

Ю. Г. ГАЛИЧ

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1

ОМСК 2016

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Ю. Г. Галич

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Утверждено методическим советом университета
в качестве практикума для студентов заочного факультета
всех специальностей и направлений подготовки

Омск 2016

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Г15

Математика. Часть 1: Практикум для студентов заочного факультета всех специальностей и направлений подготовки / Ю. Г. Галич; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2016. 38 с.

Практикум содержит варианты контрольных заданий по трем разделам дисциплины «Математика»: «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Предел. Производная. Непрерывность», а также основные формулы по каждому из разделов и подробно разобранные примеры решения типовых задач.

Предназначен для студентов заочного факультета всех специальностей и направлений подготовки.

Библиогр.: 3 назв. Табл. 3. Рис. 12.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент С. Н. Крохин;
канд. пед. наук, доцент Т. П. Фисенко.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Варианты индивидуальных контрольных заданий	6
1.1. Контрольная работа 1. Линейная и векторная алгебра	6
1.2. Контрольная работа 2. Аналитическая геометрия	10
1.3. Контрольная работа 3. Пределы. Непрерывность. Производная ...	13
2. Формулы и примеры решения задач	18
2.1. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 1	18
2.2. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 2	24
2.3. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 3	30
Библиографический список	37

ВВЕДЕНИЕ

При изучении дисциплины «Математика» для лучшего усвоения теоретического материала большое значение имеют практические занятия по решению задач.

Цель настоящего практикума – оказать помощь студентам в освоении методики решения типовых задач.

Теоретические сведения, необходимые для решения задач, приведены в данном учебно-методическом пособии и работах [1 – 3].

Для выбора варианта контрольной работы необходимо пронумеровать буквы в записи своих фамилии, имени и отчества. Номера букв соответствуют номерам вариантов контрольных работ. Например:

И	В	А	Н	О	В	О	Л	Е	Г	П	Е	Т	Р	О	В	И	Ч
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Из этой записи следует: вариант первой контрольной работы будет определяться буквой И, второй – буквой В, третьей – буквой А. При этом используется приведенная ниже таблица.

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Буква	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Э	Ю	Я
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Итак, первой контрольной работе соответствует буква И, по которой определяем для этой контрольной работы десятый вариант. Для второй контрольной работы по букве В выбираем задачи третьего варианта. Для третьей контрольной работы по букве А выбираем задачи первого варианта.

В первом разделе практикума приведены условия задач, во втором разделе по номеру задачи размещен материал, который поможет при ее решении.

1. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1.1. Контрольная работа 1 Линейная и векторная алгебра

З а д а ч а 1. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Вычислить определители матриц A и B и матрицу F .

- | | | | |
|-----|---|--|-----------------|
| 1. | $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix};$ | $F = 5A - BA.$ |
| 2. | $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};$ | $F = AB - 3B.$ |
| 3. | $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix};$ | $F = 4A - BA.$ |
| 4. | $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix};$ | $F = 5B - AB.$ |
| 5. | $A = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};$ | $F = -3A + BA.$ |
| 6. | $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$ | $F = AB - 5B.$ |
| 7. | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$ | $F = -5A + BA.$ |
| 8. | $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix};$ | $F = 2B - AB.$ |
| 9. | $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$ | $F = BA + 5A.$ |
| 10. | $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$ | $F = 4B - AB.$ |
| 11. | $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$ | $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$ | $F = 4A + BA.$ |

$$12. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = AB - 2B.$$

$$13. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = 6A + BA.$$

$$14. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad F = 7B + AB.$$

$$15. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}; \quad F = 2A - BA.$$

$$16. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}; \quad F = AB - 2B.$$

З а д а ч а 2. Даны системы линейных алгебраических уравнений. Требуется: а) решить систему по правилу Крамера; б) решить систему методом Гаусса. Сделать проверку полученных решений.

$$1. \quad \text{а) } \begin{cases} 4x - y = -1; \\ x - y = -4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 3y + 2z = 0; \\ 7x + 8y - 8z = 7; \\ 9x - 6y + 2z = 5. \end{cases}$$

$$2. \quad \text{а) } \begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 2; \\ 7x - 4y - 4z = 7; \\ x - 9y - 3z = 7. \end{cases}$$

$$3. \quad \text{а) } \begin{cases} x + 4y = -3; \\ 3x - y = -2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 8y - 5z = -2; \\ 9x + 5y - 8z = 22; \\ 7x - 9y + 3z = -5. \end{cases}$$

$$4. \quad \text{а) } \begin{cases} 5x + y = 2; \\ x - y = 4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -6x - 5y + 3z = 4; \\ 4x - 8y + 9z = -3; \\ -x - 2y - 5z = -6. \end{cases}$$

$$5. \quad \text{а) } \begin{cases} 4x + 4y = 1; \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 9y + 3z = -7; \\ -2x + 2y - 8z = -8; \\ 9x - 6y - 2z = -5. \end{cases}$$

$$6. \quad \text{а) } \begin{cases} 2x - y = 2; \\ -3x + 2y = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 6x - y + 7z = -14; \\ 7x + 4y - z = -2; \\ -x - 9y - 7z = -1. \end{cases}$$

$$7. \quad a) \begin{cases} x + 4y = 3; \\ 4x + 2y = -2. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 5; \\ x + 7y + 8z = -14; \\ -3x - 2y - 2z = 1. \end{cases}$$

$$8. \quad a) \begin{cases} x + 2y = 2; \\ 3x + y = -4. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} -4x + y + 3z = 0; \\ 3x + 2y - 5z = 0; \\ x - 7y + 8z = -2. \end{cases}$$

$$9. \quad a) \begin{cases} 4x - y = 2; \\ x + y = 4. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} -x - 9y + 7z = 4; \\ 5x - 4y - 2z = -3; \\ 7x + 3y - z = 8. \end{cases}$$

$$10. \quad a) \begin{cases} -3x + 2y = 2; \\ x + y = 8. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x - 9y + 2z = -13; \\ -x + 2y - 6z = -3; \\ -2x - 7y + 2z = -14. \end{cases}$$

$$11. \quad a) \begin{cases} 2x + 2y = -3; \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x + y + 2z = 9; \\ 5x - 2y + 8z = 16; \\ x + 7y - 2z = 7. \end{cases}$$

$$12. \quad a) \begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x - 9y + 6z = -3; \\ 7x + 8y - 5z = 13; \\ x - 7y + 8z = 3. \end{cases}$$

$$13. \quad a) \begin{cases} x + y = 3; \\ -2x + 2y = -1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} -x - 9y + 7z = 3; \\ 5x - 4y - 4z = -2; \\ 7x - 9y - z = 3. \end{cases}$$

$$14. \quad a) \begin{cases} x + 3y = 12; \\ 3x + 2y = -10. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} -x - 9y + 3z = -17; \\ 5x - 8y + 9z = 3; \\ -9x - 7y + 2z = -30. \end{cases}$$

$$15. \quad a) \begin{cases} -x + 3y = -3; \\ 2x + y = -4. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x + 3y - z = 8; \\ x + 2y + 2z = 10; \\ 3x + 4y - 5z = 4. \end{cases}$$

$$16. \quad a) \begin{cases} 3x + 2y = 1; \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 3x - 2y - 3z = 7; \\ 3x - 4y + 5z = -11. \end{cases}$$

З а д а ч а 3. Заданы вершины треугольника ABC : $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Найти: а) векторы $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{AC}$ и их модули;

б) угол $\gamma = \angle CAB$; в) площадь треугольника ABC ; г) высоту треугольника, опущенную из вершины C .

1. $A(2; 3; -2), B(4; -1; 3), C(-3; 0; 5)$. 2. $A(0; 1; -1), B(-2; 3; 4), C(-6; 2; 1)$.
3. $A(-3; 1; 2), B(0; 3; -1), C(-2; 4; 2)$. 4. $A(4; 7; 1), B(-2; 4; 5), C(-1; 7; 3)$.
5. $A(4; 6; -1), B(-4; 0; 3), C(3; 2; -2)$. 6. $A(4; -6; 1), B(-3; 3; 3), C(-2; -6; 0)$.
7. $A(5; 5; -2), B(1; -1; 2), C(-2; 4; 1)$. 8. $A(-1; 6; 4), B(-3; 3; 1), C(7; -6; 2)$.
9. $A(6; 0; 6), B(3; -1; 2), C(-4; -2; 3)$. 10. $A(5; 7; -1), B(-2; 4; 3), C(-6; 2; 2)$.
11. $A(-1; 3; 5), B(2; 7; -1), C(1; -3; 0)$. 12. $A(-1; 6; 2), B(3; -1; 3), C(1; 0; -7)$.
13. $A(3; -2; 2), B(1; -4; 1), C(3; 0; 5)$. 14. $A(4; 6; -2), B(-5; 1; 3), C(-4; 2; 1)$.
15. $A(-6; 1; 1), B(3; 3; -7), C(-4; 0; 2)$. 16. $A(-5; 1; 2), B(-1; 6; 3), C(1; -3; 4)$.

З а д а ч а 4. Заданы три вектора: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Требуется: а) выбрать пару перпендикулярных векторов (если такие есть); б) найти смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

1. $\vec{a} = (1; -2; 3), \quad \vec{b} = (-4; 1; -1), \quad \vec{c} = (1; 2; -2)$.
2. $\vec{a} = (5; 1; -1), \quad \vec{b} = (1; -2; 3), \quad \vec{c} = (4; 2; -1)$.
3. $\vec{a} = (-2; 5; 4), \quad \vec{b} = (3; -2; 1), \quad \vec{c} = (1; 2; -2)$.
4. $\vec{a} = (3; 6; -1), \quad \vec{b} = (-1; 1; 3), \quad \vec{c} = (-1; 2; -5)$.
5. $\vec{a} = (-2; 1; -4), \quad \vec{b} = (-4; 1; 3), \quad \vec{c} = (2; -1; 3)$.
6. $\vec{a} = (-3; 4; 1), \quad \vec{b} = (7; -1; 2), \quad \vec{c} = (1; 2; -5)$.
7. $\vec{a} = (4; -2; 2), \quad \vec{b} = (2; -3; -7), \quad \vec{c} = (-2; 1; 4)$.
8. $\vec{a} = (2; 1; -2), \quad \vec{b} = (-1; 2; -7), \quad \vec{c} = (1; 6; 4)$.
9. $\vec{a} = (1; 4; -5), \quad \vec{b} = (-1; 9; 2), \quad \vec{c} = (-2; 3; 2)$.
10. $\vec{a} = (-4; 4; 2), \quad \vec{b} = (-1; 1; -4), \quad \vec{c} = (-2; -1; 3)$.
11. $\vec{a} = (-1; -2; -5), \quad \vec{b} = (2; 1; 3), \quad \vec{c} = (1; 1; -1)$.
12. $\vec{a} = (-1; 2; 6), \quad \vec{b} = (2; -1; 1), \quad \vec{c} = (1; 4; -2)$.

13. $\bar{a} = (-1; 2; -5), \quad \bar{b} = (2; -4; 3), \quad \bar{c} = (3; 4; 1).$
 14. $\bar{a} = (-5; 2; -1), \quad \bar{b} = (2; -2; -3), \quad \bar{c} = (1; 4; -2).$
 15. $\bar{a} = (-3; 2; 2), \quad \bar{b} = (2; 1; 2), \quad \bar{c} = (1; 4; -2).$
 16. $\bar{a} = (-1; 5; -3), \quad \bar{b} = (2; -7; 3), \quad \bar{c} = (1; -1; -2).$

1.2. Контрольная работа 2

Аналитическая геометрия

З а д а ч а 1. Заданы три точки: $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Найти:
 а) общее уравнение прямой AB и ее угловой коэффициент; б) общие уравнения прямых, проходящих через точку C параллельно и перпендикулярно прямой AB ; в) точки пересечения прямых. Сделать чертеж.

- | | | |
|------------------|--------------|--------------|
| 1. $A(-3; -2),$ | $B(2; 8),$ | $C(5; 4).$ |
| 2. $A(3; 5),$ | $B(-1; 7),$ | $C(-1; 2).$ |
| 3. $A(-2; 4),$ | $B(6; 0),$ | $C(3; -1).$ |
| 4. $A(-1; -3),$ | $B(2; 6),$ | $C(4; 2).$ |
| 5. $A(-3; 2),$ | $B(3; 0),$ | $C(1; 4).$ |
| 6. $A(2; -4),$ | $B(-2; -8),$ | $C(3; -7).$ |
| 7. $A(-1; 13),$ | $B(5; 7),$ | $C(-4; -6).$ |
| 8. $A(-4; -2),$ | $B(4; 0),$ | $C(1; -5).$ |
| 9. $A(-3; 2),$ | $B(1; 1),$ | $C(6; 4).$ |
| 10. $A(6; -4),$ | $B(8; 4),$ | $C(3; 1).$ |
| 11. $A(-2; 3),$ | $B(4; 6),$ | $C(-1; 6).$ |
| 12. $A(3; -3),$ | $B(0; 6),$ | $C(4; 4).$ |
| 13. $A(-4; -2),$ | $B(2; 4),$ | $C(-1; -3).$ |
| 14. $A(-2; 9),$ | $B(-5; 0),$ | $C(-7; 4).$ |
| 15. $A(4; 6),$ | $B(6; 0),$ | $C(4; -4).$ |
| 16. $A(12; -1),$ | $B(2; 4),$ | $C(3; 1).$ |

З а д а ч а 2. Построить линии, заданные уравнениями второго порядка.

$$1. (x-5)^2 + (y+6)^2 = 4; \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1; \quad \frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

$$2. x^2 + (y-4)^2 = 9; \quad \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1; \quad \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-6)^2}{9} = 1.$$

$$3. (x+3)^2 + y^2 = 16; \quad \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1; \quad \frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y+5)^2}{4} = 1.$$

$$4. (x-7)^2 + (y+4)^2 = 25; \quad \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1; \quad \frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

$$5. (x-4)^2 + y^2 = 36; \quad \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1; \quad \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+6)^2}{4} = 1.$$

$$6. (x+5)^2 + (y-7)^2 = 49; \quad \frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1; \quad \frac{(x+11)^2}{4^2} - \frac{(y-6)^2}{2^2} = 1.$$

$$7. x^2 + (y-6)^2 = 36; \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1; \quad \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

$$8. (x+5)^2 + y^2 = 25; \quad \frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1; \quad \frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

$$9. (x+1)^2 + (y-5)^2 = 64; \quad \frac{(x+5)^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1; \quad \frac{x^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

$$10. (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16; \quad \frac{(x-4)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

$$11. (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9; \quad \frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1; \quad \frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{64} = 1.$$

$$12. (x+4)^2 + (y+1)^2 = 4; \quad \frac{x^2}{36} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1; \quad \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{1} = 1.$$

$$13. (x-1)^2 + (y-4)^2 = 81; \quad \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1; \quad \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{4} = 1.$$

$$14. (x+5)^2 + y^2 = 25; \quad \frac{(x-4)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1; \quad \frac{(x-8)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

$$15. (x+3)^2 + (y-5)^2 = 36; \quad \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1; \quad \frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

$$16. x^2 + (y-7)^2 = 49; \quad \frac{(x-6)^2}{36} + \frac{y^2}{1} = 1; \quad \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{25} = 1.$$

З а д а ч а 3. Построить линии: а) заданную параметрическими уравнениями; б) заданную в полярных координатах.

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. а) $x = 5 \cos t; y = \sin t;$ | б) $\rho = -5 \sin \varphi.$ |
| 2. а) $x = -2(t - \sin t); y = -2(1 - \cos t);$ | б) $\rho = 7.$ |
| 3. а) $x = -2t + 1; y = 1 - 3t;$ | б) $\rho = 3(1 + \cos \varphi).$ |
| 4. а) $x = 2 \cos t; y = 4 \sin t;$ | б) $\rho = 2 \cos \varphi.$ |
| 5. а) $x = \sin t; y = 4 \cos t;$ | б) $\rho = 4 \sin \varphi.$ |
| 6. а) $x = 3(t - \sin t); y = 3(1 - \cos t);$ | б) $\rho = 5.$ |
| 7. а) $x = 4 \cos t; y = 2 \sin t;$ | б) $\rho = 5 \sin \varphi.$ |
| 8. а) $x = 5t - 2; y = -3t + 6;$ | б) $\rho = 5(1 - \cos \varphi).$ |
| 9. а) $x = 8 \cos t; y = 3 \sin t;$ | б) $\rho = -5 \cos \varphi.$ |
| 10. а) $x = 4t + 3; y = 3t - 5;$ | б) $\rho = 2(1 - \sin \varphi).$ |
| 11. а) $x = 5 \cos t; y = 5 \sin t;$ | б) $\rho = 4\sqrt{\cos 2\varphi}.$ |
| 12. а) $x = t - \sin t; y = 1 - \cos t;$ | б) $\rho = -4 \cos \varphi.$ |
| 13. а) $x = -4t + 5; y = 1 - 5t;$ | б) $\rho = 2(1 + \cos \varphi).$ |
| 14. а) $x = \cos t; y = 6 \sin t;$ | б) $\rho = -2 \cos \varphi.$ |
| 15. а) $x = 4 \sin t; y = 4 \cos t;$ | б) $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}.$ |
| 16. а) $x = -(t - \sin t); y = -(1 - \cos t);$ | б) $\rho = 5.$ |

З а д а ч а 4. Заданы два комплексных числа: $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$. Требуется: а) построить эти числа на комплексной плоскости; б) найти модуль и аргумент числа z_1 , записать его тригонометрическую и показательную формы; в) выполнить действия: $3z_1 - 5z_2; \quad z_1 \cdot z_2; \quad \frac{z_2}{z_1}.$

1. $z_1 = -5 + 5i; \quad z_2 = 1 - 2i.$
2. $z_1 = 2 + 2i; \quad z_2 = 3 - 6i.$
3. $z_1 = 2 - 2i; \quad z_2 = -4 + 3i.$
4. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 2 + 7i.$
5. $z_1 = -3 + 3i; \quad z_2 = -1 + 5i.$
6. $z_1 = -4 - 4i; \quad z_2 = 6 - 5i.$
7. $z_1 = 3 + 3i; \quad z_2 = 4 - 7i.$
8. $z_1 = 3 - 3i; \quad z_2 = 5 + 2i.$
9. $z_1 = -7 - 7i; \quad z_2 = 1 - 4i.$
10. $z_1 = -6 + 6i; \quad z_2 = 1 - 4i.$
11. $z_1 = 8 - 8i; \quad z_2 = -2 - 3i.$
12. $z_1 = 7 - 7i; \quad z_2 = -3 + 2i.$
13. $z_1 = -4 + 4i; \quad z_2 = -1 - 3i.$
14. $z_1 = -2 - 2i; \quad z_2 = -1 - 5i.$
15. $z_1 = 1 + i; \quad z_2 = -4 - 3i.$
16. $z_1 = 10 - 10i; \quad z_2 = 1 - 4i.$

1.3. Контрольная работа 3

Пределы. Непрерывность. Производная

З а д а ч а 1. Исследовать на непрерывность функцию $y = f(x)$ и построить ее схему.

1. $y = f(x) = 2^{\frac{3}{x-4}}.$
2. $y = f(x) = 2^{\frac{3}{x+4}}.$
3. $y = f(x) = 7^{\frac{3}{4-x}}.$
4. $y = f(x) = 5^{\frac{3}{x-4}}.$
5. $y = f(x) = 4^{\frac{5}{3-x}}.$
6. $y = f(x) = 4^{\frac{2}{x-3}}.$
7. $y = f(x) = 6^{\frac{2}{x+5}}.$
8. $y = f(x) = 7^{\frac{2}{x-5}}.$
9. $y = f(x) = 9^{\frac{7}{x-5}}.$
10. $y = f(x) = 3^{\frac{4}{5-x}}.$
11. $y = f(x) = 3^{\frac{4}{x-1}}.$
12. $y = f(x) = 5^{\frac{2}{1-x}}.$
13. $y = f(x) = 6^{\frac{7}{2-x}}.$
14. $y = f(x) = 5^{\frac{1}{x+2}}.$
15. $y = f(x) = 7^{\frac{-1}{x-5}}.$
16. $y = f(x) = 2^{\frac{3}{x-2}}.$

З а д а ч а 2. Найти производные функций.

1. $y = 6 + x + 3x^2 - \sqrt{3x} - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3x^2}{4};$
 $y = x^2 + 2^x + e^x - 3\cos x + 2\ln x + \arccos x; \quad y = 5\cos e^{-3x};$
 $y = (x^2 - 1)\ln x; \quad y = \frac{\sin 5x}{e^{-x}}.$

2. $y = 7 - 3x + 6x^5 - 3\sqrt{x} - \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}};$
 $y = x^3 + 3^x + 3x - \operatorname{tg} x - 3\ln x + \arcsin x; \quad y = 4\operatorname{tg} \ln 3x;$
 $y = \sin 3x \cdot \cos 2x; \quad y = \frac{e^{-3x}}{\ln x}.$

3. $y = 8 + 5x - 7x^3 + \sqrt{4x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{4x^2};$
 $y = 2^x + x^2 + 2x + e^x + 4\sin x - \operatorname{ctg} x + \operatorname{arctg} x; \quad y = e^{-2\operatorname{arctg} 3x};$
 $y = (1-x)\cos 4x; \quad y = \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$

4. $y = 2 + 3x^2 - x^3 + 5x^4 - 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} + \frac{x}{7};$
 $y = 4 + 4x + x^4 + 4^x + e^x - \arcsin x + \ln x;$
 $y = \cos \ln(1-x^2); \quad y = (2-x)\sin 5x; \quad y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

5. $y = 4 - x + 5x^2 - \sqrt{7x} + \sqrt[5]{x} - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3};$
 $y = 5 + 5^x + x^5 + e^x + \sin x - 3\operatorname{arctg} x;$
 $y = \sin \sqrt{1-x^2}; \quad y = (3-x)\ln 5x; \quad y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\ln 3x}.$

6. $y = 8 + x - 4x^3 + 3\sqrt{x} - \sqrt[5]{3x} - \frac{7}{2x} + \frac{1}{4x^3};$
 $y = x^5 + 5^x + e^x - \operatorname{arctg} x + \ln x;$
 $y = \cos^3(1-x^2); \quad y = (5-x)\sin 4x; \quad y = \frac{\ln 2x}{1-x^2}.$

$$7. \quad y = 5 + x + x^7 - 3x^2 + 2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + \frac{3}{x};$$

$$y = x^3 + 3^x + e^x + 2\arccos x - \ln x;$$

$$y = \sin^3(1-x^5); \quad y = x^2 \ln \frac{x}{2}; \quad y = \frac{\cos 3x}{x^2 - 1}.$$

$$8. \quad y = 5 - x + 7x^2 - \sqrt{3x} - \sqrt[3]{4x} + \frac{2}{x} + \frac{x^3}{6};$$

$$y = 7 + 7^x + x^7 + 2e^x + \arccos x - \operatorname{ctg} x;$$

$$y = \sqrt{\sin(1-x^2)}; \quad y = (1-x^2) \operatorname{tg} x; \quad y = \frac{\sin 5x}{\lg 4x}.$$

$$9. \quad y = 2 + x - x^3 + \frac{7}{x} + \frac{x}{7} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \sqrt[7]{x^2};$$

$$y = 4 + 4^x + x^4 - \operatorname{tg} e^x - \arcsin x + \ln x;$$

$$y = \operatorname{tg} \ln(1-x^2); \quad y = e^{-2x}(1-x^2); \quad y = \frac{\ln 3x}{\cos 4x}.$$

$$10. \quad y = 5 + x + 2x^5 - \sqrt{x} - \sqrt[3]{4x} + \frac{3}{x} + \frac{x}{3};$$

$$y = 2 + 2x + x^2 + 2^x + e^x - \operatorname{arctg} x + \cos x - 2 \ln x;$$

$$y = \ln \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{2}; \quad y = x^2 \ln x; \quad y = \frac{e^{-3x}}{\cos 5x}.$$

$$11. \quad y = 5 - x + 3x^3 - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{2x} - \frac{3}{x^4} + \frac{x^2}{7};$$

$$y = 1 - 3x + 3^x + x^3 + 3 \operatorname{ctg} x - \log_2 x;$$

$$y = \sin 2^{\operatorname{arctg} x}; \quad y = \cos 5x(3x^2 - 5); \quad y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{e^{5x}}.$$

$$12. \quad y = 3 + x^2 + x^6 - \sqrt[5]{x^2} + \sqrt{6x} + \frac{2}{x^3} + \frac{x^3}{6};$$

$$y = 4 + x^5 + 5^x + 5x + 3 \cos x + 5 \log_4 x;$$

$$y = \cos e^{3x^2}; \quad y = (e^{4x} - 5) \sin 5x; \quad y = \frac{\operatorname{ctg} 7x}{3^{-2x}}.$$

$$13. \quad y = 1 - 7x + x^5 - \sqrt[6]{x^5} + \sqrt{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2};$$

$$y = 3 + x^2 + 2^x + e^x + 3 \operatorname{arcctg} x + 4 \ln x;$$

$$y = \operatorname{ctg} 5^{-x}; \quad y = \log_3 x \cdot \arccos 2x; \quad y = \frac{\sin 5x}{4x^2 - 5}.$$

$$14. \quad y = 10 - x^5 + 6x - \sqrt[7]{x} + \sqrt{2x^5} + \frac{6}{x^5} - \frac{x}{5};$$

$$y = 6x + 6^x + x^6 + 7 \operatorname{arcctg} x - \sin x;$$

$$y = \log_6^5(3x - 5); \quad y = (x^5 - 1) \operatorname{tg} 5x; \quad y = \frac{x^4 - 1}{e^{7x}}.$$

$$15. \quad y = 15 + 3x - x^4 - \sqrt[4]{x^5} + \sqrt{8x} - \frac{8}{x^9} + \frac{x^3}{3};$$

$$y = 11 + x^9 + 9^x + 9x + 5 \operatorname{tg} x + 4 \log_9 x;$$

$$y = \sin \operatorname{arctg} x^2; \quad y = (x^3 - 5x) \arcsin 2x; \quad y = \frac{\sin 9x}{9^{5x}}.$$

$$16. \quad y = 5 - 2x^2 + 3x^3 + 4\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^5} - \frac{1}{x^7} + \frac{x^7}{7};$$

$$y = 16 - x + 5^x + x^5 + 5 \operatorname{tg} x - \arcsin x;$$

$$y = \operatorname{arctg} \sin 2^x; \quad y = e^{7x} \ln 5x; \quad y = \frac{4x^4 - 5}{\cos 2x}.$$

З а д а ч а 3. Найти пределы: а) не пользуясь правилом Лопиталья;
б) используя правило Лопиталья.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2 - x - 3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x}.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - x + 1}{-3x^2 + x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{5x}.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 1}{2x^3 - 3x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 5x}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}.$$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x^3}{3x^2 - x^3 + 10}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{2x^2 - x - 3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/2x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{x^2 - 4x}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{7x}\right)^{2x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x - 10}{2x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 7x}{2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/4x}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x - 1}{x^3 + 5x}$; $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 4x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{2x}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x + 6}{x - 3x^3}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 9x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 8x)^{-4x}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 3x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 9x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{8x}\right)^{4x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 6x^2}{3x^3 - 4x + 1}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{3x^2 - 4x - 4}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{5x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{1/x}$.
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2}{3x^2 + x - 4}$; $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{5x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 6x^2}{3x^2 - 4x + 1}$; $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\sin 4x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x}\right)^{-x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 5}{x^3 + 4x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 7x}{-x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{5/x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{2x^2 - x + 5}$; $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{x - 2x^2}{2x^2 - 5x + 2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x}{5x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/3x}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + 3}$; $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 5x - 6}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\sin 5x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{-4x}$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x}{2x^2 - x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{2x^2 - x - 6}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5x}{2\sin x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{4x}\right)^x$.

З а д а ч а 4. Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$.

2. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

3. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2.$
5. $y = x^3 - \frac{1}{4}x^4.$
7. $y = \frac{1}{8}x^4 - x^2.$
9. $y = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2.$
11. $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 7.$
13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5.$
15. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9.$
4. $y = 2 - 2x^2 - x^3.$
6. $y = x^4 - 2x^2 - 3.$
8. $y = x^4 - 2x^2 + 1.$
10. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2.$
12. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$
14. $y = x^3 + \frac{1}{4}x^4.$
16. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x.$

2. ФОРМУЛЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 1

З а д а ч а 1. Вычислить определители матриц A и B и матрицу $F = -3A + AB$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

По формуле $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ вычисляем определители матриц A и B :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10; \quad \Delta B = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-6) - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0.$$

По формуле $\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix}$ получаем:

$$-3 \cdot A = -3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц A и B находим по формуле:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 & -1 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) \\ -2 \cdot (-2) + (-4) \cdot 4 & -2 \cdot 3 + (-4) \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Матрицу F вычисляем с использованием формулы:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$F = -3 \cdot A + A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ -12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -30 \\ -6 & 30 \end{pmatrix}.$$

З а д а ч а 2. Даны системы линейных алгебраических уравнений. Требуется: а) решить систему по правилу Крамера; б) решить систему методом Гаусса. Сделать проверку полученных решений.

$$\text{а) } \begin{cases} -5x + 4y = -1; \\ 3x - 9y = -6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

а) Решим систему по правилу Крамера.

Вычислим главный определитель системы: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-9) - 4 \cdot 3 = 45 - 12 = 33.$$

Главный определитель $\Delta = 33 \neq 0$, значит, по правилу Крамера система имеет единственное решение.

Вспомогательные определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -6 & -9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-9) - 4 \cdot (-6) = 9 + 24 = 33;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-6) - (-1) \cdot 3 = 30 + 3 = 33.$$

По формулам Крамера получаем: $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1$; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1$.

П р о в е р к а. Найденные значения неизвестных подставляем в уравнения системы: $\begin{cases} -5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = -1; \\ 3 \cdot 1 - 9 \cdot 1 = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = -1; \\ -6 = -6. \end{cases}$ Система решена верно.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$.

б) Решим систему методом Гаусса.

Коэффициенты системы составляют матрицу системы A , а вместе со свободными членами – расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = (A|B) \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

В методе Гаусса действия над уравнениями системы заменяются действиями со строками матрицы $\tilde{A}$.

В рассматриваемом примере расширенная матрица системы имеет вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 13 \end{array} \right).$$

Делим каждую строку на ее первый элемент:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4/2 & 3/2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -3/3 & -2/3 & -13/3 \end{array} \right).$$

Из второй и третьей строк вычитаем первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4/2 & 3/2 \\ 0 & 7/2 & -3 & -5/2 \\ 0 & -1/2 & -8/3 & -35/6 \end{array} \right).$$

Вторую и третью строки делим на их первые элементы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -6/7 & -5/7 \\ 0 & 1 & 16/3 & 35/3 \end{array} \right).$$

Из третьей строки вычитаем вторую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -6/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 130/21 & 260/21 \end{array} \right).$$

Третью строку делим на ее первый элемент:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -6/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Полученной матрице соответствует преобразованная система:

$$\begin{cases} x_1 - 1/2 x_2 + 2x_3 = 3/2; \\ x_2 - 6/7 x_3 = -5/7; \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы имеем: $x_3 = 2$.

Из второго уравнения получаем: $x_2 = -5/7 + 6/7 \cdot x_3 = -5/7 + 6/7 \cdot 2 = 1$.

Из первого уравнения получаем:

$$x_1 = 3/2 + 1/2 \cdot x_2 - 2x_3; \quad x_1 = 1,5 + 0,5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2.$$

П р о в е р к а. Найденные значения неизвестных подставляем в уравне-

$$\text{ния системы: } \begin{cases} 2(-2) - 1 + 4 \cdot 2 = 3; \\ -2 + 3 \cdot 1 - 2 = -1; \\ -3(-2) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 - 1 + 8 = 3; \\ -2 + 3 - 2 = -1; \\ 6 + 3 + 4 = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = 3; \\ -1 = -1; \\ 13 = 13. \end{cases}$$

Система решена верно.

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

З а д а ч а 3. Заданы вершины треугольника ABC : $A(4; 2; 1)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 3; 1)$. Найти: а) векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и их модули; б) угол $\gamma = \angle CAB$; в) площадь треугольника ABC ; г) высоту треугольника, опущенную из вершины C .

Р е ш е н и е.

а) Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находим по формуле:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2 - 4; -3 - 2; 0 - 1), \quad \vec{a}(-2; -5; -1);$$

$$\vec{b} = (b_x; b_y; b_z) = \overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (-2 - 4; 3 - 2; 1 - 1), \quad \vec{b}(-6; 1; 0).$$

Модули векторов находим по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-6)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{37}.$$

б) Вычисляем скалярное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = (-2) \cdot (-6) + (-5) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 7.$$

Находим угол $\gamma = \angle CAB$:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{37}} = \frac{7}{\sqrt{1110}}; \quad \gamma = \arccos \frac{7}{\sqrt{1110}} \approx 78^\circ.$$

в) Вычисляем векторное произведение векторов по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \vec{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \vec{k}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -5 & -1 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-5 \cdot 0 - (-1) \cdot 1) \vec{i} - (-2 \cdot 0 - (-1) \cdot (-6)) \vec{j} + (-2 \cdot 1 - (-5) \cdot (-6)) \vec{k} =$$

$$= 1\vec{i} - 6\vec{j} - 32\vec{k}; \quad \vec{a} \times \vec{b} = (1; -6; -32).$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине модуля их векторного произведения, т. е.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + (-32)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1061} \approx 16.$$

г) Из формулы площади треугольника $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$ выразим высоту $h = \frac{2S_{\Delta}}{a}$,

где $a = |\vec{a}|$; $h_C = \frac{2S_{\Delta}}{|\vec{a}|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1061}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{1061}{30}} \approx 6.$

З а д а ч а 4. Заданы три вектора: $\vec{a} = (2; -3; 5)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 4)$. Требуется: а) выбрать пару перпендикулярных векторов (если такие есть); б) найти смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Р е ш е н и е.

а) Перпендикулярность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ проверяют по условию:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Вычислим скалярные произведения всех пар векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 3 \neq 0,$$

значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются перпендикулярными;

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_x \cdot c_x + a_y \cdot c_y + a_z \cdot c_z = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 15 \neq 0,$$

значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не являются перпендикулярными;

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = b_x \cdot c_x + b_y \cdot c_y + b_z \cdot c_z = 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 0,$$

значит, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ являются перпендикулярными.

б) Находим смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 3 + 10 - 10 - 2 + 24 = 9.$$

Объем параллелепипеда $V = |\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}| = |9| = 9.$

2.2. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 2

З а д а ч а 1. Заданы три точки: $A(-4; 1)$; $B(2; 4)$; $C(3; -1)$. Найти: а) общее уравнение прямой AB и ее угловой коэффициент; б) общие уравнения прямых, проходящих через точку C параллельно и перпендикулярно прямой AB ; в) точки пересечения прямых. Сделать чертеж.

Р е ш е н и е. Строим чертеж (рис. 1).

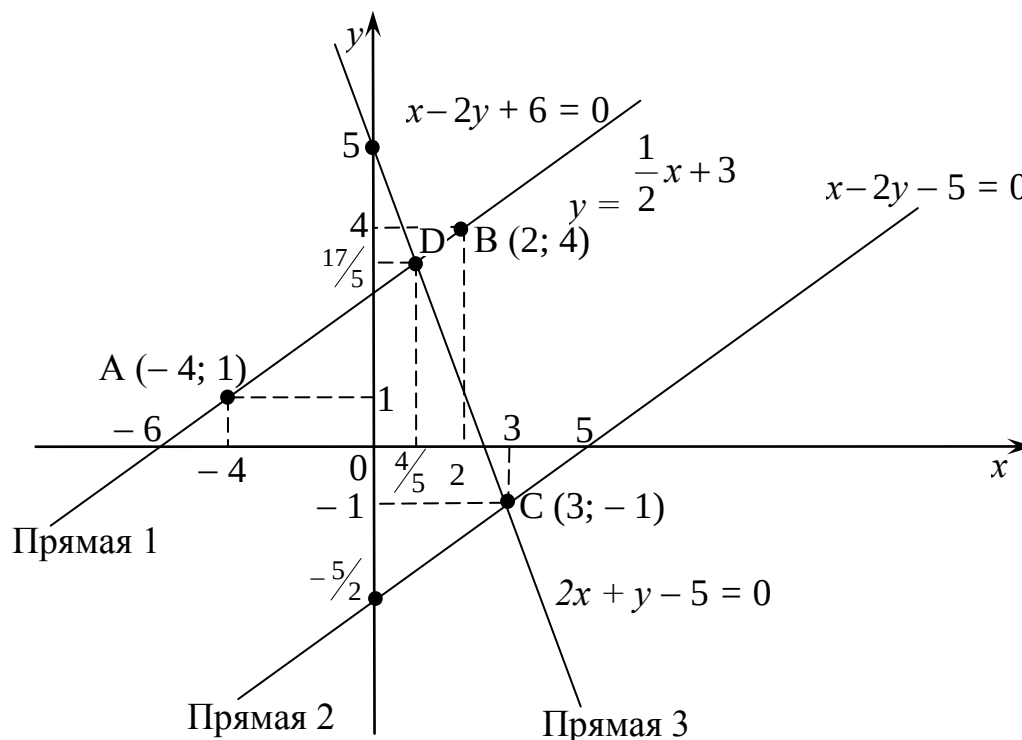


Рис. 1

а) Уравнение прямой AB (см. рис. 1, прямая 1) находим по формуле:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}; \quad \frac{y - 1}{4 - 1} = \frac{x - (-4)}{2 - (-4)}; \quad \frac{y - 1}{3} = \frac{x + 4}{6},$$

умножаем его на 6 и получаем общее уравнение прямой 1:

$$2y - 2 = x + 4; \quad x - 2y + 6 = 0.$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой 1, перейдем от общего уравнения к уравнению с угловым коэффициентом: $y = kx + b$:

$$x - 2y + 6 = 0; \quad -2y = -x - 6; \quad y = 0,5x + 3.$$

Следовательно, угловой коэффициент $k_1 = 0,5$.

б) Прямые 1 и 2 параллельны, значит, $k_1 = k_2 = 0,5$. Уравнение прямой 2 находим по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$.

После преобразований получаем общее уравнение прямой 2:

$$y - y_c = k_2(x - x_c); \quad y - (-1) = 0,5(x - 3); \quad y + 1 = 0,5(x - 3); \quad 2y + 2 = x - 3, \\ x - 2y - 5 = 0.$$

Прямые 1 и 3 перпендикулярны, значит, $k_3 = -1/k_1 = -1/0,5 = -2$. Находим общее уравнение прямой 3:

$$y - y_c = k_3(x - x_c); \quad y + 1 = -2(x - 3); \quad 2x + y - 5 = 0.$$

в) $C(3; -1)$ – точка пересечения прямых 2 и 3 задана.

Точку пересечения прямых 1 и 3 $D(x_D; y_D)$ найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0; \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы умножаем на 2 и прибавляем к первому:

$$5x - 4 = 0 \Rightarrow x_D = \frac{4}{5}; \quad y_D = 5 - 2x_D = \frac{17}{5}. \quad D\left(\frac{4}{5}; \frac{17}{5}\right).$$

З а д а ч а 2. Построить линии, заданные уравнениями второго порядка.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(c; d)$ имеет вид:

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = R^2.$$

Н а п р и м е р (рис. 2), $(x + 6)^2 + y^2 = 4$ – уравнение окружности радиусом 2 с центром в точке $C(-6; 0)$.

Уравнение эллипса с центром в точке $C(c; d)$ и полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1.$$

Н а п р и м е р, $\frac{(x - 10)^2}{16} + \frac{(y + 6)^2}{4} = 1$ – уравнение эллипса с центром в точке $C(10; -6)$ и полуосями $a = 4$; $b = 2$ (рис. 3).

Строим центр эллипса $C(10; -6)$, затем откладываем полуоси ($a = 4$; $b = 2$) и строим сопровождающий эллипс прямоугольник.

Эллипс находится внутри прямоугольника и касается его сторон.

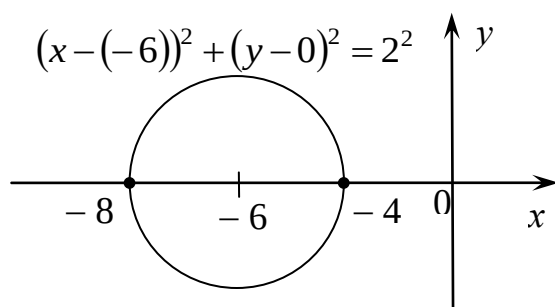


Рис. 2

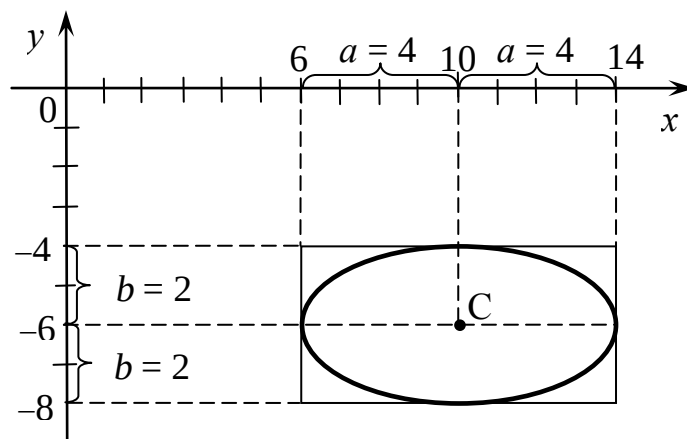


Рис. 3

Уравнение гиперболы с центром $C(c; d)$ и полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1.$$

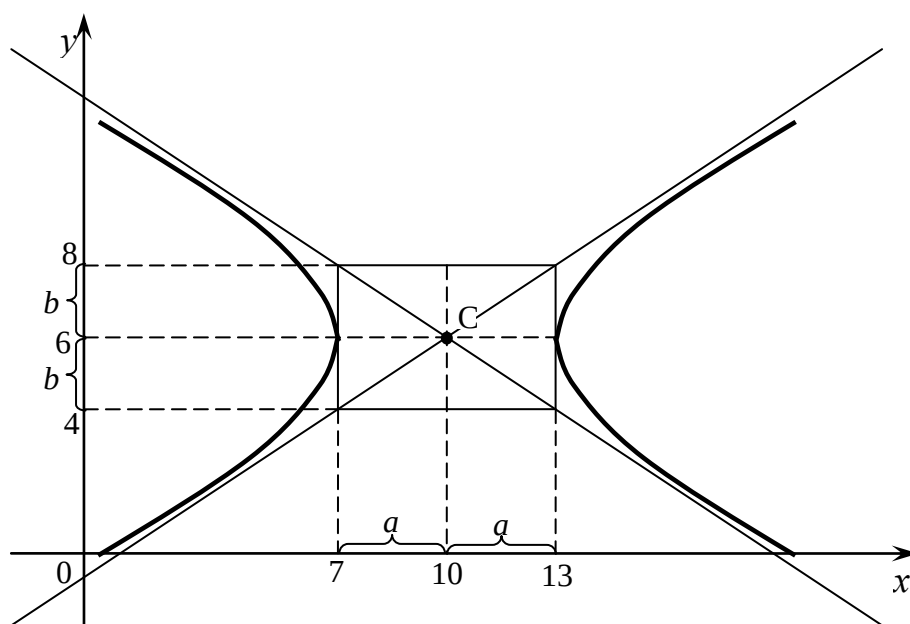


Рис. 4

Например, $\frac{(x-10)^2}{9} - \frac{(y-6)^2}{4} = 1$ – уравнение гиперболы с центром в точке $C(10; 6)$ и полуосями $a = 3$ и $b = 2$ (рис. 4).

Строим центр гиперболы $C(10; 6)$, откладываем полуоси $a = 3$ и $b = 2$, строим сопровождающий гиперболу прямоугольник. Проводим диагонали прямоугольника – они являются асимптотами гиперболы.

З а д а ч а 3. Построить линию, заданную параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t) \end{cases}$ или в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$.

Р е ш е н и е з а д а ч и рассмотрим на трех примерах.

П р и м е р 1. $\begin{cases} x = 2t - 3; \\ y = -3t + 4 \end{cases}$ – это параметрические уравнения прямой, поэтому достаточно двух точек для построения и одной точки для контроля.

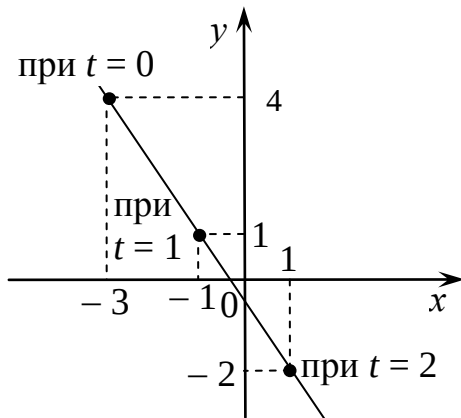


Рис. 5

Выбираем произвольные значения параметра t и вычисляем x, y :

t	0	1	2
x	-3	-1	1
y	4	1	-2

Строим прямую (рис. 5).

П р и м е р 2. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ – уравнения циклоиды (рис. 6).

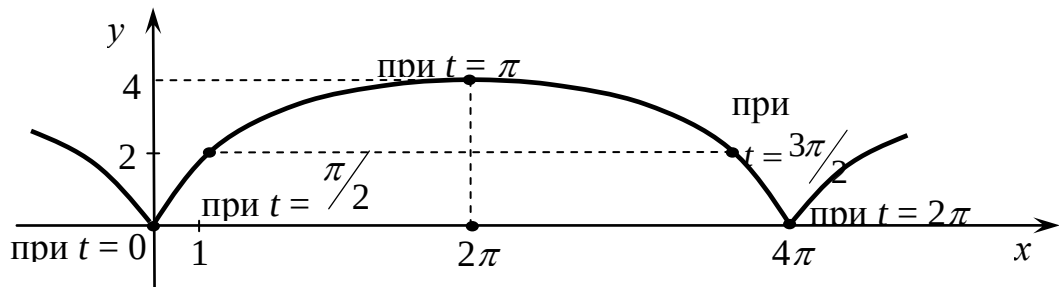


Рис. 6

Составим табл. 1.

Т а б л и ц а 1

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 1,14$	$2\pi \approx 6,28$	$2\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right) \approx 11,42$	$4\pi \approx 12,57$
y	0	2	4	2	0

Пример 3. $\rho = 4(1 - \cos \varphi)$ – уравнение кардиоиды (рис. 7).

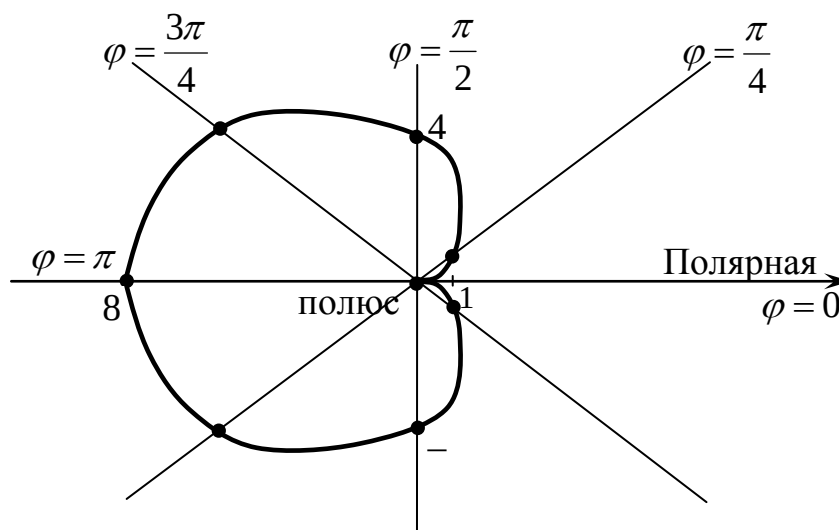


Рис. 7

Составим табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Полярный угол φ	Полярный радиус ρ	Полярный угол φ	Полярный радиус ρ
0 или 0°	0	π или 180°	8
$\pi/4$ или 45°	1,17	$5\pi/4$ или 225°	6,83
$\pi/2$ или 90°	4	$3\pi/2$ или 270°	4
$3\pi/4$ или 135°	6,83	$7\pi/4$ или 315°	1,17

Полярный угол (см. рис. 7) откладывается от положительного направления полярной оси против часовой стрелки. Полярный радиус – это расстояние от полюса O до точки кривой вдоль соответствующего луча.

З а д а ч а 4. Заданы два комплексных числа: $z_1 = -4 - 4i$; $z_2 = 3 + 5i$. Требуется: а) построить эти числа на комплексной плоскости; б) найти модуль и аргумент числа z_1 , записать его тригонометрическую и показательную формы;

в) выполнить действия: $-3z_1 + 2z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$.

Р е ш е н и е.

а) Строим чертеж (рис. 8).

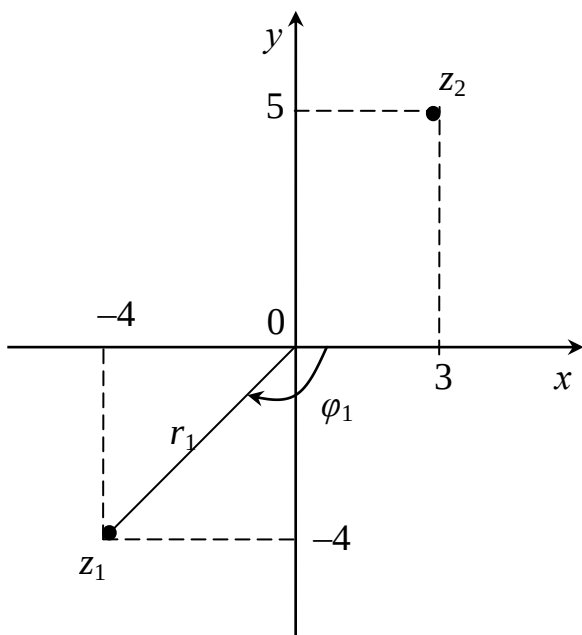


Рис. 8

Тригонометрическая форма числа z имеет вид $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, а показательная — $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

$$z_1 = 4\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right); \quad z_1 = 4\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

в) При умножении комплексного числа z на число α на это число умножаются и действительная, и мнимая части, а при сложении (вычитании) комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части:

$$-3z_1 + 2z_2 = 3(-4 - 4i) + 2(3 + 5i) = 12 + 12i + 6 + 10i = 18 + 22i.$$

При умножении комплексных чисел необходимо учесть, что $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (-4 - 4i) \cdot (3 + 5i) = -12 - 20i - 12i - 20i^2 = -12 - 32i + 20 = 8 - 32i.$$

Чтобы выполнить деление комплексных чисел, надо числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное знаменателю.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-4 - 4i}{3 + 5i} = \frac{(-4 - 4i)(3 - 5i)}{(3 + 5i)(3 - 5i)} = \frac{-12 + 20i - 12i + 20i^2}{3^2 - (5i)^2} = \\ &= \frac{-12 + 8i - 20}{9 + 25} = \frac{-32 + 8i}{34} = -\frac{16}{17} + \frac{4}{17}i. \end{aligned}$$

2.3. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 3

З а д а ч а 1. Исследовать на непрерывность функцию $y = f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}}$ и построить ее схему.

Р е ш е н и е.

1) Найдем область определения функции. Так как $x - 3 \neq 0$, то $x \neq 3$ и $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ – область определения.

В точке $x = 3$ функция не определена и, значит, $x = 3$ – точка разрыва.

2) Исследуем разрыв односторонними пределами:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} 5^{\frac{1}{x-3}} = 5^{\frac{1}{3-0-3}} = 5^{\frac{1}{-0}} = 5^{-\infty} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 5^{\frac{1}{x-3}} = 5^{\frac{1}{3+0-3}} = 5^{\frac{1}{+0}} = 5^{+\infty} = +\infty,$$

где $x \rightarrow 3-0$ означает, что $x \rightarrow 3$ слева, т. е. остается меньше трех; $x \rightarrow 3+0$ означает, что $x \rightarrow 3$ справа.

Проведем дополнительное исследование при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{1}{x-3}} = 5^{\frac{1}{+\infty}} = 5^0 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{\frac{1}{x-3}} = 5^{\frac{1}{-\infty-3}} = 5^0 = 1.$$

Построим схему разрыва и графика данной функции (рис. 9).

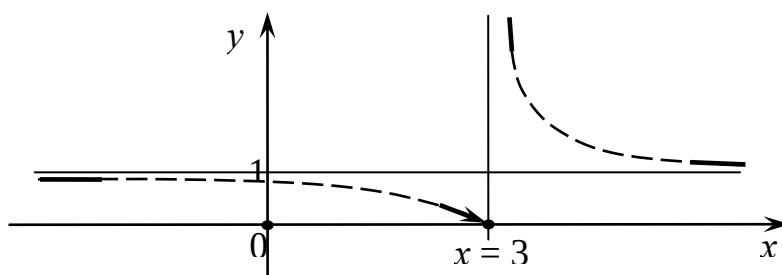


Рис. 9

Большую часть схемы графика функции изобразим пунктирной линией, так как проведено исследование только малой окрестности точки $x = 3$ и при $x \rightarrow \pm\infty$.

З а д а ч а 2. Найти производные функций.

$$y = 5 - 3x + 7x^2 + \sqrt{2x} - \frac{x^5}{7} + \sqrt[3]{x}, \quad y = 5x^4 - \sin x + \operatorname{arctg} x - 3\ln x + 2^x + e^x,$$

$$y = e^{\operatorname{tg} 5x}, \quad y = e^{-x}(x^2 - 3), \quad y = \frac{\cos 3x}{\ln(1-x)}.$$

Операцию вычисления производной называют дифференцированием.

Приведем таблицу производных основных элементарных функций (табл. 3) и правила дифференцирования.

Т а б л и ц а 3

1	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, где α – любое число	2	$(x)' = 1$
3	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	4	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5	$(e^x)' = e^x$	6	$(a^x)' = a^x \ln a$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	8	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
9	$(\sin x)' = \cos x$	10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	16	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Постоянный множитель при дифференцировании можно выносить за знак производной:

$$(c \cdot y)' = c \cdot y', \quad c - \text{const.}$$

Правило дифференцирования алгебраической суммы функций:

$$(y_1 + y_2 - y_3)' = y_1' + y_2' - y_3'.$$

Правило дифференцирования произведения функций:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Правило дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Правило дифференцирования сложной функции:

$$y = f[u(x)]; \quad y' = f'_u(u) \cdot u'_x.$$

Р е ш е н и е. Используем правила дифференцирования и таблицу производных:

$$\begin{aligned} 1) \quad y' &= \left(5 - 3x + 7x^2 + \sqrt{2x} - \frac{x^5}{7} + \sqrt[3]{x}\right)' = \left(5 - 3 \cdot x + 7 \cdot x^2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{7} \cdot x^5 + x^{\frac{1}{3}}\right)' = \\ &= (5)' - 3 \cdot (x)' + 7 \cdot (x^2)' + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x})' - \frac{1}{7} \cdot (x^5)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \\ &= 0 - 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2x^{2-1} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{7} \cdot 5x^{5-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = -3 + 14x + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{5}{7}x^4 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}. \\ 2) \quad y' &= (5x^4 - \sin x + \operatorname{arctg} x - 3\ln x + 2^x + e^x)' = 20x^3 - \cos x + \frac{1}{1+x^2} - 3\frac{1}{x} + 2^x \ln 2 + e^x. \\ 3) \quad y' &= (e^{\operatorname{tg} 5x})' = e^{\operatorname{tg} 5x} (\operatorname{tg} 5x)' = e^{\operatorname{tg} 5x} \frac{1}{\cos^2 5x} (5x)' = e^{\operatorname{tg} 5x} \frac{5}{\cos^2 5x}. \\ 4) \quad y' &= (e^{-x}(x^2 - 3))' = (e^{-x})'(x^2 - 3) + e^{-x}(x^2 - 3)' = (e^{-x})(-x)'(x^2 - 3) + e^{-x} \cdot 2x = \\ &= -e^{-x}(x^2 - 3) + 2xe^{-x}. \\ 5) \quad y' &= \left(\frac{\cos 3x}{\ln(1-x)}\right)' = \frac{(\cos 3x)' \ln(1-x) - \cos 3x (\ln(1-x))'}{(\ln(1-x))^2} = \\ &= \frac{-3\sin 3x \cdot \ln(1-x) - \cos 3x \frac{1}{1-x}(-1)}{(\ln(1-x))^2}. \end{aligned}$$

З а д а ч а 3. Найти пределы: а) не пользуясь правилом Лопиталю; б) используя правило Лопиталю.

Р е ш е н и е задачи рассмотрим на примерах.

Вычисляем пределы, не пользуясь правилом Лопиталю.

П р и м е р 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 10} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{числитель и} \\ \text{знаменатель} \\ \text{делим на } x^2 \end{array} \right\} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2}}{\frac{4x^2 - 10}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{10}{x^2}} = \frac{3}{4},$$

так как при $x \rightarrow \infty$ величины $\frac{2}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ и $\frac{10}{x^2} \rightarrow 0$.

П р и м е р 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 5}{4x^2 - 10} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{числитель и} \\ \text{знаменатель} \\ \text{разделим на } x^3 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{\frac{4}{x} - \frac{10}{x^3}} = \left(\frac{3}{0} \right) = \infty.$$

П р и м е р 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^3 - 10} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{числитель и} \\ \text{знаменатель} \\ \text{разделим на } x^3 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{10}{x^3}} = \left(\frac{0}{4} \right) = 0.$$

П р и м е р 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\{ \begin{array}{l} 5x^2 - 2x - 3 = 5(x-1)(x+0,6) \\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{5(x-1)}(x+0,6)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x+0,6)}{(x+1)} = \frac{5 \cdot 1,6}{2} = 4. \end{aligned}$$

Пример 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 - \text{первый} \\ \text{замечательный предел} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{числитель и} \\ \text{знаменатель} \\ \text{умножаем на 5} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \quad 5x \rightarrow 0, \\ \text{т. е. } \alpha = 5x \end{array} \right\} = \frac{5}{4} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}.$$

Пример 6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x} = (1^\infty) = \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e - \text{второй замечательный предел} \right\} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} ((1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}})^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}, \text{ при } \alpha = \frac{1}{2x}.$$

Найдем пределы, используя правила Лопиталя.

Правила Лопиталя используются для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\frac{0}{0}$. При этом предел отношения функций заменяется пределом отношения их производных:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ или } \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 10} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \{ \text{по правилу Лопиталя} \} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 2x + 5)'}{(4x^2 - 10)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 2}{8x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \{ \text{по правилу Лопиталя} \} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 2)'}{(8x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^3 - 10} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \{ \text{по правилу Лопиталя} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 2}{12x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \{ \text{по правилу Лопиталя} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{24x} = \left(\frac{6}{\infty} \right) = 0.$$

Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \{ \text{по правилу Лопиталя} \} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{15x^2 - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14}{2} = 7.$$

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \{ \text{по правилу Лопиталя} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(4x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{4} = \frac{5}{4} \cos 0 = \frac{5}{4}.$$

Пример 5.

$$\text{Обозначим } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x} = (1)^\infty = a.$$

Чтобы найти a , прологарифмируем это равенство:

$$\ln a = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) = (\infty \cdot 0).$$

Необходимо неопределенность $\infty \cdot 0$ привести к виду $0/0$ или ∞/∞ .

$$\begin{aligned} \ln a &= 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \{ \text{по правилу Лопиталя} \} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{2x^2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{2x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right)} = 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2x}} = \frac{3}{2} = 1,5, \text{ так как } \frac{1}{2x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак, $\ln a = 1,5$, значит, $a = e^{1,5}$.

Задача 4. Исследовать функцию $y = f(x) = x^4 - 4x^3$ и построить график.

Решение.

1) Область определения $— (-\infty; +\infty)$.

2) Функция элементарная и определена для всех x , значит, она непрерывна. Нет бесконечных разрывов, значит, нет вертикальных асимптот.

3) При $x = 0$, $y = f(0) = 0$ точка пересечения с осями имеет координаты $(0; 0)$.

При $y = 0$ $x^4 - 4x^3 = 0$; $x^3(x - 4) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

Итак, точки пересечения с осями координат $(0; 0)$ и $(4; 0)$.

4) $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 \neq f(x)$ и $\neq -f(x)$, значит, функция $f(x)$ не является четной или нечетной.

$$5) y' = 4x^3 - 12x^2.$$

Из условия $y' = 0$ получаем:

$4x^3 - 12x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$ – критические точки (рис. 10).

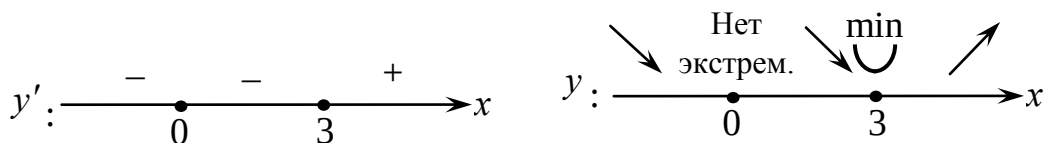


Рис. 10

Итак, $x_{\min} = 3$; $y_{\min} = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$.

$$6) y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Из условия $y'' = 0$ получаем: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. Других точек, подозрительных на перегиб, нет, так как y'' – непрерывна (рис. 11).

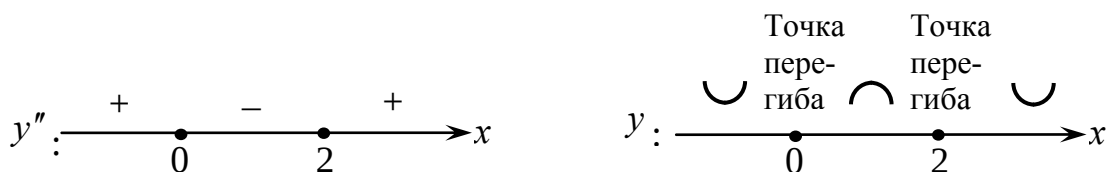


Рис. 11

Имеем две точки перегиба: $\begin{cases} x_{\text{т.п}} = 0; \\ y_{\text{т.п}} = 0; \end{cases} \begin{cases} x_{\text{т.п}} = 2; \\ y_{\text{т.п}} = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16. \end{cases}$

7) Невертикальные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]; \quad k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 4x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 4x^2) = \pm\infty,$$

значит, невертикальных асимптот нет.

8) Контрольно-уточняющие точки:

при $x = -1$ $y = (-1)^4 - 4(-1)^3 = 1 + 4 = 5$; при $x = 1$ $y = -3$.

9) График функции приведен на рис. 12.

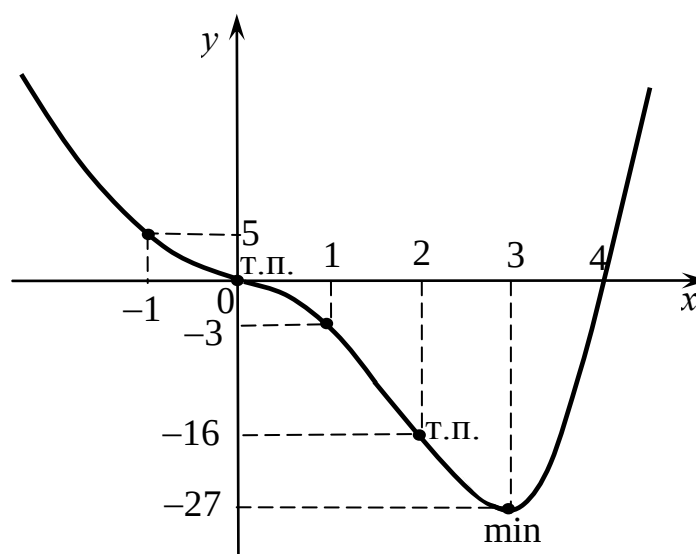


Рис. 12

Библиографический список

1. П и с ь м е н н ы й Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д. Т. П и с ь м е н н ы й. М.: Айрис-пресс, 2006. 288 с.
2. В ы г о д с к и й М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. В ы г о д с к и й. М.: Астрель; АСТ, 2005. 991 с.
3. А р т ю х о в В. Я. Высшая математика / В. Я. А р т ю х о в, Л. В. А в и л о в а, Ю. Г. Г а л и ч / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2010. Ч. 1. 58 с.

Учебное издание

ГАЛИЧ Юлия Геннадьевна

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Практикум

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать . 08. 2016. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,4. Уч.-изд. л. 2,7.
Тираж 500 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35