

Ю. Г. ГАЛИЧ

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 3

ОМСК 2016

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Ю. Г. Галич

МАТЕМАТИКА

Часть 3

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума для студентов заочного факультета
технических специальностей

Омск 2016

УДК 512(078)
ББК 22.11я73
Г15

Математика. Часть 3: Практикум для студентов заочного факультета технических специальностей. / Ю. Г. Галич; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2016. 29 с.

Практикум содержит варианты контрольных заданий по трем разделам дисциплины «Математика»: «Кратные и криволинейные интегралы», «Теория поля», «Ряды», а также основные формулы по каждому из разделов и подробно разобранные примеры решения типовых задач.

Практикум предназначен для студентов заочного факультета технических специальностей.

Библиогр.: 4 назв. Рис. 7.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент С. Н. Крохин;
канд. пед. наук, доцент Т. П. Фисенко.

© Омский гос. университет
путей сообщения, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Варианты индивидуальных контрольных заданий	6
1.1. Контрольная работа 7. Кратные и криволинейные интегралы.....	6
1.2. Контрольная работа 8. Теория поля.....	8
1.3. Контрольная работа 9. Ряды.....	12
2. Формулы и примеры решения задач	14
2.1. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 7	14
2.2. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 8	18
2.3. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 9	23
Библиографический список.....	28

ВВЕДЕНИЕ

При изучении дисциплины математика практические занятия по решению задач имеют большое значение для лучшего усвоения теоретического материала.

Цель настоящего практикума – оказать помощь студентам в освоении методики решения типовых задач.

Теоретические сведения, необходимые для решения задач, приведены в данном учебно-методическом пособии и работах [1 – 4].

Для выбора варианта контрольной работы необходимо пронумеровать буквы в записи своих фамилии, имени и отчества. Номера букв соответствуют номерам вариантов контрольных работ. Например:

И	В	А	Н	О	В	О	Л	Е	Г	П	Е	Т	Р	О	В	И	Ч
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Из этой записи следует: вариант седьмой контрольной работы будет определяться буквой О, восьмой – буквой В и девятой – буквой Е. При этом используется приведенная ниже таблица.

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Буква	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Э	Ю	Я
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Итак, седьмой контрольной работе соответствует буква О, по которой определяем для этой контрольной работы шестнадцатый вариант. Для восьмой контрольной работы по букве В выбираем задачи третьего варианта. Для девятой контрольной работы по букве Е выбираем задачи шестого варианта.

В первом разделе пособия даны условия задач. Во втором разделе по номеру задачи размещен материал, который поможет при ее решении.

1. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1.1. Контрольная работа 7.

Кратные и криволинейные интегралы

З а д а ч а 1. Вычислить двукратный интеграл.

1. $\int_0^2 dx \int_{-x}^{\sqrt{x}} 4xy^3 dy.$

2. $\int_{-2}^0 dy \int_y^{y^2} 8x^3 y^3 dx.$

3. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} 5x^2 y^2 dy.$

4. $\int_0^3 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} 4xy^3 dx.$

5. $\int_{-1}^0 dx \int_x^{x^2} x^4 y^3 dy.$

6. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{y^3}} x^2 y^2 dx.$

7. $\int_{-2}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{-x} 2xy dy.$

8. $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 5x^2 y^4 dx.$

9. $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{x}}^{1/x} 6x^3 y dy.$

10. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt[3]{y}}^{y^2} 9x^2 y dx.$

11. $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt{x}} 9x^2 y^4 dy.$

12. $\int_0^4 dy \int_{-y^3}^{y^2} 4x^5 y dx.$

13. $\int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^3} xy dy.$

14. $\int_0^3 dy \int_{-2y}^{\sqrt{y}} 4xy^2 dx.$

15. $\int_{-3}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt[3]{x}} 7x^3 y^2 dy.$

16. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[4]{y}}^{3y^2} 3xy dx.$

З а д а ч а 2. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры ограниченной заданными линиями.

1. $y = x^2, 4y = x^2, x = 4.$

2. $y = e^{-2x}, y = e^2, x = 0.$

3. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi / 4.$
4. $y = x^2 - 2x, y = x.$
5. $y = x^3, y = 4x, x \geq 0.$
6. $y = 4 - x^2, y = x - 2, x \geq 0.$
7. $y = x + 2, y = 1 - x, x \leq 0.$
8. $y = x^2, 4y = x^2, x = -2.$
9. $y = x^2, 3y = -x^2.$
10. $y = 1 + x^2, y = 1 - x, x = 2.$
11. $y = 2 - x^2, y = -1 - 0,5x.$
12. $y = e^{2x}, y = e^2, x = 4.$
13. $y = \cos x, y = -x - \pi / 2, x \leq 0.$
14. $y = \sin 2x, y = -\sin x, x = \pi / 4.$
15. $y = 1 / x, y = x - 1,5, x = 0,5.$
16. $y = \sqrt{x}, y = -x, x = 5.$

З а д а ч а 3. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела ограниченного заданными поверхностями.

1. $z = 0; y = x; y = 3x; y = 2;$
 $z = 12 - y^2.$
2. $z = 0; y = x; y = 4x; y = 2;$
 $z = 16 - y^2.$
3. $z = 0; y = x; y = 4x; y = 3;$
 $z = 20 - y^2.$
4. $z = 0; y = 2x; y = 3x; y = 3;$
 $z = 11 - y^2.$
5. $z = 0; y = 2x; y = 4x; y = 3;$
 $z = 18 - y^2.$
6. $z = 0; y = 2x; y = 4x; y = 4;$
 $z = 10 - y^2.$
7. $z = 0; y = x; y = 3x; y = 3;$
 $z = 13 - y^2.$
8. $z = 0; y = x; y = 2x; y = 1;$
 $z = 32 - y^2.$
9. $z = 0; y = x; y = 5x; y = 4;$
 $z = 25 - y^2.$
10. $z = 0; y = 4x; y = 3x; y = 6;$
 $z = 19 - y^2.$
11. $z = 0; y = 2x; y = 4x; y = 2;$
 $z = 21 - y^2.$
12. $z = 0; y = 2x; y = 3x; y = 5;$
 $z = 22 - y^2.$
13. $z = 0; y = 2x; y = 5x; y = 3;$
 $z = 17 - y^2.$
14. $z = 0; y = x; y = 4x; y = 3;$
 $z = 24 - y^2.$
15. $z = 0; y = x; y = 3x; y = 3;$
 $z = 14 - y^2.$
16. $z = 0; y = 2x; y = 6x; y = 4;$
 $z = 26 - y^2.$

З а д а ч а 4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ вдоль дуги кривой γ от точки $A(x_A; y_A)$ до точки $B(x_B; y_B)$.

- | | |
|---|--|
| 1. $X(x, y) = 2x - y; Y(x, y) = -xy;$
$\gamma: y = 2x^2; A(0; 0); B(2; 8).$ | 2. $X(x, y) = x + y; Y(x, y) = 2xy;$
$\gamma: y = 2 - x^2; A(-1; 1); B(0; 2).$ |
| 3. $X(x, y) = 2y; Y(x, y) = 3x - y;$
$\gamma: y = \sqrt{x}; A(1; 1); B(4; 2).$ | 4. $X(x, y) = x^2 - 2y; Y(x, y) = x + y;$
$\gamma: y = -x^2; A(-1; -1); B(1; -1).$ |
| 5. $X(x, y) = 3x + y; Y(x, y) = x + y^2;$
$\gamma: y = 2\sqrt{x}; A(0; 0); B(1; 2).$ | 6. $X(x, y) = x^2 y; Y(x, y) = x^3;$
$\gamma: y = 2/x; A(1; 2); B(2; 1).$ |
| 7. $X(x, y) = x^3 - y^2; Y(x, y) = 3xy;$
$\gamma: y = x^2; A(1; 1); B(2; 4).$ | 8. $X(x, y) = 4x - 5; Y(x, y) = -x^5 y;$
$\gamma: y = 4/x; A(1; 4); B(4; 1).$ |
| 9. $X(x, y) = 5x + 2y; Y(x, y) = x^2 y;$
$\gamma: y = x^3; A(-1; -1); B(0; 0).$ | 10. $X(x, y) = -x^3 y; Y(x, y) = 4x + 2y;$
$\gamma: y = -x^2; A(1; -1); B(2; -4).$ |
| 11. $X(x, y) = x^2 - 3y; Y(x, y) = xy;$
$\gamma: y = 2 - 5x; A(1; -3); B(2; -1).$ | 12. $X(x, y) = x^3 + y; Y(x, y) = 3xy;$
$\gamma: y = 3x^2; A(-1; 3); B(0; 0).$ |
| 13. $X(x, y) = 2x - 3y^2; Y(x, y) = -xy^3;$
$\gamma: y = 4\sqrt{x}; A(0; 0); B(1; 4).$ | 14. $X(x, y) = 5x - 2y^4; Y(x, y) = 6x^2 y;$
$\gamma: y = -\sqrt{x}; A(1; -1); B(4; -2).$ |
| 15. $X(x, y) = 2xy; Y(x, y) = 3x;$
$\gamma: y = -x^3; A(1; -1); B(2; -8).$ | 16. $X(x, y) = 4x + y; Y(x, y) = 2xy;$
$\gamma: y = 3x^2; A(0; 0); B(1; 3).$ |

1.2. Контрольная работа 8.

Теория поля

З а д а ч а 1. Задано скалярное поле $U = U(x, y)$, точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j}$. Найти: а) линии уровня; б) градиент поля U в точке M_0 ;

в) производную по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M_0 ; г) наибольшую скорость изменения поля U в точке M_0 .

- | | |
|---|---|
| 1. $U = x^2 + y^2, M_0(1;1),$
$\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}.$ | 2. $U = xy, M_0(2;-1),$
$\vec{l} = 2\vec{i} + 3\vec{j}.$ |
| 3. $U = y/x, M_0(3;4),$
$\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j}.$ | 4. $U = x^2 + y - 1, M_0(1;2),$
$\vec{l} = 2\vec{i} - 10\vec{j}.$ |
| 5. $U = x^2 + 2y^2, M_0(2;-2),$
$\vec{l} = 3\vec{i} - 5\vec{j}.$ | 6. $U = x^2 + y, M_0(2;-6),$
$\vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j}.$ |
| 7. $U = \sqrt{4 + x^2 + y^2}, M_0(2;1),$
$\vec{l} = 6\vec{i} - \vec{j}.$ | 8. $U = 2x - y^2, M_0(3;8),$
$\vec{l} = 2\vec{i} - 6\vec{j}.$ |
| 9. $U = xy + 3, M_0(2;7),$
$\vec{l} = 3\vec{i} + \vec{j}.$ | 10. $U = 3x^2 + 2y^2, M_0(3;1),$
$\vec{l} = 6\vec{i} + 2\vec{j}.$ |
| 11. $U = x^2 + y^2 + 2, M_0(7;-9),$
$\vec{l} = -3\vec{i} - 4\vec{j}.$ | 12. $U = 1 - x^2 - y^2, M_0(-1;1),$
$\vec{l} = 3\vec{i} + 3\vec{j}.$ |
| 13. $U = x/y, M_0(3;5),$
$\vec{l} = 2\vec{i} + 8\vec{j}.$ | 14. $U = x^2 - y^2, M_0(4;4),$
$\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j}.$ |
| 15. $U = 1 - xy, M_0(3;1),$
$\vec{l} = \vec{i} - 2\vec{j}.$ | 16. $U = -x^2 + y^2, M_0(-2;-2),$
$\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j}.$ |

З а д а ч а 2. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = X(x;y)\vec{i} + Y(x;y)\vec{j}$ при перемещении вдоль дуги кривой $\gamma: \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t, \end{cases}$ от точки $A(x_A; y_A)$ до точки $B(x_B; y_B)$ по кратчайшему пути. Сделать чертеж.

- | | |
|---|--|
| 1. $X(x;y) = -y; Y(x;y) = x;$
$a = 2; b = 3; A(2;0); B(0;3).$ | 2. $X(x;y) = 2x; Y(x;y) = -y;$
$a = 5; b = 3; A(-5;0); B(0;3).$ |
| 3. $X(x;y) = y; Y(x;y) = -x;$
$a = 5; b = 5; A(5;0); B(0;-5).$ | 4. $X(x;y) = -x; Y(x;y) = 2y;$
$a = 3; b = 2; A(3;0); B(0;2).$ |

5. $X(x; y) = 2y; Y(x; y) = 3x;$
 $a = 1; b = 1; A(-1; 0); B(0; -1).$
7. $X(x; y) = -y; Y(x; y) = -x;$
 $a = 1; b = 4; A(1; 0); B(0; -4).$
9. $X(x; y) = -2y; Y(x; y) = x;$
 $a = 2; b = 5; A(0; 5); B(2; 0).$
11. $X(x; y) = y; Y(x; y) = 4x;$
 $a = 3; b = 6; A(0; -6); B(3; 0).$
13. $X(x; y) = -y; Y(x; y) = 3x;$
 $a = 1; b = 4; A(0; -4); B(-1; 0).$
15. $X(x; y) = -2y; Y(x; y) = 2x;$
 $a = 6; b = 3; A(0; -3); B(6; 0).$
6. $X(x; y) = x; Y(x; y) = y;$
 $a = 4; b = 3; A(-4; 0); B(0; 3).$
8. $X(x; y) = 2x; Y(x; y) = 2y;$
 $a = 5; b = 5; A(5; 0); B(0; -5).$
10. $X(x; y) = -2x; Y(x; y) = y;$
 $a = 2; b = 1; A(0; -1); B(-2; 0).$
12. $X(x; y) = 4x; Y(x; y) = -y;$
 $a = 5; b = 4; A(0; 4); B(5; 0).$
14. $X(x; y) = x; Y(x; y) = 4y;$
 $a = 4; b = 4; A(0; -4); B(4; 0).$
16. $X(x; y) = -x; Y(x; y) = -y;$
 $a = 2; b = 1; A(0; 1); B(2; 0).$

З а д а ч а 3. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{F} = X(x; y)\vec{i} + Y(x; y)\vec{j}$ вдоль треугольного контура с вершинами $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ и $C(x_C; y_C)$ непосредственно и с помощью формулы Грина. Сделать чертеж.

1. $\vec{F} = (2x - y)\vec{i} + (3x + y)\vec{j},$
 $A(1; 2), B(3; 2), C(2; 4).$
3. $\vec{F} = (3x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j},$
 $A(1; 1), B(3; 1), C(2; 2).$
5. $\vec{F} = (-2x + y)\vec{i} + (4x - y)\vec{j},$
 $A(1; 1), B(4; 1), C(2; 2).$
7. $\vec{F} = (-3x + 2y)\vec{i} - (2x + y)\vec{j},$
 $A(1; 2), B(4; 2), C(2; 4).$
9. $\vec{F} = (x - 3y)\vec{i} - (x + y)\vec{j},$
 $A(1; 3), B(6; 2), C(1; 6).$
2. $\vec{F} = (x - 4y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j},$
 $A(1; 2), B(2; 4), C(1; 8).$
4. $\vec{F} = (4x - y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j},$
 $A(1; 2), B(2; 4), C(-1; 4).$
6. $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j},$
 $A(-1; 2), B(2; 4), C(-1; 6).$
8. $\vec{F} = (4x + 3y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j},$
 $A(2; 2), B(2; 4), C(-4; 0).$
10. $\vec{F} = (-x - y)\vec{i} + (5x + 2y)\vec{j},$
 $A(3; -2), B(3; 4), C(-2; 1).$

- | | |
|--|---|
| <p>11. $\bar{F} = (2x - 3y)\bar{i} + (x - y)\bar{j}$,
 $A(1; 1), B(2; 2), C(1; 3)$.</p> <p>13. $\bar{F} = (3x - y)\bar{i} - (2x + y)\bar{j}$,
 $A(1; 1), B(2; 2), C(1; 5)$.</p> <p>15. $\bar{F} = (2x + 3y)\bar{i} - (4x + y)\bar{j}$,
 $A(1; 2), B(2; 4), C(1; 6)$.</p> | <p>12. $\bar{F} = (4x - 2y)\bar{i} - (x + y)\bar{j}$,
 $A(1; 5), B(-2; 4), C(1; 0)$.</p> <p>14. $\bar{F} = (x - 2y)\bar{i} + (5x + y)\bar{j}$,
 $A(4; 2), B(4; 4), C(-2; 1)$.</p> <p>16. $\bar{F} = (4x - 5y)\bar{i} + (x - y)\bar{j}$,
 $A(1; -2), B(-4; 2), C(1; 4)$.</p> |
|--|---|

З а д а ч а 4. Проверить, будет ли векторное поле $\bar{F} = X(x; y; z)\bar{i} + Y(x; y; z)\bar{j} + Z(x; y; z)\bar{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{F}$ найти его потенциал $U = U(x, y, z)$.

- | | |
|---|---|
| <p>1. $X(x; y; z) = 2x + yz$;
 $Y(x; y; z) = 2y + xz$;
 $Z(x; y; z) = 2z + xy$.</p> <p>3. $X(x; y; z) = -2x - yz$;
 $Y(x; y; z) = 6y - xz$;
 $Z(x; y; z) = -2z - xy$.</p> <p>5. $X(x; y; z) = 2x + yz$;
 $Y(x; y; z) = z + xz$;
 $Z(x; y; z) = -2z + xy$.</p> <p>7. $X(x; y; z) = z + yz$;
 $Y(x; y; z) = 8y + xz$;
 $Z(x; y; z) = x + 6z + xy$.</p> <p>9. $X(x; y; z) = 2x - y$;
 $Y(x; y; z) = 2z - x$;
 $Z(x; y; z) = 2y + 1$.</p> <p>11. $X(x; y; z) = 2xz - 2z$;
 $Y(x; y; z) = 2y$;
 $Z(x; y; z) = x^2 - 2x$.</p> | <p>2. $X(x; y; z) = 4x + yz$;
 $Y(x; y; z) = -2y + xz$;
 $Z(x; y; z) = 2z + xy$.</p> <p>4. $X(x; y; z) = y + yz$;
 $Y(x; y; z) = 2y + xz$;
 $Z(x; y; z) = -z + xy$.</p> <p>6. $X(x; y; z) = 2x - yz$;
 $Y(x; y; z) = 6y - xz$;
 $Z(x; y; z) = x - xy$.</p> <p>8. $X(x; y; z) = 6x - y + z$;
 $Y(x; y; z) = -x$;
 $Z(x; y; z) = 8z + x$.</p> <p>10. $X(x; y; z) = 2x$;
 $Y(x; y; z) = 6y + z + 1$;
 $Z(x; y; z) = y$.</p> <p>12. $X(x; y; z) = 1 + 2y + 3yz$;
 $Y(x; y; z) = 2x + 3xz$;
 $Z(x; y; z) = 3yx$.</p> |
|---|---|

$$13. \quad X(x; y; z) = 4yz - 2z;$$

$$Y(x; y; z) = 4xy;$$

$$Z(x; y; z) = 6z - 2x + 4xy.$$

$$15. \quad X(x; y; z) = 5 + yz;$$

$$Y(x; y; z) = 2yz + xz;$$

$$Z(x; y; z) = y^2 + xy.$$

$$14. \quad X(x; y; z) = -6x + 2y;$$

$$Y(x; y; z) = 2x + 2yz;$$

$$Z(x; y; z) = y^2.$$

$$16. \quad X(x; y; z) = 2x + 2yz;$$

$$Y(x; y; z) = -4 + 2xz;$$

$$Z(x; y; z) = 2xy.$$

1.3. Контрольная работа 9.

Ряды

З а д а ч а 1. Задан числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$. Составить формулу общего члена ряда и исследовать его на сходимость.

$$1. \quad \frac{1}{3} + \frac{3}{6} + \frac{5}{9} + \frac{7}{12} + \dots$$

$$2. \quad \left(\frac{2}{1}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{5}{16}\right)^4 + \dots$$

$$3. \quad \left(\frac{3}{1}\right)^1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3 + \left(\frac{9}{4}\right)^4 + \dots$$

$$4. \quad \frac{10}{1} + \frac{100}{1 \cdot 2} + \frac{1000}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{10000}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$5. \quad \sqrt{\frac{1}{101}} + \sqrt{\frac{2}{201}} + \sqrt{\frac{3}{301}} + \sqrt{\frac{4}{401}} + \dots$$

$$6. \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$$

$$7. \quad \frac{3}{3^2} + \frac{9}{5^2} + \frac{27}{7^2} + \frac{81}{9^2} + \dots$$

$$8. \quad \sqrt{\frac{3}{3}} + \sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{7}{9}} + \sqrt{\frac{9}{12}} + \dots$$

$$9. \quad \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \dots$$

$$10. \quad \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{27} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{81} + \dots$$

$$11. \quad \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \dots$$

$$12. \quad 0,51 + 0,501 + 0,5001 + 0,50001 + \dots$$

$$13. \quad \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{4}{2 \cdot 4 + 1} + \frac{9}{2 \cdot 9 + 1} + \dots$$

$$14. \quad \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{9}{2^2 \cdot 5} + \frac{27}{2^3 \cdot 7} + \frac{81}{2^4 \cdot 9} + \dots$$

$$15. \quad \frac{1}{5} + \frac{2^5}{25} + \frac{3^5}{125} + \frac{4^5}{625} + \dots$$

$$16. \quad \frac{2}{1} + \frac{4}{2^4} + \frac{8}{3^4} + \frac{16}{4^4} + \dots$$

З а д а ч а 2. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

- | | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $y = xe^{\frac{x}{3}}.$ | 2. $y = \cos \sqrt{x}.$ | 3. $y = \arcsin \frac{x}{2}.$ | 4. $y = x^3 e^{\frac{x}{2}}.$ |
| 5. $y = \frac{\sin x}{x}.$ | 6. $y = \ln(1 - x^2).$ | 7. $y = \frac{1}{1 + 0,5x}.$ | 8. $y = \sin x^2.$ |
| 9. $y = \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right).$ | 10. $y = \frac{e^{2x}}{x}.$ | 11. $y = x^2 e^{-x}.$ | 12. $y = \ln(1 + 5x).$ |
| 13. $y = \frac{1}{1 - 3x}.$ | 14. $y = \operatorname{arctg}(-x).$ | 15. $y = x \ln(1 - x).$ | 16. $y = \frac{1}{1 - 2x}.$ |

З а д а ч а 3. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ функцию Лапласа $\Phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2/2} dx$ при заданном значении аргумента x_0 .

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1. $x_0 = 0,6.$ | 2. $x_0 = 0,65.$ | 3. $x_0 = 0,7.$ | 4. $x_0 = 0,75.$ |
| 5. $x_0 = 0,87.$ | 6. $x_0 = 0,85.$ | 7. $x_0 = 0,9.$ | 8. $x_0 = 0,82.$ |
| 9. $x_0 = 0,72.$ | 10. $x_0 = 0,92.$ | 11. $x_0 = 0,81.$ | 12. $x_0 = 0,68.$ |
| 13. $x_0 = 0,74.$ | 14. $x_0 = 0,88.$ | 15. $x_0 = 0,77.$ | 16. $x_0 = 0,61.$ |

З а д а ч а 4. Найти четыре первых члена разложения в ряд Маклорена решения задачи Коши.

- | | |
|---|---|
| 1. $y'' - 3y' - 4xy^4 = \sin x;$
$y(0) = 1; \quad y'(0) = 2.$ | 2. $y'' + 3y' - 4xy^4 = \cos x;$
$y(0) = -1; \quad y'(0) = 3.$ |
| 3. $y'' + 2y' - 3xy^3 = e^x;$
$y(0) = 2; \quad y'(0) = -3.$ | 4. $y'' - 3y' + 5xy^2 = e^x;$
$y(0) = 2; \quad y'(0) = -3.$ |
| 5. $y'' - 4y' + 2xy^2 = \cos x;$
$y(0) = -1; \quad y'(0) = 2.$ | 6. $y'' + y' + 2xy^5 = \cos x;$
$y(0) = 1; \quad y'(0) = -2.$ |

- | | |
|---|---|
| 7. $y'' + 4y' - 3xy^3 = \sin x;$
$y(0) = -2; \quad y'(0) = 1.$ | 8. $y'' + 8y' - 2xy^2 = e^x;$
$y(0) = -1; \quad y'(0) = 3.$ |
| 9. $y'' + 5y' - xy^5 = e^x;$
$y(0) = 1; \quad y'(0) = -2.$ | 10. $y'' - y' + 5xy^6 = \sin x;$
$y(0) = 2; \quad y'(0) = 2.$ |
| 11. $y'' - y' + 4xy^3 = \cos x;$
$y(0) = 2; \quad y'(0) = -1.$ | 12. $y'' + 8y' - 2xy^2 = e^{-x};$
$y(0) = 2; \quad y'(0) = 3.$ |
| 13. $y'' + y' - 5xy^4 = e^x;$
$y(0) = 1; \quad y'(0) = 3.$ | 14. $y'' + 4y' + xy^3 = \cos x;$
$y(0) = 5; \quad y'(0) = -1.$ |
| 15. $y'' - 5y' + 2xy^3 = \sin x;$
$y(0) = -2; \quad y'(0) = -4.$ | 16. $y'' - 3y' + 4xy^2 = \sin x;$
$y(0) = 4; \quad y'(0) = 1.$ |

2. ФОРМУЛЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 7

З а д а ч а 1. Вычислить двукратный интеграл $\int_0^2 dy \int_{-2x}^{\sqrt[3]{x}} 3x^2 y^3 dx.$

Р е ш е н и е. Сначала вычислим внутренний интеграл, где x является переменной величиной, а y – постоянной. Затем полученный результат интегрируем по переменной y .

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_{-2x}^{\sqrt[3]{x}} 3x^4 y^2 dy &= \int_0^2 \left(\int_{-2x}^{\sqrt[3]{x}} 3x^4 y^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left(x^4 y^3 \right) \Big|_{-2x}^{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^2 \left(x^4 \left(\sqrt[3]{x} \right)^3 - x^4 (-2x)^3 \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(x^4 \cdot x - x^4 (-8x^3) \right) dx = \int_0^2 \left(x^5 + 8x^7 \right) dx = \left(\frac{x^6}{6} + x^8 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{6} + 256 = 266 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

З а д а ч а 2. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры ограниченной линиями: $y = -x^2$, $y = -x^2$, $x = 1$.

При решении задачи используем следующий геометрический факт: двойной интеграл $\iint_D dx dy$ равен площади области D . Для вычисления двойного интеграла по области D выполняется переход к двукратному интегралу с учетом уравнений границ области D . Для области D , изображенной на рис. 1 переход к двукратному интегралу осуществляется по формуле:

$$\iint_D dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx.$$

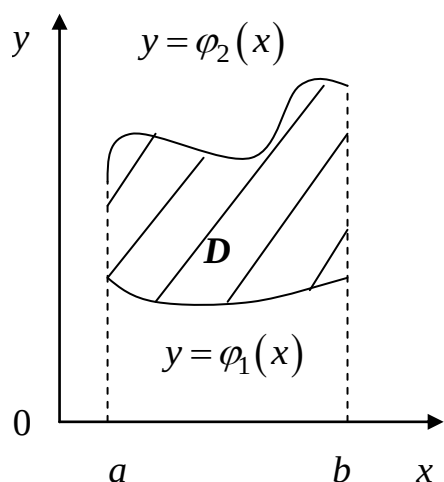


Рис. 1

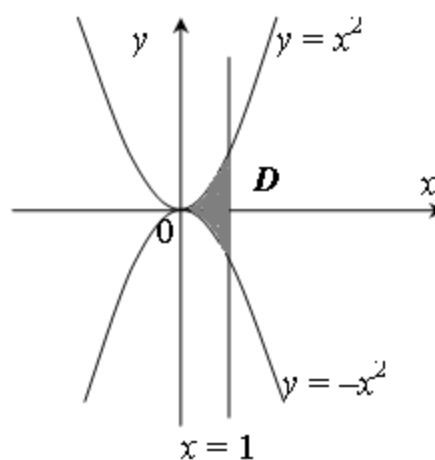


Рис. 2

Р е ш е н и е. Чертеж области D изображен на рис. 2. По чертежу определяем пределы интегрирования и вычисляем площадь:

$$\begin{aligned} S = \iint_D dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} dy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(y \Big|_{-x^2}^{x^2} \right) dx = \int_0^1 (x^2 + x^2) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1^3}{3} - 2 \cdot \frac{0^3}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

З а д а ч а 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $y=2x$, $y=x$, $y=2$, $z=15-y^2$.

двойной интеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ при $f(x,y) \geq 0$ в области D равен объему тела

Для вычисления двойного интеграла по области D выполняется переход к двукратному интегралу с учетом уравнений границ области D . Для области D , изображенной на рис. 4 переход к двукратному интегралу осуществляется по формуле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Решение.

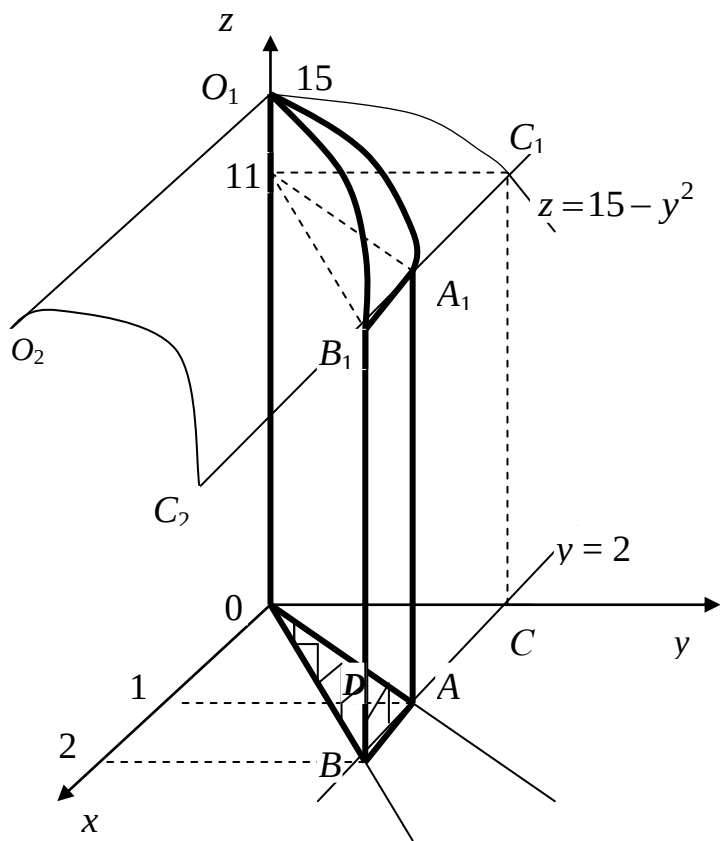


Рис. 3

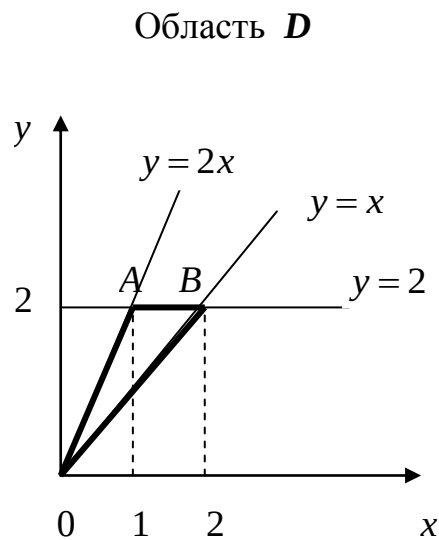


Рис. 4

Заданное тело представлено на рис. 3 «криволинейной» призмой $OABO_1A_1B_1$. Снизу тело ограничено областью D – частью плоскости $z = 0$.

Плоские боковые поверхности OBB_1O_1 , OAA_1O_1 , ABB_1A_1 – соответственно части плоскостей $y = x$; $y = 2x$; $y = 2$. Сверху тело T ограничено поверхностью $O_1A_1B_1$ – частью параболического цилиндра $z = 15 - y^2$.

Объем тела равен двойному интегралу

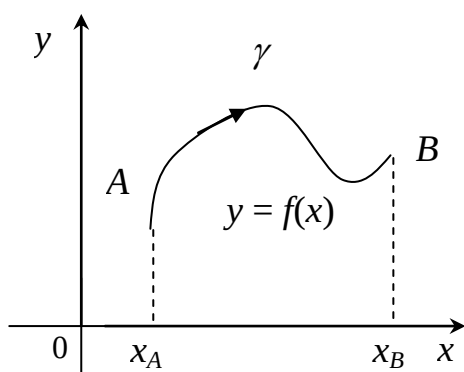
$$V = \iint_D z(x, y) dx dy = \iint_D (15 - y^2) dx dy.$$

Область D изображена на рис. 4. Определяем пределы интегрирования и

$$\begin{aligned} \text{вычисляем двукратный интеграл } V &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^y (15 - y^2) dx \right) dy = \int_0^2 (15 - y^2) x \Big|_{\frac{1}{2}y}^y dy = \\ &= \int_0^2 (15 - y^2) \left(y - \frac{y}{2} \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{15}{2} y - \frac{1}{2} y^3 \right) dy = \left(\frac{15}{2} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{15}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{8} \cdot 2^4 = \\ &= 15 - 2 = 13 \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

З а д а ч а 4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int_{\gamma} (6x + y) dx + (x - 3y) dy$ вдоль дуги кривой $\gamma: y = -2x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;-2)$.



Если дуга AB линии γ задана уравнением $y = f(x)$ (рис. 5), то $dy = f'(x)dx$ и от криволинейного интеграла легко перейти к обычному определенному интегралу:

$$\int_{AB} X(x, y) dx + Y(x, y) dy =$$

Рис. 5

$$= \int_{x_A}^{x_B} (X(x, f(x)) + Y(x, f(x)) \cdot f'(x)) dx.$$

Р е ш е н и е. Кривая γ задана уравнением $y = -2x^2$, значит $dy = -4xdx$ и x изменяется от $x_A = 0$ до $x_B = 1$. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (6x + y)dx + (x - 3y)dy &= \int_0^1 (6x - 2x^2)dx + \left(x - 3(-2x^2)\right)(-4xdx) = \\ &= \int_0^1 (6x - 2x^2)dx + (-4x^2 - 24x^3)dx = \int_0^1 (6x - 6x^2 - 24x^3)dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 24 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \\ &= 3 - 2 - 6 - 0 = -5. \end{aligned}$$

2.2. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 8

З а д а ч а 1. Задано скалярное поле $U = 4x^2 + y^2$, точка $M_0(1; -1)$ и вектор $\vec{l} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Найти: а) линии уровня; б) градиент поля U в точке M_0 ; в) производную по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M_0 ; г) наибольшую скорость изменения поля U в точке M_0 .

Р е ш е н и е. а) Линией уровня скалярного поля называют геометрическое место точек, в которых функция $U(x, y)$ принимает постоянное значение, т. е.

$$U(x, y) = C, \quad C - const.$$

В нашем случае $4x^2 + y^2 = C$, $C > 0$ задает семейство эллипсов $\frac{x^2}{C/4} + \frac{y^2}{C} = 1$ с центром в начале координат и полуосями $a = \sqrt{\frac{C}{4}}$ и $b = \sqrt{C}$.

б) Находим градиент поля U :

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} = \frac{\partial (4x^2 + y^2)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial (4x^2 + y^2)}{\partial y} \vec{j} = 8x\vec{i} + 2y\vec{j};$$

В точке M_0 : $\text{grad} U(1; -1) = 8 \cdot 1\vec{i} + 2 \cdot (-1)\vec{j} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$.

в) Производную поля U в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$ находим по формуле: $\frac{\partial U(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} \cos \beta$, где $\cos \alpha = \frac{l_x}{|l|}$, и $\cos \beta = \frac{l_y}{|l|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|l|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}; \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|l|} = \frac{5}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}};$$

$$\frac{\partial U(1;-1)}{\partial l} = \frac{\partial U(1;-1)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(1;-1)}{\partial y} \cos \beta = 8 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} - 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{14}{\sqrt{34}}.$$

г) Наибольшая скорость изменения поля U в точке M_0 равна:

$$|\text{grad} U(M_0)| = |8\vec{i} - 2\vec{j}| = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68}.$$

З а д а ч а 2. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = -3x\vec{i} + 2y\vec{j}$ при перемещении вдоль дуги кривой $\gamma: \begin{cases} x = 6 \cos t; \\ y = 3 \sin t, \end{cases}$ от точки $A(-6;0)$ до точки $B(0;3)$ по кратчайшему пути. Сделать чертеж.

Р е ш е н и е. Работа силового векторного поля $\vec{F} = X(x,y)\vec{i} + Y(x,y)\vec{j}$ на дуге γ равна криволинейному интегралу $A = \int_{\gamma} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$.

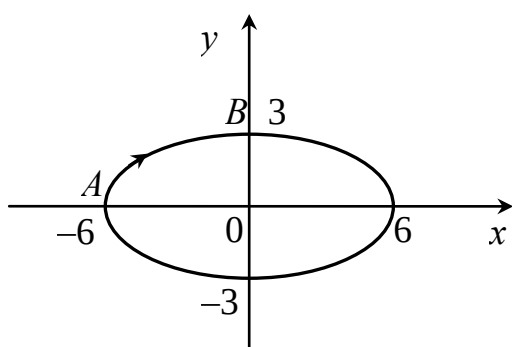


Рис. 6

Строим чертеж (рис. 6). Кривая γ , заданная параметрическими уравнениями, представляет собой эллипс с полуосями $a = 6$ и $b = 3$.

$$X(x,y) = -3x = -3 \cdot 6 \cos t = -18 \cos t;$$

$$Y(x,y) = 2y = 2 \cdot 3 \sin t = 6 \sin t;$$

$$dx = (6 \cos t)' dt = -6 \sin t dt;$$

$$dy = (3 \sin t)' dt = 3 \cos t dt,$$

параметр t изменяется от π до $\frac{\pi}{2}$ (очевидно по чертежу).

Таким образом, переходя от криволинейного интеграла к определенному вычисляем работу:

$$A = \int_{\gamma} -3x dx + 2y dy = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -18 \cos t \cdot (-6 \sin t dt) + 6 \sin t \cdot 3 \cos t dt = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} 126 \sin t \cos t dt =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} 63 \sin 2t dt = 63 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{63}{2} (\cos \pi - \cos 2\pi) = -\frac{63}{2} (-1 - 1) = 63 \text{ ед. раб.}$$

З а д а ч а 3. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{F} = (3x - 2y)\vec{i} - (x + y)\vec{j}$ вдоль треугольного контура с вершинами $A(1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(1; 3)$ непосредственно и с помощью формулы Грина. Сделать чертеж.

Р е ш е н и е.

Заданный контур γ , составленный сторонами треугольника ABC , изображен на рис. 7.

Вычислим циркуляцию непосредственно.

$$I = \oint_{\gamma} (3x - 2y) dx - (x + y) dy.$$

Разобьем этот интеграл по замкнутому контуру γ на три интеграла, соответствующих отрезкам AB , BC , CA :

$$I = \int_{(A)}^{(B)} (3x - 2y) dx - (x + y) dy +$$

$$+ \int_{(B)}^{(C)} (3x - 2y) dx - (x + y) dy +$$

$$+ \int_{(C)}^{(A)} (3x - 2y) dx - (x + y) dy.$$

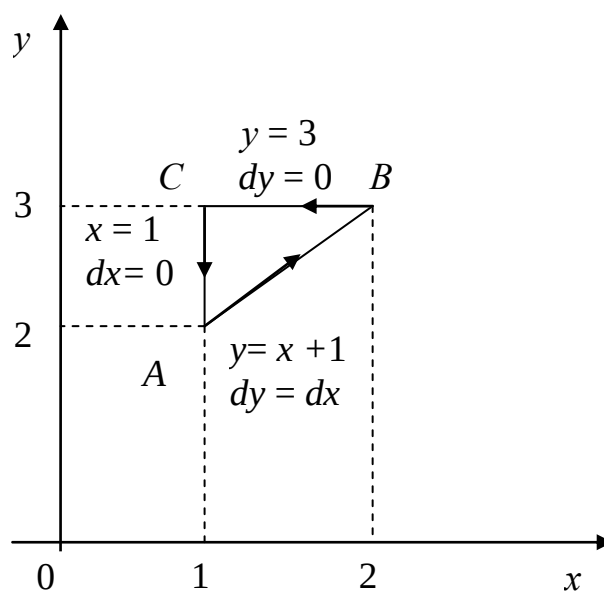


Рис. 7

Найдем уравнение стороны AB , используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \quad \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{3 - 2}, \quad y - 2 = x - 1 \quad \text{или} \quad y = x + 1.$$

Учтем, что на отрезке

AB $y = x + 1$, $dy = (x + 1)' dx = 1 \cdot dx$, x изменяется от 1 до 2;

BC $y = 3$, $dy = y' dx = 0 \cdot dx = 0$, x изменяется от 2 до 1;

CA $x = 1$, $dx = 0$, y изменяется от 3 до 2.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_1^2 (3x - 2(x + 1)) dx - (x + x + 1) dx + \int_2^1 (3x - 2 \cdot 3) dx - (x + 3) \cdot 0 + \\ &+ \int_3^2 (3 \cdot 1 - 2y) \cdot 0 - (1 + y) dy = \int_1^2 (3x - 2x - 2 - x - x - 1) dx + \int_2^1 (3x - 6) dx + \int_3^2 (-1 - y) dy = \\ &= \int_1^2 (-x - 3) dx + \int_2^1 (3x - 6) dx + \int_3^2 (-1 - y) dy = \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_1^2 + \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x \right) \Big|_2^1 + \left(-y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_3^2 = \\ &= \left(-\frac{2^2}{2} - 3 \cdot 2 + \frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) + \left(\frac{3}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \right) + \left(-2 - \frac{2^2}{2} + 3 + \frac{3^2}{2} \right) = \\ &= -4,5 + 1,5 + 3,5 = 0,5. \end{aligned}$$

Вычислим циркуляцию по формуле Грина:

$$\mathcal{I} = \oint_{\gamma} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(-(x + y))}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x - 2y)}{\partial y} = -2.$$

По формуле Грина имеем:

$$\mathcal{I} = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-1 - (-2)) dx dy = \iint_D dx dy = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5.$$

З а д а ч а 4. Проверить будет ли векторное поле $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал $U = U(x, y, z)$.

Р е ш е н и е. Векторное поле $\bar{F}$, заданное в пространственной области T потенциально, если выполняется условие $\text{rot } \bar{F} = \bar{0}$.

Вычисляем ротор векторного поля:

$$\begin{aligned}\text{rot } \bar{F} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(x+z)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial(y+z)}{\partial z} - \frac{\partial(x+y)}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(x+z)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (1-1)\bar{i} + (1-1)\bar{j} + (1-1)\bar{k} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} = \bar{0}.\end{aligned}$$

Условие потенциальности поля выполняется, значит, поле $\bar{F}$ потенциально. Найдем его потенциал по формуле:

$$U = U(x, y, z) = \int_{M_0 M} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz,$$

где $M_0(0;0;0)$ – фиксированная точка поля, а $M(x; y; z)$ – произвольная точка поля.

$$\begin{aligned}\int_{M_0 M} X dx + Y dy + Z dz &= \int_{x_0}^x X(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z Z(x, y, z) dz = \\ &= \int_0^x (0+0) dx + \int_0^y (x+0) dy + \int_0^z (x+y) dz = xy + xz + yz.\end{aligned}$$

Таким образом, потенциал поля $U(x, y, z) = xy + xz + yz + C$.

Векторное поле $\bar{F}$ является соленоидальным, если $\text{div } \bar{F} = 0$.

Вычисляем дивергенцию поля $\bar{F}$:

$$\text{div } \bar{F} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial(y+z)}{\partial x} + \frac{\partial(x+z)}{\partial y} + \frac{\partial(x+y)}{\partial z} = 0.$$

Дивергенция равна нулю, значит поле $\bar{F}$ является соленоидальным.

2.3. Формулы и примеры решения задач контрольной работы 9

Задача 1. Задан числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$. Составить формулу общего члена ряда и исследовать его на сходимость.

Пример 1. $\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{3}{11} + \frac{4}{14} + \dots$.

Решение. Члены заданного ряда: $a_1 = \frac{1}{5} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 2}$; $a_2 = \frac{2}{8} = \frac{2}{3 \cdot 2 + 2}$;
 $a_3 = \frac{3}{11} = \frac{3}{3 \cdot 3 + 2}$; $a_4 = \frac{4}{14} = \frac{4}{3 \cdot 4 + 2}$. Формула общего члена ряда: $a_n = \frac{n}{3n + 2}$.

Необходимый признак сходимости числового ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \left\{ \text{по правилу Лопиталя} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{(3n + 2)'} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

необходимый признак не выполняется, то данный ряд расходится.

Пример 2. $\frac{1}{5} + \frac{16}{25} + \frac{81}{125} + \frac{256}{625} + \dots$.

Решение. Члены заданного ряда: $a_1 = \frac{1}{5} = \frac{1^4}{5^1}$; $a_2 = \frac{16}{25} = \frac{2^4}{5^2}$;
 $a_3 = \frac{81}{125} = \frac{3^4}{5^3}$; $a_4 = \frac{256}{625} = \frac{4^4}{5^4}$. Формула общего члена ряда: $a_n = \frac{n^4}{5^n}$.

Достаточный признак сходимости числового ряда – *признак Даламбера*.

Если задан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ и существует предел

$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то заданный ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Находим

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{5^{n+1}}}{\frac{n^4}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 \cdot \cancel{5^n}}{n^4 \cdot \cancel{5^n} \cdot 5} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^4 = \frac{1}{5}.$$

Так как $q = \frac{1}{5} < 1$, то данный ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 3. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \left(\frac{4}{5}\right)^{16} + \dots$.

Р е ш е н и е. Члены заданного ряда: $a_1 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{1+1}\right)^{1^2}$;

$$a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{2+1}\right)^{2^2}; \quad a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{3}{3+1}\right)^{3^2}; \quad a_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{16} = \left(\frac{4}{4+1}\right)^{4^2}. \quad \text{Формула}$$

общего члена ряда: $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Достаточный признак сходимости числового ряда – *признак Коши*.

Если задан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ и существует предел

$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, то заданный ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Находим

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Так как $q = \frac{1}{e} < 1$, то данный ряд сходится по признаку Коши.

З а д а ч а 2. Разложить функцию $y = \operatorname{arctg} \frac{3x}{4}$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

Известны ряды Маклорена для всех основных элементарных функций, например:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty; +\infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (-1; 1];$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (-1; 1);$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \quad [-1; 1];$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad [-1; 1].$$

Р е ш е н и е. Используем известное разложение в ряд Маклорена

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad [-1; 1].$$

Полагая $\frac{3x}{4}$ вместо x , получаем ряд:

$$\operatorname{arctg} \frac{3x}{4} = \frac{3x}{4} - \frac{\left(\frac{3x}{4}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{3x}{4}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{3x}{4}\right)^7}{7} + \dots + (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Область сходимости полученного ряда находим, решая неравенство:

$$\frac{3x}{4} \in [-1; 1] \quad \text{или} \quad -1 \leq \frac{3x}{4} \leq 1, \quad -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}. \quad \text{Таким образом, ряд сходится при}$$

$$x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right].$$

З а д а ч а 3. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ функцию

$$\text{Лапласа } \Phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2/2} dx \quad \text{при } x_0 = 0,8.$$

Р е ш е н и е.

$$\text{Используем ряд } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty; +\infty).$$

Полагая $-\frac{x^2}{2}$ вместо x , получаем:

$$\Phi(0,8) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0,8} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^8}{2^4 \cdot 4!} - \dots \right) dx, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Степенные ряды внутри интервала сходимости можно интегрировать почленно. Значит,

$$\begin{aligned} \Phi(0,8) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{0,8} 1 \cdot dx - \int_0^{0,8} \frac{x^2}{2} dx + \int_0^{0,8} \frac{x^4}{8} dx - \int_0^{0,8} \frac{x^6}{48} dx + \int_0^{0,8} \frac{x^8}{384} dx - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{48} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1}{384} \cdot \frac{x^9}{9} - \dots \right) \Bigg|_0^{0,8} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0,8 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(0,8)^3}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{(0,8)^5}{5} - \frac{1}{48} \cdot \frac{(0,8)^7}{7} + \frac{1}{384} \cdot \frac{(0,8)^9}{9} - \dots \right) \approx \\ &\approx 0,3989 \cdot \left(0,8 - \frac{0,5120}{6} + \frac{0,3277}{40} - \frac{0,2097}{336} + \frac{0,1342}{3456} - \dots \right) \approx \\ &\approx 0,3191 - 0,0340 + 0,0016 - 0,00025 + 0,000015 - \dots. \end{aligned}$$

Сколько членов ряда необходимо учесть, чтобы обеспечить заданную точность $\varepsilon = 10^{-3}$?

Если учтем три члена, то отброшенная часть составляет ошибку $\varepsilon = |-0,00022 + 0,000015 - \dots|$. Итак, ошибка ряда равна модулю суммы знакопередающегося ряда $0,00022 - 0,000015 + \dots$. Его члены по модулю убывают и общий член стремится к нулю. Значит, по теореме Лейбница сумма этого ряда меньше его первого члена, т. е. $\varepsilon < 0,00022 < 0,001$, и заданная точность будет обеспечена.

Таким образом, с заданной точностью находим:

$$\Phi(0,8) \approx 0,3191 - 0,0340 + 0,0016 = 0,2867 \approx 0,287.$$

З а д а ч а 4. Найти четыре первых члена разложения в ряд Маклорена решения задачи Коши $y'' - 2y' + 3xy^3 = e^x$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -1$.

Р е ш е н и е.

Из уравнения видно, что неизвестная функция $y(x)$ имеет производные любых порядков. Значит, ее можно разложить в ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2!}y''(0)x^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)x^3 + \dots$$

Из заданного уравнения $y'' - 2y' + 3xy^3 = e^x$ находим:
 $y''(x) = 2y'(x) - 3x(y(x))^3 + e^x$.

С учетом начальных условий $y(0) = 2$; $y'(0) = -1$ при $x = 0$ получаем
 $y''(0) = 2y'(0) - 3 \cdot 0 \cdot (y(0))^3 + e^0 = 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -1$.

Из заданного уравнения $y'' - 2y' + 3xy^3 = e^x$ находим (учтем, что произведение $x \cdot y^3$ необходимо дифференцировать по формуле $(uv)' = u'v + uv'$):

$$y'''(x) = 2y''(x) - 3 \cdot 1 \cdot (y(x))^3 - 3 \cdot x \cdot 3(y(x))^2 \cdot y'(x) + e^x.$$

$$\begin{aligned} \text{При } x=0 \quad y'''(0) &= 2y''(0) - 3 \cdot 1 \cdot (y(0))^3 - 3 \cdot 0 \cdot 3(y(0))^2 \cdot y'(0) + e^0 = \\ &= 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 2^3 - 3 \cdot 0 \cdot 2^2 \cdot (-1) + 1 = -2 - 24 + 1 = -25. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ в формулу

$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2!}y''(0)x^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)x^3 + \dots$ и получим искомое решение:

$$y(x) \approx 2 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{25}{6}x^3.$$

Библиографический список

1. П и с ь м е н н ы й Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. П и с ь м е н н ы й . М.: Айрис-пресс, 2008. 287 с.
2. В ы г о д с к и й М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. В ы г о д с к и й. М.: Астрель:АСТ, 2005. 991 с.
3. З а б л о ц к а я О. А. Методические указания к изучению раздела «Кратные интегралы. Теория поля» / О. А. З а б л о ц к а я, Л. С. П е т р о в а, А. М. С о к о л ь н и к о в а / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2008. 44 с.
4. А р т ю х о в В. Я. Высшая математика Ч. 2. / В. Я. А р т ю х о в и др. / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2010. 45 с.

Учебное издание

ГАЛИЧ Юлия Геннадьевна

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать .2016. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Плоская печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 500 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35