приводит к неопреде-

лённостям вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия делим числитель и знаменатель на x^2 ,

$$\text{получаем } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{10}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{10}{\infty^2}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10} = 2.$$

$$2. \text{ Найдём предел } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}; x_0 = 1, x_0 = 2:$$

а) применяя теоремы об операциях (1–4) над пределами функций, когда значение аргумента $x_0 = 1$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 6x + 8)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 8x + 12)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 8 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 12} = \frac{1^2 - 6 \cdot 1 + 8}{1^2 - 8 \cdot 1 + 12} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \frac{3}{5};$$

б) непосредственная подстановка в данное выражение предельного значения аргумента $x_0 = 2$ приводит к неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть

эту неопределённость, раскладываем числитель и знаменатель на множители и сокращаем на $(x - 2)$:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &= 0; & x^2 - 8x + 12 &= 0; \\ D &= 36 - 32 = 4; & D &= 64 - 48 = 16; \\ x_1 &= (6 + 2)/2 = 4; & x_1 &= (8 + 4)/2 = 6; \\ x_2 &= (6 - 2)/2 = 2; & x_2 &= (8 - 4)/2 = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 2)(x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{x - 6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \frac{1}{2}.$$

$$3. \text{ Найдём предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}. \text{ В данном случае получаем неопределён-}$$

ность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, умножаем числитель и знаменатель на выра-

жение, сопряжённое числителю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x^2} - 1) \cdot (\sqrt{1 + x^2} + 1)}{x^2 \cdot (\sqrt{1 + x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - 1}{x^2 \cdot (\sqrt{1 + x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \cdot (\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4. Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$. Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то,

заменяя функции эквивалентными бесконечно малыми, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}.$$

5. Найдём предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$ Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$ при

$$x \rightarrow 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = 0$$

6. Найдём предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$.

Этот предел сводится ко второму замечательному пределу следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y =$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = e^4.$$

7. Найдём предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$. Вычислим предел основания степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = 1.$$

Показатель степени стремится к бесконечности, следовательно имеем неопределённость вида 1^∞ . Для того чтобы раскрыть эту неопределённость, представляем основание степени в виде $1+1/\alpha$, а в показателе степени выделяем множитель α и применяем формулу второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e. \text{ Получим}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x &= 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x-1+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2}{x-1} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1-1/x}} = e^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^2.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Производная и дифференциал

Пусть $y = f(x)$ – действительная функция действительного аргумента x , непрерывная в окрестности некоторой точки x .

Производной (первой производной или производной первого порядка) $f'(x)$ функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная обозначается также y'_x , $\frac{dy}{dx}$, f'_x , $\frac{df}{dx}$.

Операция отыскания производной называется *дифференцированием* функции.

Таблица производных

a – числовой параметр, $u = u(x)$ – функция.

	Простая функция	Сложная функция
1.	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$	$(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
1.1.	$(x)' = 1 \quad (a = 1, x^0 = 1)$	$(u)' = u'$
1.2.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (a = -1)$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
1.3.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
2.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
2.1.	$(e^x)' = e^x (a = e \approx 2,72)$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
3.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, a > 0, a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
3.1.	$(\ln x)' = \frac{1}{x} (a = e, \ln e = 1)$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
4.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

6.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
7.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
8.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
9.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
11.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Основные правила дифференцирования

a – числовой параметр, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции.

- $(a)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(uv)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (a \cdot u)' = a \cdot u' \Rightarrow (ax)' = a$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{a}\right)' = \frac{u'}{a}, \left(\frac{a}{v}\right)' = -\frac{a}{v^2} \cdot v'$

Задача 7. Найти производные первого порядка данных функций, используя правила дифференцирования:

$$a) y = 5x^2 + e^{\cos 3x}, \quad \text{з) } y = \frac{3 \cos^2 10x}{\ln(4x+1)},$$

$$б) y = \frac{6}{5\sqrt[5]{x}} + \sqrt{(4+x)} - 7, \quad \text{д) } y = 5x^{\sin 2x}.$$

$$в) y = \operatorname{arctg} 9x \cdot e^{4x},$$

Решение: а) найдём производную функции $y = 5x^2 + e^{\cos 3x}$. Применим правило дифференцирования суммы, степенной функции и формулы (2.1) и (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x) \\ [C \cdot v(x)]' = C \cdot v'(x), \quad \text{где } C = \text{const} \\ (x^n)' = nx^{n-1} \\ (e^u)' = e^u u', \quad (\cos u) = -\sin u \cdot u' \end{array} \right\}.$$

$$\text{Получаем } y' = 5 \cdot 2x + e^{\cos 3x} (\cos 3x)' = 10x + e^{\cos 3x} (-\sin 3x)(3x)' = 10x - 3e^{\cos 3x} (\sin 3x).$$

$$\text{Ответ: } (5x^2 + e^{\cos 3x})' = 10x - 3 \sin 3x \cdot e^{\cos 3x};$$

$$\text{б) найдём производную функции } y = \frac{6}{5\sqrt[5]{x}} + \sqrt{(4+x)} - 7.$$

В подобных случаях удобнее освободиться от радикалов и записать $y = \frac{6}{5}x^{-1/5} + (4+x)^{1/2} - 7$, а затем находить производную, используя формулы:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} [C \cdot v(x)]' = C \cdot v'(x), \quad \text{где } C - \text{const} \\ (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \end{array} \right\} \\ y' &= \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) x^{\frac{1}{5}-1} + \frac{1}{2} (4+x)^{\frac{1}{2}-1} (4+x)' - 0 = -\frac{6}{25} x^{-\frac{6}{5}} + \frac{1}{2} (4+x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{6}{25x^{6/5}} + \frac{1}{2(4+x)^{1/2}} = -\frac{6}{25\sqrt[5]{x^6}} + \frac{1}{2\sqrt{4+x}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y' = -\frac{6}{25\sqrt[5]{x^6}} + \frac{1}{2\sqrt{4+x}};$$

в) найдём производную функции $y = \arctg 9x \cdot e^{4x}$. Применяя правило 3 дифференцирования произведения двух функций и формулы 10 и 2.1 производной от функций $\arctg u$ и e^u

$$\left\{ \begin{array}{l} [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ (\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}, \\ (e^u)' = e^u u'. \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{получим} \quad y' &= (\arctg 9x)' \cdot (e^{4x}) + (\arctg 9x) \cdot (e^{4x})' = \\ &= \frac{(9x)'}{1+(9x)^2} e^{4x} + \arctg 9x \cdot e^{4x} (4x)' = \frac{9}{1+81x^2} + 4\arctg 9x \cdot e^{4x}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (\arctg 9x \cdot e^{4x})' = \frac{9}{1+81x^2} + 4\arctg 9x \cdot e^{4x};$$

г) найдём производную функции $y = \frac{3 \cos^2 10x}{\ln(4x+1)}$. Применяя правило 4 дифференцирования частного, формулы производной от функций u^n , $\ln u$, $\cos u$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ (u^n)' = nu^{n-1}u', \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad (\cos u)' = -\sin u u'. \end{array} \right\},$$

получим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3 \cos^2 10x)' \cdot (\ln(4x+1)) - (3 \cos^2 10x) \cdot (\ln(4x+1))'}{(\ln(4x+1))^2} = \\ &= \frac{6 \cos 10x \cdot (\cos 10x)' \cdot (\ln(4x+1)) - (3 \cos^2 10x) \cdot \frac{(4x+1)'}{(4x+1)}}{(\ln(4x+1))^2} = \\ &= \frac{6 \cos 10x \cdot (-\sin 10x) \cdot (10x)' \cdot \ln(4x+1) - (3 \cos^2 10x) \cdot \frac{4}{(4x+1)}}{(\ln(4x+1))^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-60 \cos 10x \cdot (\sin 10x) \cdot \ln(4x+1) - (3 \cos^2 10x) \cdot \frac{4}{(4x+1)}}{(\ln(4x+1))^2} = \\
 &= -\frac{12 \cos 10x [5(4x+1) \ln(4x+1) \sin 10x + \cos 10x]}{(4x+1) \ln^2(4x+1)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3 \cos^2 10x}{\ln(4x+1)} \right)' = -\frac{12 \cos 10x [5(4x+1) \ln(4x+1) \sin 10x + \cos 10x]}{(4x+1) \ln^2(4x+1)}.$$

д) найдём производную функции $y = 5x^{\sin 2x}$.

Прежде чем дифференцировать заданную функцию, найдём её логарифм и вычислим производную от этого логарифма, а затем по производной от логарифма найдём производную от заданной функции. Такой приём называется *способом логарифмического дифференцирования*. Логарифмируя функцию $y = 5x^{\sin 2x}$, получим

$$\ln y = \ln 5x^{\sin 2x} \Leftrightarrow \ln y = \sin 2x \cdot \ln 5x.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по x :

$$(\ln y)' = (\sin 2x \cdot \ln 5x)'.$$

Так как y является функцией от x , то $\ln y$ тоже есть сложная функция x . Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{y'}{y} &= (\sin 2x)' (\ln 5x) + (\sin 2x) (\ln 5x)', \\
 \frac{y'}{y} &= \cos 2x (2x)' (\ln 5x) + (\sin 2x) \cdot \frac{(5x)'}{5x}, \\
 \frac{y'}{y} &= 2 \cos 2x (\ln 5x) + (\sin 2x) \cdot \frac{5}{5x}, \\
 y' &= \left(2 \cos 2x (\ln 5x) + (\sin 2x) \frac{1}{x} \right) \cdot y, \\
 y' &= \left(2 \cos 2x (\ln 5x) + (\sin 2x) \frac{1}{x} \right) \cdot 5x^{\sin 2x}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (5x^{\sin 2x})' = 5x^{\sin 2x} \left[2 \cos 2x \cdot \ln 5x + \frac{\sin 2x}{x} \right].$$

Дифференциал dy функции $y = f(x)$ есть произведение производной $f'_x(x)$ на дифференциал аргумента dx :

$$dy = f'_x(x) dx.$$

Геометрически производная представляет собой *угловой коэффициент* касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x , т. е. $f'_x(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$.

Физически производная представляет собой *скорость* изменения функции $f(x)$ в точке x , т. е. $f'_x(x) = v(x)$.

Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от её производной. Вторая производная обозначается y'' , $\frac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$.

Если $s = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2s}{dt^2}$ – ускорение этого движения.

Если функция задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то первая и вторая производные находятся по формулам:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (27)$$

Задача 8. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций:

$$a) y = \frac{22}{x+5},$$

$$б) \begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}.$$

Решение: а) найдём производные y' и y'' функции $y = \frac{22}{x+5}$. Применяя правило дифференцирования частного, найдём первую производную, а затем вторую:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(22)' \cdot (x+5) - (22) \cdot (x+5)'}{(x+5)^2} = \frac{0 \cdot (x+5) - (22) \cdot 1}{(x+5)^2} = -\frac{22}{(x+5)^2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= (y')' = \left(-\frac{22}{(x+5)^2} \right)' = -\frac{(22)' \cdot (x+5) - (22) \cdot 2(x+5)(x+5)'}{(x+5)^4} = \\ &= -\frac{0 \cdot (x+5) - (22) \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{44(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{44}{(x+5)^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (5x^{\sin 2x})' = 5x^{\sin 2x} \left[2\cos 2x \cdot \ln 5x + \frac{\sin 2x}{x} \right];$$

б) найдём производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$.

Применяя формулы (2), получим

$$x'_t = \frac{1}{t}, \quad y'_t = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-1/t^2}{1/t} = -\frac{1}{t},$$

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{1}{t} \right)'_t = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1/t^2}{1/t} = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{t}.$$

Контрольная работа 2

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, так как все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z , то переменная z называется *функцией двух переменных* $z = f(x, y)$. Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y) , при которых функция z существует.

Дифференцирование функции нескольких переменных

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмём произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x . Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется *частным приращением функции по x* . Отношение частного приращения функции к приращению переменной запишем в виде

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ по x .

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x ; $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$. Аналогично определяется частная производная функции по переменной y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Для вычисления частных производных можно воспользоваться обычными правилами и формулами дифференцирования.

Если функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D , то её частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или её части. Будем называть эти производные *частными производными первого порядка*.

Производные этих функций будут *частными производными второго порядка*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''_{xx}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''_{yy}(x, y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{xy}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= f''_{yx}(x, y). \end{aligned}$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и т. д. называются *смешанными производными*.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ и её частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и её окрестности, то верно соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (28)$$

Т. е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Задача 9. Дана функция $z = \frac{\sin(x+5)}{y}$. Найти частные производные первого и второго порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Проверить равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Решение. Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(x+5)}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin(x+5)}{y^2}.$$

Найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos(x+5)}{y} \right) = -\frac{\sin(x+5)}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\sin(x+5)}{y^2} \right) = \frac{2 \sin(x+5)}{y^3}.$$

Найдём смешанные частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos(x+5)}{y} \right) = -\frac{\cos(x+5)}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sin(x+5)}{y^2} \right) = -\frac{\cos(x+5)}{y^2}.$$

Условие (28) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ выполняется.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Неопределённый интеграл

Пусть $f(x) = F'(x)$ – производная функции $F(x)$, называемой первообразной функции $f(x)$.

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется однопараметрическое семейство её первообразных $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Неопределённый интеграл записывают в одном из двух видов:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int F'(x) dx = F(x) + C. \quad (29)$$

Отыскание по данной функции её первообразной составляет основную задачу интегрального исчисления.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

2. Неопределённый интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределённых интегралов от слагаемых:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

3. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

4. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс C:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Задача 10. Найти интеграл

$$\int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3x^5} dx.$$

Решение. Сделаем подстановку: $t = 1 - 3x^5$, откуда $dt = -15x^4 dx$.

Поэтому $\int x^4 \sqrt[4]{1-3x^5} dx = -\frac{1}{15} \int t^{\frac{1}{4}} dt = -\frac{1}{15} \cdot + C = -\frac{4}{75} t^{\frac{5}{4}} + C$.

Сделав обратную подстановку, окончательно получим

$$\int x^4 \sqrt[4]{1-3x^5} dx = -\frac{4}{75} (1-3x^5) \sqrt[4]{1-3x^5} + C. \quad \blacktriangleleft$$

Задача 11. Найти неопределённый интеграл. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{x^2 dx}{7x^3 + 1}, & \text{б) } \int \frac{x^2 dx}{4x^6 + 1}, & \text{в) } \int \frac{dx}{\arcsin^3 2x\sqrt{1-4x^2}} \\ \text{г) } \int x \arctg x dx, & \text{д) } \int \frac{(x+4)dx}{x^2 - 4x - 12}. \end{array}$$

Решение: а) найдём интеграл $\int \frac{x^2 dx}{7x^3 + 1}$. Выделим в числителе производную от знаменателя и воспользуемся формулой $\int \frac{u' dx}{u} = \ln u + C$.

$$\int \frac{x^2 dx}{7x^3 + 1} = \frac{1}{21} \int \frac{d(7x^3 + 1)}{7x^3 + 1} = \frac{1}{21} \ln|7x^3 + 1| + C.$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{x^2 dx}{7x^3 + 1} = \frac{1}{21} \ln|7x^3 + 1| + C;$$

б) найдём интеграл $\int \frac{x^2 dx}{4x^6 + 1}$. Как и в предыдущем примере, выделим в числителе производную от знаменателя и воспользуемся формулой

$$\int \frac{u' dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C. \text{ Получим } \int \frac{x^2 dx}{4x^6 + 1} = \frac{1}{6} \int \frac{d(2x^3)}{(2x^3)^2 + 1} = \frac{1}{6} \arctg(2x^3) + C;$$

в) найдём интеграл $\int \frac{dx}{\arcsin^3 2x \sqrt{1-4x^2}}$. Сделаем подстановку: $t = \arcsin 2x$. Продифференцировав обе части последнего равенства, получим $dt = \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, поэтому $\int \frac{dx}{\arcsin^3 2x \sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \int t^{-3} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{-2}}{(-2)} + C = -\frac{1}{4t^2} + C =$
 $= -\frac{1}{4\arcsin^2 2x} + C.$

Ответ: $\int \frac{x^2 dx}{4x^6 + 1} = -\frac{1}{4\arcsin^2 2x} + C;$

г) найдём интеграл $\int x \arctg x dx$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \arctg x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x \\ dv = x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

Ответ: $\int x \arctg x dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + C;$

д) найдём интеграл $\int \frac{x+1}{x^3-x^2-6x} dx$. Это интеграл от рациональной дроби. Дробь правильная, так как степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x-3)(x+2).$$

Так как все корни действительные и различные, то подынтегральная дробь может быть представлена суммой элементарных дробей первого типа:

$$\frac{x+1}{x(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}.$$

Приведём в правой части последнего тождества к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x+1 = A(x-3)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-3).$$

Для определения неизвестных коэффициентов существует два способа: неопределённых коэффициентов и произвольных значений. Применим второй способ. Последовательно подставим в последнее тождество три значения x .

$$x = 0 \Rightarrow 1 = -6A \Rightarrow A = -\frac{1}{6},$$

$$x = -2 \Rightarrow -1 = -10C \Rightarrow C = \frac{1}{10},$$

$$x = 3 \Rightarrow 4 = 15B \Rightarrow B = \frac{1}{15}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2-6x} dx = \int \left(-\frac{1}{6} \frac{1}{x} + \frac{1}{15} \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{10} \frac{1}{(x+2)} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{15} \int \frac{1}{(x-3)} dx + \frac{1}{10} \int \frac{1}{(x+2)} dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{1}{15} \ln|x-3| + \frac{1}{10} \ln|x+2|.$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{x+1}{x^3-x^2-6x} dx = -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{1}{15} \ln|x-3| + \frac{1}{10} \ln|x+2|.$$

Определённый интеграл

Предел интегральной суммы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{где } n \rightarrow \infty,$$

при условии, что $\lambda \rightarrow 0$ (и, следовательно, при $n \rightarrow \infty$), если он существует и не зависит ни от способа деления отрезка $[a; b]$, ни от способа выбора внутренних точек ξ_i , называется *определённым интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Определённый интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (30)$$

Задача 12. Вычислить определённый интеграл:

$$\text{а) } \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

Решение: а) найдём интеграл $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}}$. Сначала вычислим неопределённый интеграл с помощью тригонометрической подстановки: $x = \sqrt{2} \cos t = >$

$dx = -\sqrt{2} \sin t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}} &= \int \frac{-\sqrt{2} \sin t dt}{\sqrt{2} \cos t \sqrt{2 - (\sqrt{2} \cos t)^2}} = \int \frac{-\sqrt{2} \sin t dt}{\sqrt{2} \cos t \sqrt{2(1 - \sin^2 t)}} = \\ &= \int \frac{-\sqrt{2} \sin t dt}{\sqrt{2} \cos t \sqrt{2} \cos^2 t} = \int \frac{-\sqrt{2} \sin t dt}{\sqrt{2} \cos t \sqrt{2} \sin t} = \int \frac{-dt}{\sqrt{2} \cos t} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\cos t} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + C. \end{aligned}$$

После нахождения неопределённого интеграла воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница (30):

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} \right| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos \pi/4}{2} + \frac{\pi}{4} \right| - \\ &- \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos \pi/2}{2} + \frac{\pi}{4} \right| \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right| - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\pi}{4} \right| \right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + \ln \left| \frac{\pi}{4} \right| \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{\pi}{4} \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right| \right) \approx 0,6692. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{\pi}{4} \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right| \right) \approx 0,6692;$$

б) вычислим определённый интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Так как подынтегральная функция нечётная относительно $\cos x$, используем подстановку $\sin x = t$, тогда

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x = 1 - t^2, \quad dt = \cos x \, dx. \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (1 - t^2) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^4 dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \left(\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \left(\frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin^5 \frac{\pi}{2}}{5} \right) - \left(\frac{\sin^3 0}{3} - \frac{\sin^5 0}{5} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - (0) = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{2}{15}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРИИ

Интегральное исчисление широко применяется при исследовании многообразных геометрических фигур.

Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть дуга $\overline{AB}$ кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $a = x_A$, $b = x_B$, гладкая, т. е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна при $x \in [a; b]$. В этом случае длина дуги $\overline{AB}$ вычисляется по формуле

$$L = |\overline{AB}| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx. \quad (31)$$

Если кривая $\overline{AB}$ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$ и производные $\varphi'(t)$ и $\Psi'(t)$ непрерывны, то длина дуги $\overline{AB}$ при монотонном изменении параметра t от t_A до t_B вычисляется по формуле

$$L = |\overline{AB}| = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (32)$$

В случае когда гладкая кривая $\overline{AB}$ задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, применяется формула

$$L = |\overline{AB}| = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (33)$$

Задача 13. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = \frac{4}{3}$ для случая $y \geq 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (31). По условию $y = \sqrt{x^3} \Leftrightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3x^{1/2}}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2} x^{1/2}\right]^2} dx = \\ &= \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left\{ u = 1 + \frac{9}{4}x, \quad du = \frac{9}{4}dx \right. \\ &\quad \left. u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=4/3} = 4 \right\} = \int_1^4 \sqrt{u} \left(\frac{4}{9} du\right) = \\ &= \frac{4}{9} \int_1^4 u^{1/2} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_1^4 = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_1^4 = \frac{8}{27} (\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) = \\ &= \frac{8}{27} (2^3 - 1) = \frac{8}{27} \cdot (8 - 1) = \frac{8}{27} \cdot 7 = \frac{56}{27} = 2\frac{2}{27} \quad (\text{ед. дл.}). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Задача 14. Вычислить длину дуги астроида

$$x = 2\cos^3 t, \quad y = 2\sin^3 t \quad \text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (32). Определим $x'_t = -6\cos^2 t \sin t$, $y'_t = 6\sin^2 t \cos t$.

$$\begin{aligned} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} &= \sqrt{36 \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t \cos^2 t} = \\ &= \sqrt{36 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \|\cos^2 t + \sin^2 t = 1\| = \\ &= \sqrt{36 \cos^2 t \sin^2 t} = 6 \cos t \sin t \Rightarrow \\ L &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} 6 \cos t \sin t dt = \|2 \cos t \sin t = \sin(2t)\| = 3 \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = \end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{2} [\cos(2t)]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{3}{2} (-1 - 1) = -\frac{3}{2} (-2) = 3.$$

Ответ: $L = 3$ (ед. дл.).

Задача 15. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 4\cos^3 \frac{\varphi}{3}$ от 0 до $\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой (33). Определим производную

$$\rho'_{\varphi} = 12 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \left(-\sin \frac{\varphi}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -4 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} =$$

$$= \sqrt{\left[4\cos^3 \frac{\varphi}{3}\right]^2 + \left[-4 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3}\right]^2} = \sqrt{16\cos^6 \frac{\varphi}{3} + 16 \cos^4 \frac{\varphi}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{3}} =$$

$$= \sqrt{16 \cos^4 \frac{\varphi}{3} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{3} + \sin^2 \frac{\varphi}{3}\right)} = \sqrt{16 \cos^4 \frac{\varphi}{3}} = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \Rightarrow$$

$$L = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi = \int_0^{3\pi/2} 4 \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \left\{ 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \right\} =$$

$$= 4 \int_0^{3\pi/2} \left(1 + \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = 4 \left[\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right] \Bigg|_0^{3\pi/2} =$$

$$= 4 \left[\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2} \sin \pi\right) - \left(0 + \frac{3}{2} \sin 0\right) \right] = \{ \sin \pi = 0, \sin 0 = 0 \} = 4 \cdot \frac{3\pi}{2} =$$

$$= 6\pi \text{ (ед. дл.)}.$$

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a; b]$ оси абсцисс, кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, $f(x) \geq \varphi(x)$ при $x \in [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx. \quad (34)$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными лучами $\varphi = b$ и $\varphi = \alpha$, $\alpha < \beta$, определяется интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (35)$$

Задача 16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой

$3y = 2x^2 - 4x$ и прямой $2x - 3y + 8 = 0$ (рис. 12).

Решение. Для нахождения площади заданной фигуры воспользуемся формулой (34). Абсциссы точек А и В найдём из системы

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x = 3y \\ 2x + 8 = 3y \end{cases}$$

Вычитая из 1-го уравнения 2-е, получим

$$2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x_A = -1, \quad x_B = 4 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 \left(\frac{2x+8}{3} - \frac{2x^2-4x}{3} \right) dx &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^4 (2x^2 - 6x - 8) dx = -\frac{1}{3} \left[\frac{2x^3}{3} - 3x^2 - 8x \right]_{-1}^4 = \\ &= -\frac{1}{3} \left[\left(\frac{2 \cdot 4^3}{3} - 3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 \right) - \left(\frac{2(-1)^3}{3} - 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) \right) \right] = \end{aligned}$$

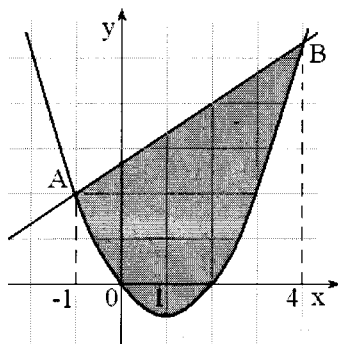


Рис. 12

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{128}{3} - 48 - 32 + \frac{2}{3} + 3 - 8 \right) = \frac{125}{9} = 13 \frac{8}{9}.$$

Ответ: $S = 13 \frac{8}{9}$ (ед. пл.).

Задача 17. В полярной системе координат вычислить площадь фигуры, заданной уравнением в декартовых координатах $x^4 = 3x^2 - y^2$ (см. задачу 3).

Решение. В задаче 3 получено уравнение заданной кривой в полярных координатах $\rho = \frac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi}$ и построен её график.

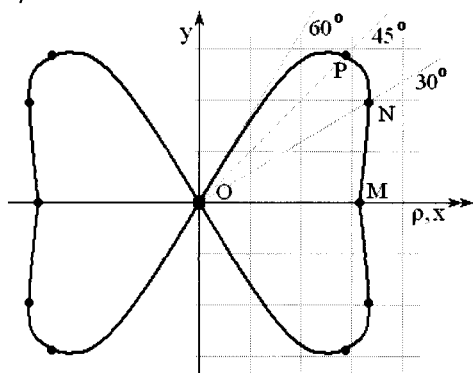


Рис. 13

Воспользуемся формулой (35). Так как фигура симметрична относительно обеих осей координат, она состоит из четырёх равновеликих криволинейных секторов, первый из которых ограничен лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (рис. 13). $\Rightarrow$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi} \right)^2 d\varphi = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos^4\varphi} d\varphi.$$

Так как $\int \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos^4\varphi} d\varphi = \int \frac{4\cos^2\varphi - (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{\cos^4\varphi} d\varphi =$
 $= \int \frac{3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} d\varphi = \int \left(\frac{3}{\cos^2\varphi} - \frac{\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi} \right) d\varphi = I_1 - I_2,$

где $I_1 = \int \frac{3}{\cos^2\varphi} d\varphi = 3 \int \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = 3 \tan \varphi + c,$

$$I_2 = \int \frac{\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \left\| \begin{matrix} u = \tan \varphi \\ du = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \end{matrix} \right\| = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\tan^3\varphi}{3} + c \Rightarrow$$

$$S = 2 \left[3 \tan \varphi - \frac{\tan^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi/3} = 2 \left[\left(3 \tan \frac{\pi}{3} - \frac{\tan^3 \frac{\pi}{3}}{3} \right) - \left(3 \tan 0 - \frac{\tan^3 0}{3} \right) \right] =$$

$$= 2 \left[\left(3 \cdot \sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} \right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right] = 2 \left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} \right) = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $S = 4\sqrt{3} \approx 6,92$ (ед. площади).

Вычисление объёмов тел вращения

Объёмы тел, полученных вращением вокруг оси Ox криволинейных трапеций, описанных в п. 2, вычисляются соответственно по формулам:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \quad (36)$$

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2 \} dx. \quad (37)$$

Замечание. В силу равноправности переменных в декартовой системе координат x и y можно менять местами. При этом вместо $x \in [a; b]$ нужно рассматривать $y \in [c; d]$. Структура формул (36), (37) при этом не изменится.

Задача 18. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг координатной оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

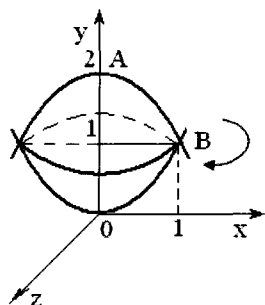


Рис. 14

Решение. Данная на плоскости yOx фигура ОВАО (рис. 14) состоит из двух равновеликих частей, ограниченных дугами парабол $OB: x = \sqrt{y}$ и $BA: x = \sqrt{2-y} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = 2\pi \int_0^1 [\sqrt{y}]^2 dy = \\ &= 2\pi \int_0^1 y dy = 2\pi. \end{aligned}$$

вет: $V = 2\pi \approx 6,28$ (ед. объёма).

Учебное издание

Математика

Методические указания по выполнению контрольных работ
для бакалавров технического профиля заочной формы обучения

Составители:

**Белякова Людмила Георгиевна
Лукьянова Елена Александровна,
Миронов Александр Петрович
Сергиенко Людмила Семёновна**

Редактор Л.А. Кром

Подписано в печать 02.07.2012. Формат 60 х 90 / 16.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,0.
Тираж 1500 экз. Зак. 134. Поз. плана 51.

Лицензия ИД № 06506 от 26.12.2001
Иркутский государственный технический университет
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83