

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»**

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ПО КУРСУ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»**

Тула 2013

Данные методические указания написаны в помощь студентам технических специальностей для самостоятельной работы в пятом семестре. Рассмотрены решения типовых задач по линейному программированию.

Задача о диете

Историческая задача о диете является одной из первых задач линейного программирования.

Постановка задачи - первый и наиболее важный этап построения модели, способный обеспечить правильное решение проблемы.

Даме необходимо похудеть, за помощью обратилась к подруге.

Построение модели - рассмотрение этого этапа и является главной целью.

Подруга посоветовала перейти на рациональное питание, состоящее из двух продуктов P и Q .

Суточное питание этими продуктами должно давать не более 14 единиц жира (чтобы похудеть), но не менее 300 калорий. На упаковке продукта P написано, что в одном килограмме этого продукта содержится 15 единиц жира и 150 калорий, а на упаковке с продуктом Q - 4 единицы жира и 200 калорий соответственно. При этом цена 1 килограмма продукта P равна 15 руб., а 1 кг продукта Q - 25 руб.

Так как дама была стеснена в средствах, но ее интересовал вопрос: в какой пропорции нужно брать эти продукты для того, чтобы выдержать условия диеты и истратить как можно меньше денег?

Перейдем к формализации данной ситуации на языке математических символов.

Обозначим через x количество продукта P и через y количество продукта Q , требуемые для выполнения условий диеты.

Количество единиц жира, содержащегося в x кг продукта P и в y кг продукта Q , равно $15x + 4y$ и по условию диеты не должно превосходить 14:

$$15x + 4y \leq 14$$

В свою очередь, количество калорий, содержащихся в x кг продукта P и в y кг продукта Q , равно $150x + 200y$ и по условию диеты должно быть не меньше 300:

$$150x + 200y \geq 300$$

Теперь о стоимости z продуктов. Она равна

$$z = 15x + 25y$$

и в соответствии с высказанными пожеланиями должна быть минимальной.

Последнее записывается так:

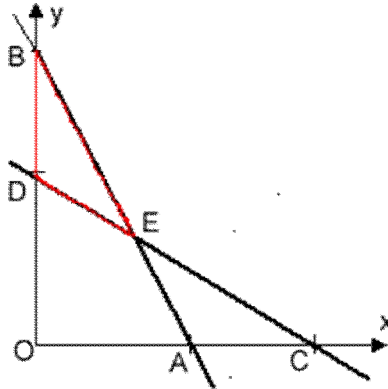
$$z = 15x + 25y \rightarrow \min$$

Тем самым мы получили систему формул:

$$z = 15x + 25y \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 15x + 4y \leq 14, \\ 150x + 200y \geq 300, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

которую решим графическим способом.



Нас интересует только та ее часть, которая лежит над треугольником BDE . Вычисляя значения z во всех трех вершинах этого треугольника

$$z_B = 37,5, \quad z_D = 87,5, \quad z_E = 35$$

и сравнивая полученные результаты, замечаем, что наименьшее значение (35) достигается в вершине E . Таким образом,

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = 1,$$

и искомая пропорция - 2 : 3.

2.2. Задача о выпуске продукции

Фирма выпускает два вида древесно-стружечных плит - обычные и улучшенные. При этом производится две основные операции - прессование и отделка. Требуется указать, какое количество плит каждого типа можно изготовить в течение месяца так, чтобы обеспечить максимальную прибыль при следующих ограничениях на ресурсы (материал, время, затраты):

Затраты	Партия из 100 плит		Имеющиеся ресурсы на месяц
	обычных	улучшенных	
Материал (фунты)	20	40	4000
Время на прессование (часы)	4	6	900
Время на отделку (часы)	4	4	600
Средства (деньги)	30	50	6000
Прибыль	80	100	max

Перейдем к построению математической модели поставленной задачи. Введем следующие обозначения. Пусть

x - количество партий в 100 плит обычного вида, изготавливаемых в течение месяца;
 y - количество партий в 100 плит улучшенного качества, изготавливаемых в течение месяца.

Тогда ожидаемую прибыль можно записать так:

$$z = 80x + 100y \rightarrow \max$$

Требуется найти такие значения x и y , подчиненные условиям

$$\begin{cases} 20x + 40y \leq 4000, \\ 4x + 6y \leq 900, \\ 4x + 4y \leq 600, \\ 30x + 50y \leq 6000, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

для которых

$$z = 80x + 100y \rightarrow \max$$

Для того, чтобы найти в первой четверти плоскости xOy множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют указанным выше неравенствам, необходимо сначала построить прямые (по точкам их пересечения с координатными осями)

$$\begin{aligned} 20x + 40y = 4000, & \quad A(200, 0), B(0, 100), \\ 4x + 6y = 900, & \quad C(225, 0), D(0, 150), \\ 4x + 4y = 600, & \quad E(150, 0), F(0, 150), \\ 30x + 50y = 6000, & \quad G(200, 0), H(0, 120), \end{aligned}$$

а затем, используя точку начала отсчета $O(0, 0)$, определить соответствующие полуплоскости. Пересечением полученных полуплоскостей будет четырехугольник $OBME$.

Наша целевая функция достигает наибольшего значения в одной из вершин четырехугольника.

Нам необходимо найти координаты точки M - точки пересечения прямых EF и AB , для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 20x + 40y = 4000, \\ 4x + 4y = 600. \end{cases}$$

Вычислить значения z в точках $B(0, 100)$, $E(150, 0)$, $M(100, 50)$:

$$z_B = 10\,000, \quad z_E = 12\,000, \quad z_M = 13\,000.$$

Из полученных значений выберем наибольшее и получим ответ:

$$x = 100, \quad y = 50, \quad z_{\max} = 13\,000.$$

2.3. Общая задача линейного программирования

В общем случае и число неизвестных, и число ограничений могут достигать десятков, сотен, тысяч и т.д. Однако набор соответствующих условий ничем (кроме количества) от рассмотренных выше примеров не отличается. Это нетрудно заметить уже по общей постановке задачи линейного программирования.

Стандартная математическая формулировка общей задачи линейного программирования выглядит так: требуется найти экстремальное значение показателя эффективности (целевой функции)

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$$

(линейной функции элементов решения $x_1, x_2, \dots, x_n$) при линейных ограничительных условиях, накладываемых на элементы решения:

[illegible]

где a_{ik}, b_k, c_i - заданные числа.

Что касается существующих методов решения этой задачи с числом переменных, больших двух, то в их основе лежат те же идеи, на которые мы опирались при разработке графического подхода. Конечно, в случае сильного увеличения числа переменных и ограничений техника получения решения заметно усложняется, но она опирается на совершенно стандартные, хорошо разработанные алгоритмы (возникающие трудности связаны лишь с ростом объема необходимых вычислений).

Общую постановку задачи линейного программирования можно записать в более компактной форме, если воспользоваться следующим правилом.

Правило сокращенного суммирования. Для обозначения суммы чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

принята такая запись:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k,$$

где $\sum$ - знак суммирования, а k - индекс суммирования.

Это обозначение очень удобно:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{k=1}^n c_kx_k,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k.$$

А вот как выглядит запись общей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k x_k &\rightarrow \max, \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_k &\geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

2.4. Транспортная задача

Важный тип задач линейного программирования представляет *задача о перевозках*. Называется она так потому, что цель этой задачи заключается в минимизации полной стоимости перевозок известного количества товаров со складов к потребителю.

Сбалансированная задача - задача о перевозках, в которой общий объем товаров, готовых к отправлению, в точности равен объему товаров, который готовы принять в пунктах назначения.

Пример 1. Рассмотрим транспортную задачу, заданную таблицей

		В		Наличие
		1	2	
А	1	1	2	20
	2	2	1	10
Запрос		16	14	30

Решение. Пусть x_{ik} - искомое число единиц товара, пересылаемого из пункта A_i в пункт B_k . Тогда данные таблицы можно представить в следующем виде:

$$z = x_{11} + 2x_{12} + 2x_{21} + x_{22} \rightarrow \min$$

при условии, что

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 20, \\ x_{21} + x_{22} = 10, \\ x_{11} + x_{21} = 16, \\ x_{12} + x_{22} = 14, \\ x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \\ x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0 \end{cases}$$

Положим $x_{11} = t$ и выразим через t остальные переменные:

из первого уравнения: $x_{12} = 20 - t$,

из второго уравнения: $x_{21} = 16 - t$,

из третьего уравнения: $x_{22} = 10 - x_{21} = 10 - (16 - t) = t - 6$.

Тогда $z = t + 2(20 - t) + 2(16 - t) + t - 6 = 66 - 2t$.

Из того, что все x_{ik} не отрицательны, получаем, что переменная t должна удовлетворять одновременно следующим четырем неравенствам:

$$t \geq 0, \quad t \leq 20, \quad t \leq 16, \quad t \geq 6.$$

Тем самым, мы получили условие $6 \leq t \leq 16$.

Не трудно заметить, что $z = z_{\min} = 34$ при $t = 16$.

Ответ: $x_{11} = 16, \quad x_{12} = 4, \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = 10, \quad z_{\min} = 34$.

Пример 2. Компания имеет два товарных склада и трех оптовых покупателей. Известно, что общий объем запасов на складах составляет 300 тыс. единиц продукции и совпадает с общим объемом заказов покупателей.

		В			Наличие
		1	2	3	
А	1	8	5	6	120
	2	4	9	7	180
Запрос		70	140	90	300

Обозначим через x_{ik} количество товара, поставляемого со склада A_i покупателю B_k .

Тогда соответствующая транспортная задача может быть сформулирована следующим образом.

Минимизировать общую стоимость перевозок:

$$z = 8x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 9x_{22} + 7x_{23} \rightarrow \min$$

при условии, что

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 180, \\ x_{11} + x_{21} = 70, \\ x_{12} + x_{22} = 140, \\ x_{13} + x_{23} = 90, \\ x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad x_{13} \geq 0, \\ x_{21} \geq 0, \quad x_{22} \geq 0, \quad x_{23} \geq 0. \end{cases}$$

Получаем задачу линейного программирования, в которой основные ограничения вследствие того, что транспортная задача сбалансирована, являются равенствами.

Положим $x_{11} = u$, $x_{12} = v$ и выразим через u и v остальные переменные. Имеем

$$\begin{aligned} x_{13} &= 120 - u - v, \\ x_{21} &= 70 - u, \\ x_{22} &= 140 - v, \\ x_{23} &= 90 - x_{13} = 90 - (120 - u - v) = u + v - 30, \\ z &= 8u + 5v + 6(120 - u - v) + 4(70 - u) + 9(140 - v) + 7(u + v - 30) = 5u - 3v + 2050. \end{aligned}$$

Учитывая, что все перевозки должны получить неотрицательные значения, мы приходим к задаче

$$\begin{cases} 120 - u - v \geq 0, \\ 70 - u \geq 0, \\ 140 - v \geq 0, \\ u + v - 30 \geq 0, \\ u \geq 0, \quad v \geq 0, \end{cases} \quad z = 5u - 3v + 2050 \rightarrow \min.$$

которую можно решить графическим методом.

Выписанные неравенства определяют на плоскости (u, v) пятиугольник с вершинами $(30, 0)$, $(70, 0)$, $(70, 50)$, $(0, 120)$, $(0, 30)$.

Ответ: $x_{11} = 0$, $x_{12} = 120$, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 70$, $x_{22} = 20$, $x_{23} = 90$, $z_{\min} = 1690$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**1. Основная литература**

1. Карманов В.Г. Математическое программирование : Учеб. пособие / В.Г.Карманов. – 5-е изд. стер. – М.: Физматлит, 2001. – 264 с.

2. Дополнительная литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология : Учеб. пособие для вузов / Е.С.Вентцель .— 2-е изд.,стер. — М. : Высш. шк., 2001 .— 208с.

3. Периодические издания.

1. Журнал «Успехи математических наук».