

1. ВВЕДЕНИЕ В ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Выполнение лабораторной работы. Лабораторная работа выполняется индивидуально по своему варианту или группой из 2–3 студентов после подготовки к ней и с разрешения преподавателя. Измерения проводятся в соответствии с описанием, приведенным в каждой лабораторной работе. Результаты измерений заносятся в протокол. *Протокол – это часть отчета, в котором фиксируются результаты измерений. Протокол с результатами измерений проверяет преподаватель и ставит подпись, подтверждающую выполнение работы.* Подпись преподавателя не требуется, если студент выполняет работу индивидуально по своему варианту. В конце занятия необходимо представить отчет.

Запись результатов измерений, схем. Все результаты измерений записываются без какой-либо обработки, нельзя проводить даже самые простые арифметические расчеты в уме, прежде чем записывать результат. Протокол по лабораторной работе заполняется по мере измерений без переписываний «начисто». Результаты оформляются в виде таблиц, такая запись компактнее и проще для чтения. Повторяющиеся значения одной и той же физической величины лучше всего записывать в столбик. Над каждым столбиком указывают название или символ соответствующей величины с единицами измерения. Следует избегать повторений, чтобы не загромождать записи. Необходимо также изобразить схему экспериментальной установки и указать наименование элементов.

Значение схемы в отчетах об эксперименте вряд ли можно переоценить; она может не быть точным изображением установки, но на ней должно быть указано все, что имеет отношение к эксперименту.

Обработка результатов измерений. Окончательный результат получают после обработки результатов всех измерений. Как правило, при выполнении промежуточных расчетов необходимо сохранять один лишний знак, который при записи окончательного результата будет отброшен. При записи результата измерения последняя цифра должна соответствовать тому десятичному разряду абсолютной погрешности, который использован при указании погрешности.

Пример: Для определения сопротивления проводника, определили силу тока в проводнике ($I = 27,3 \text{ мА}$) и падение напряжения ($U = 6,45 \text{ В}$).

Абсолютная погрешность измерения приборов составляет 1 %. Сопротивление проводника определим по закону Ома для цепи постоянного тока: $U = R \cdot I$, $R = 6,45 \text{ В} / 0,0273 \text{ А} = 236,2637 \text{ Ом}$.

Незначашие цифры следует отбросить, воспользовавшись правилами округления. Так как U и I определены с точностью до 1 %, то погрешность найденного в результате вычислений R не может быть меньше 1 %, поэтому вычисления следует делать не точнее, чем 10^{-4} .

Ответ следует записать так: $R = 236,3 \text{ Ом}$.

2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ЛАБОРАТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Инженеру в своей практической деятельности бывает необходимо проводить эксперименты с целью описания процесса и получения его математической модели. Любая математическая модель, основанная на результатах наблюдений и измерений, не будет иметь смысла, если не учитывать погрешности средств измерений при проведении эксперимента.

В данном практикуме рассматриваются общие сведения, необходимые для оценки точности полученных лабораторных измерений. Студентам, желающим получить более глубокие знания по планированию и обработке лабораторного (технического) эксперимента, следует обратиться к литературе [1, 2, 3].

Прежде чем рассматривать правила и порядок обработки результатов измерений, приведем некоторые общепринятые термины и определения.

2.1. Определения и понятия

Измерение – это совокупность действий, выполняемых при помощи *средств измерений* для получения численного значения физической величины (*результата измерений*) в принятых единицах измерений. Различают прямые и косвенные измерения.

Прямые измерения – это измерения, при которых искомая величина находится путем сравнения с эталоном или с помощью измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах измерения (*например, измерение длины тела при помощи метра или силы тока в электрической цепи амперметром*).

Косвенные измерения – это измерения, при которых значение физической величины находят на основании известной зависимости между искомой величиной и величинами, которые определяют путем прямых измерений. *Например, измерение сопротивления проводника R по измерениям силы тока I и падения напряжения U из известной формулы ($R = U/I$) или косвенное измерение температуры t по известной зависимости $V_t = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$.*

Большая часть *средств измерений* показывает результат действия измеряемой величины на прибор, а не ее искомое значение.

Измерение высоты столбика ртути, проградуированного в градусах, показывает температуру, а угол поворота рамки вольтметра – напряжение. В данном случае видим, что измерение физических величин температуры и напряжения сводится к линейным и угловым измерениям.

Численные значения физических величин получаем при помощи *средств измерений*.

Средства измерений подразделяют на:

- *меры;*
- *измерительные преобразователи;*
- *измерительные устройства;*
- *информационно-измерительные системы;*
- *измерительные приборы.*

Мера – средство измерения, предназначенное для хранения и воспроизведения физической величины, например, измерительная линейка, гиря, мензурка и т. д.

Измерительный прибор – это средство измерения, предназначенное для наблюдателя (оператора) при воспроизведении измерительной информации. *Измерительный прибор* воспринимает измеряемую физическую величину и преобразует ее в показания (например, термометр, весы, штангенциркуль, вольтметр и т. д.). Измерениями, средствами измерений и их погрешностями занимается наука *метрология* [1].

Абсолютно точных измерительных приборов в физике и технике нет. Несовершенство измерительных приборов, методик измерения и наших органов чувств не позволяет точно определить искомую величину. Количественной характеристикой точности полученных результатов измерений является *погрешность результата измерения*.

Погрешность результата измерения – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. При описании измерений истинное значение искомой величины мы заменяем средним значением серии измерений с указанием *доверительного интервала*, в котором может находиться истинное значение (см. § 2.2 [4].). Погрешности результатов измерений можно представить в абсолютных единицах измеряемой величины или в относительных (1), (2).

Абсолютная погрешность результата измерения физической величины (Δx), погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины, определяется разностью между истинным x_0 и измеренным значением физической величины x ; указывает на границы неопределенности значения измеряемой величины и определяет точность измерения.

$$\Delta x = |x - x_0|. \quad (1)$$

Точность измерения – это характеристика качества измерения, отражающая близость к нулю погрешности его результата.

Относительная погрешность результата измерения физической величины определяется отношением абсолютной погрешности измерения (1) к истинному значению измеряемой величины и выражается в долях (2) либо в процентах (3):

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} 100\%. \quad (3)$$

Погрешности могут быть вызваны различными причинами: неправильной градуировкой прибора, несовершенством метода измерений, колебаниями температуры, вибрацией, личным восприятием студента и другими факторами. По характеру проявления подразделяют погрешности *систематические, случайные и промахи*.

Систематические погрешности измерения – это погрешности, которые при повторных измерениях остаются постоянными или изменяются по известному закону. Такие погрешности могут быть связаны с ограниченной точностью используемых измерительных приборов и их неправильной установкой (*инструментальная погрешность*), неверным выбором метода измерений (*методическая погрешность*) и постоянным воздействием различных внешних факторов. Основным отличительный признак систематических погрешностей состоит в том, что они могут быть предсказаны и благодаря этому частично или полностью устранены введением соответствующих поправок.

Случайные погрешности измерения – это погрешности измерения, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же физической величины; погрешности непредсказуемы ни по знаку, ни по величине. Случайные погрешности обусловлены большим количеством трудно учитываемых факторов, влияющих как на средства измерений, так и на самого экспериментатора. Причинами могут быть трение и зазоры в приборах, вибрации и др. Присутствие случайных погрешностей (в отличие от систематических) обнаруживается в виде некоторого разброса получаемых результатов при повторных измерениях. Таким образом, главной отличительной чертой случайных погрешностей является их непредсказуемость от одного отсчета к другому. Следует отметить, что уменьшить случайные погрешности измерений можно путем увеличения числа измерений n , при этом ошибка измерений будет уменьшаться пропорционально $(1/\sqrt{n})$.

Описание случайных погрешностей производится с помощью аппарата теории вероятностей и математической статистики.

Промах, или грубая погрешность – это случайная погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая при равных условиях наблюдений заметно отличается от остальных результатов этого ряда. Промахи возникают из-за грубого нарушения нормальных условий измерений и могут быть связаны с неисправностью измерительного устройства, неправильным его использованием или ошибочными записями, округлением и вычислениями. Погрешности такого рода должны быть исключены путем проверок. Погрешности в зависимости от причин, их вызывающих, можно разделить на несколько групп, основные из которых рассмотрим далее.

Методическая погрешность возникает вследствие несовершенства методики измерения и получения окончательного результата, в том числе от пренебрежения по ходу вывода расчетной формулы тем или иным аргументом или условием протекания процесса, от наличия влияния средств измерения на характер исследуемого процесса и не учета этого влияния в расчетной формуле.

В качестве примера погрешности метода рассмотрим измерение мощности постоянного тока при помощи амперметра и вольтметра для двух схем включения (рис. 1, 2).

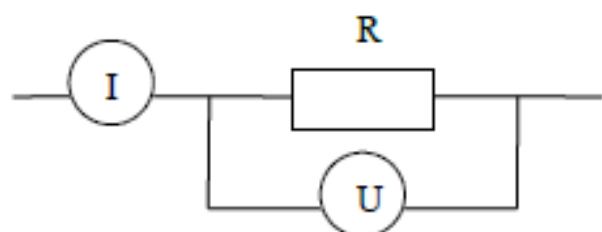


Рис. 1. Схема измерения низкоомных нагрузок

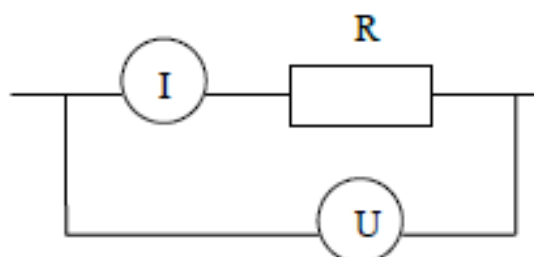


Рис. 2. Схема измерения высокоомных нагрузок

Внутренние сопротивления амперметра, вольтметра и нагрузки соответственно равны R_a ; R_v ; R_n . Относительная методическая погрешность измерения мощности при использовании схемы (рис. 1) вычисляется как

$$\varepsilon_a = \frac{R_a}{R_v},$$

а при использовании схемы (рис. 2) определяется по формуле

$$\varepsilon_a = \frac{R_a}{R_n}.$$

Анализ формул, описывающих относительные погрешности, показывает, что их величина различна. Первую схему включения (см. рис. 1) целесообразно применять для измерения низкоомных нагрузок, а измерение мощности на высокоомных нагрузках выгоднее производить по второй схеме. Методическую погрешность можно значительно уменьшить, если воспользоваться вольтметром, сопротивление которого R_v много больше сопротивления нагрузки R_n , и амперметром, сопротивление которого R_a много меньше R_n .

Инструментальная погрешность, или погрешность средства измерения, – это разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Это составляющая погрешности измерения, которая зависит от погрешностей применяемых средств измерений. Различают *основные* (допустимые погрешности мер и измерительных приборов) и *дополнительные* погрешности, возникающие вследствие износа, неисправности средств измерения или их не-

правильной установки. Инструментальная погрешность принадлежит данному средству измерений, может быть определена при его испытаниях в сравнении с эталоном и занесена в его паспорт.

Погрешности отсчета. *Отсчетом* называют число, полученное при данном измерении по *отсчетному устройству* меры или прибора, или полученное путем счета последовательных отметок или сигналов. Отсчет по шкале получают при помощи *указателя*, которым может быть стрелка в амперметре, уровень жидкости в мензурке, световой луч в зеркальном гальванометре, конец измеряемого стержня для линейки. Если указатель установился точно на отметке шкалы, то за результат измерения принимается числовое значение этой отметки. Как правило, указатель устанавливается между отметками шкалы, поэтому доли деления оцениваются «на глазок».

Погрешность такого отсчета составляет от 1 до 0,5 десятых долей деления, т. е. не превосходит половины цены деления шкалы. Как правило, *независимо от того, к какой отметке ближе лежит указатель, его показание следует округлить до ближайшего значения или среднего арифметического двух значений, в промежутке между которыми он находится.*

Погрешность отсчета принимается равной половине цены деления. Исключение составляют приборы, стрелка которых движется от штриха к штриху скачками, например, карманный секундомер, погрешность отсчета которого равна *цене деления* и составляет 0,2 с.

Цена деления равна диапазону шкалы (максимальному значению), деленному на число делений в данном диапазоне. Рассмотренная погрешность отсчета, связанная с округлением показания средства измерения, является случайной величиной и называется *погрешностью округления*. Погрешность отсчета возникает не только от округления показаний прибора, но и вследствие других причин, например, от *параллакса*.

Параллакс заключается в видимом смещении указателя шкалы, вызываемом изменением точки наблюдения. Для уменьшения погрешности, связанной, например, с параллаксом линейки, на краю линейки делают скос, кончики стрелки секундомера пригибают к шкале.

В стрелочных приборах для облегчения установки глаза применяют зеркальную шкалу. Отсчет производят тогда, когда стрелка прибора закроет собой свое изображение в зеркале. Погрешность от параллакса может быть случайной и систематической (например, если прибор постоянно находится сбоку от экспериментатора).

Общая погрешность складывается из *инструментальной погрешности, погрешности отсчета и случайной погрешности*. Систематическую погрешность средств измерения можно оценивать на основе классов точности.

Класс точности – это обобщенная характеристика средств измерения, выражаемая пределами допускаемых значений его основной и дополнительной погрешностей. Зная **класс точности прибора** γ , можно определить погрешность средств измерения:

$$\Delta x_{\text{си}} = \frac{\gamma \cdot X_N}{100}, \quad (4)$$

где x_N – нормирующее значение, принимается равным наибольшему из пределов значений для средств измерений с равномерной шкалой.

Пример: Для амперметра класса точности 0,5 с предельным значением 50 А абсолютная погрешность средства измерения (4) выразится как

$$\Delta x_{\text{си}} = \pm 50 \text{ А} \cdot \frac{0,5}{100} = \pm 0,25 \text{ А}.$$

Если на приборе не указан класс точности, то погрешность измерения принимается равной $\frac{1}{2}$ цены деления прибора. К таким приборам относятся штангенциркуль, термометр, барометр.

2.2. Оценка погрешностей прямых измерений

Как было сказано выше, в процессе определения физической величины могут присутствовать различные погрешности: методическая, погрешность средства измерения $\Delta x_{\text{си}}$, погрешности отсчета $\Delta x_{\text{о}}$, случайные погрешности $\Delta x_{\text{сл}}$ и т. д. (по возможности необходимо исключать погрешности или их учитывать). Полная абсолютная погрешность прямых измерений рассчитывается как погрешность для некоррелированных составляющих:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{си}}^2 + \Delta x_{\text{о}}^2 + \dots} \quad (5)$$

Различные составляющие погрешности необходимо сравнивать, так как они могут быть величинами разных порядков; тогда меньшей погрешностью можно пренебречь. При этом возможно следующее:

- случайные погрешности значительно (как минимум на порядок) превышают погрешности средств измерения и др., тогда $\Delta x = \Delta x_{\text{сл}}$;
- погрешности средств измерения заметно превышают случайные погрешности и др., тогда $\Delta x = \Delta x_{\text{си}}$;
- основным источником погрешностей являются погрешности средств измерения и случайные погрешности, тогда погрешность находят как

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{си}}^2}. \quad (6)$$

Результат измерения и его погрешность, как правило, зависит от большого количества факторов и в теории погрешностей рассматривается как случайная величина, к которой применимы законы теории вероятностей и

математической статистики. Универсальным способом описания случайных величин является нахождение интегральных или дифференциальных характеристик функций распределения. Наиболее часто используется дифференциальная функция плотности распределения вероятностей, имеющая *нормальный закон распределения* случайных величин x , часто называемый *распределением Гаусса*, который описывается функцией вида

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}},$$

где x_0 – математическое ожидание (центр тяжести кривой распределения); σ^2 – дисперсия генеральной совокупности; e – основание натуральных логарифмов.

На практике результаты измерений являются величинами дискретными и могут быть представлены рядом значений случайных величин: $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые называются *выборкой*.

Среднее арифметическое значение измеряемой величины $\bar{x}$ является оценкой математического ожидания и наиболее вероятной оценкой наблюдаемой величины по выборке и определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (7)$$

где n – число измерений, или длина выборки.

Среднее квадратичное отклонение серии измерений является наилучшей оценкой средней погрешности для x и определяется как корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Мера отклонения среднего значения $\bar{x}$ выборки от истинного значения измеряемой величины называется дисперсией среднего значения $\sigma_{\bar{x}}^2$ и находится по формуле

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}. \quad (8)$$

Величина $S_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2}$ называется среднеквадратичным отклонением среднего значения от истинного значения и определяется как

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma^2(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (9)$$

В практике измерений важно определить не только параметры распределения $\bar{x}$ и $\sigma_{\bar{x}}^2$, но и *доверительный интервал*, соответствующий доверительной вероятности P .

Надежность измерений (их достоверность) количественно определяется как *доверительная вероятность* попадания истинного значения измеряемой величины X_0 в доверительный интервал

$$(X_0 - \Delta x) \leq X_0 \leq (X_0 + \Delta x) ,$$

где Δx – абсолютная погрешность серии измерений. Доверительную вероятность P обычно задают в пределах 0,90; 0,95; 0,99. Расчет доверительных интервалов для случая нормального распределения результатов измерений при малом числе наблюдений n , проведенных в одинаковых условиях, можно выполнить по методике, предложенной Стьюдентом (*английский математик У. Госсет опубликовал результаты работы под псевдонимом Стьюдент*). Абсолютная случайная погрешность $\Delta x_{сл}$ тогда может быть рассчитана по методу Стьюдента следующим образом:

$$\Delta x_{сл} = t_{n,p} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (10)$$

где $t_{n,p}$ – коэффициент Стьюдента, зависит от заданного значения *доверительной вероятности* P и числа измерений n и находится из таблицы (табл. Г.1); $S_{\bar{x}}$ – вычисляется по формуле (9).

Коэффициент Стьюдента изменяется незначительно при числе $n > 6$, поэтому при технических измерениях для $P = 0,95$ число измерений может быть достаточным в пределах 6–10 измерений.

Определение случайной погрешности прямых измерений удобно выполнять, используя таблицу, в которую заносят результаты измерений, промежуточные вычисления и другие необходимые данные.

Алгоритм обработки результатов прямых измерений:

1. Записать во второй столбец табл. результаты серии многократных измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$. В первом столбце записывается порядковый номер измерения $i = 1, 2, \dots, n$.

Таблица

Результаты прямых измерений

i	x_i	Δx_i	Δx_i^2	P	$t_{p,n}$	S	$\bar{x}$	$\Delta x_{сл}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				0,95				
2								
...	...	...	...					
n								

2. Найти среднее арифметическое значение $\bar{x}$ измеряемой величины по формуле (7) и занести в восьмой столбец.

3. В третий столбец записать абсолютные погрешности отдельных измерений, которые находятся по формуле (1) $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.

4. В четвертый столбец занести квадраты значений абсолютных погрешностей отдельных измерений Δx_i^2 .

5. В пятый столбец занести значение доверительной вероятности (или надежности). Мы принимаем значение надежности 95 %, или $P = 0,95$.

6. Определить коэффициент Стьюдента $t_{p,n}$ с учетом заданной доверительной вероятности $P = 0,95$ и числа измерений n и занести в столбец 6.

7. Определить среднюю квадратичную погрешность среднего значения по формуле (9) и занести в седьмой столбец.

8. Вычислить абсолютную случайную погрешность серии n измерений $\Delta x_{\text{ср}}$ по формуле (10).

9. Сравнить абсолютную случайную погрешность серии измерений с другими погрешностями и найти полную абсолютную погрешность прямых измерений по формуле (5) или (6).

10. Определить верхнюю $(\bar{x} + \Delta x)$ и нижнюю $(\bar{x} - \Delta x)$ границы доверительного интервала.

11. Записать результат измерений в виде доверительного интервала

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x).$$

12. Определить относительную погрешность измерений в процентах

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} 100\% .$$

В результате измерений и вычислений получается не конкретное число, а интервал, внутри которого с вероятностью 0,95 находится истинное значение измеряемой величины.

Измеряемая величина может быть в любом месте интервала и с вероятностью 0,05 находиться вне его границ.

2.3. Оценка погрешностей косвенных измерений

2.3.1. Расчет погрешностей косвенных измерений по методу частных производных

Часто приходится находить физическую величину X , которая является функцией других величин: $X = f(y, z, \dots, v)$, где y, z, v – величины, определяемые прямыми измерениями. Например, определить сопротивление проводника R по данным прямых измерений его длины l и диаметра d .

Если величины y, z, v независимы, то погрешность косвенных измерений для случая n величин находится в общем виде по приближенной формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial X}{\partial z_i} \Delta z \right)^2}, \quad (11)$$

что позволяет получить вполне удовлетворительные оценки погрешности.

Если искомая величина $X = f(y, z)$ является известной функцией двух аргументов y, z , то формула (11) приобретает вид:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0^2 (\Delta z)^2}, \quad (12)$$

где $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ – частные производные функции $X = f(y, z)$, определяемые в области средних значений $\bar{y}, \bar{z}$; $\Delta y, \Delta z$ – погрешности прямых измерений величин y, z . Это метод разложения функции в ряд Тейлора с использованием свойства дисперсии суммы независимых случайных величин, или *метод частных производных*.

Каждая частная производная может быть найдена как производная функции $X = f(y, z)$ по одному из аргументов, если другие аргументы при этом рассматриваются как постоянные величины.

Пример: Рассчитать погрешность определения ускорения $|\vec{a}|$ по измерениям времени t и расстояния s . Расчетная формула: $a = 2s/t^2$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{2}{t^2} \quad \frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{4s}{t^3}.$$

Полная абсолютная погрешность из выражения (12) принимает вид

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{2\Delta s}{\bar{t}^2} \right)^2 + \left(-\frac{4s}{\bar{t}^3} \right)^2}.$$

Для численного определения абсолютной погрешности необходимо знать средние значения времени $\bar{t}$ и расстояния $\bar{s}$, а также их абсолютные погрешности.

Приведем некоторые правила, используемые при оценке погрешностей косвенных измерений:

- при сложении и вычитании абсолютные погрешности складываются;
- при умножении и делении относительные погрешности складываются;
- при возведении в степень и извлечении корня относительные погрешности умножаются на показатель степени;
- дисперсия суммы и разности величин равна сумме их дисперсий.

Надо помнить, что погрешность результата измерения всегда значительно меньше самого результата.

Если это условие не выполняется, то где-то закралась ошибка и опыт нужно провести заново.

2.3.2. Расчет погрешностей косвенных измерений по методу приращения функций и логарифмирования

Рассмотрим частные случаи определения погрешности косвенных измерений: метод приращений и метод логарифмирования.

Полная абсолютная погрешность косвенно измеряемой величины $X = f(y, z)$ равна $\Delta x = \sqrt{\Delta x_y^2 + \Delta x_z^2}$, где $\Delta x_y, \Delta x_z$ – полные абсолютные погрешности прямых измерений величин y, z , включающие погрешности средств измерения и случайные погрешности.

Если воспользоваться выражением для относительной погрешности в виде $\varepsilon = \Delta x / \bar{x}$ и подставить в него Δx из формулы (9), то, учитывая, что $\frac{1}{x} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial \ln X}{\partial y}$, $\frac{1}{x} \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial \ln X}{\partial z}$, относительная погрешность будет определяться по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln X}{\partial y}\right)_0^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial \ln X}{\partial z}\right)_0^2 (\Delta z)^2}, \quad (13)$$

а абсолютная погрешность – по формуле

$$\Delta X = \bar{X} \sqrt{\left(\frac{\partial \ln X}{\partial y}\right)_0^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial \ln X}{\partial z}\right)_0^2 (\Delta z)^2}. \quad (14)$$

Здесь частные производные функции $X = f(y, z)$ определяют также в области средних значений $\bar{y}, \bar{z}$. Метод логарифмирования функции подходит, если она имеет удобный для логарифмирования вид, например, когда измеряемая величина может быть представлена в виде степенной функции:

$$X = f(y, z) = c \cdot y^a \cdot z^b.$$

Здесь показатели степени a, b и c могут принимать как целые, так и дробные значения, относительная погрешность измерения X будет иметь вид

$$\varepsilon_x = \sqrt{a^2 \varepsilon_y^2 + b^2 \varepsilon_z^2}, \quad (15)$$

где $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ – относительные погрешности измерения величин y, z .

Пример: Используем метод логарифмирования для примера, приведенного выше. Прологарифмировав функцию $a = 2s/t^2$, получим: $\ln a = \ln 2 + \ln s + 2 \cdot \ln t$. Найдем частные производные по (s) и (t) :

$$\frac{\partial \ln a}{\partial s} = \frac{1}{s} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \ln a}{\partial t} = \frac{2}{t},$$

подставим в формулу (9) и найдем относительную погрешность

$$\varepsilon_a = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{\bar{s}^2} + \frac{4\Delta t^2}{\bar{t}^2}} = \sqrt{\varepsilon_s^2 + 4\varepsilon_t^2},$$

абсолютная погрешность выразится как

$$\Delta a = \bar{a} \cdot \varepsilon_a,$$

где $\bar{a}$ определяется путем подстановки средних значений времени и расстояния или по формуле (7).

2.3.3. Алгоритм обработки результатов косвенных измерений

1. Выполнить прямые однократные или многократные измерения и найти средние значения аргументов $\bar{y}, \bar{z}$.

2. Найти среднее значение искомой величины как $X = f(\bar{y}, \bar{z})$ или по формуле (3).

3. Определить абсолютные погрешности каждого аргумента с учетом систематических и случайных погрешностей, применяя метод обработки прямых измерений при одинаковой доверительной вероятности $P = 0,95$.

4. Найти полную абсолютную погрешность функции Δx , применяя метод частных производных (формула (12)) или метод логарифмирования (формула (14)), если функция удобна для логарифмирования.

5. Найти относительную погрешность ε_x .

6. Записать окончательный результат в виде $x = (\bar{x} \pm \Delta x)$.

Таблица для нахождения абсолютных и относительных погрешностей косвенных измерений приведена в приложении (см. табл. А).

Список литературы:

1. Зайдель А.Н. Погрешности измерения физических величин / А.Н. Зайдель. – Л. : Наука, 2010. – 108 с.
2. СТО ИрГТУ. 005-2007. Учебно-методическая деятельность. Общие требования к оформлению текстовых и графических работ студентов.
3. СТО ИРНИТУ 027-2015. Учебно-методическая деятельность. Общие требования к организации и проведению лабораторных работ.
4. Щепин В. И. Физика : лабораторный практикум / В.И. Щепин, 2017. -131 с.

Таблица А

Абсолютные и относительные погрешности косвенных измерений

Математическая операция	Погрешность	
	Абсолютная, $\Delta x, \Delta y$	Относительная, ε
$x+y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$x-y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
xy	$y\Delta x + x\Delta y$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
x/y	$\frac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
x^n	$nx^{n-1} \cdot \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x$	$\frac{1}{n} \frac{\Delta x}{x}$
$\frac{x}{1 \pm x}$	$\frac{\Delta x}{(1 \pm x)^2}$	$\frac{\Delta x}{x(1 \pm x)}$
e^x	$e^x \Delta x$	Δx
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$
$\sin x$	$\cos x \Delta x$	$ctgx \cdot \Delta x$
$\cos x$	$\sin x \Delta x$	$tgx \cdot \Delta x$
tgx	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 \Delta x}{\sin^2 x}$
$ctgx$	$\frac{\Delta x}{\sin^2 x}$	$\frac{2 \Delta x}{\sin^2 x}$