

Высшая математика для заочников (1 семестр)

Е.В. Мартюшев

24 октября 2023 г.

ЛЕКЦИЯ 1

§ 1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, называются *элементами* матрицы. Числа a_{ii} образуют *главную диагональ*.

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного и того же размера $m \times n$ называются *равными* (обозначение $A = B$), если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной* (n -го порядка). Если $a_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$, то матрица называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной* и обозначается E . Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается O .

Пример 1.1.

- Матрица размера 3×2 :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Единичная матрица размера 3×3 :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Нулевая матрица размера 2×3 :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T , полученная из матрицы A заменой строк на столбцы, называется *транспонированной* к матрице A . При этом,

$$(A^T)^T = A.$$

Пример 1.2.

- Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;
- Если $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, то $B^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами.

- 1) *Сложение и вычитание матриц.* Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – матрицы одного и того же размера. Тогда

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Аналогично,

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Пример 1.3.

- $\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$
- $\bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

- 2) *Умножение матрицы на число.* Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица, c – число. Тогда

$$c \cdot A = (c \cdot a_{ij}).$$

Пример 1.4.

- $\bullet -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$

- 3) *Произведение матриц.* Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$, $B = (b_{jk})$ – матрица размера $n \times p$. Тогда

$$A \cdot B = (a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk}) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right),$$

где $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, p$. Таким образом, $A \cdot B$ есть матрица размера $m \times p$.

Пример 1.5.

•

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-5) & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 5 & -11 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Произведение $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ не определено.

- $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 - 6 + 15) = (11).$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 10 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}.$

- $A \cdot E = E \cdot A = A$ для любой матрицы A (подходящего размера).

Основные свойства действий над матрицами.

- 1) $A + B = B + A$.
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- 3) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- 4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- 5) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.
- 6) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.

В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Отсутствие равенства может быть по разным причинам. Например, одно из произведений может быть не определено. Либо не совпадают размеры матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$. Однако даже если оба произведения определены и размеры матриц совпадают, равенства может не быть.

Пример 1.6. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Пусть A – квадратная матрица n -го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы A называется число $\det A$, которое строится по элементам матрицы. Рассмотрим для случаев $n = 1, 2, 3$.

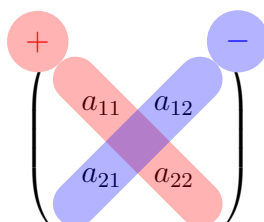
Для определителя матрицы A используется также обозначение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 2.1.

- $n = 1$, $A = (a_{11})$, $\det A = a_{11}$.
- $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Схема для запоминания:

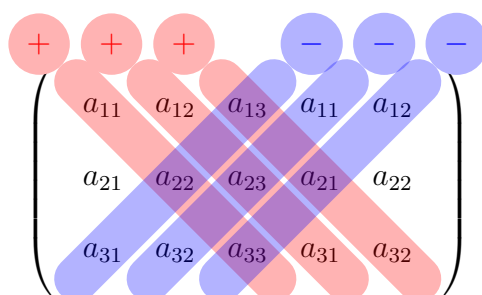


• $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}).$$

Схема для запоминания:



Минором элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца. Обозначается M_{ij} . Например, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Например,

$$A_{11} = M_{11}, \quad A_{32} = -M_{32}.$$

Свойства определителя матрицы.

1) Для квадратных матриц A и B (одного порядка) выполняется

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

2) $\det(A^T) = \det A$. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = -2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = -2.$$

- 3) При перестановке двух строк (или столбцов) в матрице определитель меняет знак. Например,

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 2.$$

Следствие 2.1. *Определитель, имеющий две одинаковые строки (или столбца), равен 0.*

- 4) Если любую строку (или столбец) матрицы умножить на число c , то определитель умножится на c . Например,

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = -4 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Следствие 2.2. *Если некоторая строка (или столбец) матрицы целиком состоит из нулей, то определитель равен 0.*

- 5) Разложение определителя матрицы $A = (a_{ij})$ по k -й строке:

$$\det A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}.$$

Аналогичное разложение есть для k -го столбца матрицы. Формула позволяет свести вычисление определителя порядка n к вычислению n определителей порядка $n - 1$. Например,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \\ &= a_{21}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

§ 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И ЕЕ СВОЙСТВА

Для любого числа $c \neq 0$ существует число c^{-1} такое, что

$$c^{-1} \cdot c = c \cdot c^{-1} = 1.$$

Можно ли аналогичным образом определить матрицу обратную к данной матрице A ? Ограничимся случаем квадратных матриц.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A размера $n \times n$, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица n -го порядка. Матрица A^{-1} , если она существует, также имеет размер $n \times n$.

Квадратная матрица A называется *невыврожденной*, если $\det A \neq 0$. В противном случае, матрица A называется *вырожденной*.

Теорема 3.1. *Квадратная матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$.*

Пусть $A = (a_{ij})$ – невырожденная матрица размера $n \times n$. Матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , называется *присоединенной* к матрице A . Присоединенная матрица состоит из алгебраических дополнений матрицы A^T .

Обратной к матрице A является матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Свойства обратной матрицы.

- 1) Если обратная матрица существует, то она единственная.
- 2) $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 3) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
- 4) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- 5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Пусть

- A – матрица размера $n \times n$ и $\det A \neq 0$;
- B – матрица размера $n \times m$, где $m \geq 1$;
- C – матрица размера $m \times n$, где $m \geq 1$.

Простейшим матричным уравнением называется уравнение вида

$$A \cdot X = B \quad \text{или} \quad X \cdot A = C,$$

где X – неизвестная матрица, которую требуется найти.

Решение для уравнения $A \cdot X = B$:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B, \\ A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B, \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B, \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B, \\ X &= A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

Таким образом, решением уравнения $A \cdot X = B$ является матрица

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Аналогично, решением уравнения $X \cdot A = C$ является матрица

$$\boxed{X = C \cdot A^{-1}.}$$

Пример 4.1. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдём определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) = 2.$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |1| = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} |-1| = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |-2| = 2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} |4| = 4.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = C \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 10 & 18 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 9 \\ 3/2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 9 \\ 3/2 & 7/2 \end{pmatrix}.$

Видеоуроки по ссылке https://ietn.susu.ru/?page_id=2539:

- Тема 1. Действия с матрицами
- Тема 2. Вычисление определителей третьего порядка
- Тема 4. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы
- Тема 3. Решение матричных уравнений

ЛЕКЦИЯ 2

§ 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система из t уравнений вида

[illegible]

называется *системой линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). При этом,

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные;
- a_{ij} – коэффициенты системы (заданные числа);
- b_i – свободные коэффициенты (заданные числа).

Совокупность n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ называется *решением* системы (5.1), если после подстановки $x_j \rightarrow c_j$, каждое уравнение в (5.1) обращается в числовое равенство.

Задача состоит в нахождении всех решений системы (5.1). Если система (5.1) не имеет решения, то она называется *несовместной*.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*. Совместная система может иметь либо единственное решение, либо бесконечно много решений.

Пример 5.1.

- Система

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

НЕСОВМЕСТНА.

- Система

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = -1, y = 1$.

- Система

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений вида $x = -y$, где y – любое число.

Систему (5.1) можно записать в виде

$$A \cdot X = B,$$

где

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных (матрица размера $n \times 1$);
- $A = (a_{ij})$ – матрица системы,

- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец свободных коэффициентов (матрица размера $m \times 1$).

Например, систему

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

§ 6. МЕТОД ГАУССА

Элементарные операции над строками матрицы:

- перестановка местами двух строк;
- умножение строки на число $c \neq 0$;
- прибавление к одной строке матрицы другой умноженной на число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными* (обозначение $A \sim B$), если A получается из B последовательностью элементарных операций над строками.

Условие $c \neq 0$ обеспечивает обратимость элементарных преобразований, т.е. если $A \sim B$, то $B \sim A$.

Расширенной матрицей системы (5.1) называется матрица

$$\overline{A} = (A | B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Теорема 6.1. При элементарных операциях над строками расширенной матрицы множество решений СЛАУ не меняется.

Суть метода Гаусса состоит в том, чтобы элементарными операциями над строками расширенной матрицы системы привести ее к наиболее простому (ступенчатому) виду.

Матрица называется *ступенчатой*, если:

- все ее нулевые строки стоят после ненулевых;
- количество нулевых элементов, идущих подряд в начале каждой ненулевой строки, увеличивается с увеличением номера строки.

Ступенчатые матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не ступенчатые матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса решения линейных систем состоит из двух ходов:

- 1) *Прямой ход*: элементарными операциями над строками расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду. Соответствующие системы уравнений при этом имеют одинаковое множество решений.
- 2) *Обратный ход*: из системы, соответствующей ступенчатому виду, последовательно находятся все неизвестные. Некоторые переменные при этом могут оказаться *свободными*, т.е. они могут принимать любые значения. Остальные переменные – *базисные* – выражаются через свободные.

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения СЛАУ. Он позволяет находить все решения любой системы, либо устанавливать, что решений нет. Описывать метод Гаусса для СЛАУ общего вида довольно затруднительно. Рассмотрим данный метод на примерах.

Пример 6.1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ 2x + 5y - 4z = -3, \\ 3x + y + 3z = 2. \end{cases}$$

Прямой ход. Расширенная матрица:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Приведем расширенную матрицу к ступенчатой форме:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 12 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{array} \right).$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Прямой ход метода Гаусса закончен.

Обратный ход. Решим систему, соответствующую ступенчатой расширенной матрице:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ y + 2z = -1, \\ 22z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 \cdot 0 = -1, \\ y + 2 \cdot 0 = -1, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot (-1) = -1, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, y = -1, z = 0$.

Пример 6.2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ 7y - 3z = 4. \end{cases}$$

Прямой ход. Расширенная матрица:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Приведем расширенную матрицу к ступенчатой форме:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right).$$

Обратный ход. Решим систему, соответствующую ступенчатой расширенной матрице:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 7y - 3z = -5, \\ 0 = 9. \end{cases}$$

Последнее равенство является невозможным. Это означает, что система несовместна.

Ответ: система несовместна.

Пример 6.3. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5t = 1, \\ x - y + z = 1, \\ 3x + 2y - 2z - 5t = -12, \\ x - 3y + z + 6t = 5. \end{cases}$$

Прямой ход. Расширенная матрица:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -5 & -12 \\ 1 & -3 & 1 & 6 & 5 \end{array} \right).$$

Приведем расширенную матрицу к ступенчатой форме:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -5 & -12 \\ 1 & -3 & 1 & 6 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -5 & -12 \\ 1 & -3 & 1 & 6 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Обратный ход. Решим систему, соответствующую ступенчатой расширенной матрице:

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ y + z - 5t = -1, \\ -z + 2t = -1, \\ 0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2t + 1 = 1, \\ y + 2t + 1 - 5t = -1, \\ z = 2t + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (3t - 2) + 2t + 1 = 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = 2t + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 2, \\ y = 3t - 2, \\ z = 2t + 1. \end{cases}$$

Система имеет бесконечно много решений. Свободная переменная t может принимать любые значения. Переменные x , y и z выражаются через свободную.

Ответ: $x = t - 2$, $y = 3t - 2$, $z = 2t + 1$, где t – любое число.

Пример 6.4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 2t = 5, \\ 2x - 3y - 6z + 3t = 3, \\ 4x - 5y + 10z - 5t = 7. \end{cases}$$

Прямой ход. Расширенная матрица:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -6 & 3 & 3 \\ 4 & -5 & 10 & -5 & 7 \end{array} \right).$$

Приведем расширенную матрицу к ступенчатой форме:

$$\begin{aligned} \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -6 & 3 & 3 \\ 4 & -5 & 10 & -5 & 7 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 & 7 & -7 \\ 0 & -13 & -6 & 3 & -13 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -13 & -6 & 3 & -13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & -10 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Обратный ход. Решим систему, соответствующую ступенчатой расширенной матрице:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + 4z - 2t = 5, \\ y + 2z - t = 1, \\ 20z - 10t = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z - 2 \cdot (2z) = 5, \\ y + \cancel{2z} - \cancel{2z} = 1, \\ t = 2z, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot 1 + \cancel{4z} - \cancel{4z} = 5, \\ y = 1, \\ t = 2z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 1, \\ t = 2z. \end{cases} \end{aligned}$$

Система имеет бесконечно много решений. Свободная переменная z может принимать любые значения. Переменные x, y, t выражаются через свободную.

Ответ: $x = 3, y = 1, t = 2z$, где z – любое число.

Видеоуроки по ссылке https://ietn.susu.ru/?page_id=5191:

- Тема 13. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса (един.реш.)

ЛЕКЦИЯ 3

§ 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Пусть в пространстве или на плоскости заданы две точки A и B . Направленный отрезок из A в B называется *геометрическим вектором* (или просто *вектором*) и обозначается $\overrightarrow{AB}$ (или $\vec{a}$). Вектор $\overrightarrow{BA}$ (или $-\vec{a}$) называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$.



Длина отрезка AB называется *длиной (модулем) вектора* $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными* ($\vec{a} \perp \vec{b}$), если угол между ними равен 90° , т.е. если соответствующие отрезки перпендикулярны.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными* ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), если они лежат на одной или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть

- сонаправлены ($\uparrow\uparrow$);
- противоположно направлены ($\uparrow\downarrow$).

Нулевой вектор одновременно коллинеарен и ортогонален любому другому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными* (обозначение $\vec{a} = \vec{b}$), если они

- 1) имеют одинаковую длину ($|\vec{a}| = |\vec{b}|$);
- 2) коллинеарны и сонаправлены ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$).

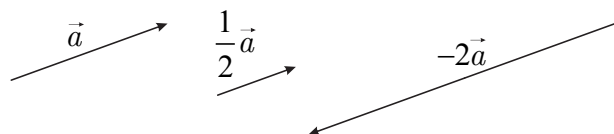
Для равенства векторов необязательно, чтобы соответствующие им отрезки совпадали. Согласно определению, равными являются два вектора, получаемые один из другого параллельным переносом.

Действия над векторами.

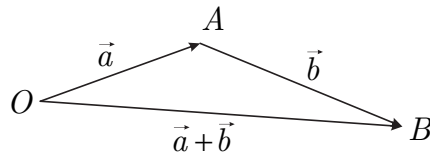
- 1) Умножение вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ на число c называется вектор $\vec{b}$ такой, что

- $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $c > 0$ и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $c < 0$,
- $|\vec{b}| = |c| \cdot |\vec{a}|$.

Обозначение: $\vec{b} = c \cdot \vec{a}$ (рис.).

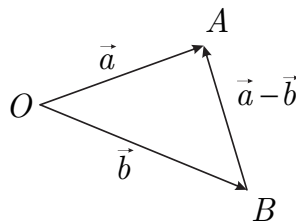


- 2) Сложение векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение: $\vec{a} + \vec{b}$ (рис.).



Сумма векторов не зависит от выбора точки O .

- 3) Вычитание векторов. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Обозначение: $\vec{a} - \vec{b}$. Возьмем произвольную точку O и построим векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$ (рис.).



Ортом вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ называется вектор

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Орт сонаправлен с вектором $\vec{a}$ и имеет единичную длину, т.е. $|\vec{a}_0| = 1$ и $\vec{a}_0 \uparrow \vec{a}$.

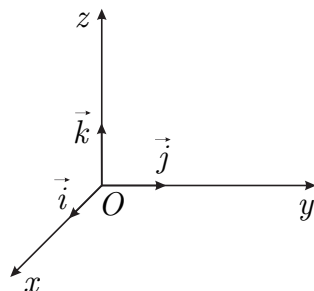
Основные свойства действий над векторами.

- 1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$.
- 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- 4) $c \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b}$, где c – число.

§ 8. КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Декартовой системой координат называется совокупность

- точки O (начала координат);
- проходящих через O попарно ортогональных осей (осей координат) (рис.).



На плоскости – 2 оси, в пространстве – 3 оси. Обозначение: Ox (на плоскости) или $Oxyz$ (в пространстве).

- Ox – ось абсцисс;
- Oy – ось ординат;
- Oz – ось аппликат.

Далее все определения будут для случая трех измерений. На плоскости аналогично.

Векторы единичной длины, сонаправленные с осями координат Ox , Oy , Oz , называются *базисными ортами* и обозначаются $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно.

Совокупность базисных ортов $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется *стандартным базисом* 3-мерного пространства.

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор. *Разложением* вектора $\vec{a}$ по стандартному базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется представление его в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где a_x , a_y , a_z – числа, которые называются (*декартовыми*) *координатами* вектора $\vec{a}$.

Теорема 8.1. *Любой вектор может быть разложен по базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ единственным образом.*

Вектор $\vec{a}$ полностью определяется своими координатами, что подчеркивается обозначением $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$. Например,

$$\vec{0} = \{0; 0; 0\}, \quad \vec{i} = \{1; 0; 0\}, \quad \vec{j} = \{0; 1; 0\}, \quad \vec{k} = \{0; 0; 1\}.$$

Свойства координатного представления векторов.

Пусть $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $c = \text{const}$.

- 1) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
- 2) $\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$.
- 3) $\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$.
- 4) $c \cdot \vec{a} = \{ca_x; ca_y; ca_z\}$.
- 5) Условие равенства векторов в координатной форме:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

- 6) Условие коллинеарности векторов в координатной форме:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = tb_x, \\ a_y = tb_y, \\ a_z = tb_z \end{cases}$$

для некоторого числа t . Здесь допускается, что некоторые числа в знаменателе могут равняться нулю. При этом, соответствующие числа в числителе также должны быть равны нулю. Например, векторы $\{1; -2; 0\}$ и $\{-2; 4; 0\}$ коллинеарны.

(Декартовыми) координатами точки A называются координаты вектора $\overrightarrow{OA}$, где O – начало координат. Если точка A имеет координаты $(x_A; y_A; z_A)$, а точка B – $(x_B; y_B; z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}.$$

Расстояние между точками A и B находится как длина вектора $\overrightarrow{AB}$, т.е.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

§ 9. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Пусть в пространстве заданы векторы $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначение $\vec{a} \cdot \vec{b}$) называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Свойства скалярного произведения.

- 1) $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.
- 2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- 3) $(c\vec{a}) \cdot \vec{b} = c(\vec{a} \cdot \vec{b})$, где c – число.
- 4) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.
- 5) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- 6) Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (9.1)$$

- 7) Физический смысл скалярного произведения: работа постоянной силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки из точки A в точку B находится по формуле

$$P = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (9.2)$$

Пример 9.1. Найти работу силы $\vec{F} = \{-5; -1; 2\}$ по перемещению материальной точки из точки $A(2; 7; -1)$ в точку $B(3; 5; 4)$.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{3 - 2; 5 - 7; 4 - (-1)\} = \{1; -2; 5\}.$$

Работу силы найдем по формуле (9.2):

$$P = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (-5) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 7.$$

Ответ: $P = 7$.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначение $\vec{a} \times \vec{b}$) называется вектор

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \{a_y b_z - a_z b_y; -a_x b_z + a_z b_x; a_x b_y - a_y b_x\}.$$

Векторное произведение определено только в пространстве (не на плоскости).

9.1. Свойства векторного произведения.

- 1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
- 2) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$.
- 3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- 4) $(c\vec{a}) \times \vec{b} = c(\vec{a} \times \vec{b})$, где c – число.
- 5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- 6) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

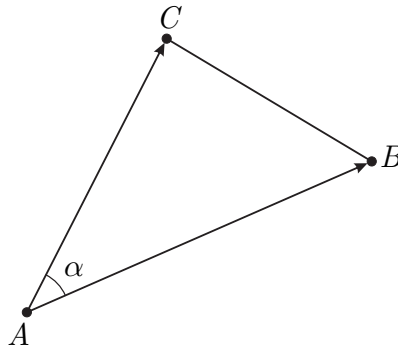
$$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

- 7) Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (9.3)$$

- 8) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Пример 9.2. Даны вершины треугольника $A(1; 0; 3)$, $B(1; -1; 4)$, $C(2; 1; -2)$. Найти косинус угла при вершине A и площадь треугольника ABC .



Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \{1 - 1; -1 - 0; 4 - 3\} = \{0; -1; 1\}, \\ \overrightarrow{AC} &= \{2 - 1; 1 - 0; -2 - 3\} = \{1; 1; -5\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = -6, \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Обозначим α угол при вершине A . Найдем $\cos \alpha$ по формуле (9.1):

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-6}{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Найдем векторное произведение

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k} - (-\vec{k} + \vec{i} + 0\vec{j}) = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \{4; 1; 1\}.$$

Найдем площадь треугольника ABC по формуле (9.3):

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}; S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Видеоуроки по ссылке https://ietn.susu.ru/?page_id=2539:

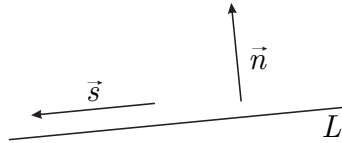
- Тема 6. Коллинеарность векторов
- Тема 7. Определение скалярного произведения векторов
- Тема 8. Угол между векторами
- Тема 9. Геометрический смысл векторного произведения

ЛЕКЦИЯ 4

§ 10. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть L – прямая на плоскости Oxy .

- Вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$ называется *нормальным вектором* прямой L , если он перпендикулярен этой прямой.
- Вектор $\vec{s} \neq \vec{0}$ называется *направляющим вектором* прямой L , если он лежит на этой прямой или параллелен ей (рис.).



Нормальный и направляющий векторы прямой определены не однозначно.

- 1) Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = \{A; B\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

- 2) Общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0,$$

где коэффициенты A и B не равны нулю одновременно. Нормальный вектор такой прямой есть $\vec{n} = \{A; B\}$.

- 3) Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \{p; q\}$:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \quad (10.1)$$

Данное уравнение называется *каноническим уравнением прямой*. Числа p и q по отдельности могут равняться нулю.

- 4) Из канонического уравнения прямой получаются *параметрические уравнения прямой*:

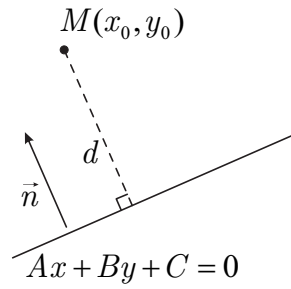
$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \end{cases}$$

где t – параметр.

- 5) Уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_0; y_0)$ и $N(x_1; y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (10.2)$$

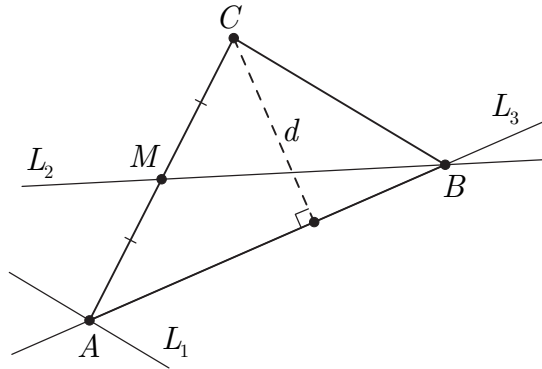
Расстояние между точкой и прямой определяется как длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой (рис.).



Расстояние d между точкой $M(x_0; y_0)$ и прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (10.3)$$

Пример 10.1. Даны вершины треугольника $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(1; -2)$. Найти: 1) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC ; 2) уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины B ; 3) длину высоты, опущенной из вершины C .



- 1) Пусть L_1 – прямая, проходящая через точку A параллельно стороне BC . Направляющий вектор прямой L_1 :

$$\vec{s} = \overrightarrow{BC} = \{1 - 2; -2 - 3\} = \{-1; -5\}.$$

Уравнение прямой L_1 по формуле (10.1):

$$\frac{x - (-1)}{-1} = \frac{y - 4}{-5},$$

$$-5(x + 1) = -(y - 4),$$

$$-5x + y - 9 = 0.$$

- 2) Пусть L_2 – прямая, на которой лежит медиана треугольника, проведенная из вершины B . Найдем координаты точки M – середины отрезка AC :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1.$$

Прямая L_2 проходит через точки B и M . Уравнение прямой L_2 по формуле (10.2):

$$\frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{y - 3}{1 - 3},$$

$$-2(x - 2) = -2(y - 3),$$

$$-2x + 2y - 2 = 0.$$

- 3) Уравнение прямой L_3 проходит через точки A и B . Уравнение прямой L_3 по формуле (10.2):

$$\frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{y - 4}{3 - 4},$$

$$-(x + 1) = 3(y - 4),$$

$$-x - 3y + 11 = 0.$$

Найдем расстояние d между точкой C и прямой L_3 по формуле (10.3):

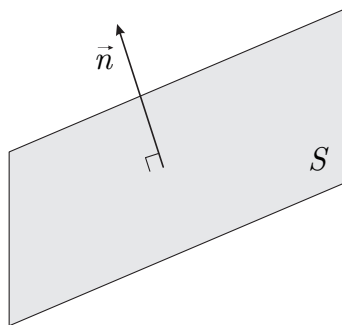
$$d = \frac{-1 - 3 \cdot (-2) + 11}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: 1) $-5x + y - 9 = 0$; 2) $-2x + 2y - 2 = 0$; 3) $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

§ 11. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть S – плоскость в пространстве $Oxyz$.

Вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$ называется *нормальным вектором* плоскости S , если он перпендикулярен этой плоскости (рис.).



Нормальный вектор плоскости определен не однозначно.

- 1) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$:

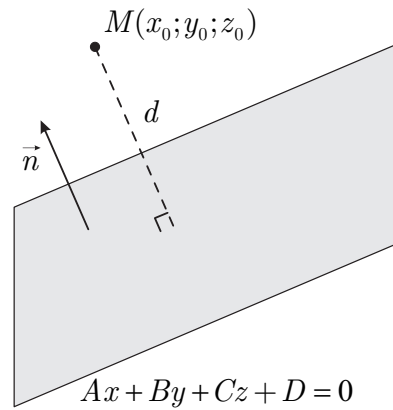
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

- 2) Общее уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где коэффициенты A , B и C не равны нулю одновременно. Нормальный вектор такой плоскости есть $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

Расстояние между точкой и плоскостью определяется как длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной плоскости (рис.).

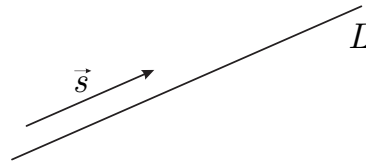


Расстояние d между точкой $M(x_0; y_0; z_0)$ и прямой $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пусть L – прямая в пространстве $Oxyz$.

Вектор $\vec{s} \neq \vec{0}$ называется *направляющим вектором* прямой L , если он лежит на этой прямой или параллелен ей (рис.).



Направляющий вектор прямой определен не однозначно.

- 1) Уравнения прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \{p; q; r\}$:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Данные уравнения называются *каноническими уравнениями прямой*. Числа p, q, r по отдельности или попарно могут равняться нулю.

- 2) Из канонических уравнений получаются *параметрические уравнения прямой*:

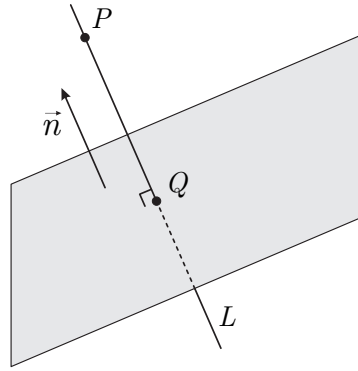
$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt, \end{cases} \quad (11.1)$$

где t – параметр.

- 3) Уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_0; y_0; z_0)$ и $N(x_1; y_1; z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Пример 11.1. Найти проекцию точки $P(3; -2; 5)$ на плоскость $-x + 4y + 2z - 20 = 0$.



Обозначим $\vec{n}$ нормальный вектор плоскости $-x + 4y + 2z - 20 = 0$. Тогда

$$\vec{n} = \{-1; 4; 2\}.$$

Найдем уравнения прямой L , проходящей через точку P перпендикулярно данной плоскости. Направляющий вектор прямой L :

$$\vec{s} = \vec{n} = \{-1; 4; 2\}.$$

Параметрические уравнения прямой по формуле (11.1):

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases} \quad (11.2)$$

Подставим (11.2) в уравнение плоскости:

$$-(3 - t) + 4(-2 + 4t) + 2(5 + 2t) - 20 = 0,$$

$$-3 + t - 8 + 16t + 10 + 4t - 20 = 0,$$

$$21t - 21 = 0,$$

$$t = 1.$$

Подставим найденное значение t обратно в (11.2):

$$\begin{cases} x = 3 - 1 = 2, \\ y = -2 + 4 \cdot 1 = 2, \\ z = 5 + 2 \cdot 1 = 7. \end{cases}$$

Ответ: проекция точки P на плоскость имеет координаты $(2; 2; 7)$.

Видеоуроки по ссылке https://ietn.susu.ru/?page_id=2539:

- Тема 11. Прохождение прямой через данную точку
- Тема 12. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору
- Тема 13. Каноническое уравнение прямой на плоскости
- Тема 14. Расстояние от точки до прямой на плоскости
- Тема 15. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно вектору