

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинникова

---

---

# **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

---

---

Учебно-методическое пособие

Томск  
«Эль Контент»  
2012

УДК [512.64 + 514.12](075.8)  
ББК 22.143я73 + 22.151.5я73  
М123

Рецензенты:

**Свищенко В. В.**, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики  
Сибирского государственного медицинского университета;  
**Ивлев Е. Т.**, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики  
Томского политехнического университета.

**Магазинников Л. И.**

М123 Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебно-методическое  
пособие / Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинникова. — Томск : Эль Контент,  
2012. — 86 с.

В пособие включены методические указания, в которых приведены решения типичных задач, подобных вошедшим в контрольные работы. Разобраны решения задач по линейной алгебре и аналитической геометрии в объёме, предусмотренном ныне действующими программами. Отличительной особенностью является широкое использование матричного аппарата. Приведены задания для самостоятельного решения и варианты текстовой контрольной работы №2.

Для студентов, обучающихся по заочной и дистанционной формам.

УДК [512.64 + 514.12](075.8)  
ББК 22.143я73 + 22.151.5я73

© Магазинников Л. И.,  
Магазинникова А. Л., 2012  
© Оформление.  
ООО «Эль Контент», 2012

# Оглавление

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Предисловие</b>                                          | <b>4</b>  |
| <b>1 Методические указания (контрольная работа №1)</b>      | <b>5</b>  |
| 1.1 Действия над матрицами . . . . .                        | 5         |
| 1.2 Вычисление определителей . . . . .                      | 8         |
| 1.3 Обратная матрица. Матричные уравнения . . . . .         | 12        |
| 1.4 Ранг матрицы . . . . .                                  | 18        |
| 1.5 Переход от одного базиса к другому . . . . .            | 25        |
| 1.6 Решение систем линейных уравнений . . . . .             | 27        |
| 1.7 Алгебра геометрических векторов . . . . .               | 31        |
| 1.8 Линейные операторы . . . . .                            | 35        |
| <b>2 Методические указания (контрольная работа №2)</b>      | <b>45</b> |
| 2.1 Прямая линия на плоскости (задачи 1 и 2) . . . . .      | 45        |
| 2.2 Плоскость (задача 3) . . . . .                          | 50        |
| 2.3 Прямая в пространстве (задачи 4, 5, 6) . . . . .        | 54        |
| 2.4 Окружность. Сфера (задача 7) . . . . .                  | 64        |
| 2.5 Эллипс. Гипербола. Парабола (задачи 8, 9, 10) . . . . . | 66        |
| <b>3 Контрольные работы</b>                                 | <b>74</b> |
| 3.1 О самоконтроле при выполнении работ . . . . .           | 74        |
| 3.2 Требования к оформлению работ . . . . .                 | 75        |
| 3.3 Контрольная работа № 2 . . . . .                        | 75        |

---

# ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Данное учебно-методическое пособие написано, чтобы оказать помощь студентам при выполнении контрольных работ. В первой главе рассмотрены методы и примеры решения задач по линейной алгебре. Во второй главе разобраны задачи по аналитической геометрии. Также в этих главах предложены задания для самостоятельного решения. В третьей главе приведены десять вариантов заданий контрольной работы №2.

Все ссылки на формулы и разделы для изучения теоретического материала даны по учебному пособию Магазинников Л. И., Магазинникова А. Л. “Линейная алгебра и аналитическая геометрия” 2012 года издания.

В пособии предусмотрена возможность выполнения контрольных работ в режиме автоматизированного самоконтроля с помощью устройства “Символ” или его компьютерного аналога. Каждая задача снабжена буквенно-цифровыми кодами (в круглых скобках) для проверки правильности ответов с помощью системы “Символ”. Тем студентам, у которых нет возможности работать с устройством “Символ”, эти коды не нужны.

---

# Глава 1

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ (КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1)

---

### 1.1 Действия над матрицами

Для успешного решения задачи 1 необходимо изучить подразделы 1.1 — 1.2 и рассмотренные там примеры.

**1.1.1** Даны матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ . Какие из произведений

$AB^T$ ,  $B^T A$ ,  $A^T B$ ,  $BA^T$  определены для данных матриц? Вычислите эти произведения.

*Решение.* Матрица  $A$  имеет размер  $3 \times 2$ ,  $B$  —  $(2 \times 2)$ . Транспонирование матрицы — операция замены строк матрицы  $A$  её столбцами с теми же номерами, поэтому размеры транспонированных матриц  $A^T$  —  $2 \times 3$ ,  $B^T$  —  $(2 \times 2)$ . Проверяем указанные пары матриц на согласованность по размерам:

$A$ ,  $B^T$  ( $3 \times 2$ ), ( $2 \times 2$ ) согласованы       $B^T$ ,  $A$  ( $2 \times 2$ ), ( $3 \times 2$ ) не согласованы

$A^T$ ,  $B$  ( $2 \times 3$ ), ( $2 \times 2$ ) не согласованы       $B$ ,  $A^T$  ( $2 \times 2$ ), ( $2 \times 3$ ) согласованы.

Видим, что определены два произведения матриц  $AB^T$  и  $BA^T$ . Матрица  $AB^T$  имеет размер  $(3 \times 2)$ .

$$AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-5) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 \\ -2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-5) & -2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 3 \\ -1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-5) & -1 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 19 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Матрица } BA^T \text{ имеет размер } (2 \times 3). \quad BA^T &= \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (-2) \cdot 1 + (-5) \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) + (-5) \cdot (-3) & (-2) \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 \\ (-4) \cdot 1 + 3 \cdot 2 & (-4) \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) & (-4) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -12 & 19 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

**1.1.2** Найдите матрицу  $D = 2AC - 4AB$ , если:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

В ответе запишите сумму элементов матрицы  $D$ .

*Решение.* Обратим внимание на то, что в выражении  $2AC + (-4)AB$  матрица  $A$  находится слева от матрицы  $C$  в первом слагаемом и слева от матрицы  $B$  во втором слагаемом. Поэтому, используя свойство операций над матрицами  $A(\lambda_1 B + \lambda_2 C) = \lambda_1 AB + \lambda_2 AC$ , матрицу  $A$  можем вынести за скобки влево и записать  $D = A(2C + (-4)B)$ . Для вычисления матрицы  $D$  потребуется выполнить две операции умножения матрицы на число, одну операцию сложения матриц и одну операцию умножения матриц. Выполняем умножение матрицы на число:

$$\begin{aligned}
 2C &= 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}, \\
 (-4)B &= -4 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \cdot (-2) & -4 \cdot (-5) \\ -4 \cdot (-4) & -4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 16 & -12 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Поскольку матрицы  $2C$  и  $(-4)B$  одинакового размера  $(2 \times 2)$ , их сумма определена и равна:

$$2C + (-4B) = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 16 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 8 & -8 + 20 \\ -6 + 16 & 2 - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $A$  имеет размер  $(3 \times 2)$ , матрица  $(2C + (-4)B)$  имеет размер  $(2 \times 2)$ . Следовательно, произведение матриц  $A \cdot (2C + (-4)B)$  определено и матрица  $D$  имеет размер  $(3 \times 2)$ :

$$\begin{aligned}
 D &= A(2C - 4B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 10 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot (-10) \\ (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 10 & (-2) \cdot 12 + (-3) \cdot (-10) \\ (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 10 & (-1) \cdot 12 + 0 \cdot (-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -8 \\ -38 & 6 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Сумма элементов матрицы  $D$  равна  $24 - 8 - 38 + 6 - 4 - 12 = -32$ .

*Ответ:*  $-32$

**1.1.3** Найдите матрицу  $D = AC + 3CB$ , если:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

В ответе запишите сумму элементов матрицы  $D$ .

*Решение.* В первом слагаемом выражения  $AC + 3CB$  матрица  $C$  находится справа, а во втором —  $C$  слева. Так как в общем случае  $AC \neq CA$ , а  $CB \neq BC$  (умножение матриц не обладает свойством коммутативности), то в выражении  $AC + 3CB$  матрицу  $C$  за скобки вынести нельзя. Для вычисления матрицы  $D = AC + 3CB$  потребуется выполнить две операции умножения матриц, одну операцию умножения матрицы на число, одну операцию сложения матриц.

Матрица  $A$  имеет размер  $(2 \times 2)$ , матрица  $C$  имеет размер  $(2 \times 2)$ . Следовательно, произведение матриц  $AC$  определено и матрица  $AC$  имеет размер  $(2 \times 2)$ :

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-6 & -2-3 \\ 16+10 & -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 26 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $C$  имеет размер  $(2 \times 2)$ , матрица  $B$  имеет размер  $(2 \times 2)$ . Следовательно, произведение матриц  $CB$  определено и матрица  $CB$  имеет размер  $(2 \times 2)$ :

$$CB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 8+4 \\ 2-3 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим матрицу  $CB$  на число 3:

$$3CB = 3 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 36 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Размеры матриц  $AC$  и  $CB$  совпадают  $(2 \times 2)$ , их сумма определена и равна:

$$D = AC + 3CB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 26 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 36 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+21 & -5+36 \\ 26-3 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 31 \\ 23 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим сумму элементов матрицы  $D$ :  $23 + 31 + 23 + 1 = 78$ .

*Ответ:* 78.



### Задачи для самостоятельного решения

**1.1.4** Даны матрицы  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ . Найдите матрицу  $C = 2A - 3B$ . В ответ запишите сумму элементов матрицы  $C$ .

*Ответ:* 3.

**1.1.5** Даны матрицы  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$  и  $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ . Найдите матрицы  $C = A \cdot B$  и  $D = B \cdot A$ .

Ответ:  $C = \begin{bmatrix} -4 & 19 \\ -14 & -4 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 14 & 18 & -13 \\ -20 & -20 & 14 \\ 20 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$

1.1.6 Дано произведение матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Укажите значения  $x_2, x_3, y_1$ .

Ответ: 6; -7; 17.

1.1.7 Дано произведение матриц:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 16 & 24 & 8 \\ 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите следующие элементы матрицы  $C$ :  $c_2^4, c_3^1, c_1^3$ .

Ответ:  $c_2^4 = 0, c_3^1 = -8, c_1^3 = 0$ .

## 1.2 Вычисление определителей

Необходимо изучить подразделы 1.5 – 1.7. Необходимо уметь вычислять определители второго и третьего порядка, знать свойства определителей  $n$ -го порядка, уметь разлагать определитель по элементам строки или столбца.

1.2.1 Вычислите определитель  $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$

Решение. В подразделе 1.5 показано, что определитель второго порядка вычисляют по формуле  $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$ . Пользуясь этим правилом, находим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11.$$

Ответ: 11.

1.2.2 Вычислите определитель  $D = \begin{vmatrix} 4 & -27 \\ -25 & 90 \end{vmatrix}.$

Решение. Для того, чтобы не усложнять вычисления, воспользуемся свойством определителя: “Общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) можно вынести за знак определителя”. Из второго столбца вынесем общий множитель 9, затем из второй строки вынесем множитель 5:

$$D = 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -25 & 10 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 2 - (-3) \cdot (-5)) = 9 \cdot 5 \cdot (-7) = -315.$$

Ответ: -315.

1.2.3 Вычислите определитель  $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$

*Решение.* При вычислении определителя третьего порядка можно использовать два способа: правило “треугольников” и разложение определителя по строке (столбцу). Приведём оба способа вычисления этого определителя.

*Первый способ.* По правилу “треугольников”, описанному в подразделе 1.5, находим:

$$D = 1 \cdot 4 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 5 \cdot 1 = \\ = -16 + 45 + 4 - 24 + 24 - 5 = 28.$$

*Второй способ.* Для того, чтобы свести вычисление определителя третьего порядка к вычислению одного определителя второго порядка, следует получить в одной строке или в столбце определителя два нуля. Выбор конкретной строки или столбца для разложения зависит от чисел, образующих определитель. В данном определителе имеется два элемента, равных единице:  $a_1^1 = 1$  и  $a_2^3 = 1$ . Это позволяет выполнить разложение по первой строке, по первому столбцу, по третьей строке и по второму столбцу. По трудоёмкости эти варианты равноценны. Выполним разложение определителя по первому столбцу.

Используем свойство определителя: “Определитель не изменится, если к какой-либо строке прибавить другую, умноженную на любое число”, чтобы получить в первом столбце два нуля. Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на  $(-2)$  (результат запишем во вторую строку). К третьей строке прибавим первую строку, умноженную на  $(-3)$  (результат запишем в третью строку):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 + (-2) \cdot 1 & 4 + (-2) \cdot 3 & 5 + (-2) \cdot 2 \\ 3 + (-3) \cdot 1 & 1 + (-3) \cdot 3 & -4 + (-3) \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix}.$$

Выполняем разложение по первому столбцу:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} = 20 + 8 = 28.$$

*Ответ:* 28.



.....

Проводя преобразования, мы применяли свойство определителя: определитель не изменится, если к какой-либо его строке прибавить другую, умноженную на некоторое число. Иногда допускают ошибку, записывая результат преобразований не в ту строку. Например, если в предыдущей задаче выполнить преобразование: к первой строке, умноженной на  $(-2)$ , прибавить вторую и записать результат в первую строку, то определитель изменится и станет равным  $(-2) \cdot D$ . Обратите на это внимание и не допускайте подобной ошибки.

.....

**1.2.4** Вычислите определитель  $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

*Решение.* При вычислении определителя четвертого порядка следует использовать разложение определителя по строке (столбцу). В данном случае самым простым будет разложение по третьему столбцу, так как в нём уже есть два нуля, а элемент  $a_3^4 = 4$  кратен  $a_3^3 = 2$ . К четвертой строке прибавим третью строку, умноженную на  $(-2)$ :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 + (-2) \cdot 5 & 4 + (-2) \cdot 5 & 4 + (-2) \cdot 2 & 5 + (-2) \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ -7 & -6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Выполним разложение полученного определителя по третьему столбцу:

$$D = 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -7 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка вычислим с помощью разложения по первой строке, поскольку нули удобно получить из элементов первого и третьего столбцов первой строки. Для этого к первому столбцу прибавим третий (результат запишем в первый столбец) и к третьему столбцу прибавим второй, умноженный на 2, (результат запишем в третий столбец):

$$D = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 + (-2) & 1 & -2 + 2 \cdot 1 \\ 1 + (-2) & 3 & -2 + 2 \cdot 3 \\ -7 + (-3) & -6 & -2 + 2 \cdot (-6) \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -10 & -6 & -15 \end{vmatrix}.$$

Теперь раскладываем полученный определитель по первой строке и заканчиваем вычисления:

$$D = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -10 & -15 \end{vmatrix} = -2 \cdot ((-1) \cdot (-15) - 4 \cdot (-10)) = -110.$$

*Ответ:*  $-110$ .



В решениях предыдущих задач были подробно описаны все действия над элементами определителя. При решении задач контрольной работы вычисления можно выполнять в уме и записывать текст решения менее подробно, как это сделано в следующей задаче.

**1.2.5** Вычислите определитель  $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -4 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

*Решение.* В данном определителе легко получить сразу два нуля во второй или четвертой строках. Прибавим ко второй строке четвертую, умноженную на  $(-1)$ :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Получать третий ноль во второй строке неудобно, поскольку число 9 не кратно 2 и придётся вводить дробный множитель  $\left(-\frac{9}{2}\right)$  либо  $\left(-\frac{2}{9}\right)$ . Поэтому выполним разложение определителя по второму столбцу (там есть элемент, равный единице). Прибавим к третьей строке первую, умноженную на  $(-5)$ , к четвёртой строке — первую, умноженную на  $(-4)$ . Затем разложим определитель по второму столбцу:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ -5 & 0 & 17 & 14 \\ -5 & 0 & 16 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -9 \\ -5 & 17 & 14 \\ -5 & 16 & 13 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе третьего порядка прибавим ко второй строке третью, умноженную на  $(-1)$ , и разложим определитель по первому столбцу:

$$D = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 16 & 13 \end{vmatrix} = -(-5) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot ((-2) \cdot 1 - (-9) \cdot 1) = 35.$$

Ответ: 35.



### Задачи для самостоятельного решения

**1.2.6** Вычислите следующие определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Ответ:  $D_1 = 18$ ,  $D_2 = -12$ .

**1.2.7** Решите уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x^2 - 4 & 4 \\ x - 2 & x + 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x - 1 & -x + 6 \\ x - 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: а)  $-4; 0; 2$ ; б)  $-3; 1; 2$ .

**1.2.8** Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -2 & 9 & -2 \\ -13 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 14 & 10 & 27 \\ 21 & -25 & -18 \end{vmatrix}.$$

Ответ:  $D_1 = -12$ ,  $D_2 = 60$ ,  $D_3 = 5880$ .

**1.2.9** Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ:  $D_1 = 135$ ,  $D_2 = -16$ .

1.2.10 Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2/3 & 3/8 & -3 & 4 \\ 2/3 & 1/8 & -1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 & 0 \\ 2/3 & 3/8 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8/3 & 7/5 & 2/5 & 0 \\ -8/3 & 2/5 & 7/5 & 10 \\ 4/3 & 4/5 & 4/5 & 5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ:  $D_1 = 2$ ;  $D_2 = 24$ .

## 1.3 Обратная матрица. Матричные уравнения

Необходимо изучить подразделы 1.8 и 1.9, научиться находить обратную матрицу и решать простейшие матричные уравнения.

1.3.1 Дана матрица  $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ . Докажите, что она имеет обратную матрицу, и найдите её.

*Решение.* Для того, чтобы доказать, что матрица  $A$  имеет обратную, вычислим определитель матрицы  $A$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 6 \cdot (-3) = 8.$$

Так как  $\det A = 8 \neq 0$ , матрица  $A$  невырожденная, а потому имеет обратную.

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы  $A$ , используя теорему о связи алгебраического дополнения и минора:

- $A_1^1 = (-1)^{1+1}M_1^1$ . Минор  $M_1^1$  получим, если в матрице  $A$  вычеркнем первую строку и первый столбец, следовательно,  $M_1^1 = -2$  и  $A_1^1 = (-1)^{1+1} \cdot (-2) = -2$ .
- $A_1^2 = (-1)^{1+2}M_2^1$ . Минор  $M_2^1$  получим, если в матрице  $A$  вычеркнем первую строку и второй столбец, следовательно,  $M_2^1 = -3$  и  $A_1^2 = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3$ .
- $A_2^1 = (-1)^{2+1}M_1^2$ . Минор  $M_1^2$  получим, если в матрице  $A$  вычеркнем вторую строку и первый столбец, следовательно,  $M_1^2 = 6$  и  $A_2^1 = (-1)^{2+1} \cdot 6 = -6$ .
- $A_2^2 = (-1)^{2+2}M_2^2$ . Минор  $M_2^2$  получим, если в матрице  $A$  вычеркнем вторую строку и второй столбец, следовательно,  $M_2^2 = 5$  и  $A_2^2 = (-1)^{2+2} \cdot 5 = 5$ .

Элементы присоединённой матрицы  $A^*$  определяем по формуле  $a^{*j} = A_i^j$  (обратите внимание, что алгебраические дополнения элементов одной строки матрицы

$A$  мы записываем в столбец матрицы  $A^*$ ):  $A^* = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ .

Вычисляем обратную матрицу:  $A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & -3/4 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$ .



.....  
Если все элементы присоединённой матрицы не кратны  $\det A$ , то множитель  $\frac{1}{\det A}$  можно оставить за скобками и не выполнять умножение матрицы на число  $\frac{1}{\det A}$ .  
.....

Проверить результаты можно, найдя произведение  $A \cdot A^{-1}$  или  $A^{-1} \cdot A$ . В любом случае должна получиться единичная матрица  $E$ .

$$\begin{aligned} \text{Проверка: } A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 & 5 \cdot (-6) + 6 \cdot 5 \\ -3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 & -3 \cdot (-6) + (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обратная матрица найдена верно.

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & -3/4 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}.$$

**1.3.2** Дана матрица  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ . Докажите, что она имеет обратную

матрицу, и найдите её.

*Решение.* Вычислим  $\det A$ . Для этого прибавляем к первой строке третью, умноженную на 5, ко второй строке третью, умноженную на 2, а затем выполняем разложение определителя по третьему столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -29 & 0 \\ 10 & -16 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 18 & -29 \\ 10 & -16 \end{vmatrix} =$$

$$= -(18 \cdot (-16) - 10 \cdot (-29)) = -2.$$

Так как  $\det A = -2 \neq 0$ , то матрица  $A$  невырождена, а поэтому имеет обратную.

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_1^1 &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}; & A_1^2 &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}; & A_1^3 &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}; \\ A_2^1 &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; & A_2^2 &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; & A_2^3 &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \\ A_3^1 &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}; & A_3^2 &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}; & A_3^3 &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисляем все определители второго порядка и записываем присоединённую матрицу  $A^*$ . Её элементы – алгебраические дополнения элементов строк матрицы  $A$ , мы записываем в столбцы матрицы  $A^*$ . Поделив найденные элементы присоединенной матрицы на определитель  $\det A = -2$ , получим  $A^{-1}$ :

$$A^* = \begin{bmatrix} 16 & -29 & 22 \\ 10 & -18 & 14 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 16 & -29 & 22 \\ 10 & -18 & 14 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверить результаты можно, найдя произведение  $A \cdot A^{-1}$  или  $A^{-1} \cdot A$ . В любом случае должна получиться единичная матрица  $E$ .

$$\begin{aligned} \text{Проверка. } A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -24 + 20 + 5 & \frac{87}{2} - 36 - \frac{15}{2} & -33 + 28 + 5 \\ -32 + 30 + 2 & 58 - 54 - 3 & -44 + 42 + 2 \\ -24 + 25 - 1 & \frac{87}{2} - 45 + \frac{3}{2} & -33 + 35 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обратная матрица найдена верно.

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**1.3.3** Найдите матрицу  $X$ , если  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$ .

*Решение.* Обозначим  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$ . Тогда данное уравнение можно записать в виде  $A \cdot X = B$ . Так как  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , то матрица  $A$  невырожденная, имеет обратную и  $X = A^{-1}B$  (см. подраздел 1.9). Находим алгебраические дополнения:

$$A_1^1 = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \quad A_1^2 = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \quad A_2^1 = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3, \quad A_2^2 = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

и матрицу  $A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ . Вычисляем матрицу  $X$ :

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 32 - 36 & 4 + 2 \\ -24 + 18 & -3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Проверка.* Подставим матрицу  $X$  в левую часть данного уравнения (вычислим произведение матриц  $A \cdot X$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 6 & -3 + 4 \\ 6 + 12 & -9 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

В результате получили матрицу  $B$  (правую часть данного уравнения). Видим, что подстановка матрицы  $X$  в уравнение обращает его в тождество. Матрица  $X$  найдена верно.

$$\text{Ответ: } X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

**1.3.4** Найдите матрицу  $X$ , если  $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$ .

*Решение.* Обозначим  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$ . Тогда данное уравнение

можно записать в виде  $X \cdot A = B$ . Матрица  $A$  в этой задаче такая же, как в задаче 7.3.3, поэтому  $A^{-1}$  заново вычислять не будем. Матрицу  $X$  находим по формуле  $X = BA^{-1}$  (см. подраздел 1.9):

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 32-3 & -16+1 \\ 72+3 & -36-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14,5 & 7,5 \\ -37,5 & 18,5 \end{bmatrix}.$$

*Проверка.*

$$XA = \begin{bmatrix} -14,5 & 7,5 \\ -37,5 & 18,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14,5 + 22,5 & -29 + 30 \\ -37,5 + 55,5 & -75 + 74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $X$  удовлетворяет данному уравнению, следовательно, найдена верно.

*Ответ:*  $X = \begin{bmatrix} -14,5 & 7,5 \\ -37,5 & 18,5 \end{bmatrix}.$

**1.3.5** Решите матричное уравнение  $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

*Решение.* Обозначим  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Тогда данное

уравнение можно записать в виде  $AX = B$ . Выясним, существует ли  $A^{-1}$ . Вычисляем  $\det A$  с помощью разложения по третьему столбцу (первую строку прибавим ко второй, первую строку, умноженную на  $(-3)$ , прибавим к третьей):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -12.$$

Так как  $\det A = -12 \neq 0$ , матрица  $A$  невырожденная, а потому имеет обратную  $A^{-1}$ . Для решения данного уравнения необходимо найти  $A^{-1}$ . Записываем алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_1^1 &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, & A_1^2 &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7, & A_1^3 &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \\ A_2^1 &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, & A_2^2 &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, & A_2^3 &= (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, \\ A_3^1 &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, & A_3^2 &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, & A_3^3 &= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $A^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$

Умножая обе части данного уравнения на матрицу  $A^{-1}$  слева, получим  $X = A^{-1}B$  (см. подраздел 1.9):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 & -1 \\ -8 & -5 & 1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4-2 & -8-7 & -14-1 \\ -8+2 & -16-5 & -10+1 \\ -4+10 & -8-1 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -15 & -15 \\ -6 & -21 & -9 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы проверить, правильно ли найдена матрица  $X$ , подставим её в заданное уравнение.

$$\text{Проверка. } A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -15 & -15 \\ -6 & -21 & -9 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -12+18+6 & -30+63-9 & -30+27+3 \\ 18-12-6 & 45-42+9 & 45-18-3 \\ -6+12+18 & -15+42-27 & -15+18+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \\ 24 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы  $A$  и  $X$ , мы получили матрицу  $B$ . Матрица  $X$  найдена верно.

$$\text{Ответ: } X = \begin{bmatrix} -6 & -15 & -15 \\ -6 & -21 & -9 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

**1.3.6** Решите матричное уравнение  $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

*Решение.* Обозначим  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Тогда данное

уравнение можно записать в виде  $XA = B$ . Матрица  $A$  такая же, как в задаче 7.3.5, поэтому используем найденную там матрицу  $A^{-1}$  и найдём  $X = B \cdot A^{-1}$ .

$$X = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 4+16 & 7+10 & 1-2 \\ 8+8 & 5+2 & -1-10 \\ 8+4 & 14+1 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -17 & 1 \\ -16 & -7 & 11 \\ -12 & -15 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Проверка.*  $X \cdot A = \begin{bmatrix} -20 & -17 & 1 \\ -16 & -7 & 11 \\ -12 & -15 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -40+51+1 & 60-34-2 & -20+17+3 \\ -32+21+11 & 48-14-22 & -16+7+33 \\ -24+45+3 & 36-30-6 & -12+15+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \\ 24 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате получили матрицу  $B$  (правую часть данного уравнения). Видим, что подстановка матрицы  $X$  в уравнение обращает его в тождество. Матрица  $X$  найдена верно.

Ответ:  $X = \begin{bmatrix} -20 & -17 & 1 \\ -16 & -7 & 11 \\ -12 & -15 & 3 \end{bmatrix}$ .



### Задачи для самостоятельного решения

**1.3.7** Докажите, что матрица  $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$  имеет обратную, и найдите её. Выполните проверку.

Ответ:  $\frac{1}{19} \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ .

**1.3.8** Докажите, что матрица  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  имеет обратную, и найдите её. Выполните проверку.

Ответ:  $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ -5 & -11 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ .

**1.3.9** Докажите, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет обратную. Найдите элементы обратной матрицы  $b_2^1, b_3^2, b_4^3, b_3^4$ .

Ответ:  $\det A = -132, b_2^1 = \frac{2}{33}, b_3^2 = \frac{27}{22}, b_4^3 = \frac{26}{33}, b_3^4 = -\frac{1}{22}$ .

**1.3.10** Решите матричные уравнения:  $AX_1 = B$  и  $X_2 \cdot A = B$ , если  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ . Выполните проверку.

Ответ:  $X_1 = \begin{bmatrix} -11 & 11 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} -22 & 13 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}$ .

**1.3.11** Решите матричные уравнения:

а)  $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$  б)  $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$

Выполните проверку.

$$\text{Ответ: а) } \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ -1 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}; \text{ б) } \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -40 & 27 & 8 \end{bmatrix}.$$

**1.3.12** Найдите решения следующих систем линейных уравнений, записанных в матричной форме:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## 1.4 Ранг матрицы

Необходимо изучить подразделы 2.2, 2.5 и знать определения понятий линейной комбинации векторов, линейно зависимой и линейно независимой систем векторов, ранга матрицы. Следует запомнить преобразования, не меняющие ранга матрицы. Очень важна теорема о базисном миноре и её следствия.

**1.4.1** Найдите ранг матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 6 & 1 & 10 \\ 5 & 12 & 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Выполним преобразования матрицы  $A$ , не меняющие ее ранга. В результате мы должны получить матрицу того же ранга, что и матрица  $A$ , в которой легко выделить базисный минор. Сначала получим нули в первом столбце матрицы. Первую строку, умноженную на  $(-2)$ , прибавим ко второй строке; первую строку, умноженную на  $(-4)$ , прибавим к третьей строке; первую строку, умноженную на  $(-5)$ , прибавим к четвертой строке. В результате получим новую матрицу  $A_1$  того же ранга, что и матрица  $A$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & -15 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & -10 & 4 \end{bmatrix}.$$

В матрице  $A_1$  вторая и четвертая строки пропорциональны (с коэффициентом 2). Одну из них можно вычеркнуть, не меняя ранга матрицы. Вычеркнем, например, четвертую строку. Получим матрицу  $A_2$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & -15 & 6 \end{bmatrix}.$$

Вторую строку матрицы  $A_2$ , умноженную на  $(-3)$ , прибавим к третьей строке:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Мы получили трапецеидальную матрицу  $A_3$  размера  $(3 \times 5)$ ,  $\text{rang } A \leq 3$ . Выделим в матрице  $A_3$  минор, включая в него элементы первого, второго и третьего столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-5) = -5 \neq 0.$$

Мы выбрали базисный минор третьего порядка, следовательно, ранг матрицы  $A_3$ , а потому и  $A$ , равен трём.

*Ответ:*  $\text{rang } A = 3$ .

**1.4.2** Найдите те значения параметра  $p$ , если они существуют, при которых строки матрицы  $A$  линейно зависимы:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & p \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Матрица  $A$  квадратная. Поэтому линейная зависимость строк равносильна условию  $\det A = 0$ . Вычислим определитель матрицы  $A$ . Для этого вторую строку, умноженную на  $(-3)$ , прибавим к первой; вторую строку, умноженную на  $(-5)$ , прибавим к четвёртой:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 0 & 10 & -10 & p-5 \end{vmatrix}.$$

Уже сейчас можно заметить, что при  $p = 7$  первая и четвёртая строки определителя совпадут и он будет равен нулю. Одно значение параметра  $p$  найдено. Но, возможно,  $\det A = 0$  и при других значениях  $p$ . Продолжим вычисление определителя. Вычтем первую строку из четвёртой и выполним разложение определителя по четвёртой строке:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & p-7 \end{vmatrix} = (p-7)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 1 & -3 & 4 \\ 15 & -3 & 14 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе третьего порядка вынесем множитель 10 из первой строки. Вторую строку, умноженную на  $(-15)$ , прибавим к третьей:

$$\det A = 10(p-7) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 42 & -46 \end{vmatrix}.$$

Выполним разложение по первому столбцу:

$$\det A = 10(p-7) \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 42 & -46 \end{vmatrix} = -10(p-7)(-46+42) = 40(p-7).$$

Итак,  $\det A = 40(p-7)$ , а значит,  $\det A = 0$  только при  $p = 7$ .

*Ответ:* строки матрицы  $A$  линейно зависимы при  $p = 7$ .

**1.4.3** Докажите, что третья строка матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

является линейной комбинацией первых двух. Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

*Решение.* Выполним преобразования матрицы  $A$ , не меняющие её ранга. Первую строку, умноженную на  $(-3)$ , прибавляем ко второй, а первую строку, умноженную на 5, прибавляем к третьей:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

В полученной матрице вторая и третья строки пропорциональны (коэффициент пропорциональности  $(-2)$ ). Вычеркнем третью строку:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}.$$

Минор  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \neq 0$  — базисный. Первые две строки, которые попали в базисный минор, являются базисными. Третья строка в состав базисных не попала. По теореме о базисном миноре, она является линейной комбинацией первых двух. Итак, мы доказали, что третья строка матрицы  $A$  является линейной комбинацией первых двух.

Обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  коэффициенты этой линейной комбинации. Тогда,

$$\lambda_1 \cdot (1, -2, 4) + \lambda_2 \cdot (3, 1, 5) = (-5, -4, -6) \text{ и } (\lambda_1 + 3\lambda_2, -2\lambda_1 + \lambda_2, 4\lambda_1 + 5\lambda_2) = (-5, -4, -6).$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = -5, \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = -4, \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = -6. \end{cases}$$

Первое уравнение системы, умноженное на 2, прибавляем ко второму и, умноженное на  $(-4)$ , прибавляем к третьему:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = -5, \\ 7\lambda_2 = -14, \\ -7\lambda_2 = 14. \end{cases}$$

Следовательно,  $\lambda_2 = -2$  и  $\lambda_1 = 1$ . Обратите внимание, что найденные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  обращают все три уравнения системы в тождества.

Ответ: 1; -2.

**1.4.4** Найдите то значение параметра  $p$ , при котором ранг матрицы  $A$  равен трём:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 18 & -12 & 7 & p \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Выполним элементарные преобразования матрицы  $A$ , не меняющие ее ранга. В результате мы должны получить матрицу того же ранга, что и матрица  $A$ , в которой легко выделить базисный минор. Сначала получим нули в первом столбце матрицы. Первую строку, умноженную на  $(-3)$ , прибавим ко второй строке и к четвертой строке; первую строку, умноженную на  $(-2)$ , прибавим к третьей строке. В результате получим новую матрицу  $A_1$  того же ранга, что и матрица  $A$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 12 & -6 & -2 & p-12 \end{bmatrix}.$$

Базисный минор пока не виден, поэтому продолжаем преобразования. Получим нули во втором столбце, в третьей и четвертой строках. Для этого вторую строку, умноженную на 5, прибавим к третьей строке и вторую строку, умноженную на  $(-12)$ , прибавим к четвертой строке. Получим матрицу  $A_2$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 21 & -23 & -54 \\ 0 & 0 & -42 & 46 & p+108 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы  $A_2$  не менее трех, так как минор третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 21 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 21 = 21$$

отличен от нуля. Также можно заметить, что третья и четвертая строки могут быть пропорциональны с коэффициентом  $(-2)$  при  $p = 0$ . Прибавим к четвертой строке третью строку, умноженную на 2. Получим матрицу  $A_3$ :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 21 & -23 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы  $A_3$  будет равен трём только в том случае, когда  $p = 0$ . Если  $p \neq 0$  определитель четвёртого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 21 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 21 \cdot p = 21p \neq 0.$$

Следовательно, при  $p \neq 0$  ранг матрицы  $A_3$  будет равен четырём.

Ответ:  $p = 0$ .

**1.4.5** Найдите те значения параметров  $p$  и  $q$ , если они существуют, при которых ранг матрицы  $A$  равен двум:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ p & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & q \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Выполним элементарные преобразования матрицы  $A$ , не меняющие ее ранга. В результате мы должны получить матрицу того же ранга, что и матрица  $A$ , в которой легко выделить базисный минор. Сначала получим нули в первом столбце матрицы. Первую строку, умноженную на  $(-3)$ , прибавим ко второй строке; первую строку, умноженную на  $(-p)$ , прибавим к третьей строке; первую строку, умноженную на  $(-5)$ , прибавим к четвертой строке. В результате получим новую матрицу  $A_1$  того же ранга, что и матрица  $A$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & -3 + 3p & 14 - 4p & 17 - p \\ 0 & 10 & -10 & q - 5 \end{bmatrix}.$$

Вторую строку матрицы  $A_1$  вычтем из четвертой:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & -3 + 3p & 14 - 4p & 17 - p \\ 0 & 0 & 0 & q - 7 \end{bmatrix}.$$

Так как минор второго порядка  $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10$  не равен нулю, то ранг матрицы  $A_2$  не меньше двух. Ранг будет равен двум, если ни третья, ни четвертая строки вместе с первыми двумя не попадут в состав базисного минора. Четвертая строка не войдёт в базисный минор только при  $q - 7 = 0$  или  $q = 7$ . Третья строка, для того чтобы не войти в базисный минор, должна быть пропорциональна второй, то есть

$$\frac{-3 + 3p}{10} = \frac{14 - 4p}{-10} = \frac{17 - p}{2} \quad \text{или} \quad -3 + 3p = -14 + 4p = 85 - 5p.$$

Решая уравнение  $-14 + 4p = 85 - 5p$ , получаем  $9p = 99$  и  $p = 11$ . При найденном значении  $p$  все части пропорции дают число 3, то есть третья строка пропорциональна со второй с коэффициентом 3.

Таким образом, мы показали — ранг матрицы  $A$  равен двум при  $p = 11$  и  $q = 7$ .

Ответ:  $p = 11, q = 7$ .

**1.4.6** В арифметическом линейном пространстве  $R_5$  даны векторы:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, -1, 2), \mathbf{a}_2 = (2, 3, 5, 1, 1), \mathbf{a}_3 = (5, 8, 13, 1, 4), \mathbf{a}_4 = (3, 4, 7, 3, 0).$$

Найдите размерность линейной оболочки  $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$  и какой-нибудь её базис.

*Решение.* Размерность линейной оболочки  $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$  совпадает с рангом матрицы  $A$ , составленной из координат векторов  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ . Записываем координаты векторов в столбцы матрицы, а затем выполняем преобразования, не меняющие ранга матрицы  $A$ . Первый столбец, умноженный на  $(-2)$ , прибавляем ко второму; первый столбец, умноженный на  $(-5)$ , прибавляем к третьему; первый столбец, умноженный на  $(-3)$ , прибавляем к четвёртому. В полученной матрице второй, третий и четвёртый столбцы пропорциональны. Любые два из них можно вычеркнуть, не изменив ранга матрицы. Вычеркнем третий и четвёртый столбцы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 13 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Видим, что минор второго порядка  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , следовательно, ранг матрицы  $A$  равен двум. Потому и размерность линейной оболочки  $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$  также равна двум. Первые два столбца матрицы  $A$  вошли в базисный минор. Это означает, что векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  линейно независимы. Поэтому в качестве базиса в  $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$  можно принять векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ .

Ответ: размерность линейной оболочки 2, базис  $\{\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2\}$ .



#### Задачи для самостоятельного решения

**1.4.7** Докажите, что ранг матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$  при любых значениях  $a, b, c, d$  не меньше двух.

**1.4.8** Докажите, что столбцы матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$  линейно зависимы.

**1.4.9** Докажите, что третья строка матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 13 & 17 & -9 \end{bmatrix}$  является линей-

ной комбинацией первых двух, и найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

Ответ:  $-2; 3$ .

1.4.10 Найдите ранг матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ .

Ответ: 2.

1.4.11 Укажите значения параметра  $p$ , если они существуют, при которых матрица  $A$  имеет наименьший ранг. Чему равен  $\text{rang } A$  при найденных значениях  $p$ ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & p \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ответ: при  $p = 7$   $\text{rang } A = 3$ .

1.4.12 Является ли система векторов:

$$\mathbf{a}_1 = (3, -3, 0, 7), \mathbf{a}_2 = (2, 2, 4, 7), \mathbf{a}_3 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{a}_4 = (5, -4, 1, 3)$$

линейно зависимой?

Ответ: система векторов является линейно зависимой.

1.4.13 Является ли система векторов:

$$\mathbf{a}_1 = (2, 2, -3, -4), \mathbf{a}_2 = (1, 2, 3, 5), \mathbf{a}_3 = (3, 4, -1, -4), \mathbf{a}_4 = (4, 7, 7, 3)$$

линейно зависимой?

Ответ: система векторов является линейно независимой.

1.4.14 Найдите размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки векторов  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$  арифметического пространства  $R_4$ .

Ответ: 3; например,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ .

## 1.5 Переход от одного базиса к другому

Необходимо изучить подраздел 2.8.

**1.5.1** Относительно канонического базиса в  $R_3$  даны четыре вектора:

$$f_1 = (-3, 1, 2), \quad f_2 = (1, -2, 3), \quad f_3 = (-2, 1, -1), \quad x = (-3, -2, 7).$$

Докажите, что векторы  $f_1, f_2, f_3$  можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора  $x$  относительно этого базиса.

*Решение.* Составим определитель, записав в его столбцах координаты векторов  $f_1, f_2, f_3$ :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель с помощью разложения по элементам третьего столбца. Вторую строку, умноженную на 2, прибавим к первой, вторую строку прибавим к третьей:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 + 9) = -8 \neq 0.$$

Так как найденный определитель не равен нулю, то векторы  $f_1, f_2, f_3$  линейно независимы, а потому могут быть приняты в качестве базиса в  $R_3$ .

Матрица перехода к новому базису:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $C$  невырожденная, а потому имеет обратную  $C^{-1}$ . Найдём её. Записываем алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_1^1 &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; & A_1^2 &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; & A_1^3 &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \\ A_2^1 &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; & A_2^2 &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; & A_2^3 &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \\ A_3^1 &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; & A_3^2 &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; & A_3^3 &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Записываем присоединённую матрицу:

$$C^* = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 7 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Так как  $\det C = -8$ , то:

$$C^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 7 & 11 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 5/8 & 3/8 \\ -3/8 & -7/8 & -1/8 \\ -7/8 & -11/8 & -5/8 \end{bmatrix}.$$

Новые координаты  $\eta^1, \eta^2, \eta^3$  вектора  $x$  находим по формуле (2.18).

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 7 & 11 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 + 10 - 21 \\ -9 - 14 + 7 \\ -21 - 22 + 35 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**1.5.2** Дана декартова система координат  $O, i, j$  и в ней точка  $M(-2, 3)$ . Новая декартова система  $O', i', j'$  получена параллельным переносом старой системы в новое начало  $O'(1, 2)$ . Найдите координаты точки  $M$  относительно новой системы координат.

*Решение.* По формулам (2.21), полагая в них  $a = 1, b = 2, x = -2, y = 3$ , находим:  $x' = -2 - 1 = -3, y' = 3 - 2 = 1$ . Следовательно, точка  $M$  в новой системе координат будет иметь координаты  $(-3, 1)$ .

*Ответ:*  $(-3, 1)$ .

**1.5.3** Дана декартова система координат  $O, i, j$  и в ней точка  $M(-2, 3)$ . Новая декартова система  $O', i', j'$  получена параллельным переносом в новое начало  $O'(1, 2)$  и последующим поворотом на угол  $60^\circ$ . Найдите координаты точки  $M$  относительно системы  $O', i', j'$ .

*Решение.* В задаче 1.5.2 мы нашли, что после параллельного переноса точка  $M$  будет иметь координаты  $(-3, 1)$ . По формулам (2.20), полагая в них  $x = -3, y = 1, \alpha = 60^\circ$ , находим:

$$x' = -3 \cdot \cos 60^\circ + 1 \cdot \sin 60^\circ = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2},$$

$$y' = -(-3) \cdot \sin 60^\circ + 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2}.$$

*Ответ:*  $\left( \frac{\sqrt{3} - 3}{2}, \frac{3\sqrt{3} + 1}{2} \right)$ .



### Задачи для самостоятельного решения

**1.5.4** Относительно канонического базиса в  $R_2$  даны три вектора  $f_1 = (1, 4), f_2 = (3, 2), x = (10, 10)$ . Докажите, что векторы  $f_1$  и  $f_2$  можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора  $x$  в этом базисе.

*Ответ:* 1; 3.

**1.5.5** Относительно канонического базиса в  $R_3$  даны четыре вектора:  $f_1 = (1, 3, 2), f_2 = (-3, -4, -5), f_3 = (2, -1, 3), x = (-2, 4, 6)$ . Докажите, что векторы  $f_1, f_2, f_3$  можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора  $x$  в этом базисе.

*Ответ:*  $(48, 30, 20)$ .

## 1.6 Решение систем линейных уравнений

Способы исследования и решения системы линейных уравнений описаны в главе 3. Приводим примеры решения систем.

**1.6.1** Докажите, что система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Неизвестное  $x_4$  найдите по формуле Крамера. Решите эту систему методом Гаусса.

*Решение.* Вычислим определитель основной матрицы системы с помощью разложения по элементам первого столбца. К четвёртой строке прибавим вторую строку, умноженную на  $(-1)$ , к третьей — первую, умноженную на  $(-1)$ , ко второй прибавим первую строку, умноженную на  $(-2)$ :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка разложим по элементам первого столбца. Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на  $(-1)$ , ко второй — первую, умноженную на 2:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(9 - (-5)) = -14.$$

Число уравнений  $m = 4$  совпадает с числом неизвестных  $n = 4$ ,  $D = -14 \neq 0$ , поэтому система совместная определённая, т.е. имеет единственное решение.

Неизвестное  $x_4$  найдём по формуле Крамера. Для этого записываем и вычисляем определитель  $D_4$  (в определителе  $D$  четвертый столбец заменим столбцом свободных членов). Преобразования проводим те же, что и при вычислении определителя  $D$ .

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 0 & -9 & -19 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -19 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(9 - (-19)) = -28.$$

По формуле Крамера  $x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{-28}{-14} = 2$ .

Решим данную систему методом Гаусса. Записываем расширенную матрицу системы и преобразуем её к трапецидальному виду, действуя только со строками. Преобразование проводим следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -28 \end{bmatrix}.$$

На первом шаге преобразований из четвертой строки вычли вторую, из третьей – первую, ко второй строке прибавили первую, умноженную на  $(-2)$ . На втором шаге из третьей строки вычли четвертую; к четвертой строке прибавили вторую, умноженную на 2. На третьем шаге к четвертой строке прибавили третью, умноженную на  $(-8)$ .

Элементы второй строки матрицы поделим на  $(-1)$ , элементы четвертой строки поделим на  $(-14)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запишем систему по преобразованной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ \quad x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 9, \\ \quad \quad -x_3 + x_4 = 1, \\ \quad \quad \quad x_4 = 2. \end{cases}$$

Подставляем  $x_4 = 2$  в третье уравнение:  $-x_3 + 2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ . Найденные неизвестные подставляем во второе уравнение:  $x_2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$ ,  $x_2 = -2$ . Осталось вычислить значение  $x_1$  из первого уравнения:  $x_1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4$ ,  $x_1 = 1$ . Получено решение:  $(1, -2, 1, 2)$ .

Ответ:  $x_4 = 2$ ;  $(1, -2, 1, 2)$ .

**1.6.2** Дана система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = -11. \end{cases}$$

Докажите, что эта система совместна, найдите её общее решение и частное решение, если  $x_3 = x_4 = 1$ ,  $x_5 = 3$ .

*Решение.* Выполним прямой ход метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы. Вычитаем первую строку из второй; первую строку, умноженную на  $(-5)$ , прибавляем к третьей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 & -11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -12 & -46 \end{bmatrix}.$$

Третья строка пропорциональна второй с коэффициентом 2. Её можно вычеркнуть.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{bmatrix}.$$

В качестве базисного выберем минор из элементов первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Отсюда следует, что ранг основной и расширенной матриц равен 2, следовательно, система совместна. Неизвестных в данной системе 5 (что больше ранга), поэтому система является неопределённой.

Согласно выбранному базисному минору неизвестные  $x_1$  и  $x_2$  приняты в качестве зависимых, а  $x_3, x_4, x_5$  — в качестве свободных. Далее для неопределённой системы следует записать общее решение. В нём каждое зависимое неизвестное должно быть выражено через свободные. Приводим базисный минор к диагональному виду. Вторую строку полученной матрицы умножаем на 2 и прибавляем к первой:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица является расширенной матрицей системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -16, \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -23, \end{cases}$$

эквивалентной исходной системе. Выражаем зависимые неизвестные  $x_1$  и  $x_2$  через свободные  $x_3, x_4, x_5$ :

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5, \end{cases} \quad \text{— общее решение системы.}$$

Полагая  $x_3 = x_4 = 1, x_5 = 3$ , находим  $x_1 = -16 + 1 + 1 + 15 = 1, x_2 = 23 - 2 - 2 - 18 = 1$ . Мы получили частное решение системы  $(1, 1, 1, 1, 3)$ .

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases} \quad (1, 1, 1, 1, 3).$$

**1.6.3** Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальные решения. Запишите общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решения.

*Решение.* В данной системе четыре уравнения и пять неизвестных. Размер матрицы системы  $(4 \times 5)$ , поэтому её ранг не может быть больше четырех. Следовательно, ранг матрицы системы заведомо меньше числа неизвестных (их в системе пять). По теореме 3 из подраздела 3.4 система имеет нетривиальные решения.

Выполним прямой ход метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы. Первую строку, умноженную на  $(-2)$ , прибавляем ко второй; первую строку, умноженную на  $(-7)$ , прибавляем к третьей; первую строку, умноженную на  $(-1)$ , прибавляем к четвертой:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 7 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Видим, что в полученной матрице вторая и четвертая строки совпадают, третья пропорциональна второй с коэффициентом 4. Вычеркнем третью и четвертую строки. Во второй строке сократим общий множитель 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Минор  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$  можно принять в качестве базисного. Тогда неизвестные  $x_1$  и  $x_2$  — зависимые, а  $x_3, x_4, x_5$  — свободные. Вторую строку полученной матрицы прибавляем к первой:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Выражаем зависимые неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5, \end{cases} \quad \text{— общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений содержит  $5 - 2 = 3$  решения (разность между числом неизвестных и рангом). Получаем три частных линейно независимых решения, придавая поочередно свободным неизвестным значения  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(0; 0; 1)$ :

$$\text{при } x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 \quad x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 0;$$

$$\text{при } x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 \quad x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 1;$$

$$\text{при } x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \quad x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 1.$$

Решения  $(-1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0, 0, 1)$  образуют фундаментальную систему решений. Любое другое решение является их линейной комбинацией.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5, \end{cases} \quad (-1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 1).$$



### Задачи для самостоятельного решения

1.6.4 Дана система:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Докажите, что она имеет единственное решение. Неизвестное  $x_2$  найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

Ответ:  $(0, -3, 3, 1)$ .

1.6.5 Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Докажите, что эта система совместна; найдите общее решение и частное решение при  $x_4 = 1$ .

Ответ:  $\begin{cases} x_1 = 2 - x_4, \\ x_2 = -1 + 2x_4, \\ x_3 = x_4, \end{cases} \quad (1, 1, 1, 1).$

1.6.6 Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальное решение. Запишите её общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

Ответ:  $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4, \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \end{cases} \quad (1, 1, 2, 0), (3, 1, 0, 2).$

## 1.7 Алгебра геометрических векторов

Необходимо изучить подразделы 4.1 — 4.6.

1.7.1 Найдите  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , если  $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{r}$ ,  $|\mathbf{p}| = 4$ ,  $r = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = (2/3)\pi$ .

*Решение.* Подставляем выражения для векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из условия задачи и применяем свойства скалярного произведения 2), 3) на первом шаге, 1), 4) на втором шаге преобразований  $((\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{r}), (\mathbf{p}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2, (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2)$ :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}, 3\mathbf{p} - \mathbf{r}) = 6(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 9(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - 2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - 3(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 6|\mathbf{p}|^2 + 7(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - 3|\mathbf{r}|^2.$$

Подставляем данные из условия задачи, вычисляем скалярное произведение  $(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 6|\mathbf{p}|^2 + 7|\mathbf{p}||\mathbf{r}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 3|\mathbf{r}|^2 = 6 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot 2^2 = 96 - 28 - 12 = 56.$$

Ответ: 56.

**1.7.2** Вычислите  $||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]||$ , если  $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{r}$ ,  $|\mathbf{p}| = 4$ ,  $|\mathbf{r}| = 2\sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = 135^\circ$ .

*Решение.* Подставляем выражения для векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из условия задачи. Используя свойства 4 и 5 векторного произведения, получим:

$$||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|| = ||[2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}, 3\mathbf{p} - \mathbf{r}]|| = |6[\mathbf{p}, \mathbf{p}] + 9[\mathbf{r}, \mathbf{p}] - 2[\mathbf{p}, \mathbf{r}] - 3[\mathbf{r}, \mathbf{r}]|.$$

Используем свойства  $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] = [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0$ ,  $[\mathbf{p}, \mathbf{r}] = -[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ :

$$||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|| = |0 + 9[\mathbf{r}, \mathbf{p}] + 2[\mathbf{r}, \mathbf{p}] + 0| = 11 ||[\mathbf{r}, \mathbf{p}]|| = 11|\mathbf{r}||\mathbf{p}| \sin 135^\circ = 11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 88.$$

Ответ: 88.

**1.7.3** Найдите  $|\mathbf{a}|$ , если  $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{r}$ ,  $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{r}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = 45^\circ$ .

*Решение.* Находим  $|\mathbf{a}|^2$  с помощью скалярного произведения. Подставляем выражения для векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из условия задачи и применяем свойства скалярного произведения 2), 3). Затем учтём, что  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$ ,  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2$ ,  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2$ :

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (4\mathbf{p} + \mathbf{r}, 4\mathbf{p} + \mathbf{r}) = 16(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 4(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + 4(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + 4(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 16|\mathbf{p}|^2 + 8(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + |\mathbf{r}|^2.$$

Подставляем данные из условия задачи, вычисляем скалярное произведение  $(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ :

$$|\mathbf{a}|^2 = 16\left(\sqrt{2}\right)^2 + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4^2 = 32 + 32 + 16 = 80.$$

Следовательно,  $|\mathbf{a}| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ .

Ответ:  $4\sqrt{5}$ .

**1.7.4** При каком значении  $\alpha$  векторы  $\mathbf{p} = \mathbf{c} + \alpha\mathbf{d}$  и  $\mathbf{r} = 2\mathbf{c} + 3\mathbf{d}$  перпендикулярны, если  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{d}}) = 120^\circ$ ?

*Решение.* Если векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  перпендикулярны, то  $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 0$ . Вычислим скалярное произведение. Подставляем выражения для векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  из условия задачи и применяем свойства скалярного произведения 2), 3):

$$(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (\mathbf{c} + \alpha\mathbf{d}, 2\mathbf{c} + 3\mathbf{d}) = 2(\mathbf{c}, \mathbf{c}) + 3(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + 2\alpha(\mathbf{d}, \mathbf{c}) + 3\alpha(\mathbf{d}, \mathbf{d}).$$

Учтём, что  $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{d}, \mathbf{c})$ ,  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = |\mathbf{c}|^2$ ,  $(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = |\mathbf{d}|^2$ . Затем подставляем данные из условия задачи, вычисляем скалярное произведение  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}, \mathbf{r}) &= 2|\mathbf{c}|^2 + (3 + 2\alpha)(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + 3\alpha|\mathbf{d}|^2 = 2 \cdot 4^2 + (3 + 2\alpha) \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ + 3\alpha \cdot 4^2 = \\ &= 32 - 8(3 + 2\alpha) + 48\alpha = 8 + 32\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, условие  $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 0$  равносильно  $8 + 32\alpha = 0$ . Отсюда  $\alpha = -1/4$ .

Ответ:  $-1/4$ .

**1.7.5** Даны координаты вершин треугольника  $ABC$ :  $A(1, -2, 1)$ ,  $B(0, -3, 2)$ ,  $C(2, 0, 1)$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$  и длину его высоты  $AH$ .

*Решение.* Известно, что величина  $|\llbracket \mathbf{AB}, \mathbf{AC} \rrbracket|$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{AC}$ . Поэтому площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{2}|\llbracket \mathbf{AB}, \mathbf{AC} \rrbracket|$ . Находим координаты векторов:

$$\mathbf{AB} = (0 - 1, -3 - (-2), 2 - 1) = (-1, -1, 1), \quad \mathbf{AC} = (2 - 1, 0 - (-2), 1 - 1) = (1, 2, 0).$$

$$\text{Вычисляем векторное произведение: } \llbracket \mathbf{AB}, \mathbf{AC} \rrbracket = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$\text{Тогда } |\llbracket \mathbf{AB}, \mathbf{AC} \rrbracket| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ и } S = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Найдём длину высоты  $AH$  треугольника  $ABC$ . Поскольку  $S = \frac{1}{2}|\mathbf{AH}| \cdot |\mathbf{BC}|$ , то  $|\mathbf{AH}| = \frac{2S}{|\mathbf{BC}|}$ . Вычисляем координаты вектора  $\mathbf{BC}$  и его модуль:

$$\mathbf{BC} = (2 - 0, 0 - (-3), 1 - 2) = (2, 3, -1), \quad |\mathbf{BC}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

$$\text{Окончательно, } |\mathbf{AH}| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad |\mathbf{AH}| = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

**1.7.6** Треугольная пирамида  $ABCD$  задана координатами своих вершин:  $A(-5, 1, 1)$ ,  $B(1, -2, -2)$ ,  $C(1, -1, -3)$ ,  $D(-1, -4, -1)$ . Вычислите а) объём  $V$  этой пирамиды, б) длину её высоты  $CH$ , в) косинус угла  $\varphi$  между рёбрами  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{AD}$ , г)  $\text{Pr}_{AB}\mathbf{AD}$ .

*Решение.* а) Можем сказать, что пирамида построена на векторах  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{AC}$ ,  $\mathbf{AD}$ . Её объём  $V = \frac{1}{6}|(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD})|$ . Находим координаты векторов:

$$\mathbf{AB} = (1 - (-5), -2 - 1, -2 - 1) = (6, -3, -3),$$

$$\mathbf{AC} = (1 - (-5), -1 - 1, -3 - 1) = (6, -2, -4),$$

$$\mathbf{AD} = (-1 - (-5), -4 - 1, -1 - 1) = (4, -5, -2).$$

Вычисляем смешанное произведение с помощью разложения определителя по третьему столбцу:

$$(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 6 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 3 = -18.$$

Вычисляем объем пирамиды:  $V = \frac{18}{6} = 3$ .

б) Объем пирамиды, как это известно из школьного курса,  $V = \frac{1}{3}Sh$ , тогда  $h = \frac{3V}{S}$ . Так как требуется найти высоту  $CH$ , то  $S$  — площадь грани  $ABD$ , которую находим так же, как в задаче 1.7.5:  $S = \frac{1}{2}|\mathbf{AB}, \mathbf{AD}|$ .

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{AD}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -3 & -3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 18\mathbf{k}.$$

$|\mathbf{AB}, \mathbf{AD}| = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{1+4} = 9\sqrt{5}$ , тогда  $S = \frac{9\sqrt{5}}{2}$ . В итоге:

$$|CH| = h = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{9\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

в) Косинус угла между векторами  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{AD}$  находим с помощью скалярного произведения:

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{AB}, \mathbf{AD})}{|\mathbf{AB}||\mathbf{AD}|} = \frac{6 \cdot 4 + (-3)(-5) + (-3)(-2)}{\sqrt{36+9+9} \cdot \sqrt{16+25+4}} = \frac{24+15+6}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{45}} = \frac{45}{9\sqrt{6 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

г) Проекцию вектора  $\mathbf{AD}$  на направление, определяемое вектором  $\mathbf{AB}$ , находим с помощью скалярного произведения:

$$\text{Пр}_{\mathbf{AB}} \mathbf{AD} = \frac{(\mathbf{AB}, \mathbf{AD})}{|\mathbf{AB}|} = \frac{6 \cdot 4 + (-3)(-5) + (-3)(-2)}{\sqrt{36+9+9}} = \frac{24+15+6}{\sqrt{54}} = \frac{45}{3\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: а) 3; б)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ; в)  $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ; г)  $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ .



### Задачи для самостоятельного решения

**1.7.7** Найдите скалярное произведение векторов  $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$ , где  $|\mathbf{p}| = 3$ ,  $|\mathbf{q}| = \sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \frac{\pi}{4}$ .

Ответ: 33.

**1.7.8** Найдите квадрат длины вектора  $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$  — единичные векторы, составляющие между собой углы, равные  $\frac{2}{3}\pi$ .

Ответ: 37.

**1.7.9** Найдите проекцию вектора  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .

Ответ: 2.

**1.7.10** Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{b} = 4\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$ , где  $|\mathbf{p}| = 4$ ,  $|\mathbf{q}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \frac{\pi}{6}$ .

Ответ: 92.

**1.7.11** Даны координаты вершин треугольника  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(3, -2, 2)$ ,  $C(1, -4, -1)$ . Найдите длину его высоты  $CH$ .

Ответ:  $9/\sqrt{5}$ .

**1.7.12** Даны координаты точек  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(6, 2, 0)$ ,  $C(4, 2, 1)$ ,  $D(4, 6, 0)$ . Найдите высоту  $DH$  пирамиды  $ABCD$ .

Ответ: 2.

## 1.8 Линейные операторы

Для решения этой задачи необходимо изучить подразделы 5.2 — 5.4.

**1.8.1** Операторы  $A$  и  $B$  действуют в пространстве  $V_3$  по законам  $A[\mathbf{x}] = [\mathbf{c}, \mathbf{x}]$ ;  $B[\mathbf{x}] = (-2x_3, -x_2, x_1)$ , где  $\mathbf{c} = (-1, 3, 2)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — произвольный вектор:

- докажите, что оператор  $A$  линеен;
- найдите координаты вектора  $A[\mathbf{c}]$ ;
- найдите координаты вектора  $B[\mathbf{c}]$ ;
- найдите матрицу композиции  $B \circ A$  в базисе  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

Решение.

а) Чтобы доказать, что оператор  $A$  линейный, надо проверить, что выполняется условие  $A[\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}] = \alpha A[\mathbf{x}] + \beta A[\mathbf{y}]$ . В нашем случае, используя свойства векторного произведения, находим:

$$A[\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}] = [\mathbf{c}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}] = \alpha[\mathbf{c}, \mathbf{x}] + \beta[\mathbf{c}, \mathbf{y}] = \alpha A[\mathbf{x}] + \beta A[\mathbf{y}],$$

т.е. оператор  $A$  линейный.

б) Поскольку  $A[\mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{c}] = \mathbf{0}$ , то  $A[\mathbf{c}] = (0, 0, 0)$ .

в) Находим вектор  $B[\mathbf{c}]$ . В этом случае  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 2$ . Поэтому:

$$B[\mathbf{c}] = (-2 \cdot 2, -3, -1) = (-4, -3, -1).$$

г) Матрицу оператора  $B \circ A$  можно найти двумя способами: первый способ — найти матрицы операторов  $B$  и  $A$ , а затем найти их произведение; второй способ — найти координаты векторов  $B[A[\mathbf{i}]]$ ,  $B[A[\mathbf{j}]]$ ,  $B[A[\mathbf{k}]]$  и записать их в столбцы матрицы.

*Первый способ.* Найдём матрицы операторов  $A$  и  $B$ . Действуем оператором  $A$  на базисные векторы  $i, j, k$ :

$$A[i] = [c, i] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} j & k \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2j - 3k;$$

$$A[j] = [c, j] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} i & k \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2i - k;$$

$$A[k] = [c, k] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} i & j \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3i + j.$$

Записываем координаты полученных векторов в столбцы матрицы. Это будет матрица оператора  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Действуем оператором  $B$  на базисные векторы  $i, j, k$ :

$$B[i] = (0, 0, 1) \quad (\text{в этом случае } x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0);$$

$$B[j] = (0, -1, 0) \quad (\text{в этом случае } x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0);$$

$$B[k] = (-2, 0, 0) \quad (\text{в этом случае } x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1).$$

Записываем координаты полученных векторов в столбцы матрицы. Это будет матрица оператора  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу оператора  $B \circ A$ :

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Второй способ.* Действуем на базисные векторы  $i, j, k$  сначала оператором  $A$ , затем оператором  $B$ :

$$(B \circ A)[i] = B[A[i]] = B(2j - 3k) = (6, -2, 0);$$

$$(B \circ A)[j] = B[A[j]] = B(-2i - k) = (2, 0, -2);$$

$$(B \circ A)[k] = B[A[k]] = B(3i + j) = (0, -1, 3);$$

(векторы  $A[i], A[j], A[k]$  уже найдены выше). Записываем координаты полученных векторов в столбца матрицы. Это будет матрица оператора  $B \circ A$ :

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**1.8.2** Линейный оператор  $A$  действует в  $R_3 \rightarrow R_3$  по закону:

$$A[\mathbf{x}] = (5x_1 + 2x_2 - 3x_3, 4x_1 + 5x_2 - 4x_3, 6x_1 + 4x_2 - 4x_3),$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – произвольный вектор из  $R_3$ . а) Найдите матрицу оператора  $A$  в каноническом базисе. б) Докажите, что вектор  $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$  является собственным для оператора  $A$ , и найдите собственное число  $\lambda_0$ , ему отвечающее. в) Найдите все другие собственные векторы оператора  $A$  и сделайте проверку.

*Решение.*

а) Действуем на базисные векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  оператором  $A$ :

$$A[(1, 0, 0)] = (5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0, 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 4 \cdot 0, 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0) = (5, 4, 6),$$

$$A[(0, 1, 0)] = (5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0, 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0, 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 4 \cdot 0) = (2, 5, 4),$$

$$A[(0, 0, 1)] = (5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1, 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 4 \cdot 1, 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4 \cdot 1) = (-3, -4, -4).$$

Найдём матрицу оператора  $A$ , записав в столбцы координаты полученных векторов:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

б) Проверим, что вектор  $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$  является собственным матрицы  $A$ . Находим:

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 4 - 6 \\ 4 + 10 - 8 \\ 6 + 8 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Так как  $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ , то отсюда следует, что вектор  $\mathbf{x}(1, 2, 2)$  собственный и отвечает собственному числу  $\lambda_0 = 3$ .

в) Чтобы найти все другие собственные числа, составляем характеристическое уравнение  $|A - \lambda E| = 0$ . В нашем случае:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5 - \lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Выполняем разложение определителя по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} & (5 - \lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ 4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 - \lambda \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \\ & = (5 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 4) - 2(-4\lambda + 8) - 3(6\lambda - 14) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

Мы получили характеристическое уравнение  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ . Разложим левую часть уравнения на множители. Нам уже известно, что число  $\lambda_0 = 3$  — корень этого уравнения. Разделим многочлен  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$  на  $(\lambda - 3)$ :

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \quad \left| \begin{array}{l} \lambda - 3 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{array} \right. \\ \underline{\lambda^3 - 3\lambda^2} \phantom{+ 11\lambda - 6} \\ -3\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ \underline{-3\lambda^2 + 9\lambda} \phantom{- 6} \\ -2\lambda - 6 \\ \underline{-2\lambda - 6} \\ 0 \end{array}$$

Следовательно,  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$ . Другие собственные числа найдём, решая уравнение  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ .  $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Итак, собственными числами являются 1, 2, 3.

Находим собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

$\lambda = 1$ . Собственные векторы, отвечающие этому собственному числу, образуют фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы и преобразуем её. На первом шаге преобразований первую строку, умноженную на  $(-2)$ , прибавляем ко второй и к третьей. В полученной матрице вторая и третья строки пропорциональны, поэтому вторую строку вычёркиваем. На втором шаге третью строку, умноженную на 2, прибавляем к первой.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен двум. Базисный минор  $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ . Неизвестные  $x_1, x_2$  — зависимые,  $x_3$  — свободное. Таким образом, общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_3/2, \\ x_2 = x_3/2. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Положив, например,  $x_3 = 2$ , найдём собственный вектор  $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$ .

*Проверка:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2-6 \\ 4+5-8 \\ 6+4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

т.е. вектор  $(1, 1, 2)$  является собственным и отвечает собственному числу  $\lambda = 1$ .

$\lambda = 2$ . Собственные векторы, отвечающие этому собственному числу, образуют фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы. В этой матрице первая и третья строки пропорциональны, поэтому третью строку вычёркиваем. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на  $(-1)$ . На втором шаге преобразований вторую строку, умноженную на  $(-3)$ , прибавим к первой:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен двум. Базисный минор  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ . Неизвестные  $x_1, x_2$  — зависимые,  $x_3$  — свободное. Таким образом, общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Положив, например,  $x_3 = 1$ , найдём собственный вектор  $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ .

*Проверка:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0-3 \\ 4+0-4 \\ 6+0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

т.е. вектор  $(1, 0, 1)$  является собственным и отвечает собственному числу  $\lambda = 2$ .

**1.8.3** Следующие квадратичные формы приведите к главным осям. Найдите ортогональную матрицу  $Q$ , осуществляющую переход к каноническому виду:

а)  $B[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = x^2 - 6xy + 2xz + y^2 - 2yz + 5z^2$ ;

б)  $B[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 5x^2 - 4xy - 8xz + 2y^2 + 4yz + 5z^2$ .

*Решение.* а) Поскольку в данной квадратичной форме присутствуют три координаты, размер её матрицы  $(3 \times 3)$ . Определяем коэффициенты:  $b_{11} = 1$ ,  $2b_{12} = -6 \Rightarrow b_{12} = -3$ ,  $2b_{13} = 2 \Rightarrow b_{13} = 1$ ,  $b_{22} = 1$ ,  $2b_{23} = -2 \Rightarrow b_{23} = -1$ ,  $b_{33} = 5$ . Записываем симметричную матрицу  $B$  данной квадратичной формы, располагая элементы согласно указанным индексам:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

и находим её собственные числа, решая характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Прибавляем первую строку определителя ко второй. Из второй строки выносим общий множитель:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Выполняем разложение определителя по третьему столбцу:

$$-(2+\lambda) \left( 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (5-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2+\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18).$$

В итоге, характеристическое уравнение имеет вид:  $(2+\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$ . Число  $\lambda_1 = -2$  — корень этого уравнения. Другие собственные числа найдём, решая

уравнение  $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$ .  $\lambda_{2,3} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{-2} = \frac{-9 \pm 3}{-2}$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = 3$ . Итак, собственными числами являются  $-2$ ,  $6$ ,  $3$ .

Так как найденные собственные числа являются коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы, то относительно главных осей квадратичная форма имеет вид:  $B = -2x_1^2 + 6y_1^2 + 3z_1^2$ .

Обратите внимание, что нумеровать собственные числа можно в произвольном порядке. При записи квадратичной формы в каноническом виде коэффициент при  $x_1$  равен собственному числу  $\lambda_1$ , которому будет отвечать новый базисный вектор  $f_{01}$ , коэффициент при  $y_1$  равен  $\lambda_2$  (базисный вектор  $f_{02}$ ), коэффициент при  $z_1$  равен  $\lambda_3$  (базисный вектор  $f_{03}$ ).

Находим собственные векторы матрицы  $B$ . Подробное решение задачи отыскания собственных векторов изложено в задаче 1.8.2, здесь мы приводим только основные результаты.

При  $\lambda_1 = -2$  получаем систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Её общее решение можно записать в виде:  $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

Полагая  $x_2 = 1$ , получим собственный вектор  $f_1 = (1, 1, 0)$ .

При  $\lambda_2 = 6$  получаем систему:

$$\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Её общее решение можно записать в виде:  $\begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = 2x_1. \end{cases}$

Полагая  $x_1 = 1$ , получим собственный вектор  $f_2 = (1, -1, 2)$ .

При  $\lambda_3 = 3$  получаем систему

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Её общее решение можно записать в виде  $\begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = -x_1. \end{cases}$

Полагая  $x_1 = 1$ , получим собственный вектор  $f_3 = (1, -1, -1)$ .

Векторы  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  образуют ортогональный базис, так как отвечают различным собственным числам. Новый базис выбран правым (векторы  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  образуют правую тройку), поскольку их смешанное произведение — положительное число:

$$(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Если при решении задачи оказывается, что  $(f_1, f_2, f_3) < 0$ , следует сменить ориентацию одного из векторов на противоположную.

Для того, чтобы нормировать векторы  $f_1, f_2, f_3$ , вычисляем их модули:

$$|f_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad |f_2| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \quad |f_3| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Находим орты векторов  $f_1, f_2, f_3$ :  $f_{01} = \frac{f_1}{|f_1|}$ ,  $f_{02} = \frac{f_2}{|f_2|}$ ,  $f_{03} = \frac{f_3}{|f_3|}$  и записываем полученные координаты в столбцы матрицы:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Мы получили матрицу  $Q$  перехода от старого ортонормированного базиса  $i, j, k$  к новому ортонормированному базису  $f_{01}, f_{02}, f_{03}$ . Матрица  $Q$  ортогональна, поэтому  $Q^{-1} = Q^T$ . Следовательно, новые координаты  $x_1, y_1, z_1$  выражаются через старые  $x, y, z$  соотношением:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

б) Поскольку в данной квадратичной форме присутствует три координаты, размер её матрицы  $(3 \times 3)$ . Определяем коэффициенты:  $b_{11} = 5$ ,  $2b_{12} = -4 \Rightarrow b_{12} = -2$ ,  $2b_{13} = -8 \Rightarrow b_{13} = -4$ ,  $b_{22} = 2$ ,  $2b_{23} = 4 \Rightarrow b_{23} = 2$ ,  $b_{33} = 5$ . Записываем матрицу квадратичной формы:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

и находим ее собственные числа, решая характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Прибавляем вторую строку определителя, умноженную на 2, к первой. Выносим общий множитель из первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Выполняем разложение определителя по третьему столбцу:

$$(1 - \lambda) \left( 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (5 - \lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \right) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10).$$

Характеристическое уравнение:  $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = 0$ . Число  $\lambda_1 = 1$  — корень этого уравнения. Другие собственные числа найдём, решая уравнение  $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$ .

$\lambda_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2}$ ,  $\lambda_2 = 10$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Число  $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$  — корень характеристического уравнения кратности 2. Мы получили собственные числа 1, 10.

Так как найденные собственные числа являются коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы, то относительно главных осей квадратичная форма имеет вид:  $B = x_1^2 + 10y_1^2 + z_1^2$ .

Находим собственные векторы матрицы В. Подробное решение задачи отыскания собственных векторов изложено в задаче 9.2, здесь мы приводим только основные результаты.

При  $\lambda_2 = 10$  получаем систему:

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Её общее решение можно записать в виде:  $\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3/2. \end{cases}$

Полагая  $x_3 = -2$ , получим собственный вектор  $f_2 = (2, -1, -2)$ .

При  $\lambda_1 = 1$  получаем систему:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

эквивалентную одному уравнению  $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ , поскольку все три уравнения системы пропорциональны. Выберем в качестве свободных неизвестные  $x_1$  и  $x_3$ . Общее решение имеет вид:  $x_2 = 2x_1 - 2x_3$ . Таким образом, фундаментальная система решений состоит из двух векторов. Это означает, что собственному числу  $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$  кратности 2 соответствует линейно независимая система, состоящая из двух векторов. При  $x_1 = 0$  и  $x_3 = -1$  получим  $x_2 = 2$  и  $f_1 = (0, 2, -1)$ . Другой вектор фундаментальной системы решений (обозначим его  $f_3$ ) найдём из следующих соображений. Новый базис должен быть ортогональным, а также правым. Векторы  $f_1$  и  $f_2$  ортогональны, так как отвечают различным собственным числам. Вектор  $f_3$  найдём как векторное произведение  $f_1$  и  $f_2$ .

$$f_3 = [f_1, f_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Мы получили вектор  $f_3 = (5, 2, 4)$ , который является частным решением системы, входит в её фундаментальную систему решений вместе с вектором  $f_1$  и отвечает

собственному числу  $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ . Также вектор  $\mathbf{f}_3$  попарно ортогонален векторам  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  и образует с ними правую тройку.

Для того, чтобы нормировать векторы  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$ ,  $\mathbf{f}_3$ , вычисляем их модули:

$$|\mathbf{f}_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \quad |\mathbf{f}_2| = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad |\mathbf{f}_3| = \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Находим орты векторов  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$ ,  $\mathbf{f}_3$ :  $\mathbf{f}_{01} = \frac{\mathbf{f}_1}{|\mathbf{f}_1|}$ ,  $\mathbf{f}_{02} = \frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}$ ,  $\mathbf{f}_{03} = \frac{\mathbf{f}_3}{|\mathbf{f}_3|}$  и записываем полученные координаты в столбцы матрицы:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Мы получили матрицу  $Q$  перехода от старого ортонормированного базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  к новому ортонормированному базису  $\mathbf{f}_{01}, \mathbf{f}_{02}, \mathbf{f}_{03}$ . Матрица  $Q$  ортогональна, поэтому  $Q^{-1} = Q^T$ . Следовательно, новые координаты  $x_1, y_1, z_1$  выражаются через старые  $x, y, z$  соотношением:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$\text{а) } B = -2x_1^2 + 6y_1^2 + 3z_1^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$\text{б) } B = x_1^2 + 10y_1^2 + z_1^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$



### Задачи для самостоятельного решения

**1.8.4** Линейный оператор  $A$  действует в  $R_3 \rightarrow R_3$  по закону:

$$A[x] = (-5x_1 - 2x_2 - 6x_3, 4x_1 + 7x_2 + 18x_3, -2x_2 - 5x_3).$$

Найдите матрицу  $A$  этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор  $x(-2, -1, 1)$  является собственным для матрицы  $A$ . Найдите собственное число  $\lambda_0$ , соответствующее вектору  $x$ . Найдите другие собственные числа, отличные от  $\lambda_0$ . Найдите все собственные векторы матрицы  $A$  и сделайте проверку.

*Ответ:* собственные числа  $-3; 1; -1$ .

**1.8.5** Линейный оператор  $A$  действует в  $R_3 \rightarrow R_3$  по закону:

$$A[x] = (4x_1 - 3x_2, 30x_1 - 11x_2 - 6x_3, 6x_1 - 6x_2 + x_3).$$

Найдите матрицу  $A$  этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор  $x(1, 3, 2)$  является собственным для матрицы  $A$ . Найдите собственное число  $\lambda_0$ , соответствующее вектору  $x$ . Найдите другие собственные числа, отличные от  $\lambda_0$ . Найдите все собственные векторы матрицы  $A$  и сделайте проверку.

*Ответ:* собственные числа  $-5; -2; 1$ .

**1.8.6** Квадратичные формы

а)  $B[x, x] = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2$ ,

б)  $B[x, x] = 5x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 7z^2$

приведите к главным осям и найдите соответствующее преобразование системы координат.

*Ответ:*

а)  $2y_1^2 + 3z_1^2$ ; 
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$$

б)  $\lambda^3 - 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0$ ;  $3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2$ ;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

---

## Глава 2

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ (КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2)

---

Эта контрольная работа содержит пять типов задач: 1) прямая линия на плоскости; 2) плоскость; 3) прямая в пространстве; 4) окружность, сфера; 5) эллипс, гипербола, парабола. Для решения задач первых трёх типов широко применяется векторная алгебра. Следует повторить теоретический материал по скалярному, векторному и смешанному произведению (пп. 4.4, 4.5, 4.6).

### 2.1 Прямая линия на плоскости (задачи 1 и 2)

Необходимо изучить подраздел 6.2. Напомним, что существуют различные формы записи уравнения прямой. Необходимо научиться выбирать то уравнение прямой, которое отвечает исходным данным и удобно для решения задачи.

Следующие простые задачи (2.1.1–2.1.6) встречаются как части решения многих, более сложных задач.

**2.1.1** Найдите то значение параметра  $C$ , при котором прямая, заданная уравнением  $2x - 3y + C = 0$ , проходит через точку  $M_0(2, 4)$ .

*Решение.* Чтобы найти коэффициент  $C$  общего уравнения прямой, подставим в него координаты точки  $M_0$  ( $x_0 = 2, y_0 = 4$ ):  $2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + C = 0$ ,  $4 - 12 + C = 0$ , отсюда  $C = 8$ .

*Ответ:*  $C = 8$ .

**2.1.2** Запишите уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2, 3)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{N} = (4, 5)$ .

*Решение.* По данным из условия задачи удобно записать общее уравнение прямой (см. задачу 1, п. 6.2).  $A = 4$ ,  $B = 5$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ :  $4x + 5y - (4 \cdot 2 + 5 \cdot 5) = 0$ ,  $4x + 5y - 23 = 0$ .

*Ответ:*  $4x + 5y - 23 = 0$ .

**2.1.3** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-2, 3)$  параллельно прямой  $x - 4y + 5 = 0$ .

*Решение.* Так как прямые параллельны, у них совпадают векторы нормали (коэффициенты  $A$  и  $B$  общего уравнения). Уравнение искомой прямой имеет вид:  $x - 4y + C = 0$ . Находим  $C$ , используя координаты точки  $M_0$  ( $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 3$ ):  $C = -(1 \cdot (-2) - 4 \cdot 3) = 14$ . Теперь можем записать искомое уравнение:  $x - 4y + 14 = 0$ .

*Ответ:*  $x - 4y + 14 = 0$ .

**2.1.4** Запишите общее уравнение прямой  $L$ , проходящей через точку  $M_0(3, -2)$  перпендикулярно к прямой  $4x - 5y + 2 = 0$ .

*Решение.* По условию задачи можем определить координаты вектора нормали данной прямой:  $A = 4$ ,  $B = -5$ . Возможны два способа решения этой задачи.

*Первый способ.* Поскольку искомая прямая перпендикулярна данной, вектор нормали данной прямой будет для искомой прямой направляющим:  $m = 4$ ,  $n = -5$ . Можем записать каноническое уравнение прямой ( $x_0 = 3$ ,  $y_0 = -2$ ):

$$\frac{x - 3}{4} = \frac{y - (-2)}{-5}, \quad \text{или} \quad \frac{x - 3}{4} = \frac{y + 2}{-5}.$$

Преобразуем полученное уравнение к общему:  $-5(x - 3) = 4(y + 2)$ ,  $5x + 4y - 7 = 0$ .

*Второй способ.* В качестве вектора нормали  $N_2(A_2, B_2)$  прямой  $L$  можно принять любой вектор, перпендикулярный вектору  $N_1(4, -5)$ :

$$(N_1, N_2) = 4 \cdot A_2 + (-5) \cdot B_2 = 0.$$

Выберем  $A_2 = 5$ ,  $B_2 = 4$ . Записываем общее уравнение искомой прямой:

$$5x + 4y - (5 \cdot 3 + 4 \cdot (-2)) = 0, \quad \text{или} \quad 5x + 4y - 7 = 0.$$

*Ответ:*  $5x + 4y - 7 = 0$ .

**2.1.5** Запишите общее уравнение прямой  $L$ , проходящей через точки  $M_0(3, 4)$  и  $M_1(5, -3)$ .

*Решение.* Запишем уравнение прямой по двум точкам (см. задачу 2, п. 6.2),  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ ,  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = -3$ :

$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 4}{-3 - 4}, \quad \text{или} \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 4}{-7}.$$

Преобразуем полученное уравнение к общему:  $-7(x - 3) = 2(y - 4)$ ,  $7x + 2y - 29 = 0$ .

*Ответ:*  $7x + 2y - 29 = 0$ .

**2.1.6** Найдите расстояние  $d$  от точки  $M(2, 5)$  до прямой  $8x + 6y - 7 = 0$ .

*Решение.* По формуле (6.7), в которой надо положить  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 5$ ,  $A = 8$ ,  $B = 6$ , находим:

$$d = \frac{|8 \cdot 2 + 5 \cdot 6 - 7|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{|16 + 30 - 7|}{10} = \frac{39}{10} = 3,9.$$

*Ответ:*  $d = 3,9$ .

**2.1.7** Найдите расстояние между прямыми  $8x + 6y - 7 = 0$  и  $8x + 6y + 23 = 0$ .

*Решение.* В общих уравнениях прямых совпадают коэффициенты:  $A = 8$ ,  $B = 6$ , поэтому данные прямые параллельны. Расстояние между прямыми можно найти с помощью формулы (6.9) (см. задачу 4, п. 6.2):

$$d = \frac{|23 - (-7)|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{|30|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{30}{10} = 3.$$

*Ответ:*  $d = 3$ .

**2.1.8** Даны координаты вершин треугольника  $ABC$ :  $A(1, -3)$ ;  $B(-5, 7)$ ;  $C(-3, -1)$ . Запишите уравнения прямых, на которых расположены: а) медиана  $AM$ ; б) высота  $BH$  этого треугольника.

*Решение:* а) прямая  $AM$  проходит через точку  $A(1, -3)$  и точку  $M$ , являющуюся серединой отрезка  $BC$ . Находим координаты точки  $M$ :  $x = \frac{-5 - 3}{2} = -4$ ,  $y = \frac{7 - 1}{2} = 3$ , т.е.  $M(-4, 3)$ . Запишем уравнение прямой  $AM$  по двум точкам:

$$\frac{x - 1}{-4 - 1} = \frac{y - (-3)}{3 - (-3)}, \quad \text{или} \quad \frac{x - 1}{-5} = \frac{y + 3}{6}.$$

Преобразуем полученное уравнение к общему:  $6(x - 1) = -5(y + 3)$ ,  $6x + 5y + 9 = 0$ ;

б) прямая  $BH$  перпендикулярна вектору  $AC = (-4, 2) \parallel (2, -1)$ . В качестве вектора нормали прямой  $BH$  можно принять вектор  $N(2, -1)$ . Записываем общее уравнение прямой  $BH$ :  $2x - y - (2 \cdot (-5) + (-1) \cdot 7) = 0$ , или  $2x - y + 17 = 0$ .

*Ответ:* а)  $6x + 5y + 9 = 0$ , б)  $2x - y + 17 = 0$ .

**2.1.9** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(1, 6)$  и отсекающей от второго координатного угла треугольник площадью  $S = 0,5$ .

*Решение.* Будем искать уравнение прямой в виде  $y = kx + b$  (уравнение прямой с угловым коэффициентом). Прямая отсекает треугольник от второго координатного угла, поэтому  $b > 0$ ,  $k > 0$ . Находим точки пересечения искомой прямой с осями координат:  $B(0, b)$ ,  $A\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ . Площадь треугольника

$OAB$  (рис. 2.1) равна  $S = \frac{1}{2} |OA| |OB|$ , или  $S = \frac{b^2}{2k}$ .

По условию задачи  $S = \frac{1}{2}$ , или  $\frac{b^2}{2k} = \frac{1}{2}$ , т.е.  $k = b^2$ . Так

как эта прямая проходит через точку  $M_0(1; 6)$ , то  $6 = k + b$ .

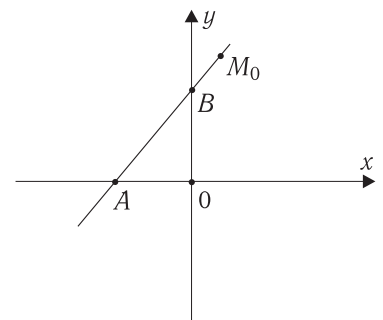


Рис. 2.1

Составляем систему  $\begin{cases} k = b^2, \\ 6 = k + b. \end{cases}$  Отсюда  $b^2 + b - 6 = 0$ . Решая квадратное уравнение, находим  $b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$ . Поскольку  $b > 0$ , то  $b = 2$ , а потому  $k = 4$ . Запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом:  $y = 4x + 2$ . Перейдём к общему уравнению:  $4x - y + 2 = 0$ .

Ответ:  $4x - y + 2 = 0$ .

**2.1.10** Найдите проекцию точки  $P(6,0)$  на прямую  $L$ , заданную уравнением  $4x - 3y + 1 = 0$ . Найдите точку  $S$ , симметричную точке  $P(6,0)$  относительно этой прямой.

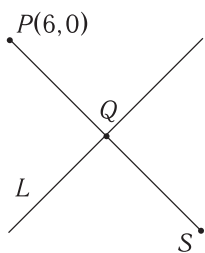


Рис. 2.2

*Решение.* Точку  $Q$ , являющуюся проекцией точки  $P$  на данную прямую, можно найти как точку пересечения прямой  $L$  и прямой  $PQ$  (рис. 2.2), перпендикулярной к  $L$  и проходящей через точку  $P$ . Прямая  $PQ$  параллельна вектору  $N_1(4; -3)$  — нормали прямой  $L$ . В качестве вектора нормали прямой  $PQ$  можно принять вектор  $N_2(3; 4)$ , а потому уравнение прямой  $PQ$  имеет вид  $3x + 4y - (6 \cdot 3 - 0) = 0$ , или  $3x + 4y - 18 = 0$ . Для отыскания координат точки  $Q$  мы получили систему:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y - 18 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 4, второе — на 3 и сложим их. Получим  $25x - 50 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 3$ , т.е.  $Q(2; 3)$ . Обозначим координаты точки  $S$  через  $x$  и  $y$ . Точка  $Q$  делит пополам отрезок  $PS$ , поэтому  $\frac{6+x}{2} = 2$ ,  $\frac{0+y}{2} = 3$ . Отсюда  $x = -2$ ,  $y = 6$ , т.е.  $S(-2; 6)$ .

Ответ:  $Q(2; 3)$ ,  $S(-2; 6)$ .

**2.1.11** Составьте уравнения прямых, проходящих через точку  $P(6, 10)$  на одинаковых расстояниях от точек  $M_1(2, 8)$  и  $M_2(4, -12)$ .

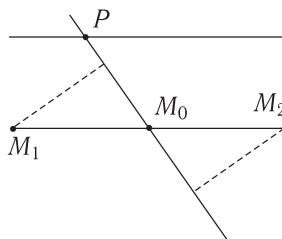


Рис. 2.3

*Решение.* Составим общие уравнения искомых прямых вида  $Ax + By + C = 0$ . Учтём, что прямые находятся на одинаковом расстоянии от точек  $M_1(2; 8)$  и  $M_2(4; -12)$ , то есть расстояние от точки  $M_1$  до искомой прямой равно расстоянию от точки  $M_2$  до искомой прямой (рис. 2.3). Используя формулу (6.7), получаем:

$$\frac{|2A + 8B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4A - 12B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{или} \quad |2A + 8B + C| = |4A - 12B + C|.$$

Записываем соотношение без знака модуля:  $2A + 8B + C = \pm(4A - 12B + C)$ . Таким образом, мы получили два уравнения для неизвестных коэффициентов:

$$2A + 8B + C = 4A - 12B + C \quad \text{и} \quad 2A + 8B + C = -4A + 12B - C.$$

Также учтём, что искомые прямые проходят через точку  $P$ :  $6A + 10B + C = 0$ . В итоге, для неизвестных коэффициентов  $A, B, C$  получаем две различные системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 6A + 10B + C = 0, \\ 2A - 20B = 0, \\ A^2 + B^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б) } \begin{cases} 6A + 10B + C = 0, \\ 6A - 4B + 2C = 0, \\ A^2 + B^2 \neq 0. \end{cases}$$

Выберем неизвестное  $B$  в качестве свободного. Записываем общее решение систем:

$$\text{а) } \begin{cases} A = 10B, \\ C = -70B, \\ B \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б) } \begin{cases} A = -4B, \\ C = 14B, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Находим искомые уравнения прямых. Используя общее решение системы а), получим  $10Bx + By - 70B = 0$ . Так как  $B \neq 0$ , уравнение принимает вид:  $10x + y - 70 = 0$ .

С помощью общего решения системы б) записываем уравнение второй прямой:  $-4Bx + By + 14B = 0$ , или  $4x - y - 14 = 0$ .

Эту задачу можно решить другим способом, если заметить, что одна из прямых проходит через точку  $P$  параллельно прямой  $M_1M_2$ , а вторая проходит через точку  $P$  и середину  $M_0$  отрезка  $M_1M_2$ .

Ответ:  $4x - y - 14 = 0$ ,  $10x + y - 70 = 0$ .

**2.1.12** В треугольнике  $ABC$  из вершины  $A$  проведены высота и медиана (рис. 2.4). Даны: вершина  $B(3, 7)$ , уравнение высоты  $2x - y + 1 = 0$  и уравнение медианы  $3x - 4y + 9 = 0$ . Найдите координаты вершины  $C$ .

*Решение.* Обозначим через  $x_0, y_0$  координаты точки  $C$ . Запишем уравнение прямой  $BC$ . Она перпендикулярна высоте, поэтому в качестве вектора нормали можно взять любой вектор, перпендикулярный к вектору  $(2, -1)$ , например  $N(1, 2)$ . Общее уравнение прямой  $BC$ :  $x + 2y - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 7) = 0$ ,  $x + 2y - 17 = 0$ . Точка  $C$  лежит на прямой  $BC$ , поэтому  $x_0 + 2y_0 - 17 = 0$ .

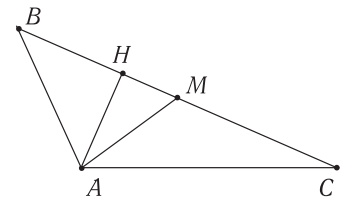


Рис. 2.4

Точка  $M$  — середина отрезка  $BC$ . Находим её координаты:  $M\left(\frac{x_0 + 3}{2}, \frac{y_0 + 7}{2}\right)$ .

Поскольку точка  $M$  лежит на медиане  $3 \cdot \frac{x_0 + 3}{2} - 4 \cdot \frac{y_0 + 7}{2} + 9 = 0$ , или  $3x_0 - 4y_0 - 1 = 0$ .

Для отыскания  $x_0$  и  $y_0$  из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 17 = 0, \\ 3x_0 - 4y_0 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим  $x_0 = 7, y_0 = 5$ .

Ответ:  $C(7, 5)$ .



### Задачи для самостоятельного решения

**2.1.13** Найдите проекцию точки  $P(6, 4)$  на прямую  $4x + 5y - 3 = 0$ .

*Ответ:*  $(2, -1)$ .

**2.1.14** Найдите точку  $Q$ , симметричную точке  $P(-5, 13)$  относительно прямой  $2x - 3y - 3 = 0$ .

*Ответ:*  $(11, -11)$ .

**2.1.15** Составьте уравнение средней линии треугольника  $A(5, -4)$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $C(-3, -2)$ , параллельной стороне  $AC$ .

*Ответ:*  $x + 4y = 0$ .

**2.1.16** Даны вершины треугольника  $A(2, 1)$ ,  $B(-1, -1)$ ,  $C(3, 2)$ . Составьте уравнение его высоты  $CH$  и уравнения всех его сторон.

*Ответ:*  $3x + 2y - 13 = 0$ ,  $2x - 3y - 1 = 0$ ,  $3x - 4y - 1 = 0$ ,  $x - y - 1 = 0$ .

**2.1.17** Даны вершины треугольника  $A(1, -2)$ ,  $B(5, 4)$ ,  $C(-2, 0)$ . Запишите уравнение биссектрисы его внутреннего угла  $A$ .

*Ответ:*  $5x + y - 3 = 0$ .

**2.1.18** Даны вершины треугольника  $A(-10, -13)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(2, 1)$ . Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из вершины  $B$  на медиану  $CM$ .

*Ответ:* 4.

## 2.2 Плоскость (задача 3)

Для решения задач по данной теме необходимо изучить подраздел 6.6, а также повторить скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

**2.2.1** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1, -2, 3)$  перпендикулярно вектору  $N(4, -3, 2)$ .

*Решение.* В данном случае известен вектор нормали плоскости  $N(4, -3, 2)$ , поэтому в её общем уравнении положим  $A = 4$ ;  $B = -3$ ;  $C = 2$ , т.е.  $4x - 3y + 2z + D = 0$ . Поскольку точка  $M_0(1, -2, 3)$  лежит в плоскости, то  $4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + D = 0$ ,  $D = -16$ . Мы нашли уравнение плоскости:  $4x - 3y + 2z - 16 = 0$ .

*Ответ:*  $4x - 3y + 2z - 16 = 0$ .

**2.2.2** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1, -2, 1)$  параллельно векторам  $l_1 = (0, 1, 4)$  и  $l_2 = (2, 0, 3)$ .

*Решение.* Записываем уравнение плоскости по двум направляющим векторам  $l_1$ ,  $l_2$  и точке  $M_0$ :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$(-1)^{1+1}(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(y+2) \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(z-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определители второго порядка, получаем:  $3(x-1) + 8(y+2) - 2(z-1) = 0$ ,  $3x + 8y - 2z + 15 = 0$ .

Ответ:  $3x + 8y - 2z + 15 = 0$ .

**2.2.3** Запишите уравнение плоскости, проходящей через три точки:  $M_1(1, 2, -1)$ ,  $M_2(3, 1, -2)$ ,  $M_3(4, 5, -3)$ .

Решение. Запишем уравнение плоскости по трём точкам:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3-1 & 1-2 & -2+1 \\ 4-1 & 5-2 & -3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$$(-1)^{1+1}(x-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(y-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(z+1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определители второго порядка, получаем:  $5(x-1) + (y-2) + 9(z+1) = 0$ ,  $5x + y + 9z + 2 = 0$ .

Ответ:  $5x + y + 9z + 2 = 0$ .

**2.2.4** Найдите координаты вектора нормали  $N(1, B, C)$  плоскости, проходящей через точку  $M_0(2, 7, -4)$ , и перпендикуляр к плоскости  $4x - 3y + 2z - 3 = 0$ , опущенный из точки  $P(1, -5, 3)$ .

Решение. Искомая плоскость параллельна вектору нормали данной плоскости, то есть  $l_1 = (4, -3, 2)$ , и вектору  $l_2 = \overrightarrow{PM_0} = (1, 12, -7)$ , поэтому вектор нормали  $N$  искомой плоскости находим из условия:

$$N = [l_1, l_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 12 & -7 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = \\ = (-3\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 51\mathbf{k}) \parallel (1, -10, -17). \end{aligned}$$

Таким образом, искомые координаты вектора нормали плоскости  $(1, -10, -17)$ .

Ответ:  $(1, -10, -17)$ .

**2.2.5** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(2, -3, 5)$  и  $M_2(4, 1, -1)$  параллельно оси  $OY$ .

*Решение.* Данная плоскость параллельна вектору  $M_1M_2 = (2, 4, -6)$ , а также оси  $OY$ , а значит, и орту  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ . Записываем уравнение плоскости по двум направляющим векторам  $M_1M_2, \mathbf{j}$  и точке  $M_1$ :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам третьей строки:

$$1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} x-2 & z-5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad -1(-6(x-2) - 2(z-5)) = 0, \quad 6x + 2z - 22 = 0.$$

Делим обе части уравнения на 2. Искомое уравнение имеет вид:  $3x + z - 11 = 0$ .

*Ответ:*  $3x + z - 11 = 0$ .

**2.2.6** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1, 4, 3)$  перпендикулярно плоскостям  $2x - 3y + 4z - 1 = 0$  и  $x + 4y - z + 5 = 0$ .

*Решение.* Так как искомая плоскость перпендикулярна данным плоскостям, то она параллельна их нормальным векторам  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{N}_1 = (2, -3, 4)$  и  $\mathbf{l}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 4, -1)$ . Поэтому уравнение плоскости можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(-1)^{1+1}(x-1) \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(y-4) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(z-3) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляем определители второго порядка:  $-13(x-1) - (-6)(y-4) + 11(z-3) = 0$ , или  $-13x + 6y + 11z - 44 = 0$ . Делим обе части уравнения на  $(-1)$ :  $13x - 6y - 11z + 44 = 0$ .

*Ответ:*  $13x - 6y - 11z + 44 = 0$ .

**2.2.7** Запишите уравнение плоскости, проходящей через ось  $OZ$  и точку  $M_1(2, -5, 6)$ .

*Решение.* Поскольку плоскость проходит через ось  $OZ$ , все точки оси  $OZ$  принадлежат плоскости, в частности точка  $O(0, 0, 0)$  — начало координат. В качестве одного направляющего вектора можно взять вектор  $\mathbf{OM}_1 = (2, -5, 6)$ . Кроме того, плоскость параллельна оси  $OZ$ , т.е. вектору  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ . Записываем уравнение плоскости по двум направляющим векторам  $\mathbf{OM}_1, \mathbf{k}$  и точке  $O$ :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам третьей строки:

$$1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad -5x - 2y = 0, \quad \text{или} \quad 5x + 2y = 0.$$

Ответ:  $5x + 2y = 0$ .

**2.2.8** Найдите расстояние  $d$  от точки  $P(1, 4, 5)$  до плоскости  $x - 2y - 2z + 3 = 0$ .

Решение. Используя формулу подраздела 6.6 (задача 5), находим:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|1 - 8 - 10 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{14}{3}.$$

Ответ:  $d = 14/3$ .

**2.2.9** Запишите уравнения плоскостей, удалённых от плоскости:

$$2x + 6y + 3z - 6 = 0$$

на расстояние  $d = 5$ .

Решение. Искомые плоскости параллельны данной, а потому их векторы нормали можно взять совпадающими с вектором нормали  $\mathbf{N} = (2, 6, 3)$  данной плоскости. Таким образом, искомые уравнения имеют вид  $2x + 6y + 3z + D = 0$ . Осталось определить свободный член  $D$ . Используем формулу для вычисления расстояния между плоскостями:  $2x + 6y + 3z - 6 = 0$  и  $2x + 6y + 3z + D = 0$  (п. 6.6 задача 6), учитывая, что  $d = 5$ :

$$\frac{|D - (-6)|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} = 5, \quad \text{или} \quad \frac{|D + 6|}{\sqrt{49}} = 5.$$

Записываем уравнение без знака модуля:  $6 + D = \pm 35$ . Отсюда  $D_1 = 29$ ,  $D_2 = -41$ . В результате, мы получили две плоскости  $2x + 6y + 3z + 29 = 0$  и  $2x + 6y + 3z - 41 = 0$ , удалённые от данной на расстояние  $d = 5$ .

Ответ:  $2x + 6y + 3z + 29 = 0$ ,  $2x + 6y + 3z - 41 = 0$ .



### Задачи для самостоятельного решения

**2.2.10** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(3, 0, -4)$  параллельно плоскости  $x - 4y + 2z + 6 = 0$ .

Ответ:  $x - 4y + 2z + 5 = 0$ .

**2.2.11** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(-2, 1, 4)$  и  $M_2(0, 3, 1)$  перпендикулярно плоскости  $4x + 3y - 5z + 4 = 0$ .

Ответ:  $x + 2y + 2z - 8 = 0$ .

**2.2.12** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(-5, 2, -1)$  параллельно плоскости  $OXZ$ .

Ответ:  $y - 2 = 0$ .

**2.2.13** Вычислите площадь треугольника, который отсекает плоскость:

$$5x - 6y + 3z + 120 = 0$$

от координатного угла  $OXY$ .

Ответ: 240.

**2.2.14** Вычислите объём пирамиды, ограниченной плоскостью  $2x - 3y + 6z - 12 = 0$  и координатными плоскостями.

Ответ: 8.

**2.2.15** На оси  $OY$  найдите точку, отстоящую от плоскости  $x + 2y - 2z - 2 = 0$  на расстояние  $d = 4$ .

Ответ:  $(0, 7, 0)$ ,  $(0, -5, 0)$ .

## 2.3 Прямая в пространстве (задачи 4, 5, 6)

Необходимо изучить подраздел 6.7. Знать параметрические, канонические и общие уравнения прямой. Уметь переходить от общего уравнения прямой к параметрическим и каноническим. Параметрические и канонические уравнения прямой определяются неоднозначно, поскольку точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  можно выбрать на прямой многими способами, направляющий вектор  $l$  определяется также с точностью до скалярного множителя, т.е. если  $l$  — направляющий, то вектор  $\lambda l$  ( $\lambda \neq 0$ ) также направляющий.

Следующие простые задачи (2.3.1—2.3.3) встречаются как части во многих более сложных.

**2.3.1** Запишите параметрические и канонические уравнения прямой, заданной общим уравнением:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 16 = 0, \\ x + 2y - z + 6 = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Рассмотрим два способа решения этой задачи.

*Первый способ.* Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей с нормальными  $N_1 = (2, 3, 1)$  и  $N_2 = (1, 2, -1)$ . Находим направляющий вектор прямой:

$$l = [N_1, N_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$i \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + j \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5i + 3j + k.$$

Для того чтобы найти координаты точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  на прямой, положим  $x_0 = 0$ . При этом:

$$\begin{cases} 3y_0 + z_0 - 16 = 0, \\ 2y_0 - z_0 + 6 = 0. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем  $5y_0 - 10 = 0$  и  $y_0 = 2$ . Затем находим  $z_0 = 10$ . Итак,  $M_0(0, 2, 10)$ . Записываем параметрические

$$\begin{cases} x = -5t, \\ y = 3t + 2, \\ z = t + 10 \end{cases}$$

и канонические  $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-10}{1}$  уравнения прямой.

*Второй способ.* Данное в условии задачи общее уравнение прямой является системой линейных уравнений с расширенной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Прибавим к первой строке вторую строку, умноженную на  $(-2)$ . Затем ко второй строке прибавим первую, умноженную на 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 28 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 28 \\ 1 & 0 & 5 & 50 \end{bmatrix}.$$

Так как  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , то  $x, y$  — зависимые неизвестные,  $z$  — свободное. Запишем общее решение системы:

$$\begin{cases} x = -5z + 50, \\ y = 3z - 28. \end{cases}$$

Полагая  $z = t$ , записываем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -5t + 50, \\ y = 3t - 28, \\ z = t. \end{cases}$$

Из параметрических уравнений находим направляющий вектор прямой  $l(-5, 3, 1)$  и точку  $M_0(50, -28, 0)$ . Теперь можем записать канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-50}{-5} = \frac{y+28}{3} = \frac{z}{1}.$$

Точка  $M_0$  получена из параметрических уравнений при  $t = 0$ . В качестве точки  $M_0$  можно взять и другую точку, например  $(0, 2, 10)$ , получающуюся при  $t = 10$ .

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -5t + 50, \\ y = 3t - 28, \\ z = t, \end{cases} \quad \frac{x-50}{-5} = \frac{y+28}{3} = \frac{z}{1}.$$

**2.3.2** Запишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(1, -3, 4)$  и  $M_2(-2, 1, 2)$ .

*Решение.* Запишем канонические уравнения прямой по двум точкам:

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-(-3)}{1-(-3)} = \frac{z-4}{2-4}, \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-2}.$$

Видим, что направляющий вектор прямой  $l(-3, 4, -2)$ . В качестве известной точки

прямой возьмём точку  $M_1$  и запишем параметрические уравнения: 
$$\begin{cases} x = -3t + 1, \\ y = 4t - 3, \\ z = -2t + 4. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -3t + 1, \\ y = 4t - 3, \\ z = -2t + 4, \end{cases} \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-2}.$$

**2.3.3** Найдите точку  $M_0$  пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -2t + 3, \\ z = 4t - 1 \end{cases}$$

и плоскости  $x + 2y + 4z - 30 = 0$ .

*Решение.* Находим то значение параметра  $t_0$ , при котором происходит пересечение прямой и плоскости. Так как точка  $M_0(3t_0 - 2, -2t_0 + 3, 4t_0 - 1)$  лежит в данной плоскости, то её координаты удовлетворяют уравнению плоскости, следовательно,  $3t_0 - 2 + 2(-2t_0 + 3) + 4(4t_0 - 1) - 30 = 0$ ,  $15t_0 - 30 = 0$ ,  $t_0 = 2$ . Полагая в параметрических уравнениях прямой  $t = 2$ , находим точку пересечения  $M_0$ :  $x_0 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$ ,  $y_0 = -2 \cdot 2 + 3 = -1$ ,  $z_0 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$ . Итак,  $M_0(4, -1, 7)$ .

*Ответ:*  $M_0(4, -1, 7)$ .

**2.3.4** Докажите, что прямые:

$$\begin{cases} x = 3t - 4, \\ y = -2t + 1, \\ z = t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t - 5, \\ y = -3t + 5, \\ z = 4t - 4 \end{cases}$$

пересекаются. Найдите уравнение плоскости, в которой они расположены.

*Решение.* Равенство  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0$  является условием пересечения двух прямых. Все данные находим из параметрических уравнений прямых. В нашем случае  $\mathbf{r}_1 = (-4, 1, 3)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (-5, 5, -4)$ ,  $\mathbf{l}_1 = (3, -2, 1)$ ,  $\mathbf{l}_2 = (2, -3, 4)$ . Вычисляем смешанное произведение:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & -20 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. прямые пересекаются.

Плоскость, в которой они расположены, параллельна векторам  $\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{l}_2$  и проходит через точку  $M_1(-4, 1, 3)$ . Запишем уравнение плоскости по двум направляющим векторам и точке:

$$\begin{vmatrix} x + 4 & y - 1 & z - 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$$(-1)^{1+1}(x+4) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(y-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(z-3) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определители второго порядка, получаем:

$$-5(x+4) - 10(y-1) - 5(z-3) = 0, \quad -5x - 10y - 5z + 5 = 0.$$

Поделим обе части полученного уравнения на  $(-5)$ :  $x + 2y + z - 1 = 0$

Ответ:  $x + 2y + z - 1 = 0$ .

**2.3.5** Докажите, что прямые:

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t + 4, \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t + 4, \\ y = 2t + 8, \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

пересекаются. Найдите координаты точки  $M_0$  их пересечения.

*Решение.* Доказать, что прямые пересекаются, можно так же, как и в предыдущей задаче. Здесь мы рассмотрим другой способ решения. Если данные прямые пересекаются, например в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , то существуют значения параметра  $t = t_1$  для первой прямой и  $t = t_2$  — для второй прямой, которые соответствуют одной и той же точке  $M_0$ . С одной стороны, координаты точки  $M_0(2t_1 + 1, 3t_1 + 4, -2t_1 + 3)$ , с другой стороны,  $M_0(t_2 + 4, 2t_2 + 8, 3t_2 - 4)$ . Приравнявая выражения для соответствующих координат точки  $M_0$ , получаем систему:

$$\begin{cases} 2t_1 + 1 = t_2 + 4, \\ 3t_1 + 4 = 2t_2 + 8, \\ -2t_1 + 3 = 3t_2 - 4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2t_1 - t_2 = 3, \\ 3t_1 - 2t_2 = 4, \\ 2t_1 + 3t_2 = 7. \end{cases}$$

Это система трёх уравнений с двумя неизвестными  $t_1$  и  $t_2$ . Если система совместная определённая, то прямые пересекаются в точке  $M_0$ . Записываем расширенную матрицу системы и преобразуем её. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на  $(-2)$ , а к третьей — первую, умноженную на 3. Вычёркиваем одну из двух пропорциональных строк:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Видим, что  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , ранг основной и расширенной матриц равен двум, система совместна. Число неизвестных (2) совпадает с рангом, система определённая. Следовательно, прямые пересекаются. Исходная система эквивалентна системе:

$$\begin{cases} 2t_1 - t_2 = 3, \\ -t_1 = -2. \end{cases}$$

Следовательно,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 1$ . Положив в уравнении первой прямой  $t = 2$  (или для второй прямой  $t = 1$ ), найдём точку пересечения  $M_0(5, 10, -1)$ .

Ответ:  $M_0(5, 10, -1)$ .

**2.3.6** Найдите точку  $Q$ , являющуюся проекцией точки  $P(-46, 2, -12)$  на прямую  $L$ :

$$\begin{cases} x - 2y + z + 12 = 0, \\ 2x + 3y - z - 22 = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Найдите точку  $S$ , симметричную точке  $P$  относительно этой прямой.

*Решение.* Точку  $Q$  найдём как точку пересечения прямой  $L$  с плоскостью  $\Pi$ , проходящей через точку  $P$  перпендикулярно  $L$ .

Получим параметрические уравнения прямой  $L$ . По общему уравнению прямой (2.1) запишем матрицу системы. К первой строке прибавим вторую. Затем ко второй строке прибавим первую, умноженную на  $(-3)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -12 \\ 2 & 3 & -1 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 10 \\ 7 & 0 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Так как  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  — базисный минор, неизвестные  $y$  и  $z$  зависимые, неизвестное  $x$  можно принять в качестве свободного. Запишем общее решение системы (2.1):

$$\begin{cases} y = -3x + 10, \\ z = -7y + 8. \end{cases}$$

Положим  $x = t$ , получим параметрические уравнения данной прямой:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -3t + 10, \\ z = -7t + 8. \end{cases} \quad (2.2)$$

Направляющий вектор прямой  $l = (1, -3, -7)$  можно принять в качестве вектора нормали плоскости  $\Pi$ . Записываем общее уравнение  $\Pi$ :  $x - 3y - 7z + D = 0$ . Точка  $P$  лежит в плоскости  $\Pi$ , поэтому  $-46 - 3 \cdot 2 - 7 \cdot (-12) + D = 0$ ,  $D = -32$ . Уравнение плоскости  $\Pi$ :  $x - 3y - 7z - 32 = 0$ .

Находим точку пересечения прямой (2.2) с плоскостью  $\Pi$  (см. задачу 2.3.3):  $t - 3(-3t + 10) - 7(-7t + 8) - 32 = 0$ ,  $59t - 118 = 0$ ,  $t = 2$ . Из (2.2) при  $t = 2$  находим координаты точки  $Q(2, 4, -6)$ .

Координаты точки  $S$  обозначим  $(x, y, z)$ . Так как точка  $Q$  — середина отрезка  $PS$ , то  $\frac{-46 + x}{2} = 2$ ,  $x = 50$ ;  $\frac{2 + y}{2} = 4$ ,  $y = 6$ ;  $\frac{-12 + z}{2} = -6$ ,  $z = 0$ . Итак,  $S(50, 6, 0)$ .

*Ответ:*  $Q(2, 4, -6)$ ;  $S(50, 6, 0)$ .

**2.3.7** Найдите координаты точки  $Q$ , являющейся проекцией точки  $P(-2, 1, 4)$  на плоскость  $x - 4y + 5z + 28 = 0$ . Найдите координаты точки  $S$ , симметричной точке  $P$  относительно данной плоскости.

*Решение.* Точку  $Q$  находим как точку пересечения данной плоскости ( $\Pi$ ) и прямой  $L$ , проходящей через точку  $P$  перпендикулярно ( $\Pi$ ). Прямая  $L$  параллельна вектору нормали  $N = (1, -4, 5)$  плоскости, поэтому вектор  $N$  является направляющим для этой прямой. Записываем параметрические уравнения прямой  $L$ :

$$\begin{cases} x = t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 5t + 4 \end{cases}$$

и находим точку пересечения её с плоскостью:

$$(t-2) - 4(-4t+1) + 5(5t+4) + 28 = 0, \quad 42t + 42 = 0; \quad t = -1.$$

В параметрических уравнениях прямой положим  $t = -1$  и найдём координаты точки  $Q(-3, 5, -1)$ .

Координаты точки  $S$  обозначим  $(x, y, z)$ . Так как точка  $Q$  – середина отрезка  $PS$ , то  $\frac{-2+x}{2} = -3, x = -4; \frac{1+y}{2} = 5, y = 9; \frac{4+z}{2} = -1, z = -6$ . Итак,  $S(-4, 9, -6)$ .

Ответ:  $Q(-3, 5, -1), S(-4, 9, -6)$ .

**2.3.8** Найдите расстояние  $d$  от точки  $P(1, -2, 3)$  до прямой

$$\begin{cases} x = 2t + 4, \\ y = -t + 3, \\ z = 2t - 1. \end{cases}$$

*Решение.* Используем формулу вычисления расстояния  $d$  от точки до прямой в пространстве (п. 6.7, задача 3):  $d = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}]|}{|\mathbf{l}|}$ , где  $\mathbf{r}_1$  – радиус-вектор данной точки,  $\mathbf{r}_0$  – радиус-вектор какой-нибудь точки прямой,  $\mathbf{l}$  – направляющий вектор прямой. В нашем случае  $\mathbf{r}_1 = (1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (4, 3, -1)$ ,  $\mathbf{l} = (2, -1, 2)$ . Находим:

$$[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 13\mathbf{k},$$

$$|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}]| = \sqrt{(-6)^2 + 14^2 + 13^2} = \sqrt{401},$$

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3; \quad d = \frac{\sqrt{401}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{401}}{3}$ .

**2.3.9** Найдите расстояние  $d$  между скрещивающимися прямыми  $L_1$  и  $L_2$ , заданными параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t + 1, \\ z = t + 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2t + 4, \\ z = t + 2. \end{cases}$$

*Решение.* В п. 6.7 (задача 4) приведена формула вычисления величины  $d$ :

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)|}{|[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]|},$$

где  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  – радиусы-векторы точек, лежащих на прямых  $L_1$  и  $L_2$ ,  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$  – направляющие векторы этих прямых. В нашем случае  $\mathbf{r}_1 = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (1, 4, 2)$ ,  $\mathbf{l}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{l}_2 = (2, 2, 1)$ .

Выполняем вычисления:

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}; \quad |[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Следовательно,  $d = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ .

Ответ:  $\sqrt{5}$ .

**2.3.10** Дано, что прямая  $L$  пересекает ось ординат в точке  $(0, 4, 0)$ , параллельна плоскости  $x + 2y + 3z + 2 = 0$  и перпендикулярна оси  $OZ$ . Найдите координаты точки  $Q$  пересечения этой прямой с плоскостью  $y = 0$ .

*Решение.* Неизвестен направляющий вектор  $\mathbf{l}$  прямой  $L$ . Пусть  $\mathbf{l} = (m, n, p)$ . По условию задачи вектор  $\mathbf{l}$  параллелен плоскости  $x + 2y + 3z + 2 = 0$ , следовательно, он перпендикулярен её вектору нормали  $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$ . Поэтому  $(\mathbf{l}, \mathbf{N}) = 0$ . Вектор  $\mathbf{l}$  также перпендикулярен оси  $OZ$ , т.е. вектору  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ :  $(\mathbf{l}, \mathbf{k}) = 0$ . Эти два условия позволяют составить систему уравнений для координат направляющего вектора:

$$\begin{cases} (\mathbf{l}, \mathbf{N}) = 0, \\ (\mathbf{l}, \mathbf{k}) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m + 2n + 3p = 0, \\ 3p = 0. \end{cases}$$

Любое частное решение системы определяет направляющий вектор прямой  $L$ . Положим  $n = 1$ , тогда  $m = -2$ , т.е.  $\mathbf{l} = (-2, 1, 0)$ . Запишем параметрические уравнения прямой  $L$ :

$$\begin{cases} x = -2t, \\ y = t + 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

Обозначим координаты точки  $Q(x_0, y_0, z_0)$ . Поскольку точка  $Q$  принадлежит плоскости  $y = 0$ ,  $y_0 = 0$ . Тогда  $0 = t + 4$  и значение параметра  $t = -4$  соответствует точке  $Q$ . Находим координату  $x_0 = -2 \cdot (-4) = 8$ . Из параметрических уравнений следует  $z_0 = 0$ . Итак, точка  $Q$  имеет координаты  $(8, 0, 0)$ .

Ответ:  $(8, 0, 0)$ .



.....  
Из условия перпендикулярности прямой  $L$  оси  $OZ$  не следует, что прямая  $L$  пересекает ось  $OZ$ . Можно лишь утверждать, что направляющий вектор прямой  $\mathbf{l}$  перпендикулярен оси  $OZ$ .  
.....

**2.3.11** Две прямые, пересекающиеся в точке  $P(2, 3, 1)$ , параллельны плоскости  $x + 2y + 2z - 4 = 0$ . Одна из них пересекает ось  $OZ$ , а вторая — ось  $OY$ . Найдите косинус острого угла между направляющими векторами этих прямых.

*Решение.* Одна из прямых проходит через точку  $P(2, 3, 1)$  и точку оси  $OZ$ , которую мы обозначим  $M_1(0, 0, z_0)$ , а вторая — через точку  $P(2, 3, 1)$  и точку оси  $OY$ , которую мы обозначим  $M_2(0, y_0, 0)$ . Направляющими векторами  $l_1$  и  $l_2$  прямых являются векторы  $\overrightarrow{PM_1}$  и  $\overrightarrow{PM_2}$ . Вычисляем их координаты:  $l_1 = (-2, -3, z_0 - 1)$ ,  $l_2 = (-2, y_0 - 3, -1)$ . По условию задачи векторы  $l_1$  и  $l_2$  параллельны плоскости  $x + 2y + 2z - 4 = 0$ , т.е. перпендикулярны вектору  $N = (1, 2, 2)$ . Поэтому  $(l_1, N) = 0$  или  $-2 - 6 + 2(z_0 - 1) = 0$ . Из полученного уравнения находим  $z_0 = 5$ . Из  $(l_2, N) = 0$  или  $-4 + 2(y_0 - 3) = 0$  получим  $y_0 = 5$ .

Таким образом,  $l_1 = (-2, -3, 4)$ ,  $l_2 = (-2, 2, -1)$ . Вычисляем косинус острого угла между векторами  $l_1$  и  $l_2$ :

$$\cos \varphi = \frac{|(l_1, l_2)|}{|l_1||l_2|} = \frac{|4 - 6 - 4|}{\sqrt{4 + 9 + 16}\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2}{3\sqrt{29}}.$$

*Ответ:*  $\cos \varphi = \frac{2}{3\sqrt{29}}.$

**2.3.12** Прямая  $L$  проходит через точку  $P(1, 2, -4)$ , пересекает прямую

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 3t - 1, \\ z = 4t + 3 \end{cases}$$

и пересекает ось  $OX$  в точке  $Q(x_0, 0, 0)$ . Найдите  $x_0$ .

*Решение.* Используем условие пересечения двух прямых:  $(r_2 - r_1, l_1, l_2) = 0$ . В нашем случае  $r_1 = (2, -1, 3)$ ,  $l_1 = (1, 3, 4)$ ,  $r_2 = (1, 2, -4)$ ,  $l_2 = \overrightarrow{PQ} = (x_0 - 1, -2, 4)$ . Тогда условие пересечения прямых имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \\ x_0 - 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Прибавим к первой строке вторую и разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ x_0 - 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (x_0 - 1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -18 + 33(x_0 - 1).$$

В результате получим уравнение  $33x_0 - 51 = 0$ , из которого находим  $x_0 = \frac{51}{33} = \frac{17}{11}$ .

*Ответ:*  $x_0 = \frac{17}{11}.$

**2.3.13** Запишите уравнение плоскости  $\Pi$ , проходящей через прямую

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0, \\ x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

параллельно вектору  $\overrightarrow{AB} = (3, -4, 5)$ .

*Решение.* По общему уравнению прямой найдём её направляющий вектор  $l$ :

$$l = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = i(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + j(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + k(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 13i + j - 5k. \text{ Видим, что } l = (13, 1, -5).$$

Получим координаты точки прямой  $M_0$ , полагая  $y = 0$  в общем уравнении прямой:

$$\begin{cases} x + 3z - 1 = 0, \\ x + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим  $z - 5 = 0$ ,  $z = 5$ ,  $x = -14$ ,  $M_0(-14, 0, 5)$ .

Плоскость  $\Pi$  параллельна направляющему вектору  $l$  прямой и вектору  $AB$ , поэтому её уравнение записываем по двум направляющим векторам и точке  $M_0$ :

$$\begin{vmatrix} x + 14 & y & z - 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 13 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad 15(x + 14) + 80y + 55(z - 5) = 0.$$

Делим обе части уравнения плоскости на 5. Уравнение  $3x + 16y + 11z - 13 = 0$  — искомое.

*Ответ:*  $3x + 16y + 11z - 13 = 0$ .



### Задачи для самостоятельного решения

**2.3.14** Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2, 3, 5)$  параллельно прямой  $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

*Ответ:*  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{-5}.$

**2.3.15** Составьте канонические уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 6 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость  $2x - y + z - 3 = 0$ .

*Ответ:*  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}.$

**2.3.16** Докажите, что прямые, заданные параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t + 5, \\ y = -4t - 1, \\ z = t - 4 \end{cases}$$

пересекаются, и найдите их точку пересечения.

Ответ:  $(3, 7, -6)$ .

**2.3.17** Запишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_1(-4, -5, 3)$  и пересекающей две прямые:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

Ответ:  $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$ .

**2.3.18** Найдите точку пересечения прямой  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$  и плоскости  $2x + 3y + z - 1 = 0$ .

Ответ:  $(2, -3, 6)$ .

**2.3.19** Запишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2, -3, -5)$  перпендикулярно плоскости  $2x + 7y - 6z + 2 = 0$ .

Ответ: 
$$\begin{cases} x = 2t + 2, \\ y = 7t - 3, \\ z = -6t - 5. \end{cases}$$

**2.3.20** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2, -1, 3)$  перпендикулярно прямой  $\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 4t + 1, \\ z = 5t - 1. \end{cases}$

Ответ:  $2x + 4y + 5z - 15 = 0$ .

**2.3.21** Найдите точку  $Q$ , симметричную точке  $P(2, -5, 7)$  относительно прямой, проходящей через точки  $M_1(5, 4, 6)$  и  $M_2(-2, -17, -8)$ .

Ответ:  $(4, 1, -3)$ .

**2.3.22** Найдите точку  $Q$ , симметричную точке  $P(1, 3, -4)$  относительно плоскости  $3x + y - 2z = 0$ .

Ответ:  $(-5, 1, 0)$ .

**2.3.23** Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямые:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{5}; \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

Ответ:  $35x + 10y + 22z = 0$ .

**2.3.24** Докажите, что прямые  $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$  и  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$  пересекаются, и запишите уравнение плоскости, в которой они расположены.

Ответ:  $22x - 8y - 17z + 61 = 0$ .

**2.3.25** Вычислите расстояние от точки  $P(2, 3, -1)$  до прямой  $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$ .

Ответ: 21.

2.3.26 Вычислите расстояние между прямыми:

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}; \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Ответ: 13.

2.3.27 Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = 4t \end{cases}$

параллельно прямой  $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

Ответ:  $x - 3y + 2z - 7 = 0$ .

2.3.28 Запишите параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку  $M_0(3, -2, -4)$  параллельно плоскости  $3x - 2y - 3z - 17 = 0$  и пересекает прямую  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{3}$ .

Ответ:  $\begin{cases} x = 5t + 3, \\ y = -6t - 2, \\ z = 9t - 4. \end{cases}$

## 2.4 Окружность. Сфера (задача 7)

2.4.1 Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 + 6x - 10y = 11$  определяет окружность. Найдите её центр и радиус. Запишите уравнение касательной к этой окружности в точке  $M_0(0, -1)$ .

Решение. Выделяем полные квадраты:

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 - 10y + 25) - 25 = 11, \quad (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 45.$$

Видим, что заданная кривая — окружность и центр её находится в точке  $C(-3, 5)$ , а радиус  $R = \sqrt{45}$ .

Как известно, касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. Поэтому вектор  $\overrightarrow{CM_0} = (3, -6) \parallel (1, -2)$  можно принять в качестве вектора нормали касательной, следовательно, уравнение касательной можно записать в виде  $x - 2y + C = 0$ . Эта прямая проходит через точку  $M_0(0, -1)$ , т.е.  $2 + C = 0$ ,  $C = -2$ . Уравнение  $x - 2y - 2 = 0$  — искомое.

Ответ:  $C(-3, 5)$ ,  $R = \sqrt{45}$ ,  $x - 2y - 2 = 0$ .

2.4.2 Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 8z + 2 = 0$  определяет сферу, найдите её центр, радиус и уравнение касательной плоскости в точке  $M_0(2, 1, 5)$ .

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты:

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + (z^2 - 8z + 16) - 16 + 2 = 0, \\ (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 19.$$

Следовательно, данное уравнение определяет сферу с центром в точке  $C(-1, -2, 4)$  радиуса  $R = \sqrt{19}$ . Вектор  $\overrightarrow{CM_0} = (3, 3, 1)$  является вектором нормали касательной плоскости к сфере в точке  $M_0$ . Поэтому уравнение этой плоскости:  $3x + 3y + z + D = 0$ . Точка  $M_0(2, 1, 5)$  лежит в плоскости. Поэтому  $6 + 3 + 5 + D = 0$ ,  $D = -14$ . Уравнение  $3x + 3y + z - 14 = 0$  — искомое.

Ответ:  $C(-1, -2, 4)$ ,  $R = \sqrt{19}$ ,  $3x + 3y + z - 14 = 0$ .



### Задачи для самостоятельного решения

**2.4.3** Запишите уравнение окружности, проходящей через точку  $M(3, -2)$ , с центром в точке  $C(-5, 4)$ .

Ответ:  $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 100$ .

**2.4.4** Запишите уравнение окружности, проходящей через три данные точки:  $M_1(-1, 5)$ ;  $M_2(-2, -2)$  и  $M_3(5, 5)$ .

Указание. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения срединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Ответ:  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .

**2.4.5** Запишите уравнения окружностей, которые проходят через точку  $A(1, 0)$  и касаются двух параллельных прямых  $2x + y + 2 = 0$ ,  $2x + y - 18 = 0$ .

Ответ:  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$ ,  $(x - 9/5)^2 + (y - 22/5)^2 = 20$ .

**2.4.6** Запишите уравнение окружности с центром в точке  $C(1, -1)$ , касающейся прямой  $5x - 12y + 9 = 0$ .

Ответ:  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

**2.4.7** Найдите центр и радиус окружности  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ .

Ответ:  $C(1, -2)$ ,  $R = 5$ .

**2.4.8** Запишите уравнение касательной к окружности  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$  в точке  $A(-5, 7)$ .

Ответ:  $3x - 4y + 43 = 0$ .

**2.4.9** Найдите центр и радиус сферы  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$ .

Ответ:  $C(2, 1, -1)$ ,  $R = 5$ .

**2.4.10** Запишите уравнение сферы с центром в точке  $C(3, -5, -2)$ , касающейся плоскости  $2x - y - 3z + 11 = 0$ .

Ответ:  $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56$ .

**2.4.11** Запишите уравнение касательной плоскости к сфере:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$$

в точке  $M(-1, 3, 0)$ .

Ответ:  $2x - y - z + 5 = 0$ .

## 2.5 Эллипс. Гипербола. Парабола (задачи 8, 9, 10)

В контрольную работу № 2 на тему “Кривые второго порядка” включены задачи 8, 9 и 10. Следует изучить п. 6.3, 6.4 и примеры в этих подразделах.

**2.5.1** Дана кривая  $36x^2 + 25y^2 - 216x + 100y - 476 = 0$  относительно правой декартовой системы координат. Докажите, что эта кривая — эллипс. Найдите его большую, малую полуоси и центр симметрии. Запишите уравнение фокальной оси.

*Решение.* Выделим полные квадраты:

$$36(x^2 - 6x + 9) - 36 \cdot 9 + 25(y^2 + 4y + 4) - 100 - 476 = 0, \quad 36(x - 3)^2 + 25(y + 2)^2 = 900.$$

Поделим обе части уравнения на 900:

$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{36} = 1. \quad (2.3)$$

Сопоставляя знаменатели дробей в (2.3) ( $25 < 36$ ), видим, что число 36, соответствующее большей полуоси эллипса, оказалось вместе с  $y^2$ . Это означает, что большая полуось параллельна оси  $OY$ . Следовательно, необходимо выполнить поворот осей на  $90^\circ$  и перенос начала координат. Введём новую систему координат  $O_1X_1Y_1$  таким образом, чтобы она была правой:

$$\begin{cases} x_1 = y + 2, \\ y_1 = -(x - 3), \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y_1 + 3, \\ y = x_1 - 2. \end{cases} \quad (2.4)$$

В новой системе координат уравнение кривой принимает канонический вид:

$$\frac{x_1^2}{36} + \frac{y_1^2}{25} = 1,$$

следовательно, оно определяет эллипс.

Центр симметрии эллипса находится в точке  $O_1$ . Её координаты найдём из (2.4), подставляя значения  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$  в формулы преобразования координат:  $O_1(3, -2)$ . Так как  $a^2 = 36$ ,  $b^2 = 25$ , то большая полуось эллипса  $a = 6$ , малая полуось эллипса  $b = 5$ . Фокальной осью эллипса является ось  $O_1X_1$ , её уравнение  $y_1 = 0$ , а в старой системе координат  $x - 3 = 0$  или  $x = 3$ .

Ответ:  $O_1(3, -2)$ ;  $a = 6$ ,  $b = 5$ ;  $x = 3$ .

**2.5.2** Дана кривая  $-25x^2 + 36y^2 + 150x + 144y - 981 = 0$  относительно правой декартовой системы координат. Докажите, что эта кривая — гипербола. Найдите её действительную, мнимую полуоси и центр симметрии. Запишите уравнение фокальной оси.

*Решение.* Выделим полные квадраты:

$$-25(x^2 - 6x + 9) + 25 \cdot 9 + 36(y^2 + 4y + 4) - 36 \cdot 4 - 981 = 0, \quad -25(x - 3)^2 + 36(y + 2)^2 = 900.$$

Поделим обе части уравнения на 900:

$$-\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

Видим, что в полученном уравнении, в отличие от канонического, знак "-" находится при переменной  $x$ . Это означает, что мнимая полуось параллельна оси  $OX$ , а действительная — оси  $OY$ . Поэтому необходимо выполнить поворот осей на  $90^\circ$  и перенос начала координат. Введём новую систему координат  $O_1X_1Y_1$  таким образом, чтобы она была правой:

$$\begin{cases} x_1 = y + 2, \\ y_1 = -(x - 3), \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y_1 + 3, \\ y = x_1 - 2. \end{cases} \quad (2.5)$$

В новой системе координат уравнение кривой принимает канонический вид:

$$\frac{x_1^2}{25} - \frac{y_1^2}{36} = 1,$$

следовательно, оно определяет гиперболу.

Центр симметрии гиперболы находится в точке  $O_1$ . Её координаты относительно системы  $OXY$  найдём, подставляя значения  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$  в формулы преобразования координат (2.5):  $O_1(3, -2)$ . Фокальной осью гиперболы является ось  $O_1X_1$ , её уравнение  $y_1 = 0$ , а в старой системе координат  $x - 3 = 0$  или  $x = 3$ . Так как  $a^2 = 25$ ,  $b^2 = 36$ , то действительная полуось гиперболы  $a = 5$ , мнимая полуось  $b = 6$ .

Ответ:  $O_1(3, -2)$ ;  $a = 5$ ,  $b = 6$ ;  $x = 3$ .

**2.5.3** Дана кривая  $x^2 - 6x + 6y + 21 = 0$  относительно правой декартовой системы координат. Докажите, что эта кривая — парабола. Найдите её вершину, параметр  $p$ . Запишите уравнение оси симметрии.

*Решение.* Выделим полный квадрат и преобразуем уравнение:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 6y + 21 = 0, \quad (x - 3)^2 + 6y + 12 = 0, \quad (x - 3)^2 = -6(y + 2).$$

Видим, что полученное уравнение отличается от канонического. Во первых, в квадрате координата  $x$ , во вторых присутствует знак "-". Выполним преобразование координат:

$$\begin{cases} x_1 = -(y + 2), \\ y_1 = x - 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y_1 + 3, \\ y = -x_1 - 2, \end{cases} \quad (2.6)$$

определяющее поворот осей на  $270^\circ$  (против часовой стрелки) и перенос начала координат. В новой системе координат  $O_1X_1Y_1$  уравнение кривой принимает канонический вид:  $y_1^2 = 6x_1$ . Оно определяет параболу.

Координаты вершины параболы (точка  $O_1$ ) получим из формул преобразования координат (2.6) при  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ :  $O_1(3, -2)$ . Так как  $2p = 6$ , параметр  $p = 3$ . Ось симметрии параболы совпадает с осью  $O_1X_1$ . Уравнение оси симметрии получим из (2.6) при  $y_1 = 0$ :  $x - 3 = 0$  или  $x = 3$ .

Ответ:  $O_1(3, -2)$ ;  $p = 3$ ;  $x = 3$ .

**2.5.4** Дана кривая  $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$  относительно правой декартовой системы координат. Докажите, что эта кривая — гипербола. Найдите её

действительную, мнимую полуоси и центр симметрии. Запишите уравнение фокальной оси. Постройте данную гиперболу.

*Решение.* Квадратичную форму  $B(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2$  приводим к главным осям. Определяем коэффициенты  $a_{11} = 3$ ,  $a_{22} = 3$ ,  $2a_{12} = 10$  и  $a_{12} = 5$ . Записываем матрицу квадратичной формы  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  и находим её собственные числа. Записываем и решаем характеристическое уравнение матрицы  $B$ :

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm 5, \quad \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -2.$$

Так как собственные числа имеют разные знаки, то данное уравнение определяет кривую гиперболического типа.

Находим собственные векторы матрицы  $B$ . Для собственного числа  $\lambda_1 = 8$  составляем систему:

$$\begin{cases} -5\xi_1 + 5\xi_2 = 0, \\ 5\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \xi_1 = \xi_2.$$

Полагаем  $\xi_2 = 1$ , собственный вектор  $(1, 1)$ , его модуль  $\sqrt{2}$ . Получим новый базисный вектор  $\mathbf{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . По свойству собственных векторов симметрического оператора, второй собственный вектор  $\mathbf{j}_1$  ортогонален вектору  $\mathbf{i}_1$ . Выберем вектор  $\mathbf{j}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  таким образом, чтобы базис  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  был правым.

От старого базиса  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  перейдём к новому базису  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ . Новую систему координат обозначим  $OX_1Y_1$ , координаты произвольной точки  $(x_1, y_1)$ . Матрица перехода имеет вид:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы перехода запишем формулы преобразования координат (см. формулы (2.19) учебного пособия):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x = (x_1 - y_1)/\sqrt{2}, \\ y = (x_1 + y_1)/\sqrt{2}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = (x + y)/\sqrt{2}, \\ y_1 = (-x + y)/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Вычисляем новые коэффициенты линейной формы:

$$(a, b) = (-2, -14) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{16}{\sqrt{2}}, -\frac{12}{\sqrt{2}}\right) = (-8\sqrt{2}, -6\sqrt{2}).$$

Уравнение кривой в системе  $OX_1Y_1$  имеет вид:

$$8x_1 - 2y_1 - 8\sqrt{2}x_1 - 6\sqrt{2}y_1 - 13 = 0.$$

Выделяем полные квадраты:

$$8\left(x_1 - \sqrt{2}x_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 4 - 2\left(y_1 + 3\sqrt{2}y_1 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 9 - 13 = 0,$$

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8, \quad \frac{\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} - \frac{\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1.$$

В полученном уравнении знак "-" находится при координате  $y_1$ , так же как и в каноническом уравнении гипербола. Это означает, что действительная полуось параллельна вектору  $\mathbf{i}_1$ , а мнимая —  $\mathbf{j}_1$ . Следовательно, осталось выполнить перенос начала координат в точку  $O_1$  по формулам:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (2.9)$$

В новой системе координат  $O_1X_2Y_2$  с базисом  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$  и началом в точке  $O_1$  гипербола имеет каноническое уравнение  $\frac{x_2^2}{1} - \frac{y_2^2}{4} = 1$ . Видим, что действительная полуось  $a = 1$ , а мнимая  $b = 2$ .

Центр симметрии эллипса находится в точке  $O_1$  с координатами  $x_2 = 0, y_2 = 0$  или  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_1 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ . Для того чтобы найти координаты  $O_1$  в системе  $OXY$ , используем формулы (2.7):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+3 \\ 1-3 \end{bmatrix} = (2, -1), \quad \text{итак, } O_1(2, -1).$$

Для того чтобы записать уравнения осей  $O_1X_2, O_1Y_2$ , выражаем координаты  $x_2, y_2$  через  $x, y$ . Подставляем в (2.9) формулы (2.8):

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ось  $O_1X_2$  имеет уравнение  $y_2 = 0$ . Подставляя  $y_2 = 0$  в (2.10), получим  $x - y - 3 = 0$ . Уравнение оси  $O_1Y_2$   $x + y - 1 = 0$  получим из (2.10) при  $x_2 = 0$ . Фокальной осью является ось  $O_1X_2$ . Уравнение фокальной оси:  $x - y - 3 = 0$ .

Для построения гипербола строим в старой системе  $OXY$  новую систему  $O_1X_2Y_2$ . Ставим точку  $O_1(2, -1)$ , проводим оси  $O_1X_2$  и  $O_1Y_2$  по найденным уравнениям (рис. 2.5). Фокальная ось гипербола совпадает с осью  $O_1X_2$ . Отмечаем на ней

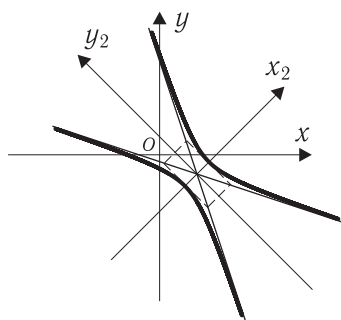


Рис. 2.5

вершины гиперболы:  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ . По оси  $O_1 Y_2$  от точки  $O_1$  откладываем мнимые полуоси (получим точки  $(0, -2)$ ,  $(0, 2)$ ). Строим прямоугольник, проводя линии, параллельные новым осям координат, через отмеченные точки. Прямые  $y_2 = \pm 2x_2$  являются асимптотами гиперболы. Они проходят через вершины прямоугольника. Используя вершины, прямоугольник и асимптоты, строим данную гиперболу.

**2.5.5** Дана кривая  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$  относительно правой системы координат. Докажите, что эта кривая — парабола. Найдите значение её параметра  $p$ , координаты вершины и уравнение её оси симметрии.

*Решение.* Аналогично решению задачи 2.5.4.

В данном уравнении квадратичная форма  $B = 9x^2 - 24xy + 16y^2$ , линейная форма  $\mathcal{L} = -20x + 110y$ . Определяем коэффициенты  $a_{11} = 9$ ,  $a_{22} = 16$ ,  $2a_{12} = -24$  и  $a_{12} = -12$ .

Записываем матрицу квадратичной формы:  $B = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$ .

Находим собственные числа. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -12 \\ -12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 25\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda - 25) = 0; \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 25.$$

Так как одно из собственных чисел равно нулю, то кривая — параболического типа.

Находим собственные векторы. Для числа  $\lambda_1 = 0$  составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9\xi_1 - 12\xi_2 = 0, \\ -12\xi_1 + 16\xi_2 = 0, \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \xi_1 = \frac{4}{3}\xi_2.$$

Если положим  $\xi_2 = 3$ , получим собственный вектор  $(4, 3)$  с модулем  $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .

Единичный собственный вектор  $\mathbf{i}_1$  имеет координаты  $\mathbf{i}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ . Другой собственный вектор, отвечающий собственному числу  $\lambda_2 = 25$ , может быть задан в виде  $\mathbf{j}_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ . Базис  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  принят правым (рис. 2.6).

Переходим от базиса  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  к  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ . Запишем матрицу перехода и обратную к ней:

$$Q = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Новую систему координат обозначим  $OX_1Y_1$ , исходную (старую) —  $OXY$ . Новые координаты  $(x_1, y_1)$  и старые  $(x, y)$  связаны соотношениями:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x = (4x_1 - 3y_1)/5, \\ y = (3x_1 + 4y_1)/5, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = (4x + 3y)/5, \\ y_1 = (-3x + 4y)/5. \end{cases} \quad (2.12)$$

Вычисляем новые коэффициенты линейной формы:

$$(a, b) = (-20, 110) \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} (-80 + 330, 60 + 440) = (50, 100).$$

В новой системе координат уравнение параболы принимает вид:

$$25y_1^2 + 50x_1 + 100y_1 - 50 = 0.$$

Выделим полный квадрат и преобразуем уравнение:

$$25(y_1^2 + 4y_1 + 4) - 100 + 50x_1 - 50 = 0, \quad 25(y_1 + 2)^2 + 50(x_1 - 3) = 0, \quad (y_1 + 2)^2 = -2(x_1 - 3).$$

Видим, что полученное уравнение отличается от канонического знаком "-" при  $x_1$ . Это означает, что, помимо переноса начала координат, потребуется выполнить поворот осей на  $180^\circ$ . Соответствующее преобразование координат:

$$\begin{cases} x_2 = -(x_1 - 3), \\ y_2 = -(y_1 + 2), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = -x_1 + 3, \\ y_2 = -y_1 - 2. \end{cases} \quad (2.13)$$

В системе координат  $O_1X_2Y_2$  парабола имеет каноническое уравнение  $y_2^2 = 2x_2$ . В нём  $2p = 2$ , параметр  $p$  параболы равен единице ( $p = 1$ ).

Вершина  $O_1$  параболы находится в точке  $x_2 = 0, y_2 = 0$ , из (2.13):  $x_1 = 3, y_1 = -2$ . Вычисляем старые координаты точки  $O_1$  по формуле (2.11):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 18 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{следовательно,} \quad O_1 \left( \frac{18}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Для того чтобы записать уравнения осей  $O_1X_2, O_1Y_2$ , выражаем координаты  $x_2, y_2$  через  $x, y$ . Подставляем в (2.13) формулы (2.12):

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{4x + 3y}{5} + 3, \\ y_2 = -\frac{-3x + 4y}{5} - 2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Ось  $O_1X_2$  имеет уравнение  $y_2 = 0$ . Подставляя  $y_2 = 0$  в (2.14), получим  $3x - 4y - 10 = 0$ . Уравнение оси  $O_1Y_2$  получим из (2.14) при  $x_2 = 0$ :  $4x + 3y - 15 = 0$ .

Ось симметрии параболы совпадает с осью  $O_1X_2$ . Уравнение оси симметрии:  $3x - 4y - 10 = 0$ .

Теперь можно построить данную параболу. Строим старую систему координат, ставим точку  $O_1 \left( \frac{18}{5}, \frac{1}{5} \right)$ , проводим оси  $O_1X_2$  и  $O_1Y_2$  по найденным уравнениям (рис. 2.6). Вершина параболы находится в точке  $O_1$ .

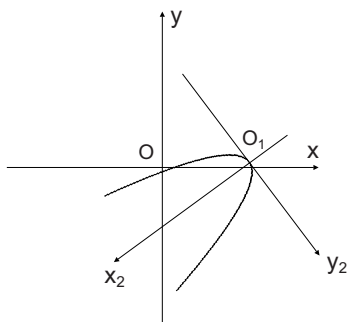


Рис. 2.6



### Задачи для самостоятельного решения

**2.5.6** Докажите, что уравнение  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$  определяет эллипс, и найдите: а) координаты его центра; б) полуоси; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис. Постройте данный эллипс.

*Ответ:* а)  $(3; -1)$ , б)  $3; \sqrt{5}$ , в)  $2/3$ ; г)  $3x = 22$ ,  $3x = 28$ .

**2.5.7** Дано уравнение  $x^2 + 4y^2 + 16y = 0$  кривой относительно декартовой системы координат. Выполните следующее: а) докажите, что эта кривая — эллипс; б) найдите координаты его центра симметрии; в) найдите его полуоси; г) найдите эксцентриситет этого эллипса; д) найдите расстояние между фокусами; е) постройте данный эллипс.

*Ответ:* б)  $(0; 2)$ , в)  $4; 2$ , г)  $\sqrt{3}/8$ ; д)  $2\sqrt{3}$ .

**2.5.8** Докажите, что уравнение  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$  определяет гиперболу, и найдите: а) координаты ее центра; б) полуоси; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис. Постройте данную гиперболу.

*Ответ:* а)  $(2; -3)$ , б)  $3; 4$ , в)  $5/3$ , г)  $4x - 3y - 17 = 0$ ,  $4x + 3y + 1 = 0$ , д)  $5x - 1 = 0$ ,  $5x - 19 = 0$ .

**2.5.9** Докажите, что уравнение  $y = 4x^2 - 8x + 7$  определяет параболу, и найдите координаты ее вершины  $A$  и величину параметра  $p$ .

*Ответ:*  $A(1; 3)$ ,  $p = 2$ .

**2.5.10** Каждое из уравнений:

- а)  $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$ ,
- б)  $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$ ,
- в)  $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 229 = 0$
- г)  $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$

приведите к каноническому виду; выясните, какие геометрические образы они определяют; укажите координаты новых базисных векторов; если кривая — эллипс или гипербола, укажите координаты центра симметрии, величины полуосей

и уравнение фокальной оси; если кривая – парабола, укажите координаты вершины, величину параметра  $p$ , уравнение оси симметрии; постройте кривые в старой системе координат.

*Ответы:*

а)  $\frac{x_2^2}{5} + \frac{y_2^2}{30} = 1$ ; эллипс;  $i_1 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ,  $j_1 = \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ ;  $O_1(1; -1)$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{30}$ ;

$4x - 8y - 7 = 0$ ;

б)  $\frac{y_2^2}{5/9} - \frac{x_2^2}{5/16} = 1$ ; гипербола;  $i_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ;  $j_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ;  $O_1(0; -1)$ ;

$\frac{\sqrt{5}}{3}$ ;  $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ;  $2x - y - 1 = 0$ ;

в)  $y_2^2 = 6x_2$ ; парабола;  $i_1 = \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ ;  $j_1 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ;  $O_1\left(-\frac{43}{25}; -\frac{74}{25}\right)$ ;  $p = 3$ ;

$3x + 4y + 17 = 0$ .

г)  $y_2^2 = 2\sqrt{2}x_2$ ; парабола;  $i_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  $j_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  $O_1(3; -2)$ ;  $p = \sqrt{2}$ ;

$x - y - 5 = 0$ .

---

## Глава 3

# КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

---

### 3.1 О самоконтроле при выполнении работ

Те студенты, которые имеют в своём распоряжении устройство СИМВОЛ либо его компьютерный аналог, могут выполнять контрольные в режиме автоматизированного самоконтроля. Как осуществлять самоконтроль, объяснено в инструкции, прилагаемой к устройству. В данных контрольных работах необходимо соблюдать следующие требования:

- 1) если ответом является матрица и нет никаких дополнительных указаний, то вводить её элементы по строкам, начиная с первой;
- 2) если ответом является неупорядоченная совокупность чисел, то вводить эти числа следует в порядке возрастания, начиная с наименьшего;
- 3) уравнения прямых или плоскостей вводить в виде:  $Ax + By + C = 0$ ,  $Ax + By + Cz + D = 0$ , приняв положительным первый коэффициент и все коэффициенты целыми и несократимыми (задачи подобраны таким образом, что это можно сделать);
- 4) если нет дополнительных указаний, то рациональные дроби вводить в виде обыкновенной дроби, не выделяя целой части;
- 5) в задачах 8 и 9 контрольной работы № 2 уравнения прямых, параллельных осям координат, записывать в виде  $y = a$  или  $x = b$ , где числа  $a$  и  $b$  определяются условиями задачи.

## 3.2 Требования к оформлению работ

- 1) На титульном листе должно быть указано:
  - а) название работы;
  - б) номер контрольной работы и номер варианта;
  - в) фамилия, имя, отчество полностью;
  - г) почтовый адрес.
- 2) Выполнять только свой вариант, определяемый по общим правилам. Решение не своего варианта не проверяется.
- 3) Записав условие задачи, ниже приведите её полное решение, не опуская промежуточных вычислений, текстовых пояснений, с полным теоретическим обоснованием и ссылками на используемые учебные пособия.
- 4) Решить необходимо все задачи с построением графиков в тех задачах, где это требуется по условию.
- 5) Работа выполняется либо в рукописном виде, либо в виде файла, набранного в редакторе MS WORD с использованием встроенного редактора формул.
- 6) Не проверяются работы, являющиеся копиями уже проверенных работ. В этом случае выдаётся новый вариант.
- 7) В случае направления на проверку исправленной, ранее не зачтённой работы необходимо прилагать старую рецензию.

## 3.3 Контрольная работа № 2

### Вариант 2.1

1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(-1, 2)$  и  $M_2(-3, -2)$ . (141.РП). Найдите значения параметров  $k$  и  $b$  для этой прямой.

2. Две стороны квадрата лежат на прямых  $5x - 12y - 65 = 0$  и  $5x - 12y + 26 = 0$ . (С71). Вычислите его площадь.

3(811.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки  $P(-3, 2, 5)$  на плоскости  $4x + y - 3z + 13 = 0$  и  $x - 2y + z - 11 = 0$ .

4(Д82). Найдите длину отрезка прямой, параллельной вектору  $l = (0, 3, 4)$ , между точками пересечения её с плоскостями  $2x + y - z - 6 = 0$  и  $2x + y - z - 4 = 0$ .

5(РР4.Р7). Найдите те значения  $m$  и  $n$ , при которых прямая  $\frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z}{34}$  пересекает прямые

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0, \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - 3z - 4 = 0, \\ y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

6(ПАМ). Дано, что прямая, пересекающая ось аппликат в точке  $(0, 0, z_0)$ ,  $z_0 > 0$ , параллельна плоскости  $2x + 3y + 6z + 7 = 0$ , отстоит от неё на расстоянии 7 и перпендикулярна оси ординат. Найдите абсциссу точки пересечения этой прямой с координатной плоскостью  $z = 0$ .

7(АТ1.РП). Запишите уравнение касательной к окружности  $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 17$  в точке  $M(1, 2)$ .

8. Дана кривая  $9x^2 + 25y^2 - 18x - 150y + 9 = 0$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

8.2(021.Б7). Найдите координаты центра его симметрии.

8.3(631.Б7). Найдите его большую и малую полуоси.

8.4(С91). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая  $x^2 - 10x + 2y + 25 = 0$ .

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(С11.Б7). Найдите координаты её вершины.

9.3(221). Найдите значение её параметра  $p$ .

9.4(СП1.Б7). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая  $15x^2 - 20xy - 70x + 20y + 135 = 0$ .

10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

10.2(ПР1.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.

10.3(6Р1.Б7). Найдите действительную и мнимую полуоси.

10.4(АП1.Б7). Запишите общее уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную гиперболу.

### Вариант 2.2

1(РД2.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2, -3)$  параллельно вектору  $\overline{AB}$ , если  $A(4, 5)$ ,  $B(3, -7)$ .

2(А82.Б7). Стороны треугольника  $ABC$  заданы уравнениями  $AB: 4x - y - 7 = 0$ ;  $BC: x + 3y - 31 = 0$ ;  $AC: x + 5y - 7 = 0$ . Запишите общее уравнение высоты  $AH$ .

3(432.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(3, 0, 4)$  и  $M_2(1, 1, 0)$  перпендикулярно плоскости  $2x + y + 4z - 7 = 0$ .

4(С35). Найдите расстояние от точки  $P(2, 4, 4)$  до прямой  $\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$

5(435). Плоскость проходит через прямую  $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$  параллельно вектору  $\overline{AB} = (8, 4, 7)$ . Найдите длину отрезка, отсекаемого этой плоскостью от оси ординат.

6(СП5). Две прямые, пересекающиеся в точке  $P(0, 0, z_0)$ ,  $z_0 > 0$  параллельны плоскости  $2x + y + 2z + 6 = 0$  и отстоят от неё на расстоянии 4. Одна из прямых пересекает ось абсцисс, а вторая — ось ординат. Найдите тангенс острого угла между ними.

7(942). Найдите радиус окружности с центром в точке  $M(2, 4)$ , если известно, что прямая  $3x + 4y + 8 = 0$  касается этой окружности.

8. Дана кривая  $25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

8.2(922.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

8.3(С12.РП). Найдите его большую и малую полуоси.

8.4(932). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая  $y^2 - 2y + 4x + 9 = 0$ .

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(7Т2.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(342). Найдите значение её параметра  $p$ .

9.4(312). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая  $x^2 - 7y^2 - 6xy + 2x + 26y + 57 = 0$ .

10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

10.2(9С2.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.

10.3(382.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.

10.4(АМ2.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную гиперболу.

### Вариант 2.3

1(2С3.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-2, 4)$  перпендикулярно прямой  $x + 2y + 5 = 0$ . (2Д3). Найдите площадь треугольника, образованного данной прямой с осями координат.

2(Р43.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-2, 2)$  и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью  $S = 4,5$  кв. ед.

3(Т33.БЛ). Даны вершины треугольника  $A(2, 1, 0)$ ,  $B(3, -1, 1)$  и  $C(1, 2, -4)$ . Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через сторону  $AB$  перпендикулярно плоскости треугольника  $ABC$ .

4(839). Найдите расстояние от точки  $P(1, 2, 0)$  до прямой  $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{0}$ .

5(925). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, которая проходит через точку  $A(1, 1, 6)$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{AB}$ , где  $B$  — точка пересечения медиан треугольника, вершины которого совпадают с точками пересечения осей координат с плоскостью  $12x + 6y + z - 24 = 0$ .

6(512). Две прямые параллельны плоскости  $4x + 3y + 6z = 0$ . Первая прямая проходит через точку  $P(1, 2, 3)$  и пересекает ось абсцисс, а вторая — проходит через точку  $Q(3, 0, 0)$  и пересекает ось ординат. Найдите косинус острого угла между направляющими векторами этих прямых.

7(С93.Б7). Найдите координаты центра  $C(x_0, y_0)$  окружности радиусом 5, касающейся прямой  $3x + 4y - 6 = 0$  в точке  $M(2, 0)$ , если известно, что точка  $C$  расположена в первой четверти.

8. Дана кривая  $9x^2 - 4y^2 - 18x + 56y - 223 = 0$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

8.2(223.РП). Найдите координаты её центра симметрии.

8.3(9С3.Р7). Найдите действительную и мнимую полуоси.

8.4(893.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную гиперболу.

9. Дана кривая  $x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$ .

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(793.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(323). Найдите значение её параметра  $p$ .

9.4(753.Б7). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая  $8x^2 + 17y^2 + 12xy - 28x - 46y = 43$ .

10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

10.2(803.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

10.3(4Р3.РП). Найдите его большую и малую полуоси.

10.4(433.БЛ). Запишите общее уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную кривую.

### Вариант 2.4

1(781.РП). Составьте общее уравнение прямой, если точка  $P(2, 5)$  служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

2(882.БЛ). Запишите общее уравнение прямой, параллельной прямой  $4x + 2y + 5 = 0$  и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью 9 кв. ед.

3(5А3.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(4, -1, 3)$  параллельно оси  $OX$  и перпендикулярной к плоскости  $x - 3y + 4z - 5 = 0$ .

4(2Д2). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, содержащей прямую  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+8}{4}$  и параллельной вектору  $a = (1, 0, 2)$ .

5(576). Прямая, проходящая через точку  $P(1, 2, 3)$  и пересекающая ось аппликат в точке  $(0, 0, z_0)$ , параллельна плоскости  $2x + y + z + 6 = 0$ . Найдите  $z_0$ .

6(712.РП). Найдите координаты точки пересечения с плоскостью  $x = 1$  прямой, перпендикулярной плоскости  $4x + 2y + 4z + 5 = 0$  и пересекающей две заданные прямые  $x + 1 = y = z$  и  $2x = 2y = z + 4$ .

7(8Д1). Найдите радиус окружности, если известно, что она касается двух прямых  $3x + 4y - 16 = 0$  и  $3x + 4y + 24 = 0$ .

8. Дана кривая  $x^2 - 4x - 9y^2 + 72y - 149 = 0$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

- 8.2(9С4.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.  
8.3(385.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.  
8.4(9С6.БЛ). Запишите общее уравнение фокальной оси.  
8.5. Постройте данную гиперболу.  
9. Дана кривая  $x^2 + 4y = 0$ .  
9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.  
9.2(9Т7.РП). Найдите координаты её вершины.  
9.3(258). Найдите значение её параметра  $p$ .  
9.4(АР9.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.  
9.5. Постройте данную параболу.  
10. Дана кривая  $5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 24y = 0$ .  
10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.  
10.2(9А0.БЛ). Найдите координаты центра его симметрии.  
10.3(ПД1.РП). Найдите его большую и малую полуоси.  
10.4(С82.РП). Запишите уравнение фокальной оси.  
10.5. Постройте данную кривую.

### Вариант 2.5

- 1(Д01.РП). Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1, 4)$  параллельно прямой  $2x + 3y + 5 = 0$ .  
2(3А2.РП). Найдите координаты проекции точки  $M(3, 6)$  на прямую  $x + 2y - 10 = 0$ .  
3(103.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки  $M_1(-6, 1, -5)$ ,  $M_2(7, -2, -1)$ ,  $M_3(10, -7, 1)$ .  
4(203). Известно, что прямая  $\mathcal{L}$  параллельна вектору  $\mathbf{l} = (0, 6, 8)$ . Найдите длину отрезка этой прямой между плоскостями  $x + y + z - 3 = 0$  и  $x + y + z - 24 = 0$ .  
5(3С2). Некоторая прямая проходит через точку  $P(2, 2, 1)$ , пересекает ось ординат в точке  $Q(0, y_0, 0)$  и пересекает прямую  $\begin{cases} x - 3z + 2 = 0, \\ y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$  Найдите  $y_0$ .  
6(7АД). Плоскость содержит прямую  $\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{(z-6)}{-2}$  и параллельна прямой  $x - 3 = y - 3 = -2(z - 6)$ . Найдите квадрат расстояния от второй прямой до плоскости.  
7(С04.РП). Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$  определяет на плоскости  $ХОУ$  окружность. Найдите её центр и радиус  $R$ . В ответе сначала указать  $x_0, y_0$  — координаты центра, затем  $R$ .  
8. Дана кривая  $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0$ .  
8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.  
8.2(325.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.  
8.3(Д06.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.

8.4(267.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную гиперболу.

9. Дана кривая  $y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$ .

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(058.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(2П9). Найдите значения её параметра  $p$ .

9.4(289.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая  $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 16x - 16y = 16$ .

10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

10.2(822.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

10.3(470.Б7). Найдите его большую и малую полуоси.

10.4(941.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную кривую.

### Вариант 2.6

1(ПД1.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2, 4)$  перпендикулярно прямой  $3x + 4y + 5 = 0$ .

2(342.РП). Составьте уравнения прямых, проходящих через точку  $P(3, 5)$  на одинаковых расстояниях от точек  $A(-7, 3)$  и  $B(11, -15)$ . В ответ ввести уравнение той прямой, которая отсекает от осей координат треугольник, расположенный в первой четверти.

3(ПР3.БЛ). Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(4, 2, 1)$  и  $M_2(3, 3, 2)$  параллельно вектору  $\overline{AB} = (4, -3, -2)$ .

4(ПР4.РП). Найдите координаты проекции начала координат на прямую

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-2}.$$

5(2С5). При каком значении параметра  $C$  прямая

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 5 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

параллельна плоскости  $x + 3y + Cz - 2 = 0$ .

6(Р06). Две грани куба лежат на плоскостях  $3x - 6y + 2z - 5 = 0$  и  $3x - 6y + 2z + 30 = 0$ . Вычислите объём куба.

7(977.РП). Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 35 = 0$  определяет сферу. Найдите координаты  $(x_0, y_0, z_0)$  её центра и радиус  $R$ . В ответе запишите четвёрку чисел  $(x_0, y_0, z_0, R)$ .

8. Дана кривая  $25x^2 + 16y^2 - 350x + 825 = 0$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

8.2(ТП8.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

8.3(АП9.БЛ). Найдите его большую и малую полуоси.

8.4(ЗТ0.Б7). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая  $14y = (x - 8)^2$ .

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(ОР1.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(962). Найдите значение её параметра  $p$ .

9.4(Д93.БЛ). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая  $x^2 + y^2 + 3xy + x + 4y = 0,5$ .

10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

10.2(ОД4.РП). Найдите координаты её центра симметрии.

10.3(ЗТ5.РП). Найдите квадраты её действительной и мнимой полуосей.

10.4(416.БЛ). Запишите общее уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную гиперболу.

### Вариант 2.7

1(П81.РП). Даны координаты вершин треугольника  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 8)$ ,  $C(6, 6)$ . Запишите общее уравнение прямой, на которой расположена медиана  $AM$  треугольника  $ABC$ .

2(6Б2.БЛ). Найдите координаты точки  $B$ , симметричной точке  $A(3, 2)$  относительно прямой  $x + 2y - 2 = 0$ .

3(983.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2, -1, 1)$  перпендикулярно двум плоскостям:  $x - 2y + 3z - 2 = 0$ ,  $x + 4y - 2z + 1 = 0$ .

4(8С4). Найдите то значение параметра  $p$ , при котором пересекаются прямые:

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x - 5}{1} = \frac{y + 1}{p} = \frac{z + 4}{1}.$$

5(С35). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси абсцисс плоскостью, проходящей через прямую  $\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$  и точку  $M(1, 1, 0)$ .

6(Д06). Найдите расстояние между плоскостями  $x - 2y + 2z + 11 = 0$  и  $x - 2y + 2z - 25 = 0$ .

7(597). Найдите радиус сферы  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + \lambda = 0$ , если известно, что она касается плоскости  $3x - 2y + 6z + 23 = 0$ .

8. Дана кривая  $x^2 + y^2 - 8x - 2y = 47$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — окружность.

8.2(671.Б7). Найдите координаты её центра.

8.3(ПА2). Найдите её радиус.

9. Дана кривая  $25x^2 - 16y^2 + 32y - 416 = 0$ .

9.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

9.2(ПР8.РП). Найдите координаты её центра симметрии.

9.3(А59.БЛ). Найдите действительную и мнимую полуоси.

9.4(ЗР0.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

9.5. Постройте данную гиперболу.

10. Дана кривая  $9x^2 + 16y^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$ .  
 10.1. Докажите, что данная кривая — парабола.  
 10.2(1РЗ.РП). Найдите координаты её вершины.  
 10.3(СТ4). Найдите значение её параметра  $p$ .  
 10.4(П95.БЛ). Запишите уравнение её оси симметрии.  
 10.5. Постройте данную параболу.

### Вариант 2.8

1(376.РП). Даны координаты вершин треугольника  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 8)$ ,  $C(6, 7)$ . Запишите общее уравнение его высоты  $АН$ .

2(345.Р7). В треугольнике  $ABC$  из вершины  $A$  проведены высота и медиана. Даны координаты вершины  $B(6, 5)$ , уравнение высоты  $x + y = 2$  и уравнение медианы  $2x - 3y + 1 = 0$ . Найдите координаты  $x_0, y_0$  вершины  $C$ .

3(0С7.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1, -2, 4)$  и  $M_2(2, -1, 2)$  перпендикулярно плоскости  $x + 4y - 5z + 3 = 0$ .

4(058.РП). Найдите координаты проекции точки  $M(3, -1, -3)$  на плоскость  $2x + y - 4z + 4 = 0$ .

5(878). Найдите коэффициент  $A$  в уравнении плоскости  $Ax + y + Cz + D = 0$ , проходящей через точки  $P(1, 1, 8)$ ,  $O(0, 0, 0)$  параллельно прямой  $x - 1 = \frac{y}{-1} = \frac{z}{6}$ .

6(П49.РП). При каких значениях параметров  $a$  и  $c$  прямая  $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{c}$  пересекает две другие прямые:

$$\begin{cases} y - 3z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 3x - z - 2 = 0. \end{cases}$$

7(350). Найдите радиус сферы, если известно, что она касается двух плоскостей  $x - 2y + 2z + 22 = 0$  и  $x - 2y + 2z + 10 = 0$ .

8. Дана кривая  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 64y + 256 = 0$ .  
 8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.  
 8.2(341.РП). Найдите координаты центра его симметрии.  
 8.3(982.БЛ). Найдите его большую и малую полуоси.  
 8.4(813.РП). Запишите уравнение фокальной оси.  
 8.5. Постройте данную кривую.  
 9. Дана кривая  $x^2 - 4x + 8y = 36$ .  
 9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.  
 9.2(9А4.РП). Найдите координаты её вершины.  
 9.3(415). Найдите значение её параметра  $p$ .  
 9.4(9А6.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.  
 9.5. Постройте данную параболу.  
 10. Дана кривая  $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ .  
 10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.  
 10.2(Д87.РП). Найдите координаты её центра симметрии.

- 10.3(ПД8.БЛ). Найдите действительную и мнимую полуоси.  
10.4(299.РП). Запишите уравнение фокальной оси.  
10.5. Постройте данную гиперболу.

### Вариант 2.9

1(940.РП). Даны координаты вершин треугольника  $A(3, 4)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $C(2, -1)$ . Запишите общее уравнение средней линии треугольника, параллельной  $BC$ .

2(1А1.БЛ). В прямоугольном треугольнике  $ABC$  известны: уравнение медианы  $3x - 4y + 8 = 0$ , проведённой из вершины  $A(0, 2)$  прямого угла, и вершина  $B(2, 1)$ . Найдите координаты  $(x_0, y_0)$  вершины  $C$  треугольника.

3(Т32.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(7, 2, -3)$  и  $M_2(5, 6, -4)$  параллельно оси  $OY$ .

4(9Д3). Найдите коэффициент  $B$  в уравнении плоскости  $x + By + Cz + D = 0$ , проходящей через точки  $P(1, -1, 1)$ ,  $O(0, 0, 0)$  параллельно прямой  $\begin{cases} x = 0, \\ 4y + 3z = 0. \end{cases}$

5(1А6.РП). При каких значениях параметров  $A_1$  и  $A_2$  прямые

$$\begin{cases} A_1x + 3y - 5z = 0, \\ A_2x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 19z + 19 = 0, \\ y + 11z - 11 = 0. \end{cases}$$

параллельны. Ответ запишите в виде пары чисел  $(A_1, A_2)$ .

6(ДД3). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси аппликат плоскостью, содержащей прямую  $x + 3 = \frac{y + 3}{5} = \frac{z - 6}{4}$  и отсекающей на осях абсцисс и ординат одинаковой длины отрезки.

7(8Т3.РП). Найдите уравнение касательной плоскости к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y + 4z - 12 = 0$  в точке  $M_0(1, 1, 2)$ .

8. Дана кривая  $4x^2 - 32x - y^2 + 6y + 51 = 0$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

8.2(С54.БЛ). Найдите координаты её центра симметрии.

8.3(225.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.

8.4(346.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную гиперболу.

9. Дана кривая  $4x + 6y - y^2 = 21$ .

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(1Д7.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(258). Найдите значение её параметра  $p$ .

9.4(С59.БЛ). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая  $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x - 18y + 9 = 0$ .

10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

10.2(8Д0.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

10.3(П01.БЛ). Найдите его большую и малую полуоси.

10.4(162.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную кривую.

### Вариант 2.10

1(С83.РП). В прямоугольном треугольнике даны: вершина острого угла  $A(7, -2)$  и уравнение  $3x - 5y + 15 = 0$  одного из катетов. Запишите общее уравнение другого катета.

2(П64.РП). Высота, проведённая из вершины  $A(4, 4)$  треугольника  $ABC$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $D(1, 1)$ .  $x + 2y + 1 = 0$  — уравнение высоты, опущенной из вершины  $B$ . Определить координаты  $x_0, y_0$  вершины  $C$ .

3(ПА5.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, которая проходит через точку  $M_0(1, 2, 3)$  и ось  $OY$ .

4(ЗА2). Найдите значение параметра  $m$  в уравнении прямой  $\begin{cases} x = 0, \\ my + 18z = 0, \end{cases}$  если известно, что эта прямая параллельна плоскости  $x + 4y + 3z + 5 = 0$ .

5(983). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси аппликат плоскостью, проходящей через точки  $P_1(2, 1, 0)$ ,  $P_2(1, 0, 4)$  и пересекающей оси ординат и абсцисс в точках  $A_1(0, a, 0)$ ,  $A_2(a, 0, 0)$ .

6(Б62.БП). Найдите координаты точки пересечения прямой  $\frac{x}{3} = \frac{y}{12} = z$  с плоскостью, содержащей прямые  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$  и  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ .

7(5Т6). Найдите радиус сферы с центром в точке  $C(-1, -2, 3)$ , если она касается плоскости  $2x - 2y + z + 10 = 0$ .

8. Дана кривая  $4x^2 + 9y^2 - 32x - 18y + 37 = 0$ .

8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

8.2(А57.БЛ). Найдите координаты центра его симметрии.

8.3(П08.РП). Найдите его большую и малую полуоси.

8.4(СР9.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая  $y^2 - 4y + 10x + 14 = 0$ .

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(430.БЛ). Найдите координаты её вершины.

9.3(821). Найдите значение её параметра  $p$ .

9.4(ЗП2.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая  $7y^2 + 24xy + 24x + 62y + 199 = 0$ .

10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

10.2(2Р3.БЛ). Найдите координаты её центра симметрии.

10.3(С54.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.

10.4(А65.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную гиперболу.



Учебное издание

**Магазинников** Леонид Иосифович  
**Магазинникова** Анна Леонидовна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА  
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Корректор Осипова Е. А.  
Компьютерная верстка Магазинникова А. Л.

Подписано в печать 01.11.12. Формат 60х84/8.  
Усл. печ. л. 10,00.

---

Издано в ООО «Эль Контент»  
634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17  
Отпечатано в Томском государственном университете  
систем управления и радиоэлектроники.  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40  
Тел. (3822) 533018.