

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф И З И К А



Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения
инженерно-технических специальностей



ИРКУТСК - 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф И З И К А



Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения
инженерно-технических специальностей

Издательство Иркутского государственного
технического университета
2012

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3я 73

Ф 50

Рецензенты:

д-р. хим. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Иркутского
института химии им. А.Е. Фаворского СО РАН - А.В. Афонин,
канд. техн. наук, доцент кафедры общеобразовательных
дисциплин ИрГТУ - Ю. Э. Голодков

Авторы:

**Щепин В.И., Кузнецова С.Ю., Герман Л.А., Сомина Л.А.,
Павлова Т.О.**

**Физика: Учеб. пособие для студентов заочной формы обучения. –
Иркутск: Изд-во ИрГТУ.- 2012. - 224 с.**

Пособие включает: краткие теоретические сведения из курса общей физики для бакалавров и методические указания по выполнению контрольных работ, контрольные задания и лабораторные работы.

Пособие состоит из пяти частей и приложения. В первых четырёх частях приведены контрольные задания № 1–4 с таблицами, теория и примеры решения задач из различных разделов физики. В пятой части – лабораторный практикум.

Предназначено для студентов заочно - вечерней форм обучения вузов, а также может быть использовано студентами дневной и вечерней форм обучения инженерно-технических специальностей с использованием дистанционных технологий.

Коллектив авторов, 2012

© Иркутский государственный технический
университет, 2012

Виктор Иванович Щепин

Светлана Юрьевна Кузнецова

Людмила Арсентьевна Сомина

Людмила Александровна Герман

Татьяна Олеговна Павлова

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
Методические указания по выполнению контрольных работ.....	6
Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика.	9
Основные понятия и формулы.....	9
Примеры решения задач.....	20
Контрольная работа №1.....	46
Электростатика. Постоянный электрический ток.....	65
Основные понятия и формулы.....	65
Примеры решения задач.....	72
Контрольная работа №2.....	81
Магнетизм. Волновая оптика.....	93
Основные понятия и формулы.....	93
Примеры решения задач.....	98
Контрольная работа №3.....	112
Оптика. Элементы атомной и ядерной физики, квантовой механики.....	121
Основные понятия и формулы.....	121
Примеры решения задач.....	124
Контрольная работа №4.....	135
Лабораторный практикум.....	142
Подготовка, выполнение и оформление отчёта.....	142
Оценка погрешностей лабораторных измерений	146

Лабораторная работа 1.1. Математический маятник.....	158
Лабораторная работа 1.2. Определение ускорения свободного паде- ния с помощью физического маятника.....	166
Лабораторная работа 1.3. Определение скорости полета пули с помощью баллистического маятника.....	171
Лабораторная работа 1.4. Проверка основного закона динамики вращательного движения.....	175
Лабораторная работа 2.1. Определение коэффициента динамиче- ской вязкости жидкости методом Стокса.....	179
Лабораторная работа 2.2. Определение отношения теплоемкостей газов.....	185
Лабораторная работа 3.1. Исследование электростатического поля двух точечных зарядов.....	189
Лабораторная работа 3.2. Определение заряда электрона из законов Фарадея.....	194
Лабораторная работа 3.3. Определение неизвестных сопротивлений при помощи мостовой схемы.....	197
Лабораторная работа 3.4. Определение ёмкости конденсатора при помощи баллистического гальванометра.....	204
Лабораторная работа 3.5. Исследования цепи постоянного тока...	210
Библиографический список.....	214
Приложение.....	215
Приложение А Таблицы 1-14.....	215
Приложение Б. Образец оформления контрольной работы.....	219
Приложение В. Образец выполнения лабораторной работы и написание отчёта.....	220
Приложение В. Пример расчёта погрешностей косвенных измере- ний.....	224

ВВЕДЕНИЕ

Физика одна из самых важных наук, которая является фундаментом для всех инженерных дисциплин. На знаниях и умениях по физике выстраиваются курсы общеинженерных и специальных дисциплин. Поэтому программа курса физики включает не только теоретический материал (лекции), но и его применение в лабораторном практикуме и решении задач.

Процесс приобретения знаний студентами заочной формы обучения обладает определенной спецификой. Имеющиеся учебные пособия по курсу общей физики ориентированы, главным образом, на каждодневное общение преподавателя и студента. Отсутствие такой возможности обуславливают необходимость более детального и упрощенного изложения материала. В особенности это касается методических указаний к решению задач, в которых в предельно ясной форме должен быть изложен алгоритм решения. Кроме того, необходимо, чтобы такие пособия были снабжены различными вариантами контрольных работ, помогающими овладеть разнообразными приемами решения.

Настоящее учебное пособие ориентировано на помощь студентам – заочникам при самостоятельной работе и содержит типовые примеры решения задач по основным разделам общей физики: классической механике, колебаниям, молекулярной физике и термодинамике, гидродинамике, электростатике и постоянному электрическому току и электромагнетизму, оптике, атомной и ядерной физике, квантовой механике. Для облегчения понимания примеров решения задач каждый раздел пособия предварен изложением основных теоретических понятий и физических формул.

Материал курса физики разделён на четыре контрольные работы. Даны таблицы вариантов контрольных работ, выполняемых при самостоятельном решении. Особые требования, связанные со спецификой изучения курса физики по направлениям подготовки и специальностям, сообщаются студентам на установочных занятиях.

Общие методические указания к решению задач и оформлению контрольных работ

Решение задач. Систематическое решение задач - необходимое условие успешного изучения курса физики. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти формулы, прививает навыки практического применения теоретических знаний.

При решении задачи необходимо выполнить следующее:

1. **Указать основные законы и формулы, на которых базируется решение, и дать словесную формулировку этих законов, разъяснить буквенные обозначения формул.** Если при решении задач применяется формула, полученная для частого случая, не выражающая какой-нибудь физический закон, или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.

2. **Выполнить чертеж, поясняющий содержание задачи** (в тех случаях, когда это возможно); выполнять его надо аккуратно при помощи чертежных принадлежностей.

3. Решение задачи сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями.

4. **Решить задачу в общем виде**, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи и взятых из таблицы. Физические задачи весьма разнообразны, и дать единый рецепт их решения невозможно. Однако, как правило, их следует решать в общем виде. При этом способе **не производятся вычисления промежуточных величин; числовые значения подставляются только в окончательную формулу**, выражающую искомую величину.

5. Подставить в рабочую формулу размерности или обозначения единиц и убедиться в правильности размерности искомой величины или ее единицы.

6. **Выразить все величины, входящие в рабочую формулу, в единицах СИ.**

7. **Подставить в окончательную формулу**, полученную в результате решения задачи в общем виде, **числовые значения, выраженные в единицах одной системы.** Несоблюдение этого правила приводит к неверному результату. Исключение из этого правила допускается лишь для тех однородных величин, ко-

которые входят в виде сомножителей в числитель и знаменатель формулы одинаковыми показателями степени. Такие величины необязательно выражать в единицах той системы, в которой ведется решение задачи. Их можно выразить в любых, но только одинаковых единицах.

8. Произвести вычисление величин, подставленных в формулу, руководствуясь правилами приближенных вычислений, записать в ответе числовое значение и сокращенное наименование единицы измерения искомой величины.

9. При подстановке в рабочую формулу, а также при записи ответа числовые значения величин записать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3,52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1,29 \cdot 10^{-3}$ и т. д.

10. Оценить, где это является целесообразным, правдоподобность численного ответа. В ряде случаев такая оценка поможет обнаружить ошибочность полученного результата. Например, коэффициент полезного действия тепловой машины не может быть больше единицы, электрический заряд не может быть меньше элементарного заряда $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме.

Умение решать задачи приобретает длительными и систематическими упражнениями. Чтобы научиться решать задачи и подготовиться к выполнению контрольной работы, следует после изучения очередного раздела учебника внимательно разобрать примеры решения типовых задач из задачников по физике и пособия (3,4,7). Задачи для самостоятельного решения подобраны так, что содержат элементы задач, предлагаемых для контрольных работ. Поэтому решение задач из раздела «Примеры решения задач» подготавливают студента к выполнению контрольной работы.

Выполнение и оформление контрольных работ.

Выполнение контрольных работ студентом и рецензирование их преподавателем преследует две цели: во-первых, осуществление университетом контроля работы студента; во-вторых, оказание ему помощи в вопросах, слабо усвоенных или непонятных. К выполнению контрольных работ по каждому разделу курса физики студент-заочник приступает только после изучения материала, соответ-

ствующего данному разделу программы, внимательного ознакомления с примерами и после решения задач, предназначенных для самостоятельного решения, приведенных в данном пособии по каждому разделу курса.

При выполнении и оформлении контрольных работ студенту необходимо руководствоваться следующим:

1. Контрольные работы выполняются самостоятельно. Замена какой-либо контрольной работы другой, взятой из аналогичного пособия или другой вариант - не допускается.

2. Номера задач, которые студент должен включить в контрольную работу, определяется по таблицам вариантов. Номер варианта контрольных заданий направления (специальности) соответствует последней цифре зачётной книжки студента. Контрольные работы выполняются в обычной школьной тетради.

4. **Условия задач переписываются полностью без сокращений.** Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставляются поля. Каждая следующая задача должна начинаться с новой страницы.

5. **Решения задач должны сопровождаться исчерпывающими, но краткими объяснениями,** раскрывающими физический смысл употребляемых формул.

6. В конце контрольной работы необходимо указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания).

7. Контрольная работа передаётся ведущему преподавателю (экзаменатору) в начале экзаменационной сессии. **Студент должен быть готов дать во время экзамена пояснения по существу решения задач, входящих в его контрольную работу.**

8. На лицевой стороне тетради (на обложке) приводятся сведения по образцу приведённому в приложении Б (стр. 224).

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Основные понятия и формулы

Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Траектория – геометрическое место точек, последовательно занимаемых движущимся телом, т.е. траектория – это некоторая линия.

Путь – физическая величина, численно равная длине траектории.

Радиус-вектор $\vec{r}$ некоторой точки – это вектор, проведенный из начала координат в данную точку.

Его проекции на координатные оси равны декартовым координатам данной точки

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z.$$

Радиус-вектор $\vec{r}$ можно представить в виде

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты осей Ox, Oy, Oz .

Модуль радиус-вектора r равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Перемещение $\Delta\vec{r}$ – это вектор, соединяющий начальное положение точки с последующим:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Скорость перемещения – это векторная величина, равная перемещению тела за единицу времени:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Средняя путевая скорость – это пройденный телом путь за единицу времени:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt . Путь Δs в отличие от разности координат $\Delta x = x_2 - x_1$ не может убывать и принимать отрицательные значения, то есть $\Delta s \geq 0$.

Проекция **мгновенной скорости** на оси координат

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Ускорение – это физическая величина, равная изменению скорости за единицу времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Проекция **среднего ускорения** на ось Ox

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Проекция **мгновенного ускорения** на оси координат

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Уравнения равнопеременного поступательного движения

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t.$$

Модуль угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

где φ – угол поворота при вращательном движении твердого тела.

Модуль углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Уравнения равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t.$$

Для криволинейного движения материальной точки вводятся понятия нормального a_n и тангенциального a_τ ускорений

Нормальное ускорение определяет изменение скорости по направлению и

равно
$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad \text{или} \quad a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Тангенциальное ускорение определяет изменение скорости по модулю

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Связь между модулями линейных и угловых величин, характеризующих движение точки по окружности

$$v = \omega \cdot R, \quad a = \varepsilon \cdot R,$$

где v – модуль линейной скорости; a_τ и a_n – модули тангенциального и нормального ускорений; ω – модуль угловой скорости; ε – модуль углового ускорения; R – радиус окружности.

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad \text{или} \quad a = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Кинематическое уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где x – смещение от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$v = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \quad a = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

а) амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

б) начальная фаза результирующего колебания

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2}$$

Траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos(\omega t + \varphi):$$

а) $y = \frac{A_2}{A_1} \cdot x$, если разность фаз $\varphi = 0$;

б) $y = -\frac{A_2}{A_1} \cdot x$, если разность фаз $\varphi = \pm\pi$;

в) $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$, если разность фаз $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Уравнение плоской бегущей волны

$$y = A \cdot \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

где y – смещение от положения равновесия любой из точек среды с координатой x в момент времени t , v — скорость распространения колебаний в среде.

Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с расстоянием Δx между точками среды, отсчитанным в направлении распространения колебаний

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x,$$

где λ – длина волны.

Импульс материальной точки массой m , движущейся со скоростью $\vec{v}$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Второй закон Ньютона

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{рез}}}{m},$$

где $F_{\text{рез}}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Силы, рассматриваемые в механике:

а) **сила упругости**

$$\vec{F} = -k\vec{x},$$

где k – коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость); x – абсолютная деформация;

б) сила тяжести

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

в) сила гравитационного взаимодействия

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 — массы взаимодействующих тел; r – расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки).

г) сила трения скольжения

$$F = \mu \cdot N,$$

где μ – коэффициент трения; N — сила нормального давления.

Закон сохранения импульса

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const},$$

для двух тел ($i = 2$)

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2,$$

где $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – скорости тел в момент времени, принятый за начальный; $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ – скорости тех же тел в момент времени, принятый за конечный.

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно

$$W_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \text{или} \quad W_k = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенциальная энергия:

а) упруго деформированной пружины

$$W_p = \frac{1}{2} kx^2,$$

где k – жесткость пружины; x – абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия

$$W_p = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между ними (тела рассматриваются как материальные точки);

в) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$W_p = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения; h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h \ll R$, где R – радиус Земли).

Закон сохранения механической энергии

$$W = W_k + W_p = \text{const.}$$

Работа A , совершаемая результирующей силой, определяется как мера изменения кинетической энергии материальной точки:

$$A = \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси z

$$M_z = I_z \cdot \varepsilon,$$

где M_z – результирующий момент внешних сил относительно оси z , действующих на тело; ε – угловое ускорение; I_z — момент инерции относительно оси вращения.

Моменты инерции некоторых тел массой m относительно оси z :

а) стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню, и проходящей через его середину

$$I_z = \frac{1}{12} m \cdot l^2;$$

б) обруча радиусом R (тонкостенного цилиндра) относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча и совпадающей с его осью

$$I_z = m \cdot R^2;$$

в) диска радиусом R относительно оси, перпендикулярной плоскости диска, и проходящей через его центр

$$I_z = \frac{1}{2} m \cdot R^2.$$

Проекция на ось z **момента импульса** тела, вращающегося относительно неподвижной оси z ,

$$L_z = I_z \cdot \omega,$$

где ω – угловая скорость тела.

Закон сохранения момента импульса системы тел, вращающихся вокруг неподвижной оси z

$$\sum_{i=1}^N L_i = \text{const}, \quad I_z \cdot \omega = \text{const},$$

где I_z – момент инерции системы тел относительно оси z ; ω – угловая скорость вращения тел системы вокруг оси z .

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z

$$W_k = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2 = \frac{L_z^2}{2I_z}.$$

Уравнение состояния идеальных газов для данной массы газа (уравнение Клапейрона–Менделеева)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ или } pV = \nu RT,$$

где m – масса газа; μ – молярная масса; $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная

газовая постоянная; $\nu = \frac{m}{\mu}$ – количество вещества (число молей); T – термодинамическая температура; p – давление газа; V – объем газа.

Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

где p – давление смеси газов; p_i – парциальное давление i -го компонента смеси. Парциальное давление – это давление i -го компонента смеси газа, если бы компонент смеси занимал весь объем.

Уравнения изопроцессов:

а) для изотермического процесса $pV = \text{const}$, или $p_1 V_1 = p_2 V_2$;

б) для изохорического процесса $\frac{p}{T} = \text{const}$, или $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$;

в) для изобарического процесса

$$\frac{V}{T} = const, \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Уравнения адиабатного процесса

$$pV^\gamma = const, \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma;$$

$$T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const, \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}};$$

$$TV^{\gamma-1} = const, \quad \text{или} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}.$$

Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; m_0 – масса одной молекулы;

μ – молярная масса газа.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = nkT,$$

где $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул, т.е. число молекул в единице объема..

Связь между молярной (C) и удельной (c) теплоемкостями газа

$$C = c\mu.$$

Молярные теплоемкости газа

при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2} \cdot R,$

при постоянном давлении $C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R,$

где i – число степеней свободы - число независимых координат, которыми задается положение молекулы в пространстве.

Для одноатомного газа $i = 3$ (поступательные степени свободы),
 для двухатомного газа $i = 5$ (три поступательные степени свободы и две вращательные),
 для многоатомного газа $i = 6$ (три поступательные степени свободы и три вращательные).

Уравнение Майера

$$C_p = C_v + R$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T.$$

Работа газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

- а) для изобарного процесса $A = p \Delta V$;
- б) для изохорного процесса $A = 0$;
- в) для изотермического процесса $A = \frac{m}{\mu} \cdot RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$;
- г) для адиабатного процесса $A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} \cdot C_v \Delta T.$

Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу, ΔU – изменение его внутренней энергии, A – работа, совершаемая газом:

- для изобарного процесса $Q = \Delta U + A = \frac{m}{\mu} \cdot C_v \Delta T + p \Delta V$;
- для изохорного процесса ($A = 0$) $Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot C_v \Delta T$;
- для изотермического процесса ($\Delta U = 0$) $Q = A = \frac{m}{\mu} \cdot RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$;
- для адиабатного процесса ($Q = 0$) $A + \Delta U = 0$

Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла

$$\text{КПД} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя, Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю, A – работа, совершаемая рабочим телом.

КПД цикла Карно

$$\text{КПД} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура охладителя.

Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

где A и B – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состоянию системы.

Механика жидкостей

Идеальная жидкость – жидкость, которая, в отличие от *реальной (вязкой)* жидкости, несжимаема под действием давления, не изменяет плотности при изменении температуры и не обладает вязкостью.

Плотность (ρ) это масса (m) единицы объёма (V) жидкости

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Давление жидкости – физическая величина, равная отношению нормальной силы, действующей со стороны жидкости на единицу площади

$$P = \Delta F / \Delta S$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости: произведение скорости течения несжимаемой жидкости на любое поперечное сечение есть величина постоянная для данной трубы

$$S_1 v_1 = S_2 \cdot v_2, \text{ или } S v = \text{const}$$

где S - площадь поперечного сечения трубы (потока); v - скорость жидкости в сечении.

Установившееся (стационарное) течение – течение жидкости, при котором значения скоростей и их направления в каждой точке течения со временем не изменяются.

Гидростатическое давление – давление, обусловленное силой тяжести и зависящее от высоты столба жидкости

$$p = \rho gh$$

где ρ – плотность жидкости, h – высота столба жидкости.

Закон (принцип) Бернулли: давление жидкости, текущей в трубе, больше в тех частях трубы, где скорость ее движения меньше, и наоборот, в тех частях, где скорость больше, давление меньше. Или, сумма статического давления жидкости p для данного сечения трубы, и динамического давления жидкости ($\rho v^2/2$) для этого же сечения в стационарном потоке (течении) остается постоянной и соответствует гидростатическому давлению ρgh в покоящейся жидкости и выражает **закон сохранения механической энергии** применительно к установившемуся течению идеальной жидкости и называется **Уравнением Бернулли для стационарного течения идеальной жидкости:**

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = const$$

где p – статическое давление жидкости, v – скорость течения жидкости, $\rho v^2/2$ – динамическое давление жидкости, h – высота, на которой расположено сечение.

Скорость вытекающей жидкости из малого отверстия в широко открытом сосуде зависит от высоты столба жидкости h над отверстием и определяется по формуле Торричелли

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Примеры решения задач

Кинематика

Задача 1.1а. С крыши дома, высота которого 20 м от основания, бросают вертикально вверх тело, начальная скорость которого 19,6 м/с. Определить, максимальную высоту подъёма тела, через сколько секунд от начала движения оно упадёт на Землю, его скорость в момент касания и пройденный путь за это время.

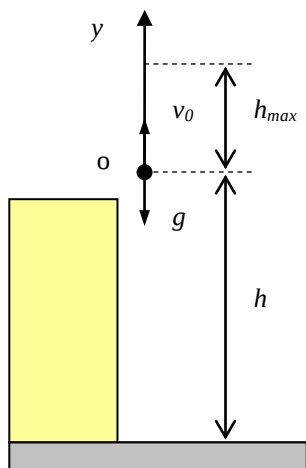


Рис.1

Дано: $h = 20 \text{ м}; v_0 = 19,6 \text{ м/с}; g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Найти: $h_{\max} = ?; \Delta t = ?; v_k = ?; S = ?$.

Решение. Выберем положительное направление координатной оси Оу вверх и совместим начало координат О с точкой бросания тела, рис 1.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного поступательного движения

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t,$$

и запишем уравнения для координаты y и скорости v от времени

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}; \quad v = v_0 - gt. \quad \text{Так как тело, брошенное вертикально вверх с началь-$$

ной скоростью v_0 на максимальной высоте $h_{\max}$ будет иметь скорость $v=0$, а в момент возвращения его в исходную точку равную по модулю начальной скорости $|\vec{v}_i| = |\vec{v}_0|$, если сопротивление воздуха не учитывать. Выразим время из урав-

нения для скорости $t = v_0/g$ и подставим в уравнение для координаты и получим максимальную высоту подъёма тела через его начальную скорость $h_{\max} = v_0^2/2g$.

Подставим численные значения для нахождения максимальной высоты подъёма $h_{\max} = 19,6^2 / 2 \cdot 9,8 = 19,6 \text{ м.}$, и времени подъёма $t = 19,6/9,8 = 2 \text{ с.}$ Тело вернётся в исходную точку бросания через 4 с и пройдёт путь 39,2 м. Зависимость координаты и скорости тела в этот момент будут иметь вид

$$-20 = -19,6 \cdot t - 9,8 \cdot t^2 / 2; \quad v_k = -19,6 - 9,8 \cdot t.$$

Решим квадратное уравнение и найдём время падения тела с высоты дома $t = 0,84 \text{ с}$ и скорость тела в момент касания Земли $v_k = -27,83 \text{ м/с}^2$. Полное время

от момента бросания до момента касания Земли $\Delta t = 4,84$ с., а пройденный путь $S = 2h_{\max} + h$; $S = 39,2 + 20 = 59,2$ м.

Ответ: $h_{\max} = 19,6$ м; $\Delta t = 4,84$ с; $v_k = -27,83$ м/с²; $S = 59,2$ м.

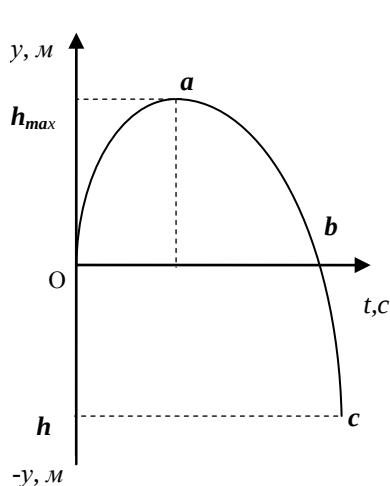


Рис.2

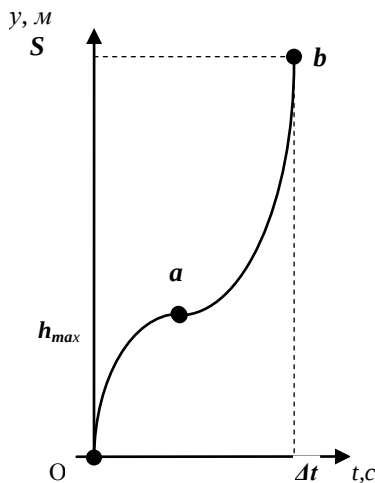


Рис.3

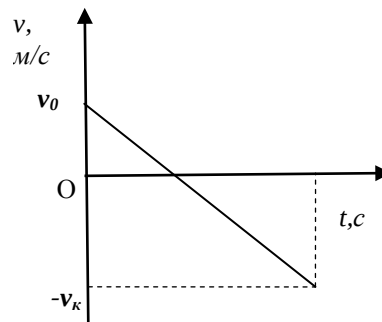


Рис.4

На рис.2 представлен график зависимости координаты от времени $y=y(t)$, на участке (oa) движение *равнозамедленное* и *равноускоренное* на участке (abc). Графики зависимости пути и скорости в условиях данной задачи от времени $S=S(t)$ представлены на рис.3 и 4.

Задача 1.16. Диск радиусом $R = 1$ см вращается так, что зависимость угла поворота φ радиуса диска от времени дается уравнением $\varphi = At + Bt^4$, где $A = 5$ рад/с, $B = 1$ рад/с⁴. В момент времени $t = 2$ с определить: 1) угловую скорость ω диска; 2) угловое ускорение ϵ диска; 3) нормальное a_n , тангенциальное a_τ и полное a ускорения точек, лежащих на ободе диска, а также их скорость v .

Решение. 1. Угловую скорость найдем, взяв первую производную от углового перемещения φ по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = A + 4Bt^3 \quad (1)$$

$$\omega = 5 + 4 \cdot 2^3 = 37 \text{ рад/с.}$$

2. Угловое ускорение – первая производная от угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 12 B t^2 \quad (2)$$

$$\varepsilon = 12 \cdot 1 \cdot 2^2 = 48 \text{ рад/с}^2$$

3. Модули тангенциального и нормального ускорения выражаются формулами:

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R.$$

$$a_n = 37^2 \cdot 0,01 = 13,69 \text{ м/с}^2$$

$$a_\tau = 48 \cdot 0,01 = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение точки, движущейся по криволинейной траектории, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального и нормального ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Так как векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ взаимно перпендикулярны,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad a = \sqrt{13,69^2 + 0,48^2} = 13,7 \text{ м/с}^2.$$

4. Скорость точек, лежащих на ободе диска, $v = \omega R$,

$$v = 37 \cdot 0,01 = 0,37 \text{ м/с}.$$

Задача 1.1в. Движение материальной точки по криволинейной траектории задано уравнениями $x = A + Bt^2$, $y = Ct$, где $A = 1 \text{ м}$, $B = 4 \text{ м/с}^2$, $C = 8 \text{ м/с}$. Найти: 1) скорость точки и ее полное ускорение в момент времени $t = 2 \text{ с}$; 2) уравнение траектории.

Решение. 1. Проекции мгновенной скорости точки – первые производные от соответствующих координат по времени: $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$.

$$v_x = 2Bt; \quad v_y = C.$$

$$\text{Скорость точки} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad v = \sqrt{4B^2 t^2 + C^2},$$

$$v = \sqrt{4 \cdot 4^2 \cdot 2^2 + 8^2} = 17,89 \text{ м/с}.$$

2. Ускорения a_x и a_y найдем, взяв первую производную от скоростей v_x и v_y по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt};$$

$$a_x = 2B; \quad a_y = 0.$$

$$\text{Полное ускорение точки} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_x;$$

$$a = 2B, \quad a = 2 \cdot 4 = 8 \text{ м/с}^2.$$

3. Уравнение траектории – это уравнение

зависимости координаты y от координаты x .

По условию задачи $x = A + Bt^2$, (1)

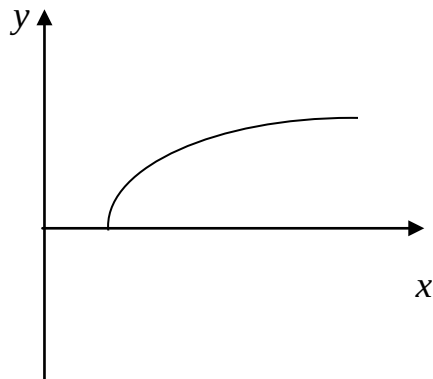
$$y = Ct \quad (2)$$

Из (1) $t = \sqrt{\frac{x-A}{B}}$. (3)

Подставив (3) в (2) получим:

$$y = C \cdot \sqrt{\frac{x-A}{B}},$$

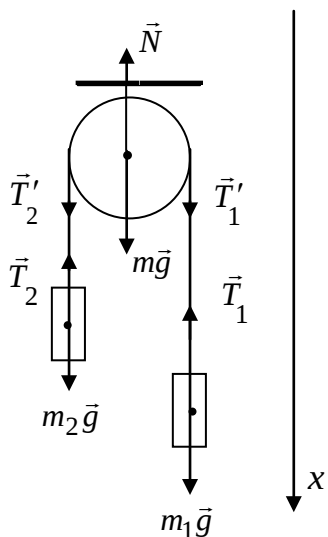
$$y = 8 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{4}} \text{ - уравнение параболы, функция определена при } x \geq 1.$$



Динамика

Задача 1.2а. Через блок массой m перекинута невесомая, нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 и m_2 . Определить ускорения, с которыми будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе, трением в оси блока пренебречь.

Решение. На каждый из грузов действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения (упругости) нити $\vec{T}$.



Направим ось x вертикально вниз и запишем динамические уравнения поступательного движения грузов в проекциях на эту ось.

Для первого груза:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1. \quad (1)$$

Для второго груза:

$$-m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \quad (2)$$

Движение блока описывается основным законом динамики вращательного движения:

$$I \cdot \varepsilon = \Sigma M, \quad (3)$$

где ε – угловое ускорение блока; ΣM – сумма моментов сил, действующих на блок; I – момент инерции блока.

Блок принять за однородный диск, его момент инерции

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (4)$$

Момент силы – произведение силы на плечо. Плечо – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Так как сила тяжести и сила реакции опоры проходит через ось вращения (центр масс) блока, их моменты сил равны нулю: $M_{mg} = M_N = 0$.

Моменты сил натяжения нити T_1' и T_2' :

$$M_{T_1'} = T_1' \cdot R; \quad (5)$$

$$M_{T_2'} = -T_2' \cdot R. \quad (6)$$

Подставим (4), (5), (6) в (3).

$$\begin{aligned} \frac{mR^2}{2} \cdot \varepsilon &= T_1' \cdot R - T_2' \cdot R \\ \frac{mR}{2} \cdot \varepsilon &= T_1' - T_2'. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно третьему закону Ньютона $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$, с учетом этого перепишем уравнение (7)

$$\frac{mR}{2} \cdot \varepsilon = T_1 - T_2. \quad (8)$$

Поскольку грузы связаны нерастяжимой нитью, модули их ускорений будут одинаковы $a_1 = a_2 = a$; $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

Подставим последние выражения в формулы (1), (2) и (8)

$$m_1 a = m_1 g - T_1 \quad (9)$$

$$m_2 a = -m_2 g + T_2 \quad (10)$$

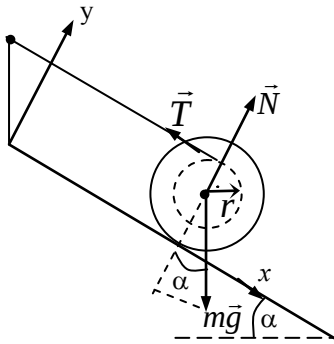
$$\frac{mR}{2} \frac{a}{R} = T_1 - T_2. \quad (11)$$

Сложим уравнения (9), (10) и (11).

$$a \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2} \right) = m_1 g - m_2 g, \quad \text{откуда}$$

$$a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)}.$$

Задача 1.26. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплен, как показано на рисунке. Масса катушки m , ее момент инерции относительно собственной оси I , радиус намотанного слоя ниток r . Найти ускорение оси катушки.



Решение. На катушку действуют силы тяжести $m\vec{g}$, натяжения нити $\vec{T}$ и реакции опоры $\vec{N}$. Так как поверхность гладкая, сила трения равна нулю.

Катушка участвует в двух движениях – поступательном и вращательном.

Уравнение движения центра масс катушки в векторной форме:

$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T},$$

или в проекциях на оси координат:

$$x: \quad ma_c = mgsin\alpha - T \quad (1)$$

$$y: \quad 0 = -mgcos\alpha + N. \quad (2)$$

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I \cdot \varepsilon = \Sigma M, \quad (3)$$

где I – момент инерции катушки; ε – угловое ускорение катушки, равное

$$\varepsilon = \frac{a_c}{r}; \quad (4)$$

ΣM – сумма моментов сил, действующих на катушку, равная моменту силы натяжения нити $\Sigma M = T \cdot r$ (5)

(моменты силы тяжести и силы реакции опоры равны нулю).

Подставим (4) и (5) в (3)

$$I \cdot \frac{a_c}{r} = T \cdot r. \quad (6)$$

Из (1) $T = mgsin\alpha - ma_c$.

Подставим последнее равенство в (6):

$$I \cdot \frac{a_c}{r^2} = mgsin\alpha - ma_c$$

$$a_c \left(\frac{I}{r^2} + m \right) = mgsin\alpha$$

$$a_c = \frac{mg \sin \alpha}{\left(\frac{I}{r^2} + m \right)}.$$

Задача 1.2в. За какое время t тело скатится с наклонной плоскости высотой $h = 2$ м и углом наклона $\alpha = 45^\circ$, если предельный угол, при котором тело может находиться в покое $\beta = 30^\circ$?

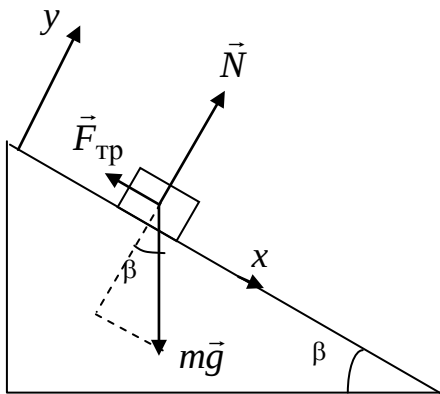


Рис. 1

Решение. Если тело находится на плоскости в покое, сумма всех действующих на него сил равна нулю, рис. 1

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} = 0. \quad (1)$$

Найдем проекции уравнения (1) на оси x и y :

$$x: \quad 0 + mg\sin\beta - F_{тр} = 0 \quad (2)$$

$$y: \quad N - mg\cos\beta = 0. \quad (3)$$

В предельном случае сила трения покоя максимальна и равна силе трения скольжения:

$$F_{тр} = \mu N. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (2), (3), (4) получим коэффициент трения

$$\mu = \operatorname{tg}\beta. \quad (5)$$

Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося с наклонной плоскости, рис. 2:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр}. \quad (6)$$

Найдем проекцию уравнения (6) на оси координат x и y :

$$x: \quad ma = mgsin\alpha - F_{тр}, \quad (7)$$

$$y: \quad 0 = -mg\cos\alpha + N, \quad (8)$$

$$F_{тр} = \mu N. \quad (9)$$

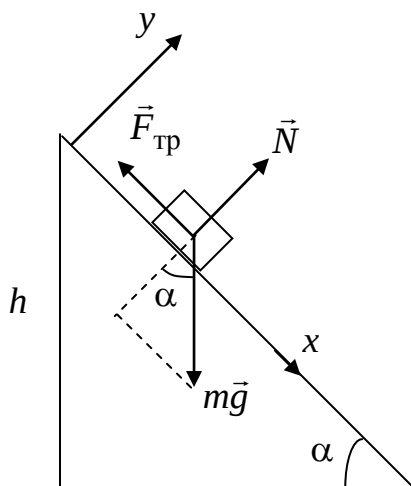


Рис. 2

Решая систему уравнений (7), (8), (9), с учетом (5) получим выражение для ускорения:

$$a = g(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta \cos\alpha). \quad (10)$$

Путь, пройденный телом при равноускоренном движении без начальной скорости

$$S = \frac{at^2}{2}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2S}{a}};$$

$$\text{из рис. 2 } S = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad \text{тогда } t = \sqrt{\frac{2h}{a \sin\alpha}}. \quad (11)$$

Подставим (10) в (11) и получим искомое время

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta \cos\alpha) \sin\alpha}}.$$

Законы сохранения

Задача 1.3. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 1,5$ кг и абсолютно неупруго соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 2$ м/с.

Определить: 1) количество теплоты, выделившееся при ударе; 2) какое расстояние S пройдут тела после столкновения, если коэффициент трения $\mu = 0,05$?

Решение. Поскольку система тел замкнута, применим закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$

найдем проекцию данного уравнения на ось x :

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u, \quad (1)$$

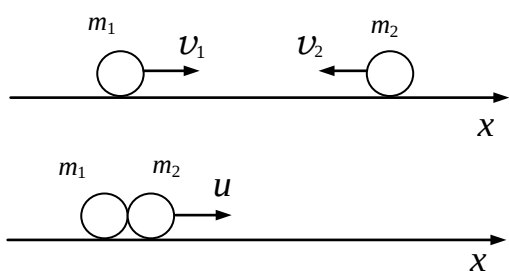
$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (2)$$

$u \approx -0,29$ м/с – скорость тел отрицательна,

значит, после соударения они будут двигаться

против оси x .

1) Количество теплоты, выделившееся после удара, равно разности кинетических энергий системы до и после удара:



$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}, \quad (3)$$

подставим в (3) выражение для u (2), получим:

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$Q = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \approx 3,9 \text{ Дж.}$$

2) После столкновения кинетическая энергия тел уменьшится до нуля за счет работы силы трения:

$$\Delta W_k = A_{\text{тр}},$$

где ΔW_k – изменение кинетической энергии тел; $\Delta W_k = W_{k_2} - W_{k_1}$, где W_{k_1} – кинетическая энергия сразу после столкновения.

$$W_{k_1} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2},$$

$$W_{k_2} = 0, \text{ так как тела остановились.}$$

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} \cdot S = -\mu (m_1 + m_2) g S;$$

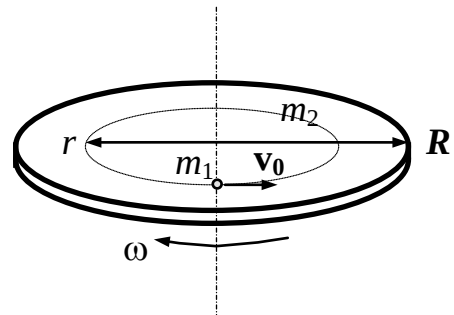
$$0 - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = -\mu (m_1 + m_2) g S;$$

$$S = \frac{u^2}{2\mu g}. \quad (4)$$

Подставим (2) в (4), получим:

$$S = \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2 \cdot 2\mu g}; \quad S = \frac{1}{3,5^2 \cdot 2 \cdot 0,05 \cdot 9,8} = \frac{10}{3,5^2 \cdot 9,8} = 0,083 \text{ м.}$$

Задача 1.4а. Человек массой m_1 находится на неподвижной платформе массой m_2 . С какой угловой скоростью ω начнет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом r вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы равна v_0 . Радиус платформы R . Считать платформу однородным диском, а человека – материальной точкой.



Решение. В начальном состоянии (состояние I) система тел “человек + платформа” неподвижна. При движении человека со скоростью v_0 относительно платформы против часовой стрелки платформа начинает вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью ω (состояние II).

На систему действуют внешние силы тяжести и реакции со стороны оси, направленные вертикально (трением в оси пренебрегаем), их момент равен нулю. Поэтому можно применить **закон сохранения момента импульса**.

В состоянии I момент импульса системы равен нулю:

$$L_I = 0.$$

В состоянии II момент импульса человека (материальной точки) равен по модулю $L_1 = m_1 v_1 r$, где v_1 - скорость человека относительно Земли, и направлен вертикально вверх. Момент импульса платформы (сплошного диска) равен по модулю $L_2 = J_2 \omega$ и направлен вертикально вниз. Суммарный момент импульса в проекции на ось, направленную вертикально вверх, равен:

$$L_{II} = L_1 - L_2 = m_1 v_1 r - J_2 \omega.$$

Здесь J_2 - момент инерции сплошного диска, $J_2 = \frac{m_2 R^2}{2}$.

По закону сохранения момента импульса $L_I = L_{II}$ имеем:

$$m_1 v_1 r - J_2 \omega = 0. \quad (1)$$

Выразим скорость v_1 человека относительно Земли через скорость v_0 человека относительно платформы. Поскольку линейная скорость точек платформы, находящихся на расстоянии r от оси вращения равна $v = \omega r$, то $v_1 = v_0 - \omega r$.

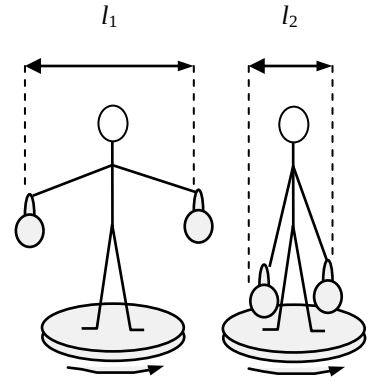
Перепишем (1) в виде:

$$m_1 (v_0 - \omega r) r - \frac{m_2 R^2}{2} \omega = 0,$$

откуда получим выражение для угловой скорости:

$$\omega = \frac{2m_1 v_0 r}{2m_1 r^2 + m_2 R^2}.$$

Задача 1.46. Человек стоит в центре скамьи Жуковского (горизонтальная платформа, вращающаяся без трения, около вертикальной оси, проходящей через ее центр) и вместе с ней вращается по инерции. Угловая скорость вращения ω_1 . Момент инерции человека относительно оси вращения I_0 . Масса скамьи Жуковского M , ее радиус R . В вытянутых в стороны руках человек держит гири массой m каждая. Расстояние между гирями l_1 . Определить скорость вращения скамьи с человеком ω_2 , когда он опустит руки и расстояние между гирями станет равным l_2 . Чему равно изменение кинетической энергии системы?



Решение. 1. Человек, держащий гири, и скамья составляют замкнутую систему, момент импульса которой остается постоянной $L_1 = L_2$,

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \quad (1)$$

где I_1 и I_2 – моменты инерции человека с гирями и скамьи до и после опускания рук; ω_1 и ω_2 – соответствующие угловые скорости.

Моменты инерции I_1 и I_2 равны сумме моментов инерции человека I_0 , скамьи $\frac{MR^2}{2}$ и гирь $m\left(\frac{l}{2}\right)^2$, которые можно считать материальными точками

$$I_1 = I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_1^2}{4}, \quad (2)$$

$$I_2 = I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_2^2}{4}. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\left(I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_1^2}{4} \right) \omega_1 = \left(I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_2^2}{4} \right) \omega_2,$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_1^2}{4}}{I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_2^2}{4}}.$$

2. Изменение кинетической энергии системы

$$\Delta W_k = W_{k_2} - W_{k_1}, \text{ где } W_k = \frac{I \omega^2}{2},$$
$$\Delta W_k = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} - \frac{I_1 \omega_1^2}{2}. \quad (4)$$

Из (1) $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1$, подставим это выражение в (4), получим:

$$\Delta W_k = \frac{I_2 I_1^2 \omega_1^2}{2 I_2^2} - \frac{I_1 \omega_1^2}{2},$$
$$\Delta W_k = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right). \quad (5)$$

Подставим (2) и (3) в (5), тогда изменение кинетической энергии равно:

$$\Delta W_k = \frac{\left(I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_1^2}{4} \right) \omega_1^2}{2} \left(\frac{I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_1^2}{4}}{I_0 + \frac{MR^2}{2} + m \frac{l_2^2}{4}} - 1 \right).$$

Поскольку $\Delta W_k > 0$, кинетическая энергия системы «скамья – человек – гири» увеличилась.

Колебания

Задача 1.5. Частица массой $m = 0,01$ кг совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = 2\pi$ Гц по закону $x = A \sin \omega t$. Определить: 1) период колебаний; 2) время, когда частица в первый раз отклонится на максимальное значение от положения равновесия; 3) амплитуду колебаний, если максимальная сила, действующая на частицу, равна 0,0196 Н; 4) кинетическую, потенциальную и полную энергии через время $t = T/8$ от начала колебания.

Решение.

1. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

находим, подставив значение ω ,

$$T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\text{с}^{-1}. \quad (1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}).$$

2. Определим время первого максимального отклонения от положения равновесия из уравнения колебания

$$x = A \sin \omega t. \quad (2)$$

При $x = A$ (по условию) $\sin \omega t = 1$, откуда $\sin 2\pi t = 1$ при аргументе равном $\pi/2$,

$$2\pi t = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow t = \frac{\pi}{2 \cdot 2\pi} = \frac{1}{4}\text{с}.$$

3. Амплитуду колебаний находим из выражения для максимальной силы:

$$F = ma \Rightarrow F_{\max} = ma_{\max} \quad (3)$$

Рассчитаем модуль ускорения: смещение x изменяется по закону $x = A \sin \omega t$. Ускорение – это первая производная скорости по времени, т.е.

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (4)$$

скорость – это производная смещения по времени

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t, \quad (5)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t. \quad (6)$$

Ускорение максимально при $\sin \omega t = 1$, т.е. модуль максимального ускорения

$$a_{\max} = A \omega^2. \quad (7)$$

Выражение (7) подставим в (3) и получим:

$$F_{\max} = mA\omega^2, \quad (8)$$

откуда находим амплитуду A :

$$A = \frac{F_{\max}}{m\omega^2}.$$

Проверим размерность: $[A] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}} \right] = [\text{м}],$

по результату делаем вывод, что формула для расчета амплитуды верна.

После вычислений получим значение амплитуды

$$A = \frac{0,0196}{0,01 \cdot 4\pi^2} = \frac{1,96}{4 \cdot 9,8} = 0,05 \text{ м}.$$

4. Кинетическая энергия равна

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (9)$$

Подставив (5) в (9) получим:

$$W_k = \frac{m(A\omega \cos \omega t)^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t}{2}. \quad (10)$$
$$[W_k] = [\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}] = [\text{Дж}].$$

Подставив численное значение всех величин в выражение (10) получим:

$$W_k = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{0,01 \cdot (0,05)^2 \cdot 4\pi^2}{2} \cdot \frac{2}{4} =$$
$$= 25 \cdot 10^{-6} \pi^2 = 25 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8 = 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Потенциальная энергия колеблющейся частицы равна

$$W_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (11)$$

Запишем второй закон Ньютона:

$$ma = F_{\text{упр.}},$$

где сила упругости определяется по закону Гука:

$$F_{\text{упр.}} = -kx,$$

тогда

$$ma = -kx. \quad (12)$$

В уравнение (12) подставим (6) и (2), получим

$$-mA\omega^2 \sin \omega t = -kA \sin \omega t,$$

$$\text{откуда выразим коэффициент упругости} \quad k = m \omega^2. \quad (13)$$

Подставив выражения (13) и (3) в (11) получим значение потенциальной энергии:

$$W_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega t. \quad (14)$$

Сделав вычисления, получим:

$$W_p = \frac{0,01 \cdot 4\pi^2 \cdot (0,05)^2}{2} \cdot \frac{2}{4} = 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

$$\text{Полная энергия равна} \quad W = W_k + W_p. \quad (15)$$

Подставив значения W_k и W_p из (10) и (14), получим:

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2 \omega t + \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega t. \quad (16)$$

После преобразований имеем

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{m\omega^2 A^2}{2},$$

то есть полная энергия колеблющейся частицы от времени не зависит и является величиной постоянной.

Произведя вычисления, окончательно получим:

$$W = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Задача 1.6(а). Складываются два колебания одинакового направления

$$x_1 = A_1 \cos \frac{2\pi}{T} (t + \tau_1), \quad x_2 = A_2 \cos \frac{2\pi}{T} (t + \tau_2),$$

где $A_1 = 3 \text{ см}$, $A_2 = 2 \text{ см}$, $\tau_1 = 1/6 \text{ с}$, $\tau_2 = 1/3 \text{ с}$, $T = 2 \text{ с}$.

Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и написать уравнение результирующего колебания.

Решение. Для построения векторной диаграммы сложения двух колебаний одного направления надо фиксировать какой-либо момент времени. Обычно векторную диаграмму строят для момента времени $t = 0$. Приведя оба уравнения к канонической форме $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, получим:

$$x_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_1\right), \quad x_2 = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_2\right).$$

Оба складываемых гармонических колебания имеют одинаковую циклическую частоту

$$\omega = 2\pi/T.$$

Начальные фазы первого и второго колебаний соответственно равны

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\tau_1, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\tau_2.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \text{ с}^{-1} = 3,14 \text{ с}^{-1};$$

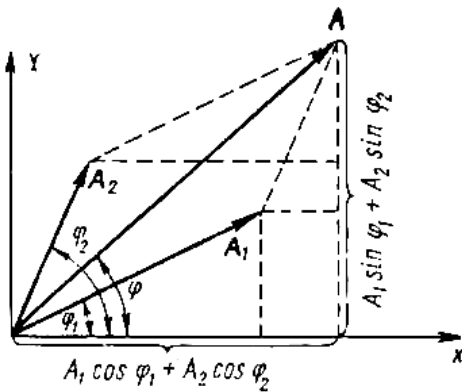
$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} = 30^\circ; \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = 60^\circ.$$

При построении векторной диаграммы отложим отрезки длиной $A_1 = 3$ см и $A_2 = 2$ см под углами $\varphi_1 = 30^\circ$ и $\varphi_2 = 60^\circ$ к оси x . Результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω и амплитудой $\vec{A}$, равной геометрической сумме векторов амплитуд $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, т.е. $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Согласно теореме косинусов,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Начальную фазу результирующего колебания можно также определить непосредственно из векторной диаграммы (см. рисунок):

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



Произведем вычисления:

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos(60^\circ - 30^\circ)} \text{ см} = 4,84 \text{ см};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3 \sin 30^\circ + 2 \sin 60^\circ}{3 \cos 30^\circ + 2 \cos 60^\circ} = \operatorname{arctg} 0,898 = 42^\circ,$$

$$\text{или } \varphi = 0,735 \text{ рад.}$$

Так как результирующее колебание является гармоническим, имеет ту же частоту, что и у исходных слагаемых колебаний, то его можно записать в виде:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A = 4,84$ см, $\omega = 3,14 \text{ с}^{-1}$, $\varphi = 0,735$ рад.

Задача 1.6(б). Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями

$$x = A_1 \cos(\omega t + \omega \tau_1) \quad \text{и} \quad y = A_2 \cos(\omega t + \omega \tau_2),$$

где $A_1 = 3$ м, $A_2 = 2$ м, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/3$ с, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$.

Определить траекторию результирующего движения точки.

Решение. Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \text{и} \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где $\varphi = \omega \tau_2 = \pi/3$ рад – разность фаз колебаний.

Выражение (1) представляет собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнения (1) параметр t . Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1}. \quad (2)$$

Из тригонометрического тождества $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ имеем

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}. \quad (3)$$

Теперь распишем косинус во втором из уравнений (1) по формуле для косинуса суммы:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi, \quad (4)$$

подставляя при этом вместо $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ их значения (2) и (3).

В результате получим

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \sin \varphi. \quad (5)$$

Уравнение (5) после несложных преобразований можно привести к виду

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi - \frac{y}{A_2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \sin^2 \varphi$$

затем, возведя в квадрат обе части уравнения, получим уравнение

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 \cdot A_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (6)$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение (6) это уравнение эллипса, ориентации осей которого зависят от разности фаз обоих колебаний, где A_1 и A_2 – величины полуосей этого эллипса, равные 3 и 2 м соответственно.

Задача 1.7. Газовая смесь, состоящая из кислорода и азота, находится в баллоне под давлением $p = 1$ МПа. Определить парциальные давления p_1 кислорода и p_2 азота, если массовая доля ω_1 кислорода в смеси равна 0,2.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева для смеси газов

$$p_{\text{см}} \cdot V = \frac{m_{\text{см}}}{\mu_{\text{см}}} \cdot RT \quad (1)$$

и законом Дальтона для определения давления смеси газов

$$p_{\text{см}} = p_1 + p_2, \quad (2)$$

где $p_{\text{см}}$ – давление смеси газов в баллоне; $m_{\text{см}}$ – масса смеси газов; $\mu_{\text{см}}$ – молярная масса смеси; p_1 – парциальное давление кислорода; p_2 – парциальное давление азота.

Выразим парциальные давления p_1 кислорода и p_2 азота из уравнений

$$p_1 \cdot V = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot RT; \quad p_2 \cdot V = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot RT, \quad (3)$$

где m_1 и μ_1 соответственно масса и молярная масса кислорода; m_2 и μ_2 – азота.

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V}; \quad p_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}. \quad (4)$$

Массу кислорода m_1 выразим из массовой доли ω_1 данной в задаче.

$$\text{Массовая доля кислорода } \omega_1 = \frac{m_1}{m_{\text{см}}}, \text{ азота } \omega_2 = (1 - \omega_1) = \frac{m_2}{m_{\text{см}}},$$

откуда $m_1 = \omega_1 m_{\text{см}}$.

Тогда масса азота соответственно будет $m_2 = m_{\text{см}} - m_1 = (1 - \omega_1) \cdot m_{\text{см}} = \omega_2 \cdot m_{\text{см}}$.

Число молей смеси $\nu_{\text{см}} = \nu_1 + \nu_2$.

С учетом того, что $\nu_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\mu_{\text{см}}}$, $\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1}$, $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2}$, получим:

$$\frac{m_{\text{см}}}{\mu_{\text{см}}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2},$$

откуда определим молярную массу смеси:

$$\mu_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}. \quad (5)$$

Подставив m_1 и m_2 в (5), получим:

$$\mu_{\text{см}} = \frac{m}{\frac{\omega_1 m}{\mu_1} + \frac{(1 - \omega_1) m}{\mu_2}},$$

$$\mu_{\text{см}} = \frac{m}{m \cdot \left(\frac{\omega_1}{\mu_1} + \frac{\omega_2}{\mu_2} \right)} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\omega_1 \mu_2 + \omega_2 \mu_1}. \quad (6)$$

Подставим в уравнение (4) для p_1 значение m_1 , из (1) выразим $\frac{RT}{V} = \frac{p_{\text{см}}}{m_{\text{см}}/\mu_{\text{см}}}$ и тоже подставим в уравнение (4), тогда

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{p_{\text{см}}}{m_{\text{см}}/\mu_{\text{см}}} = \frac{\omega_1 \cdot p_{\text{см}} \cdot \mu_{\text{см}}}{\mu_1}.$$

Произведя вычисления, получим:

$$p_1 = \frac{0,2 \cdot 10^6 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3} \cdot (0,2 \cdot 28 \cdot 10^{-3} + 0,8 \cdot 32 \cdot 10^{-3})} = 0,18 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,18 \text{ МПа}.$$

Найдем p_2 из уравнения (2)

$$p_2 = 1 - 0,18 = 0,82 \text{ МПа}.$$

Задача 1.8. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях $\langle v_{\text{кв.}} \rangle = 461 \text{ м/с}$. Какое число молекул N содержит единица массы этого газа?

Решение. Средняя квадратичная скорость рассчитывается по формуле

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (1)$$

где μ – молярная масса газа.

Возведя в квадрат уравнение (1), выразим

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{\langle v_{\text{кв.}} \rangle^2}{3}. \quad (2)$$

Выразим $\frac{RT}{\mu}$ из уравнения состояния газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow \frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{m} \quad (3)$$

Приравняем правые части уравнений (2) и (3) и заменим давление p его значением из основного уравнения молекулярно-кинетической теории:

$$p = nkT, \quad (4)$$

где $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул газа.

Получим выражение $\frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{3} = \frac{N}{V} kT \cdot \frac{V}{m}$, откуда искомая величина равна

$\frac{N}{m} = \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{3kT}$ и после вычислений получим:

$$\frac{N}{m} = \frac{461^2}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 1,88 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{кг}}.$$

Задача 1.9. Кислород занимает объем $V_1=100$ л и находится под давлением $p_1=200$ кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема $V_2=300$ л, а затем его сжали до первоначального объема, при этом давление возросло до p_3 при неизменной температуре. Найти изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A , количество теплоты Q , переданное газу, и давление p_3 .

Решение. Построим график процесса в координатах p, V . На графике точками 1, 2, 3 обозначим состояния газа, характеризуемые параметрами (p_1, V_1, T_1) , (p_2, V_2, T_2) , (p_3, V_3, T_3) .

Для решения задачи применим первое начало термодинамики, согласно которому, количество теплоты, переданное газу, равно сумме работы, совершенной газом, и изменения ΔU внутренней энергии:

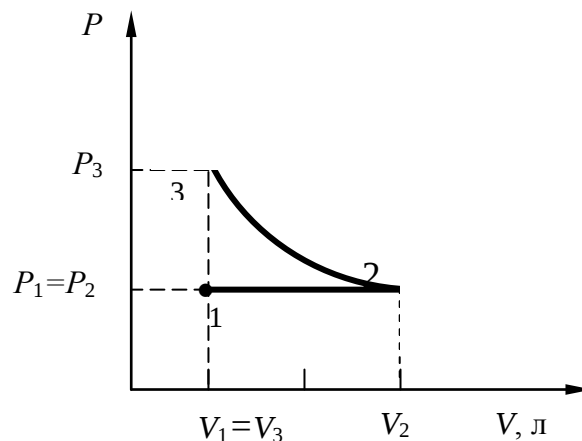
$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 равно

сумме изменений внутренней энергии $\Delta U_{1,2}$ для изобарического процесса и $\Delta U_{2,3}$ для изотермического процесса.

$$\Delta U_{1,3} = \Delta U_{1,2} + \Delta U_{2,3},$$

причем, $\Delta U_{1,3} = \Delta U_{1,2}$, так как для изотермического процесса $\Delta U_{2,3} = 0$.



Изменение внутренней энергии выражается формулой

$$\Delta U_{1,2} = \nu C_V \Delta T,$$

где $C_V = \frac{i}{2} R$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме, ν – число молей газа; ΔT – разность температур для состояний 2 и 1.

$$\Delta U_{1,2} = \nu \frac{i}{2} R (T_2 - T_1). \quad (2)$$

Так как 1–2 – процесс изобарический, то из уравнения Клапейрона–Менделеева $PV = \nu RT$, получим

$$p \Delta V = \nu R \Delta T, \quad (3)$$

тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$\Delta U_{1,2} = \frac{i}{2} p_1 \Delta V = \frac{i}{2} p_1 (V_2 - V_1).$$

Учтем, что для кислорода, как двухатомного газа, $i = 5$ и произведем вычисления:

$$\Delta U = \Delta U_{1,2} = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^5 (300 - 100) \cdot 10^{-3} = 10^5 \text{ Дж}.$$

Полная работа, совершаемая газом, равна

$$A_{1,3} = A_{1,2} + A_{2,3}, \quad (4)$$

где $A_{1,2}$ – работа изобарического расширения; $A_{2,3}$ – работа изотермического сжатия.

$$A_{1,2} = p \Delta V = p_1 (V_2 - V_1);$$

произведя вычисления, получим:

$$A_{1,2} = 4 \cdot 10^4 \text{ Дж};$$

$$A_{2,3} = \int_{V_2}^{V_1} p dV. \quad (5)$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева $pV = \nu RT$ выразим давление $p = \frac{\nu RT}{V}$ и подставим в подинтегральное выражение уравнения (5)

$$A_{2,3} = \nu RT \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = \nu RT \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} \quad (6)$$

так как при переходе из состояния (2) в (3) $T_2 = \text{const}$, а объем изменяется от V_2 до $V_3 = V_1$. Заменив νRT_2 на $p_2 V_2$, проинтегрируем и окончательно получим

$$A_{2,3} = -p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

произведя вычисления, получим:

$$A_{2,3} = -200 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-3} \cdot \ln 3 = -6 \cdot 10^4 \cdot 1,098 \Rightarrow$$

$$A_{2,3} = -6,588 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Знак (–) указывает на то, что работа изотермического сжатия совершается внешними силами.

Полная работа при переходе газа из состояния 1 в состояние 3 :

$$A_{1,3} = -2,588 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Количество теплоты, полученное газом при переходе из состояния 1 в состояние 2

$$Q = \Delta U_{1,3} + A_{1,3} \quad \text{или} \quad Q = 7,412 \cdot 10^4 = 74,12 \text{ кДж.}$$

Для изотермического процесса $p_2 V_2 = p_3 V_3$, так как $V_3 = V_1$, то

$$p_2 V_2 = p_3 V_1, \quad \text{откуда} \quad p_3 = \frac{p_2 V_2}{V_1}.$$

Произведя вычисления, получим: $p_3 = 600 \text{ кПа.}$

Задача 1.10. Найти удельную теплоемкость c_p газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1=3$ кмоль аргона и количества $\nu_2=2$ кмоль азота.

Решение. Удельная теплоемкость c_p газа вычисляется по формуле:

$$c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{\mu}. \quad (1)$$

С другой стороны удельная теплоемкость – это количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы на один Кельвин.

$$c_p = \frac{Q_p}{m \Delta T}, \quad (2)$$

откуда

$$Q_{p_{\text{см}}} = c_{p_{\text{см}}} \cdot m_{\text{см}} \cdot \Delta T, \quad (3)$$

где $c_{p_{\text{см}}}$ и $m_{\text{см}}$ – соответственно удельная теплоемкость при постоянном давлении, и масса смеси.

Количество теплоты, необходимое для нагревания смеси равно сумме количеств теплоты, необходимой для нагревания отдельных компонентов смеси, то есть

$$c_{p_{\text{см}}} \cdot m_{\text{см}} \cdot \Delta T = c_{p_1} \cdot m_1 \cdot \Delta T + c_{p_2} \cdot m_2 \cdot \Delta T, \quad (4)$$

где c_{p_1} и c_{p_2} – удельные теплоемкости при постоянном давлении соответственно аргона и азота; m_1 и m_2 – массы аргона и азота в смеси.

$$\begin{aligned} \text{Из (1)} \quad c_{p_1} &= \frac{i_1 + 2}{2} \cdot \frac{R}{\mu_1}, \\ c_{p_2} &= \frac{i_2 + 2}{2} \cdot \frac{R}{\mu_2}, \end{aligned}$$

где i_1 и i_2 – число степеней свободы соответственно для аргона и азота $i_1=3$, $i_2=5$; μ_1 и μ_2 – молярные массы соответственно для аргона и азота.

Количество молей $\nu = \frac{m}{\mu}$, отсюда

$$m_{\text{см}} = m_1 + m_2 = \nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2. \quad (5)$$

Подставив c_{p_1} , c_{p_2} и массу смеси в уравнение (4), сократив ΔT , получим:

$$\begin{aligned} c_{p_{\text{см}}} (\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2) &= \frac{i_1 + 2}{2} \cdot \frac{R}{\mu_1} \cdot m_1 + \frac{i_2 + 2}{2} \cdot \frac{R}{\mu_2} \cdot m_2, \\ c_{p_{\text{см}}} &= \frac{\left(\frac{5}{2} \nu_1 + \frac{7}{2} \nu_2 \right) \cdot R}{\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

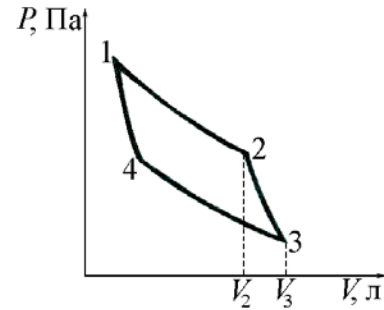
Проверяем размерность по формулы (6)

$$[c_p] = \left[\frac{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{кг}} \right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right].$$

После вычислений получим:

$$c_{p_{\text{см}}} = \frac{\left(\frac{5}{2} \cdot 3 \cdot 10^3 + \frac{7}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \right) \cdot 8,31}{3 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^3 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 685 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Задача 1.11. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа $A_{1,2}$ изотермического расширения газа равна 5 Дж. Определить работу $A_{3,4}$ изотермического сжатия, работу, совершенную газом за цикл, если термический КПД цикла равен 0,2.



Решение. Для наглядности построим график цикла, который состоит из двух изотерм и двух адиабат. В координатах p, V этот цикл имеет вид, представленный на рисунке, где

$$\left. \begin{array}{l} 1-2 \\ 3-4 \end{array} \right\} - \text{изотермы}, \quad \left. \begin{array}{l} 2-3 \\ 4-1 \end{array} \right\} - \text{адиабаты}.$$

Термический КПД любого цикла определяется выражением

$$\text{КПД} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (1)$$

где $Q_1 = Q_{1,2}$ – количество теплоты, полученное газом от нагревателя при изотермическом расширении, $Q_2 = Q_{3,4}$ – количество теплоты, отданное газом охладителю при изотермическом сжатии, для адиабатных процессов 2-3 и 4-1 $\Delta Q = 0$ (нет теплообмена).

Согласно первому началу термодинамики

$$Q_{1,2} = \Delta U_{1,2} + A_{1,2} \text{ и } Q_{3,4} = \Delta U_{3,4} + A_{3,4}.$$

Для изотермических процессов 1-2 и 3-4

$$\Delta U_{1,2} = \Delta U_{3,4} = \frac{i}{2} R \Delta T = 0, \text{ т.к. } \Delta T = 0.$$

Откуда: $Q_1 = Q_{1,2} = A_{1,2}$, где $A_{1,2}$ – работа изотермического расширения. Соответственно $Q_2 = Q_{3,4} = A_{3,4}$, где $A_{3,4}$ – работа изотермического сжатия.

Тогда формула (1) принимает вид:

$$\text{КПД} = \frac{A_{1,2} - A_{3,4}}{A_{1,2}} = 1 - \frac{A_{3,4}}{A_{1,2}}, \text{ откуда определяется искомая работа } A_{3,4}.$$

$$A_{3,4} = A_{1,2} (1 - \eta) = 0,8 A_{1,2} = 0,8 \cdot 5 = 4 \text{ Дж}.$$

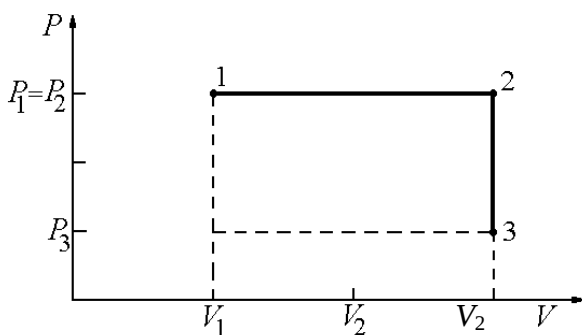
Работу газа за цикл рассчитаем, исходя из следующих соображений: изменение внутренней энергии за цикл равно нулю, (система возвращается в первоначальное состояние), изменение внутренней энергии в изотермических процессах равно

нулю, значит, сумма изменений внутренних энергий в адиабатных процессах также равна нулю, то есть $\Delta U_{2,3} = -\Delta U_{4,1}$. Так как $Q_{2,3} = Q_{4,1} = 0$, то по первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A$ работы расширения $A_{2,3}$ и сжатия $A_{4,1}$ также равны по модулю. То есть $A_{2,3} = -A_{4,1}$ (работа расширения положительна, работа сжатия отрицательна, так как совершается внешними силами).

Тогда полная работа за цикл будет равна

$$A_{\text{цикла}} = A_{1,2} + A_{2,3} - A_{3,4} - A_{4,1} = A_{1,2} - A_{3,4} = 1 \text{ Дж.}$$

Задача 1.12. Водород массой $m = 100$ г был изобарно нагрет так, что его объем



увеличился в $n = 3$ раза, затем водород был изохорно охлажден так, что давление его уменьшилось в n раз. Найти изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

Решение. Для наглядности данные процессы изобразим в координатах p, V . Газ нагревали изобарно при переходе газа

из состояния 1 в состояние 2, затем его изохорно охлаждали при переходе газа из состояния 2 в состояние 3. Изменение энтропии при переходе газа из состояния 1 в состояние 3 $\Delta S_{1,3}$ равно сумме изменений энтропии при переходе газа из состояния 1 в состояние 2 $\Delta S_{1,2}$ и при переходе газа из состояния 2 в состояние 3 $\Delta S_{2,3}$, то есть $\Delta S_{1,3} = \Delta S_{1,2} + \Delta S_{2,3}$. (1)

Изменение энтропии

$$\Delta S_{1,2} = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Для изобарного процесса

$$dQ = C_p \nu dT,$$

где C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении,

$$\Delta S_{1,2} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p \nu dT}{T} = C_p \nu \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_p \nu \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

При изобарном процессе изменение температуры и объема связано соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = n;$$

тогда $\Delta S_{1,2} = C_p \nu \ln n$.

При переходе газа из состояния 2 в состояние 3 для изохорного процесса изменение энтропии

$$\Delta S_{2,3} = \int_{T_2}^{T_3} \frac{C_V \nu dT}{T} = -C_V \nu \int_{T_3}^{T_2} \frac{dT}{T} = -C_V \nu \ln \frac{T_2}{T_3},$$

где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Для изохорного охлаждения справедливо соотношение

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} = n,$$

$$\Delta S_{1,3} = C_p \nu \ln n - C_V \nu \ln n = \nu \ln n (C_p - C_V).$$

Из уравнения Майера $C_p - C_V = R$.

$$\Delta S_{1,3} = \nu R \ln n = \frac{m}{\mu} R \ln n.$$

После вычислений получим:

$$\Delta S_{1,3} = \frac{0,1 \cdot 8,31 \ln 3}{2 \cdot 10^{-3}} = 456,47 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Задача 1.13 На столе стоит сосуд с водой, в боковой поверхности которого имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии h_1 от дна сосуда и на расстоянии h_2 от уровня воды. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. На каком расстоянии l от сосуда (по горизонтали) струя воды падает на стол в случае, если $h_1 = 25$ см, $h_2 = 16$ см.

Решение: По теореме Бернулли: $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \frac{\rho v_2^2}{2}$ или $v_1^2 + 2gh = v_2^2$, где

v_1 – скорость понижения уровня воды в сосуде;

v_2 – скорость вытекания воды из отверстия.

По условию $v_1 = 0$, тогда $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Высота падения воды на стол $h_1 = \frac{gt^2}{2}$.

Откуда время $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, тогда расстояние по горизонтали

$$l = v_2 t,$$

так как горизонтальная скорость не меняется (нет горизонтальных сил);
подставляя значение скорости v_2 , получим:

$$l = \sqrt{\frac{4gh_1h_2}{g}} = 2\sqrt{h_1h_2} = 2\sqrt{0,25 \cdot 0,16} = 0,4 \text{ м.}$$

Контрольная работа №1

Варианты заданий

1.	130102	Технология геологической разведки – ТГз.....	Табл. 1
2.	130400	Горное дело – ГДз	Табл. 1
3.	160100	Самолёто- и вертолётостроение – СМз.....	Табл. 1
4.	131000	Нефтегазовое дело – НДбз.....	Табл. 1
5.	162300	Техническая эксплуатация летательных аппаратов – ЭЛбз	Табл. 1
6.	270800	Строительство - СОбз	Табл. 1
7.	140100	Теплоэнергетика и теплотехника – ТЭбз.....	Табл. 2
8.	140400	Электроэнергетика и электротехника – ЭЭбз.....	Табл. 2
9.	220700	Автоматизация технологических процессов и произ- водств.....	Табл. 2
10.	230100	Информатика и вычислительная техника – ИТбз	Табл. 2
11.	150400	Металлургия – МЦбз.....	Табл. 3
12.	240100	Химическая технология – ХТбз.....	Табл. 3
13.	260100	Продукты питания и растительного сырья – ТПбз....	Табл. 3
14.	280700	Техносферная безопасность – ТБбз.....	Табл. 3
15.	150700	Машиностроение – МТбз.....	Табл. 4
16.	151900	Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств – КТбз.....	Табл. 4

ВНИМАНИЕ !!! Сокращённая форма обучения, а также, специальности:
 190600 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов ЭТбз
 190100 Наземные транспортно-технологические комплексы – НКбз
 190700 Технология транспортных процессов – ТТбз

Выполняют контрольные работы по методическому пособию:

Филатова Л.С., Кузьмина Г.А., Первушкина Э.И. Физика. Методические указания для студентов заочного факультета (УЦИПС). – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2002. 104 с., ил.

Табл. 1

Вариант	Номера задач – ТГз; – ГДз; – СМз; – НДбз; - ЭЛбз; - СОбз							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1.020	1.030	1.050	1.070	1.090	1.100	1.110	1.130
1	1.021	1.031	1.051	1.071	1.091	1.101	1.111	1.131
2	1.022	1.032	1.052	1.072	1.092	1.102	1.112	1.132
3	1.023	1.033	1.053	1.073	1.093	1.103	1.113	1.133
4	1.024	1.034	1.054	1.074	1.094	1.104	1.114	1.134
5	1.025	1.035	1.055	1.075	1.095	1.105	1.115	1.135
6	1.026	1.036	1.056	1.076	1.096	1.106	1.116	1.136
7	1.027	1.037	1.057	1.077	1.097	1.107	1.117	1.137
8	1.028	1.038	1.058	1.078	1.098	1.108	1.118	1.138
9	1.029	1.039	1.059	1.079	1.099	1.109	1.119	1.139

Табл. 2

Вариант	Номера задач – ТЭбз; – Ээбз; – ИТбз; – АТбз							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1.040	1.060	1.070	1.080	1.090	1.100	1.110	1.120
1	1.041	1.061	1.071	1.081	1.091	1.101	1.111	1.121
2	1.042	1.062	1.072	1.082	1.092	1.102	1.112	1.122
3	1.043	1.063	1.073	1.083	1.093	1.103	1.113	1.123
4	1.044	1.064	1.074	1.084	1.094	1.104	1.114	1.124
5	1.045	1.065	1.075	1.085	1.095	1.105	1.115	1.125
6	1.046	1.066	1.076	1.086	1.096	1.106	1.116	1.126
7	1.047	1.067	1.077	1.087	1.097	1.107	1.117	1.127
8	1.048	1.068	1.078	1.088	1.098	1.108	1.118	1.128
9	1.049	1.069	1.079	1.089	1.099	1.109	1.119	1.129

Табл. 3

Вариант	Номера задач – ХТбз; - ТПбз; – МЦбз; - ТБбз							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1.020	1.050	1.070	1.090	1.100	1.110	1.120	1.130
1	1.021	1.051	1.071	1.091	1.101	1.111	1.121	1.131
2	1.022	1.052	1.072	1.092	1.102	1.112	1.122	1.132
3	1.023	1.053	1.073	1.093	1.103	1.113	1.123	1.133
4	1.024	1.054	1.074	1.094	1.104	1.114	1.124	1.134
5	1.025	1.055	1.075	1.095	1.105	1.115	1.125	1.135
6	1.026	1.056	1.076	1.096	1.106	1.116	1.126	1.136
7	1.027	1.057	1.077	1.097	1.107	1.117	1.127	1.137
8	1.028	1.058	1.078	1.098	1.108	1.118	1.128	1.138
9	1.029	1.059	1.079	1.099	1.109	1.119	1.129	1.139

Табл. 4

Вариант	Номера задач – КТбз; – МТбз							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1.010	1.020	1.030	1.040	1.050	1.070	1.100	1.110
1	1.011	1.021	1.031	1.041	1.051	1.071	1.101	1.111
2	1.012	1.022	1.032	1.042	1.052	1.072	1.102	1.112
3	1.013	1.023	1.033	1.043	1.053	1.073	1.103	1.113
4	1.014	1.024	1.034	1.044	1.054	1.074	1.104	1.114
5	1.015	1.025	1.035	1.045	1.055	1.075	1.105	1.115
6	1.016	1.026	1.036	1.046	1.056	1.076	1.106	1.116
7	1.017	1.027	1.037	1.047	1.057	1.077	1.107	1.117
8	1.018	1.028	1.038	1.048	1.058	1.078	1.108	1.118
9	1.019	1.029	1.039	1.049	1.059	1.079	1.109	1.119

Задачи для самостоятельного решения

1.010. Пуля пущена с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/с под углом $\alpha_0 = 60^\circ$ к горизонту. Определить максимальную высоту H подъема, дальность S полета и радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.011. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $S = A - Bt + Ct^2$, где $B = 2,0$ м/с и $C = 1,0$ м/с². Найти линейную скорость v точки, ее тангенциальное a_τ , нормальное a_n и полное

a ускорения через время $t = 3$ с после начала движения, если известно, что при $t = 2,0$ с нормальное ускорение точки $a_n = 0,5$ м/с².

1.012. Тело брошено под углом $\alpha_0 = 30^\circ$ к горизонту. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

1.013. Колесо радиусом $R = 0,1$ м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 2,0$ рад/с и $C = 1,0$ рад/с². Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время $t = 2$ с после начала движения: а) угловую скорость ω ; б) линейную скорость v ; в) угловое ускорение ϵ ; г) тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения.

1.014. Под углом $\alpha_0 = 60^\circ$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью $v = 20$ м/с. Через сколько времени t оно будет двигаться под углом $\beta = 45^\circ$ к горизонту? Сопротивление воздуха отсутствует.

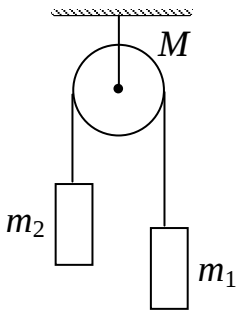
1.015. Колесо радиусом $R = 10,0$ см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени дается уравнением $v = At + Bt^2$, где $A = 3,0$ см/с² и $B = 1,0$ см/с³. Найти угол φ , составляющий вектором полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени, равные $t_1 = 0,3$ с и $t_2 = 5$ с после начала движения.

1.016. Из орудия произведен выстрел под углом $\alpha_0 = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 1$ км/с. Определить скорость v , нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения и радиус R кривизны траектории снаряда в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

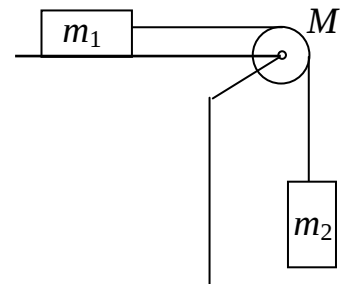
1.017. Диск радиусом $R = 20$ см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3,0$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0,1$ рад/с². Определить тангенциальное a_τ , нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска для момента времени $t = 10$ с.

1.018. Тело, брошенное под углом $\alpha_0 = 60^\circ$ к горизонту, через время $t = 4$ с после начала движения имело вертикальную проекцию скорости $v_y = 9,8$ м/с. Определить расстояние между местом бросания и местом падения, радиус кривизны траектории, соответствующий точке падения.

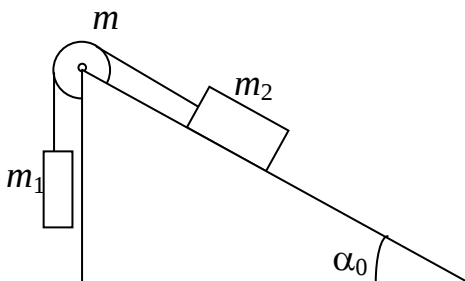
1.019. Движение точки по кривой задано уравнениями $x = A_1 t^3$ и $y = A_2 t$, где $A_1 = 1 \text{ м/с}^3$, $A_2 = 2 \text{ м/с}$. Найти уравнение траектории точки, ее скорость v и полное ускорение a в момент времени $t = 0,8 \text{ с}$.



1.020. В установке известны масса однородного сплошного цилиндра $M = 1 \text{ кг}$, его радиус $R = 20 \text{ см}$ и массы тел $m_1 = 2 \text{ кг}$ и $m_2 = 1 \text{ кг}$. Скользя нити и трения в оси цилиндра нет. Определить ускорения всех тел.

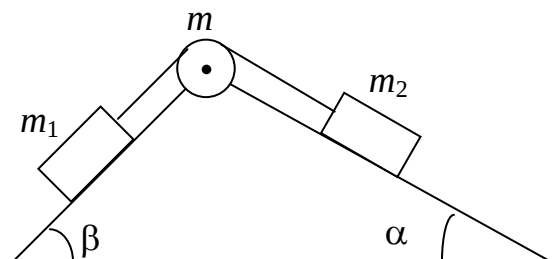


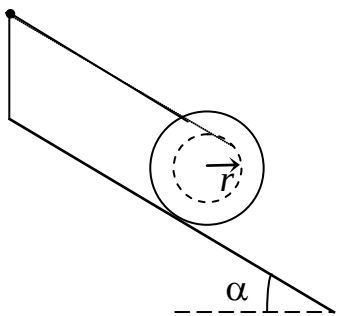
1.021. В системе известны массы тел $m_1 = 1 \text{ кг}$ и $m_2 = 2 \text{ кг}$, коэффициент трения между телом m_1 и горизонтальной плоскостью $\mu = 0,1$, а также масса блока $M = 2 \text{ кг}$, который можно считать однородным диском. Скользя нити по блоку нет. В момент $t = 0$ тело m_2 начинает опускаться. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, определить ускорения, с которым движутся тела, и силы натяжения нити.



1.022. Блок массой $m = 1 \text{ кг}$ укреплен в вершине наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha_0 = 30^\circ$. Тела массой $m_1 = 2 \text{ кг}$ и $m_2 = 1 \text{ кг}$ соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение, с которым движутся тела и силы натяжения нити. Трением тела 2 о наклонную плоскость и трением в блоке пренебречь.

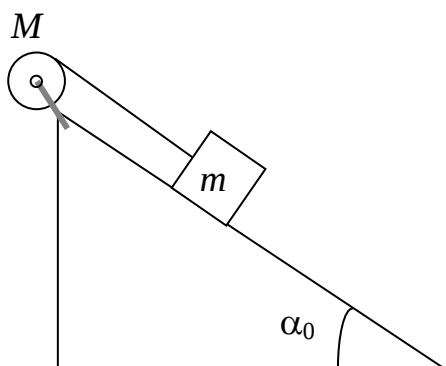
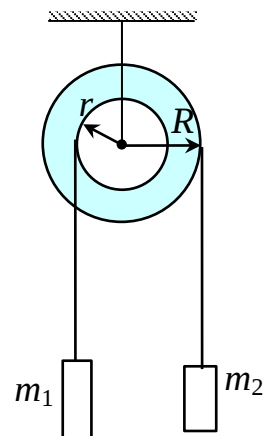
1.023. Блок массой $m = 2 \text{ кг}$ укреплен в вершине двух гладких наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Тела массы $m_1 = 3 \text{ кг}$ и $m_2 = 1 \text{ кг}$ соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение a , с которым движутся тела. Блок можно считать однородным диском, трением в блоке пренебречь.





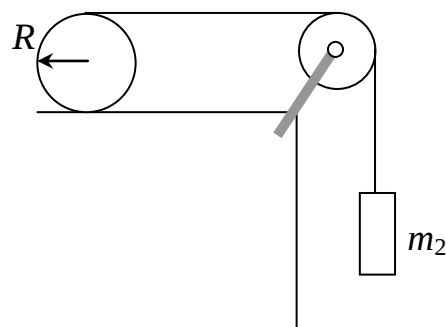
1.024. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплен, как показано на рисунке. Масса катушки $m = 200$ г, её момент инерции относительно собственной оси $I = 0,45$ г·м², радиус намотанного слоя ниток $r = 3$ см. Определить ускорение катушки.

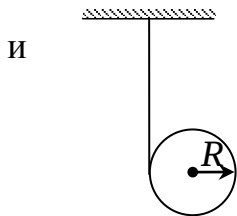
1.025. На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две легкие нити, нагруженные массами $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 8$ кг. Определить угловое ускорение блока и натяжения T_1 и T_2 нитей, если момент инерции блока $I = 0,1$ кг·м², $r = 10$ см, $R = 20$ см.



1.026. На блок массой $M = 500$ г и радиусом $R = 10$ см укрепленный в вершине наклонной плоскости, намотана тонкая нерастяжимая нить, к концу которой прикреплено тело массой $m = 1$ кг. Определить ускорения блока, тела и силу натяжения нити, если коэффициент трения тела о наклонную плоскость $\mu = 0,1$, а угол наклона плоскости $\alpha_0 = 30^\circ$. Блок можно считать однородным диском с радиусом $R = 5$ см. Трением в блоке пренебречь.

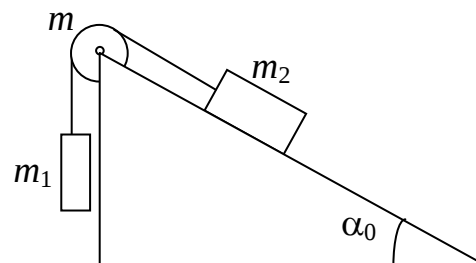
1.027. На горизонтальной плоскости находится сплошной цилиндр радиусом $R = 20$ см и массой $m_1 = 3$ кг. На цилиндр намотана нить, переброшенная через блок, как показано на рисунке. К концу нити привязан груз массы $m_2 = 2$ кг. Цилиндр катится без проскальзывания. Определить ускорения цилиндра и груза. Массой блока и трением в его оси пренебречь.





1.028. На однородный сплошной цилиндр массы $m = 1$ кг радиуса $R = 10$ см намотана гибкая невесомая лента, второй конец которой закреплен, как показано на рисунке. Определить линейное и угловое ускорения цилиндра.

1.029. Два тела одинаковой массы $m_1 = m_2 = 2$ кг соединены нитью, перекинутой через блок, как показано на рисунке. Определить ускорение a , с которым движутся тела и силу натяжения нити, если коэффициент трения тела 2 о наклонную плоскость равен $\mu = 0,1$, а угол наклона плоскости $\alpha_0 = 30^\circ$. Блок можно считать однородным диском массы $m = 1$ кг. Трением в блоке пренебречь.



1.030. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 1,5$ кг и соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Определить расстояние, пройденное телами после удара, если коэффициент трения $\mu = 0,05$. Соударение считать неупругим.

1.031. Человек, стоящий на неподвижной тележке бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 2$ кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент после бросания ее скорость была $v = 0,1$ м/с. Масса тележки с человеком $M = 100$ кг. Определить кинетическую энергию W_k брошенного камня через время $t = 0,05$ с после начала его движения.

1.032. Конькобежец массой $M = 70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 3$ кг со скоростью $v = 8$ м/с. На какое расстояние S откатился при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0,02$?

1.033. Шар массой $m_1 = 2$ кг движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с и нагоняет шар с массой $m_2 = 8$ кг, движущийся со скоростью $v_2 = 1$ м/с. Считая удар центральным, определить скорости v'_1 и v'_2 шаров после удара, если удар: а) абсолютно упругий; б) абсолютно неупругий.

1.034. Тело массой 5 кг ударяется о неподвижное тело массой 2,5 кг, которое после удара начинает двигаться с кинетической энергией 5 Дж. Считая удар центральным и упругим, определить кинетическую энергию первого тела до и после удара.

1.035. Два тела движутся навстречу друг другу и соударяются. Скорость первого тела до удара $v_1 = 2$ м/с, скорость второго $v_2 = 4$ м/с. Общая скорость тел после удара по направлению совпадает с направлением скорости v_1 и равна $v = 1$ м/с. Во сколько раз кинетическая энергия первого тела была больше кинетической энергии второго тела, если соударение неупругое.

1.036. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой $m_1 = 2,5$ кг под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v = 10$ м/с. Какова будет начальная скорость v_0 движения конькобежца, если масса его $m_2 = 60$ кг? На какое расстояние откатится конькобежец после броска, если коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0,01$?

1.037. Два груза массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпущен. Определить высоту h , на которую поднимутся оба груза после удара. Соударение грузов неупругое.

1.038. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом $\alpha = 30^\circ$ к линии горизонта. Определить скорость v_2 отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью $v_1 = 480$ м/с. Масса платформы с орудием и снарядами $m_2 = 18$ т, масса снаряда $m_1 = 60$ кг. На какое расстояние откатится платформа, если коэффициент трения платформы о рельсы $0,05$?

1.039. Молот массой $m_1 = 5$ кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса m_2 наковальни равна 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить к.п.д. удара молота при данных условиях.

1.040. Стержень длиной $l = 1,5$ м и массой $m_1 = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой $m_2 = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 500$ м/с и застревает в нем. На какой угол отклонится стержень после удара?

1.041. Пуля массой $m = 50$ г, двигаясь со скоростью $v = 100$ м/с, ударяется о выступ покоящегося зубчатого колеса, момент инерции которого $I = 0,25$ кг·м². Расстояние от точки попадания пули до оси вращения $r = 30$ см. Определить угловую скорость колеса, считая удар неупругим. Пуля двигалась в плоскости вращения колеса.

1.042. Горизонтальная платформа массой $m_1 = 150$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $n = 8 \text{ мин}^{-1}$. Человек массой $m_2 = 70$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым, однородным диском, а человека материальной точкой.

1.043. Шарик массой $m = 100$ г, привязанный к концу нити длиной 1 м, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость, делая 1 об/с. Нить медленно укорачивают, приближая шарик к оси вращения до расстояния 0,5 м. С какой угловой скоростью будет при этом вращаться шарик? Какую работу совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

1.044. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную (на платформе) точку? Масса платформы $m_1 = 280$ кг, масса человека $m_2 = 80$ кг.

1.045. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1 = 8 \text{ мин}^{-1}$, стоит человек массой $m_1 = 70$ кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой $n_2 = 10 \text{ мин}^{-1}$. Определить массу m_2 платформы. Момент инерции человека рассчитывать, как для материальной точки.

1.046. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руке за ось велосипедное колесо, вращающееся с угловой скоростью $\omega_1 = 25 \text{ рад/с}$. Ось колеса совпадает с осью скамьи Жуковского. С какой скоростью ω_2 станет вращаться скамья, если повернуть колесо вокруг горизонтальной оси на угол $\alpha = 90^\circ$? Момент инерции человека и скамьи I равен $2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, момент инерции колеса $I_0 = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

1.047. Горизонтальная платформа массой $m = 80$ кг и радиусом 1 м, вращается с частотой $n_1 = 20 \text{ об/мин}$. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $I_1 = 2,94 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ до $I_2 = 0,98 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Считать платформу однородным диском.

1.048. Человек массой $m_1 = 60$ кг находится на неподвижной платформе массой $m_2 = 100$ кг. С какой частотой начнет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5$ м вокруг оси вращения? Скорость движе-

ния человека относительно платформы $v_1 = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

1.049. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и держит вертикально стержень, который служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой $n_1 = 15$ с⁻¹. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья, если человек повернет стержень на угол $\alpha = 180^\circ$ и колесо окажется на нижнем конце стержня? Суммарный момент инерции человека и скамьи $I = 8,0$ кг·м², радиус колеса $R = 25$ см. Массу $m = 2,5$ кг колеса можно считать равномерно распределенной по ободу.

1.050. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению: $x = A \cdot \cos \omega t$, где $A = 8$ см, $\omega = \pi/6$ с⁻¹. В момент, когда возвращающая сила в первый раз достигла значения $F = -5$ мН, потенциальная энергия точки стала равной $W_p = 100$ мкДж. Определить этот момент времени t и соответствующую ему фазу φ .

1.051. Колебания точки происходят по закону $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение точки равно $x = 5$ см, ее скорость $v = 20$ см/с и ускорение $a = -80$ см/с². Определить амплитуду, циклическую частоту, период колебаний и фазу в рассматриваемый момент времени.

1.052. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно $x_{\max} = 10$ см, наибольшая скорость точки $v_{\max} = 20$ см/с. Определить циклическую частоту ω колебаний и максимальное ускорение $a_{\max}$ точки.

1.053. Материальная точка массой $m = 50$ г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = A \cdot \cos \omega t$, где $A = 10$ см, $\omega = 5$ с⁻¹. Определить силу, действующую на точку в положении наибольшего смещения точки.

1.054. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия колебаний $W = 0,3$ мкДж. Определить смещение точки от положения равновесия в момент, когда на нее действует сила $F = 22,5$ мкН.

1.055. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = 30$ мкДж, максимальная сила, действующая на тело, $F_{\max} = 1,3$ мН. Записать уравнение движения этого тела, если период колебаний $T = 2$ с и начальная фаза $\varphi_0 = \pi/3$.

1.056. Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания, равна $v_{\max} = 10$ см/с, максимальное ускорение $a_{\max} = 100$ см/с². Определить циклическую частоту ω колебаний, их период T и амплитуду A . Записать уравнение колебаний, приняв начальную фазу равной нулю.

1.057. Уравнение колебаний материальной точки массой $m = 10$ г имеет вид $x = 0,1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Определить максимальную силу $F_{\max}$, действующую на точку, и полную энергию W колеблющейся точки.

1.058. Точка совершает гармонические колебания. Период колебаний $T = 2$ с, амплитуда колебаний $A = 50$ мм, начальная фаза $\varphi_0 = 0$. Определить скорость точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$ мм.

1.059. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi_0 = 0$. При смещении точки от положения равновесия $x_1 = 2,4$ см, скорость точки $v_1 = 3$ см/с, а при смещении $x_2 = 2,8$ см ее скорость $v_2 = 2$ см/с. Определить амплитуду A и период T колебаний.

1.060. Точка участвует в двух колебаниях одинакового направления с одинаковыми периодами и одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Определить амплитуду A результирующего колебания.

1.061. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x = A_1 \cdot \sin \omega t$ и $y = A_2 \cdot \cos \omega t$, где $A_1 = 0,5$ см и $A_2 = 2$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения.

1.062. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1,5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Определить амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Найти его уравнение.

1.063. Материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cdot \cos \omega t$ и $y = A_2 \cdot \cos 2\omega t$, где $A_1 = 2$ см и $A_2 = 1$ см. Найти уравнение траектории и построить ее.

1.064. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x = A_1 \cdot \cos \omega t$ и $y = A_2 \cdot \cos \omega (t + \tau)$, где $A_1 = 4$ см; $A_2 = 8$ см; $\omega = \pi$ с⁻¹; $\tau = 1$ с. Найти уравнение траектории точки и построить ее.

1.065. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cdot \cos \omega t$ и $y = A_2 \cdot \sin \omega t$, где $A_1 = 2$ см; $A_2 = 1$ см; $\omega = \pi$ с⁻¹. Найти уравнение траектории точки и построить ее.

1.066. Движение точки задано уравнениями $x = A_1 \cdot \sin \omega t$ и $y = A_2 \cdot \sin \omega (t + \tau)$, где $A_1 = 10$ см, $A_2 = 5$ см, $\omega = 2$ с⁻¹, $\tau = \pi/4$ с. Найти уравнение траектории и скорость точки в момент времени $t = 0,5$ с.

1.067. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \cos \pi t$ и $y = \cos \frac{\pi}{2} t$. Найти траекторию результирующего движения точки.

1.068. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin \pi t$ и $y = 4 \sin(\pi t + \pi)$. Найти траекторию результирующего движения точки.

1.069. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих в одном направлении с начальными фазами $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$, с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 2$ с, одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 = 5$ см. Определить амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания.

1.070. Баллон вместимостью $V = 20$ л заполнен азотом при температуре $T = 400$ К. Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 200$ кПа. Определить массу m израсходованного газа. Процесс считать изотермическим.

1.071. В баллоне вместимостью $V = 15$ л находится аргон под давлением $p_1 = 600$ кПа и при температуре $T_1 = 300$ К. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до $p_2 = 400$ кПа, а температура установилась $T_2 = 260$ К. Определить массу m аргона, взятого из баллона.

1.072. Два сосуда одинакового объема содержат кислород. В одном сосуде давление $p_1 = 2$ МПа и температура $T_1 = 800$ К, в другом $p_2 = 2,5$ МПа, $T_3 = 200$

К. Сосуды соединили трубкой и охладили находящийся в них кислород до температуры $T = 200$ К. Определить, установившееся давление p в сосудах.

1.073. Какой объем V занимает при нормальных условиях смесь газов – азота массой $m_1 = 1$ кг и гелия массой $m_2 = 1$ кг?

1.074. В баллонах вместимостью $V_1 = 20$ л и $V_2 = 44$ л содержится газ. Давление в первом баллоне $p_1 = 2,4$ МПа, во втором – $p_2 = 1,6$ МПа. Определить суммарное давление p и парциальные p_1' и p_2' после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.

1.075. При адиабатном сжатии давление воздуха было увеличено от $p_1 = 50$ кПа до $p_2 = 0,5$ МПа. Затем при неизменном объеме температура воздуха была понижена до первоначальной. Определить давление p_3 газа в конце процесса. Построить график процесса.

1.076. Определить плотность ρ газовой смеси водорода и кислорода, если их массовые доли ω_1 и ω_2 равны соответственно $1/9$ и $8/9$. Давление p смеси равно 100 кПа, температура $T = 300$ К.

1.077. Баллон вместимостью $V = 30$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 828$ кПа. Масса смеси равна 24 г. Определить массу m_1 водорода и массу m_2 гелия.

1.078. В сосуде вместимостью $V = 15$ л находится смесь азота и водорода при температуре $t = 23^\circ\text{C}$ и давлении $p = 200$ кПа. Определить массы смеси и ее компонентов, если массовая доля ω_1 азота в смеси равна 0,7.

1.079. Баллон вместимостью $V = 5$ л содержит смесь гелия и водорода при давлении $p = 600$ кПа. Масса m смеси равна 4 г, массовая доля ω_1 гелия равна 0,6. Определить температуру T смеси.

1.080. Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинки, взвешенной в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул воздуха? Масса пылинки $m = 10^{-8}$ г. Воздух считать однородным газом, молярная масса которого $\mu = 0,029$ кг/моль.

1.081. Плотность некоторого газа $\rho = 0,06$ кг/м³ средняя квадратичная скорость его молекул равна 500 м/с. Определить давление p , которое газ оказывает на стенки сосуда.

1.082. Определить число молекул n водорода в единице объема сосуда при давлении $p = 266,6$ Па, если средняя квадратичная скорость его молекул равна $2,4$ км/с.

1.083. В сосуде объемом $V = 2$ л находится масса $m = 10$ г кислорода при давлении $p = 90,6$ кПа. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа, число молекул n , находящихся в сосуде и плотность ρ газа.

1.084. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа равна 450 м/с. Давление газа $p = 50$ кПа. Определить плотность ρ газа при этих условиях.

1.085. Плотность некоторого газа $\rho = 0,082$ кг/м³ при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 17^\circ\text{C}$. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа. Какова молярная масса μ этого газа?

1.086. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа, заключенного в сосуд объемом $V = 2$ л под давлением $p = 200$ кПа. Масса газа $m = 0,3$ г.

1.087. При какой температуре средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа равна $4,14 \cdot 10^{-21}$ Дж.

1.088. Частицы гуммигута диаметром $d = 1$ мкм участвуют в броуновском движении. Плотность гуммигута $\rho = 10^3$ кг/м³. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ частиц гуммигута при температуре $T = 273$ К.

1.089. Масса $m = 10$ г азота находится в закрытом сосуде при температуре $T_1 = 280$ К. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость его молекул вдвое? Во сколько раз при этом изменится температура газа? Во сколько раз при этом изменится давление газа на стенки сосуда?

1.090. Определить количество теплоты Q , которое надо сообщить кислороду объемом $V = 50$ л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на $\Delta p = 0,5$ МПа.

1.091. При изотермическом расширении азота при температуре $T = 280$ К объем его увеличился в два раза. Определить: 1) совершенную при расширении газа работу A ; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) количество теплоты Q , полученное газом. Масса азота $m = 0,2$ кг.

1.092. Азот массой $m = 0,1$ кг был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 200$ К до температуры $T_2 = 400$ К. Определить работу A , совершенную газом, полученную им теплоту Q и изменение ΔU внутренней энергии.

1.093. Определить работу A , которую совершит азот, если ему при постоянном давлении сообщить количество теплоты $Q = 21$ кДж. Найти также изменение ΔU внутренней энергии.

1.094. Водород занимает объём $V_1 = 10$ м³ при давлении $p_1 = 100$ кПа. Газ нагревали при постоянном объёме до давления $p_2 = 300$ кПа. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) работу A , совершаемую газом; 3) количество теплоты Q , совершаемую газом.

1.095. Кислород при неизменном давлении $p = 80$ кПа нагревается. Его объём увеличивается от $V_1 = 1$ м³ до $V_2 = 3$ м³. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии кислорода; 2) работу A , совершённую им при расширении; 3) количество теплоты Q , сообщённое газу.

1.096. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объём $V_1 = 1$ м³ и находится под давлением $p_1 = 0,2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объёма $V_2 = 3$ м³, а затем при постоянном объёме до давления $p_2 = 0,5$ МПа. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершённую им работу A ; 3) количество теплоты Q , переданное газу. Построить график процесса.

1.097. В цилиндре под поршнем находится азот массой $m = 0,6$ кг, занимающий объём $V_1 = 1,2$ м³ при температуре $T = 560$ К. В результате подвода теплоты газ расширился и занял объём $V_2 = 4,2$ м³, при постоянной температуре. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии; 2) совершённую им работу A ; 3) количество теплоты Q , сообщённое газу.

1.098. При адиабатическом расширении кислорода с начальной температурой $T_1 = 320$ К внутренняя энергия уменьшилась на $\Delta U = 8,4$ кДж, а его объём увеличился в $n = 10$ раз. Определить массу m кислорода.

1.099. Расширяясь, водород совершил работу $A = 6$ кДж. Определить количество теплоты Q , подведённое к газу, если процесс протекал: 1) изобарически; 2) изотермически.

1.100. Удельная теплоёмкость некоторого двухатомного газа $c_p = 14,4$ кДж/(кг К). Определить молярную массу μ этого газа.

1.101. Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях $\rho = 1,43 \text{ кг/м}^3$. Определить удельные теплоемкости c_V и c_P этого газа.

1.102. Молярная масса некоторого газа $\mu = 0,03 \text{ кг/моль}$, отношение $c_P/c_V = 1,4$. Определить удельные теплоемкости c_V и c_P этого газа.

1.103. Определить отношение c_P/c_V для газовой смеси, состоящей из массы $m_1 = 8 \text{ г}$ гелия и массы $m_2 = 16 \text{ г}$ кислорода.

1.104. Удельная теплоемкость газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 1 \text{ кмоль}$ кислорода и некоторой массы m_2 аргона $c_{P \text{ см}} = 654,86 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Какая масса m_2 аргона находится в газовой смеси?

1.105. Разность удельных теплоемкостей $c_P - c_V$ некоторого двухатомного газа равна $260 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Определить молярную массу μ газа и его удельные теплоемкости c_P и c_V .

1.106. Определить удельную теплоемкость c_V смеси газов, содержащей $V_1 = 5 \text{ л}$ водорода и $V_2 = 3 \text{ л}$ гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.

1.107. Вычислить молярные теплоемкости газа, если его удельные теплоемкости $c_V = 10,4 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$ и $c_P = 14,6 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$.

1.108. Трехатомный газ под давлением $p = 240 \text{ кПа}$ и температуре $t = 20^\circ\text{C}$ занимает объем $V = 10 \text{ л}$. Определить молярные теплоемкости этого газа при постоянном объеме и давлении.

1.109. Вычислить удельные теплоемкости газа, зная, что его молярная масса $\mu = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/моль}$ и отношение теплоемкостей $c_P/c_V = 1,67$.

1.110. Идеальный многоатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причём наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объём в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД η цикла.

1.111. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_2 охладителя равна 290 К . Во сколько раз увеличивается КПД цикла, если температура нагревателя повысится от $T_1 = 400 \text{ К}$ до $T_1' = 600 \text{ К}$?

1.112. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 4,2 \text{ кДж}$, совершил работу $A = 590 \text{ Дж}$. Найти термический КПД этого цикла. Во сколько раз температура T_1 нагревателя больше температуры T_2 охладителя?

1.113. Наименьший объем V_1 газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем V_3 , если объем V_2 в конце изотермического расширения и объем V_4 в конце изотермического сжатия равны соответственно 600 и 189 л.

1.114. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя равна 470 К, температура T_2 охладителя равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определить термический КПД цикла η , а также количество теплоты Q_2 , которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

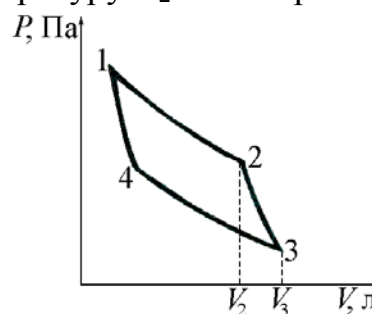
1.115. Газ, совершающий цикл Карно, получает теплоту $Q_1 = 84$ кДж. Определить работу A газа, если температура T_1 теплоотдатчика в три раза выше температуры T_2 теплоприемника.

1.116. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура теплоотдатчика $T_1 = 500$ К, температура теплоприемника $T_2 = 250$ К. Определить термический КПД цикла η , а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа $A_2 = 70$ Дж.

1.117. Определить работу A_2 изотермического сжатия газа, совершающего цикл Карно, КПД которого $\eta = 0,4$, если работа изотермического расширения равна $A_1 = 8$ Дж.

1.118. Газ, совершающий цикл Карно, отдал теплоприемнику 67% теплоты, полученной от теплоотдатчика. Определить температуру T_2 теплоприемника, если температура теплоотдатчика $T_1 = 430$ К.

1.119. Идеальный двухатомный газ совершает цикл Карно, график которого изображен на рисунке. Объемы газа в состояниях 2 и 3 соответственно равны $V_2 = 12$ л и $V_3 = 16$ л. Найти термический КПД цикла η .



1.120. Определить приращение ΔS энтропии при превращении массы $m = 10$ г льда ($t = -20^\circ\text{C}$) в пар ($t_n = 100^\circ\text{C}$).

1.121. Определить приращение ΔS энтропии при переходе массы $m = 8$ г кислорода от объема $V_1 = 10$ л при температуре $T_1 = 353$ К к объему $V_2 = 40$ л при температуре $T_2 = 573$ К.

1.122. Определить приращение ΔS энтропии при переходе массы $m = 6$ г водорода от объёма $V_1 = 20$ л под давлением $p_1 = 150$ кПа к объёму $V_2 = 60$ л под давлением $p_2 = 100$ кПа.

1.123. Масса $m = 6,6$ г водорода расширяется изобарически от объёма V_1 до объёма $V_2 = 2V_1$. Определить приращение ΔS энтропии при этом расширении.

1.124. Определить приращение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы $m = 6$ г водорода от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 50$ кПа.

1.125. Масса $m = 10,5$ г азота изотермически расширяется от объёма $V_1 = 2$ л до объёма $V_2 = 5$ л. Определить приращение энтропии при этом процессе.

1.126. Масса $m = 10$ г кислорода нагревается от температуры $T_1 = 323$ К до температуры $T_2 = 423$ К. Определить приращение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

1.127. Определить приращение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы $m = 8$ г гелия от объёма $V_1 = 10$ л до объёма $V_2 = 25$ л.

1.128. В результате изохорического нагревания водорода массой $m = 1$ г давление p газа увеличилось в два раза. Определить приращение ΔS энтропии газа.

1.129. Кислород массой $m = 2$ кг увеличил свой объём в $n = 5$ двумя способами: а) изотермически, б) адиабатически. Определить изменения энтропии в каждом из указанных процессов.

1.130 Найти скорость течения углекислого газа по трубе, если известно, что за время $t = 30$ мин через поперечное сечение трубы протекает масса газа $m = 0,51$ кг. Плотность газа $7,5$ кг/м³. Диаметр трубы 2 см.

1.131 В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 0,5$ м имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найти значение этой скорости для высоты $h = 0,2$ м.

1.132 Какое давление P создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вылетает из него со скоростью 25 м/с? Плотность краски $0,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

1.133 Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности материала шарика. Во сколько раз сила тре-

ния, действующая на всплывающий шарик, больше силы тяжести, действующей на этот шарик?

1.134 В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого $r = 1$ мм и длина $l = 1,5$ см. В сосуд налит глицерин, динамическая вязкость которого $\eta = 1$ Па·с. Уровень глицерина в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 0,18$ м выше капилляра. Какое время потребуется на то, чтобы из капилляра вытек объем глицерина $V = 5$ см³?

1.135 Пробковый шарик радиусом 5 мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую вязкость касторового масла, если шарик всплывает с постоянной скоростью 3,5 см/с.

1.136 В бак равномерной струей за каждую секунду поступает 2 дм³ воды. В дне бака имеется отверстие площадью 2 см². На какой высоте будет стоять вода в баке?

1.137 На гладкой горизонтальной поверхности стоит сосуд с водой. В боковой стенке сосуда у дна имеется отверстие площадью S . Какую силу нужно приложить к сосуду, чтобы удержать его в равновесии, если высота уровня воды в сосуде равна h ?

1.138 За 15 минут по трубе диаметром 2 см протекает 50 кг воды. Найти скорость течения.

1.139 Свинцовый шарик диаметром $d = 2$ мм падает с постоянной скоростью $v = 3,6$ см/с в сосуде, наполненном глицерином. Найти коэффициент вязкости глицерина.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Основные понятия и формулы

Закон Кулона (скалярная форма)

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} ,$$

где F – сила взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2 ,

r – расстояние между зарядами,

ϵ – диэлектрическая проницаемость среды,

ϵ_0 – электрическая постоянная, равная $8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} ,$$

где $\vec{E}$ – напряженность поля в точке, вектор, совпадающий по направлению с силой, действующей на единичный положительный заряд q , помещенный в эту точку поля.

Потенциал поля

$$\varphi = \frac{W_n}{q} ,$$

где φ – потенциал, скаляр,

W_n – потенциальная энергия единичного положительного заряда q помещенного в данную точку поля.

Принцип суперпозиции (напряженность и потенциал поля, созданного системой точечных зарядов).

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i , \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i ,$$

где $\vec{E}_i, \varphi_i$ – напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемого i -м зарядом.

Напряженность и потенциал поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r},$$

где r – расстояние от точечного заряда до точки, в которой определяются E и φ .

Поток вектора напряженности Φ_E

а) через произвольную поверхность S , помещенную в неоднородное поле

$$\Phi_E = \int_S E \cos \alpha \, dS, \text{ или } \Phi_E = \int_S E_n \, dS,$$

где α – угол между вектором напряженности $\vec{E}$ и положительной нормалью $\vec{n}$ к элементу поверхности, dS – площадь элемента поверхности, E_n – проекция вектора напряженности на нормаль;

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное электрическое поле

$$\Phi_E = E S \cos \alpha;$$

в) поток вектора напряженности E через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n \, dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

Теорема Остроградского-Гаусса

Поток вектора напряженности E через любую замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i,$$

где $\sum_{i=1}^N q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности, N – число зарядов.

Напряженность электрического поля заряженной металлической сферы радиусом R на расстоянии r от центра сферы

а) $r < R$, $E = 0$,

б) $r = R$, $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2},$

$$\text{в) } r > R, E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

где q – заряд на сфере.

Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от ее оси.

$$E = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r},$$

где τ – линейная плотность заряда, равная отношению величины заряда нити (цилиндра) к длине.

$$\tau = \frac{q}{l}, [\tau] = \text{Кл/м}.$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда, равная отношению заряда плоскости к ее площади

$$\sigma = \frac{q}{S}, [\sigma] = \text{Кл/м}^2.$$

Напряженность поля двух параллельных бесконечных равномерно и разноименно заряженных плоскостей (плоский конденсатор при $d \ll l$, т.е. расстояние между пластинами много меньше линейных размеров пластин)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$$

Электрическое смещение $\vec{D}$ (вектор электростатической индукции) в изотропной среде связано с напряженностью поля соотношением

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}.$$

Связь потенциала поля φ с напряженностью $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi,$$

в скалярной форме

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

где $\frac{d\varphi}{dr}$ – градиент потенциала, равный $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r_2 - r_1}$, т.е. отношению измене-

ния потенциала к расстоянию между двумя точками поля с потенциалами φ_1 и φ_2 .

Для однородного поля

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

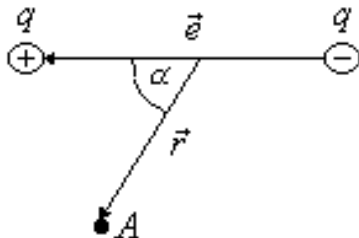
где φ_1 и φ_2 – потенциалы двух эквипотенциальных поверхностей (поверхности равного потенциала), d – расстояние между ними вдоль силовой линии.

Работа A поля по перемещению точечного заряда q из одной точки поля в другую с соответствующими потенциалами φ_1 и φ_2

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ или } A = q \int_l E_l dl,$$

где E_l – проекция вектора напряженности на направление перемещения, dl – перемещение.

Для однородного поля $A = qEl \cos \alpha$, где l – перемещение, α – угол между $\vec{E}$ и $\vec{l}$.



Диполь – система двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку, расстояние между которыми значительно меньше расстояния от центра диполя до точки наблюдения.

Вектор $\vec{l}$, проведенный от отрицательного заряда диполя до положительного заряда, называется плечом диполя.

Произведение заряда $|q|$ диполя на его плечо $\vec{l}$ называется электрическим моментом диполя

$$\vec{p} = |q| \vec{l}$$

Напряженность поля диполя (см. рисунок)

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 - 3\cos^2 \alpha},$$

где p – электрический момент диполя, r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$, α – угол между радиусом-вектором $\vec{r}$ и плечом диполя $\vec{l}$.

Поляризованность диэлектрика (вектор поляризации)

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

где p_i – электрический момент отдельной (i -ой) молекулы, N – число молекул в объеме ΔV .

Связь поляризованности с напряженностью E поля в диэлектрике

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость (табличное значение), ε_0 – электрическая постоянная.

Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

Напряженность поля в диэлектрике связана с напряженностью внешнего поля соотношениями

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon \quad \text{и} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

Емкость уединенного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

где q – заряд проводника, φ – его потенциал.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

где S , d – площадь и расстояние между пластинами плоского конденсатора соответственно.

Энергия электрического поля конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Емкость параллельно соединенных конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

Емкость последовательно соединенных конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Сила электрического тока

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где dq – заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за время dt .

Плотность электрического тока, есть векторная величина, модуль которой равен отношению силы тока к площади поперечного сечения проводника

$$\vec{j} = \frac{I}{S} \cdot \vec{k},$$

где $\vec{j}$ – плотность тока (вектор); I – сила тока; S – сечение проводника (площадь); $\vec{k}$ – единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением движения положительных носителей заряда.

Связь плотности тока со средней скоростью $\langle \vec{u} \rangle$ направленного движения заряженных частиц

$$\vec{j} = qn\langle \vec{u} \rangle,$$

где q – заряд частицы; n – концентрация заряженных частиц.

Законы Ома

$$\text{а) } I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R} \quad \text{– для однородного участка цепи;}$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напряжение на участке цепи; R – его сопротивление.

$$\text{б) } I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R} \quad \text{– для неоднородного участка цепи,}$$

где ε – ЭДС источника тока; R – полное сопротивление цепи.

$$\text{в) } I = \frac{\varepsilon}{R + r} \quad \text{– для замкнутой цепи,}$$

где R – внешнее сопротивление цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

г) $\vec{j} = j \cdot \vec{E}$ – закон Ома в дифференциальной форме, где j – удельная проводимость проводника; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; $\vec{j}$ – плотность тока.

Сопротивление однородного проводника R

$$R = \rho \cdot \frac{l}{s},$$

где ρ – удельное сопротивление проводника, l – его длина, s – площадь поперечного сечения.

Проводимость G проводника и удельная проводимость j

$$G = \frac{1}{R}, \quad j = \frac{1}{\rho}.$$

Температурная зависимость удельного сопротивления ρ

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha t^\circ),$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при 0°C , t° – температура по шкале Цельсия, α – температурный коэффициент сопротивления.

Сопротивление соединенных проводников:

а) последовательно $R = \sum_{i=1}^N R_i$; б) параллельно $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$,

где R_i – сопротивление i -го проводника, N – число проводников.

Законы Кирхгофа

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k,$$

где $\sum_{i=1}^N I_i$ – алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле; $\sum_{i=1}^N I_i R_i$ – алгебраическая

сумма падений напряжений контура; $\sum_{k=1}^M \varepsilon_k$ – алгебраическая сумма

ЭДС источников, включенных в контур; N – количество сопротивлений контура; M – число источников ЭДС.

Работа тока A

$$A = I \cdot U \cdot t, \quad A = I^2 R \cdot t, \quad A = \frac{U^2}{R} \cdot t,$$

где t – время движения зарядов по проводнику.

Мощность тока P

$$P = I \cdot U, \quad P = I^2 R, \quad P = \frac{U^2}{R}.$$

Закон Джоуля-Ленца для $I = \text{const}$

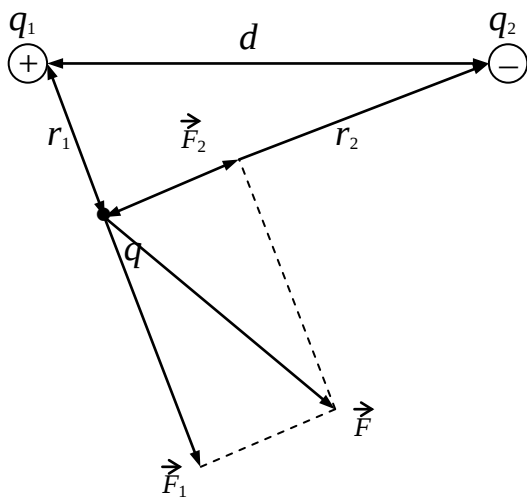
$$dQ = I^2 \cdot R \cdot dt$$

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t,$$

Примеры решения задач

Задача 2.1. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 1 \text{ мкКл}$ и $q_2 = -q_1$ равно 10 см. Определить силу F , действующую на точечный заряд $q = 0,1 \text{ мкКл}$, удаленный на $r_1 = 6 \text{ см}$ от первого и на $r_2 = 8 \text{ см}$ от второго зарядов.

Решение. По рисунку треугольники расстояний и сил подобны и прямо-



угольны (для Δ расстояний: $d^2 = r_1^2 + r_2^2$, $100 = 36 + 64$).

По принципу суперпозиции сила, действующая на заряд q , является векторной суммой сил, действующих со стороны зарядов q_1 и q_2 , т.е.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

а так как $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$, то

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (1)$$

Сила F_1 – взаимодействие заряда q с q_1 определяется

$$F_1 = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}.$$

Сила F_2 – взаимодействие заряда q с q_2 определяется

$$F_2 = \frac{qq_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

Подставляя F_1 и F_2 в (1) получим

$$F = \sqrt{\left(\frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{qq_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\right)^2} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}}, \quad (2)$$

(т.к. $|q_1| = |q_2|$).

Переводим данные в единицы системы СИ

$$q_1 = |q_2| = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}, \quad d = 0,1 \text{ м},$$

$$r_1 = 0,06 \text{ м}, \quad r_2 = 0,08 \text{ м},$$

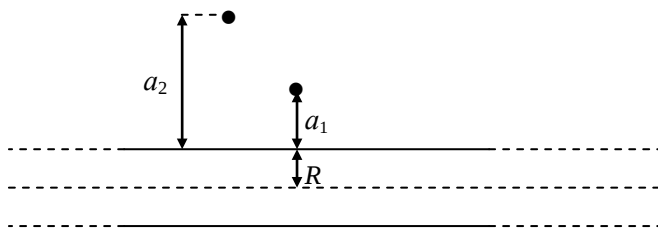
$$q = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Подставляем данные задачи в выражение (2) и рассчитываем силу

$$F = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{1}{36 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{64 \cdot 10^{-4}}} = 2,87 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Задача 2.2. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 20$ нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек поля, находящихся на расстояниях $a_1 = 0,5$ см и $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Решение. Для определения разности потенциалов используем соотношение между напряженностью поля и градиентом потенциала.



$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Для симметричного поля, таким является поле заряженного цилиндра, это соотношение можно записать в виде:

$$E = - \frac{d\varphi}{dr} \quad \text{отсюда} \quad d\varphi = -E dr. \quad (1)$$

Интегрируя выражение (1)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{r_1}^{r_2} E dr, \quad (2)$$

где r – расстояние от оси цилиндра до точек.

Так как точки взяты вблизи средней части длинного цилиндра, можно воспользоваться формулой напряженности поля бесконечно длинного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Подставив E в формулу (2), получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{или}$$

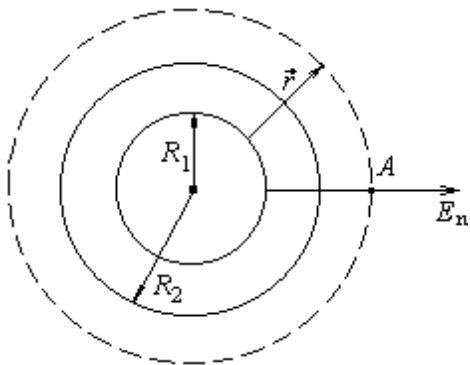
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $r_1 = R + a_1$, $r_2 = R + a_2$ и переводя данные задачи в единицы СИ

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{6,28 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,5 \cdot 10^{-2}} = \frac{2 \cdot 10^4}{628 \cdot 8,85} \ln 2 = 250 \text{ В}.$$

Задача 2.3. Две концентрические металлические сферы радиусами $R_1 = 6$ см, $R_2 = 10$ см заряжены с поверхностными плотностями заряда σ_1 и σ_2 . Напряженность поля в точке на расстоянии $r = 15$ см от центра сферы равна 200 В/м. Определить заряд второй сферы, если $\sigma_1 = 22$ нКл/м².

Решение. Для решения задачи применим теорему Остроградского Гаусса.



$$\oint E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (1)$$

где левая часть уравнения – поток вектора напряженности, равный интегралу по замкнутой поверхности от произведения проекции напряженности поля в данной точке на элемент Гауссовой поверхности, а правая – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри Гауссовой поверхности.

Поверхность Гаусса должна быть интегрируемая, симметричная источнику поля и проходить через точку, для которой определяется напряженность. В данной задаче через точку, для которой напряженность известна.

Этим условиям соответствует сфера, центр которой совпадет с центром концентрических заряженных сфер, имеющая радиус 15 см (на рисунке штриховая окружность – сечение этой сферы).

Так как напряженность поля в каждой точке этой сферы постоянна и совпадает с нормалью к поверхности, то искомая напряженность $E = E_n = \text{const}$.

После интегрирования уравнения (1), получим

$$E \cdot S = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

отсюда
$$q_2 = E \cdot S \cdot \epsilon_0 - q_1, \quad (3)$$

где S – площадь поверхности Гаусса, равная $S = 4\pi r^2$; q_1 – заряд на сфере с радиусом r_1 , равный $q_1 = \sigma_1 \cdot S_1$ (σ_1 – плотность заряда, S_1 – площадь первой сферы, равная $4\pi R_1^2$).

Подставим в уравнение (3) площадь первой сферы и Гауссовой поверхности, получим

$$q_2 = E \cdot 4\pi r^2 \cdot \epsilon_0 - \sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2.$$

Подставим в последнее уравнение данные задачи в единицах СИ и рассчитаем

$$q_2 = 200 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 225 \cdot 10^{-4} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} - 22 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 36 \cdot 10^{-4}$$

$$q_2 = -0,5 \text{ нКл}$$

Задача 2.4а. Два точечных заряда $q_1 = 6 \text{ нКл}$ и $q_2 = 3 \text{ нКл}$ находятся на расстоянии $d = 60 \text{ см}$ друг от друга. Определить работу внешних сил при уменьшении расстояния между зарядами вдвое.

Решение. Положим, что первый заряд q_1 остается неподвижным, а второй заряд q_2 под действием внешних сил перемещается в поле, созданном зарядом q_1 , приближаясь к нему.

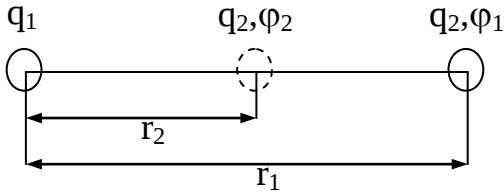
Работа A' внешних сил по перемещению заряда q_2 из точки 1, потенциал которой φ_1 в точку 2, потенциал которой φ_2 , равна по модулю и противоположна по знаку работе A сил поля по перемещению заряда между этими же точками $A' = -A$.

Работа сил поля определяется соотношением $A = q_2(\varphi_1 - \varphi_2)$, тогда работа внешних сил может быть записана

$$A' = -q_2(\varphi_1 - \varphi_2) = q_2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1)$$

Потенциал точек 1 и 2 выразятся формулами

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$



Подставляя выражения для потенциалов φ_1 и φ_2 в формулу (1), получим

$$A' = q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (2)$$

Переводим данные задачи в систему СИ

$$q_1 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ кл}, \quad q_2 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ кл}.$$

$$\text{Учтем, что } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$

$$d = r_1 = 0,6 \text{ м}, \quad r_2 = \frac{d}{2} = 0,3 \text{ м},$$

подставляем в конечную формулу (2) и, вычисляя, найдем

$$A' = 9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{1}{0,3} - \frac{1}{0,6} \right) \approx 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Задача 2.46. Электрон со скоростью $v = 1,83 \cdot 10^6$ м/с влетел в однородное электрическое поле в направлении, противоположном вектору напряженности поля. Какую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы обладать энергией $E = 13,6$ эВ? [Электрон-вольт (эВ) – энергия, которую приобретает частица, несущая элементарный заряд т.е. заряд электрона и прошедшая разность потенциалов 1 В].

Решение. Электрон в поле должен пройти такую разность потенциалов, чтобы приобретенная им энергия W в сумме с начальной кинетической энергией W_{k_0} составила энергию E , то есть

$$W = W_{k_0} + \Delta W \quad (1)$$

Кинетическая энергия электрона равна

$$\Delta W = \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса электрона, v – его начальная скорость.

Энергия, приобретенная в поле, выражается соотношением

$$\Delta W = e \cdot U,$$

где e – заряд электрона.

Подставляем выражения для T и W в уравнение (1), получим формулу,

$$W = eU + \frac{mv^2}{2},$$

из которой следует конечная формула

$$U = \frac{2W - mv^2}{2e}.$$

Вычисления производим в единицах СИ $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ кл, $v = 1,86 \cdot 10^6$ м/с, $E = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot \text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 4,15$ В.

Произведя вычисления, получим

$$U = 4,1 \text{ В.}$$

Задача 2.5. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U = 280$ В. Площадь пластин $S = 0,01 \text{ м}^2$, поверхностная плотность заряда на пластинах $\sigma = 495 \text{ нКл/м}^2$. Определить напряженность E поля внутри конденсатора, расстояние d между пластинами, емкость C конденсатора, энергию W конденсатора, силу притяжения F пластин конденсатора.

Решение. 1. Напряженность поля внутри конденсатора определяется по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}.$$

В задаче не сказано о среде внутри конденсатора, предполагаем, что конденсатор воздушный и тогда $\epsilon = 1$, переводим плотность заряда в единицы системы СИ $\sigma = 495 \cdot 10^{-9} \text{ кл/м}^2$ и вычисляем

$$E = \frac{495 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 55,9 \cdot 10^3 \approx 5,6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$$

(ϵ_0 – электрическая постоянная, равная $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ м/Ф}$).

2. Расстояние между пластинами d найдем из соотношения между напряжением U и напряженностью E .

$$E = \frac{U}{d}, \text{ откуда } d = \frac{U}{E},$$

подставляем данные и решаем

$$d = \frac{280}{5,6 \cdot 10^4} = 50 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

3. Емкость плоского конденсатора по определению равна

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 \cdot S}{d}.$$

Подставляем данные задачи и определяем

$$C = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01}{5 \cdot 10^{-3}} = 1,77 \cdot 10^{-11} \text{ Ф.}$$

4. Энергия плоского конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Подставляем данные и вычисляем

$$W = \frac{1,77 \cdot 10^{-11} \cdot (280)^2}{2} = 693,8 \cdot 10^{-9} \approx 7 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

5. Силу взаимодействия между пластинами можно как действие поля одной пластины на заряд другой пластины, то есть

$$F = q \cdot E_1,$$

где q – заряд одной пластины, равный $q = \sigma \cdot S$,

E_1 – напряженность поля одной пластины, равная половине напряженности поля конденсатора.

Подставив данные, получим:

$$F = \sigma \cdot S \cdot \frac{E}{2} = 495 \cdot 10^{-9} \cdot 0,01 \cdot \frac{5,6 \cdot 10^4}{2} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

Можно рассчитать силу взаимодействия по соотношению W и F для однородного поля (поле внутри конденсатора однородно)

$$|F| = \frac{W}{d}.$$

После подстановки данных получим

$$|F| = \frac{7 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

Задача 2.6. К батарее аккумуляторов, ЭДС которой равна 2 В и с внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом, присоединен проводник. Определить сопротивление R проводника, при котором выделяемая в нем мощность максимальна и величину этой мощности.

Решение. В замкнутой цепи мощность, выделяемая на внешнем участке можно рассчитать по уравнению

$$P = I \cdot U = I^2 R = \varepsilon^2 \cdot \frac{R}{(R + r)^2}, \quad (1)$$

так как ток в такой цепи рассчитывается по закону Ома $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$.

Для расчета максимальной мощности, нужно уравнение (1) продифференцировать по R , приравнять полученное выражение к нулю, то есть исследовать функцию на экстремум

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \cdot \frac{r^2 - R^2}{(R + r)^2} = 0 \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует $r^2 = R^2$ или $R = r$, таким образом, максимальную мощность на внешнем участке цепи можно получить при условии

$$R_{P_{\max}} = r.$$

Следовательно, внешнее сопротивление равно внутреннему сопротивлению источника при $P_{\max}$. Из условия задачи $R_{P_{\max}} = 0,5$ Ом.

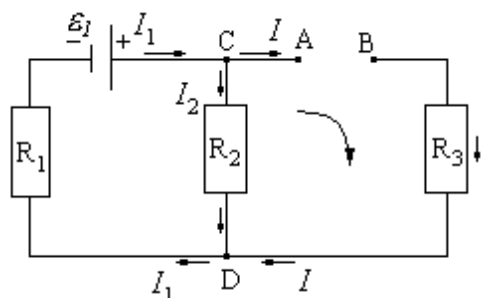
Это значение подставляем в уравнение (1)

$$P_{\max} = \varepsilon^2 \cdot \frac{R_{P_{\max}}}{(R_{P_{\max}} + r)^2}$$

и получаем

$$P_{\max} = 4 \cdot \frac{0,5}{(0,5 + 0,5)^2} = 2 \text{ Вт.}$$

Задача 2.7. Три сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$ и $R_3 = 3 \text{ Ом}$, а так же



источник тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 1,4 \text{ В}$ соединены, как показано на рисунке. Определить ЭДС источника тока, который надо включить в цепь между точками А и В, так чтобы через сопротивление R_3 шел ток силой $I = 1 \text{ А}$ в направлении, указанном стрелкой. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

Решение. Определим неизвестные величины с помощью законов Кирхгофа. Выберем направления токов и обхода контура по часовой стрелке, как показано на рисунке.

В схеме – два узла С и D. По первому закону Кирхгофа запишем уравнение для узла С

$$I_1 - I - I_2 = 0. \quad (1)$$

При составлении этого уравнения соблюдается правило знаков: ток, входящий к узлу, входит в уравнение со знаком плюс (I_1), ток, отходящий от узла – со знаком минус (I и I_2).

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа соблюдаются следующие правила знаков:

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контура, соответствующее произведение ($I \cdot R$) входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае произведение ($I \cdot R$) входит в уравнение со знаком минус;

б) если ЭДС при обходе контура по выбранному направлению приходится идти от минуса к плюсу внутри источника тока, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

В данной задаче три неизвестных I_2 , I_3 и ЭДС второго источника ε_2 , поэтому к уравнению (1) нужно добавить еще два уравнения.

Выберем два контура САВDC через сопротивление R_2 и контур САВDC через сопротивление R_1 .

Следуя правилам написания уравнений, запишем для выбранных контуров следующие уравнения:

$$I \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = \varepsilon_2 \quad (2)$$

$$I \cdot R_3 + I_1 \cdot R_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3)$$

Решим совместно три уравнения:

из уравнения (2) найдем
$$I_2 = \frac{I \cdot R_3 - \varepsilon_2}{R_2},$$

из уравнения (3) найдем
$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I \cdot R_3}{R_1},$$

подставим в (1) и получим:

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I \cdot R_3}{R_1} - I - \frac{I \cdot R_3 - \varepsilon_2}{R_2} = 0.$$

Последнее уравнение решим относительно ε_2 с подстановкой данных задачи и получим значение неизвестной ЭДС, равной $\varepsilon_2 = 5,4 \text{ В}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач						
	1	2	3	4	5	6	7
0	2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060	2.070
1	2.011	2.021	2.031	2.041	2.051	2.061	2.071
2	2.012	2.022	2.032	2.042	2.052	2.062	2.072
3	2.013	2.023	2.033	2.043	2.053	2.063	2.073
4	2.014	2.024	2.034	2.044	2.054	2.064	2.074
5	2.015	2.025	2.035	2.045	2.055	2.065	2.075
6	2.016	2.026	2.036	2.046	2.056	2.066	2.076
7	2.017	2.027	2.037	2.047	2.057	2.067	2.077
8	2.018	2.028	2.038	2.048	2.058	2.068	2.078
9	2.019	2.029	2.039	2.049	2.059	2.069	2.079

Задачи для самостоятельного решения

2.010. Расстояние между зарядами $q_1 = 100$ нКл и $q_2 = -50$ нКл равно $d = 10$ см. Определить силу F , действующую на заряд $q_3 = 1$ мКл, отстоящий на $r_1 = 12$ см от заряда q_1 и на $r_2 = 10$ см от заряда q_2 .

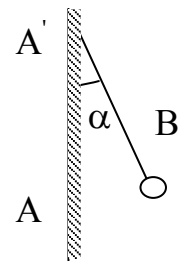
2.011. Два шарика массой $m = 1$ г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити $l = 10$ см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол $\alpha = 60^\circ$?

2.012. Три одинаковых точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со сторонами $a = 10$ см. Определить модуль и направление силы F , действующей на один из зарядов со стороны двух других.

2.013. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α . Какова плотность ρ масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³, диэлектрическая проницаемость масла $\epsilon = 2,2$.

2.014. Четыре одинаковых заряда $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 40$ мКл закреплены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Определить силу F , действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных.

2.015. На рисунке AA' – заряженная бесконечная плоскость с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 40$ мКл/м² и B – одноимённо заряженный шарик с массой $m = 1$ г и зарядом $q = 1$ нКл. Какой угол α с плоскостью AA' образует нить, на которой висит шарик?



2.016. Определить силу F электростатического отталкивания между ядром атома натрия и бомбардирующим его протоном, считая, что протон подошел к ядру атома натрия на расстояние $r = 6 \cdot 10^{-14}$ м. Заряд ядра натрия в 11 раз больше заряда протона. Влиянием электронной оболочки атома натрия пренебречь.

2.017. Два точечных заряда $q_1 = -50$ нКл и $q_2 = 100$ нКл находятся на расстоянии $d = 20$ см друг от друга. Определить силу F , действующую на заряд $q_3 = -10$ нКл, удаленный от обоих зарядов на одинаковое расстояние, равное d .

2.018. Два шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0 = 0,4$ мкКл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол $2\alpha = 60^\circ$. Определить массу m каждого шарика, если расстояние от центра шарика до точки подвеса $l = 20$ см.

2.019. Расстояние d между двумя точечными зарядами $q_1 = 2$ нКл и $q_2 = 4$ нКл равно 60 см. Определить точку, в которую нужно поместить третий заряд q_3 так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Определить заряд q_3 и его знак. Устойчивое или неустойчивое будет равновесие?

2.020. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 10$ нКл и $q_2 = -20$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 20$ см друг от друга. Определить напряжённость E и потенциал φ поля в точке, удалённой от первого заряда на $r_1 = 30$ см и от второго на $r_2 = 50$ см.

2.021. Расстояние d между двумя точечными положительными зарядами $q_1 = 9q$ и $q_2 = q$ равно 8 см. На каком расстоянии r от первого заряда находится точка, в которой напряжённость E поля зарядов равна нулю? Чему равен потенциал зарядов в этой точке?

2.022. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими одинаковый равномерно распределённый по площади заряд ($\sigma = 1$ нКл/м²). Определить напряжённость E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряжённости вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

2.023. Поле создано точечным зарядом $q = 1$ нКл. Определить потенциал φ и напряжённость E поля в точке, удалённой от заряда на расстояние $r = 20$ см.

2.024. Заряды $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = -1$ мкКл находятся на расстоянии $d = 10$ см. Определить напряжённость E и потенциал φ поля в точке, удалённой на расстояние $r = 10$ см от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд перпендикулярно направлению от q_1 к q_2 .

2.025. Поле создано двумя точечными зарядами $+2q$ и $-q$, находящимися на расстоянии $d = 12$ см друг от друга. Найти точку на прямой, соединяющей заряды, в которой потенциал φ поля равен нулю. Определить напряжённость E поля в этой точке.

2.026. Две параллельные заряженные плоскости, поверхностные плотности заряда которых $\sigma_1 = 2 \text{ мКл/м}^2$ и $\sigma_2 = -0,8 \text{ мКл/м}^2$, находятся на расстоянии $d = 0,6 \text{ см}$ друг от друга. Определить разность потенциалов U между плоскостями.

2.027. В вершинах квадрата со стороной $a = 10 \text{ см}$ находятся заряды $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 10 \text{ мКл}$. Определить напряжённость E и потенциал φ поля, создаваемого этими зарядами в центре квадрата.

2.028. Точечные заряды $q_1 = 3 \text{ мКл}$ и $q_2 = 6 \text{ мКл}$ находятся на расстоянии $d = 10 \text{ см}$ друг от друга. Определить напряженность E и потенциал φ поля в точке, удаленной от первого заряда на расстоянии $r_1 = 8 \text{ см}$, а от второго – на $r_2 = 6 \text{ см}$.

2.029. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10 \text{ нКл/м}^2$. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от нее на расстояние $a = 10 \text{ см}$.

2.030. На металлической сфере радиусом $R = 10 \text{ см}$ находится заряд $q = 1 \text{ нКл}$. Определить напряженность E электрического поля в точках: 1) на расстоянии $r_1 = 8 \text{ см}$ от центра сферы; 2) на ее поверхности; 3) на расстоянии $r_2 = 15 \text{ см}$ от центра сферы. Построить график зависимости напряженности E от расстояния r .

2.031. Прямой металлический стержень диаметром $d = 5 \text{ см}$ и длиной $l = 4 \text{ м}$ несет равномерно распределенный по его поверхности заряд $q = 500 \text{ нКл}$. Определить напряженность E поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 1 \text{ см}$ от его поверхности.

2.032. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусом $R_1 = 6 \text{ см}$ и $R_2 = 10 \text{ см}$ несут соответственно заряды $q_1 = 1 \text{ нКл}$ и $q_2 = -0,5 \text{ нКл}$. Определить напряженность E электрического поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5 \text{ см}$, $r_2 = 9 \text{ см}$ и $r_3 = 15 \text{ см}$. Построить график зависимости напряженности E от расстояния r .

2.033. В вакууме образовалось скопление зарядов в форме тонкого длинного цилиндра радиуса R с постоянной объемной плотностью ρ . Определить напряженность E электрического поля в точках, отстоящих от оси цилиндра на расстояниях $r_1 < R$ и $r_2 > R$.

2.034. Бесконечно длинная тонкостенная металлическая трубка радиусом $R = 2$ см несет равномерно распределенный по поверхности заряд $\sigma = 1$ нКл/м². Определить напряженность E поля в точках, отстоящих от оси трубки на расстояниях $r_1 = 1$ см и $r_2 = 3$ см. Построить график зависимости напряженности E от расстояния r .

2.035. Сплошной непроводящий шар радиусом R обладает зарядом q , который равномерно распределен по объему. Определить напряженность поля в точках, отстоящих от центра на расстояниях $r_1 < R$ и $r_2 > R$.

2.036. Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 4$ см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\tau_1 = 1$ нКл/м и $\tau_2 = -0,5$ нКл/м. Пространство между трубками заполнено эбонитом. Определить напряженность E поля в точках на расстояниях от оси $r_1 = 1$ см, $r_2 = 3$ см и $r_3 = 5$ см. Построить график зависимости напряженности E от расстояния r .

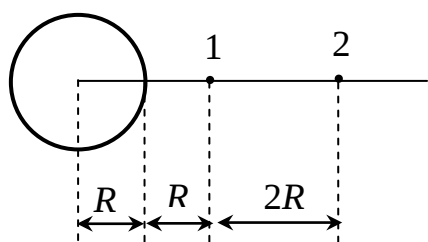
2.037. Шаровой слой, равномерно заряженный по объему с постоянной объемной плотностью $\rho = 1$ нКл/м³, имеет внутренний радиус $R_1 = 3$ см и внешний $R_2 = 5$ см. Определить напряженность E электрического поля в точках, отстоящих от центра шарового слоя на расстояниях $r_1 = 2$ см, $r_2 = 4$ см и $r_3 = 6$ см. Построить график зависимости напряженности E от r .

2.038. На двух коаксиальных бесконечных цилиндрах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 . Определить напряженность в трех случаях: а) $r < R$; б) $R < r < 2R$; в) $r > 2R$ и указать направление вектора напряженности. Принять $\sigma_1 = -2\sigma$; $\sigma_2 = \sigma$, где $\sigma = 50$ нКл/м². Построить график зависимости напряженности E от расстояния r .

2.039. В вакууме образовалось скопление зарядов в форме шара с радиусом $R = 10$ см. Заряд равномерно распределен по объему с объемной плотностью $\rho = 1$ нКл/м³. Определить напряженность E электростатического поля в точках, находящихся на расстояниях: а) $r_1 = 6$ см; б) $r_2 = 10$ см; в) $r_3 = 12$ см. Построить график зависимости напряженности E от расстояния r .

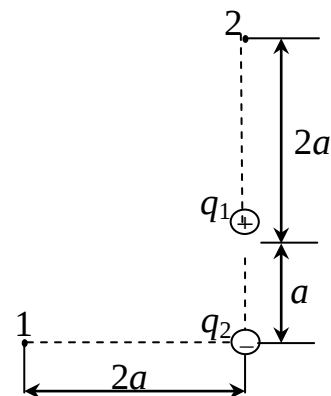
2.040. Два металлических шарика радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см несут заряды $q_1 = 40$ нКл и $q_2 = -20$ нКл соответственно. Определить энергию W , которая выделится при разряде, если шары соединить проводником.

2.041. При перемещении заряда $q = 20$ нКл между двумя точками поля внешними силами была совершена работа $A = 4$ мкДж. Определить работу A_1 сил поля и разность $\Delta\phi$ потенциалов этих точек поля.

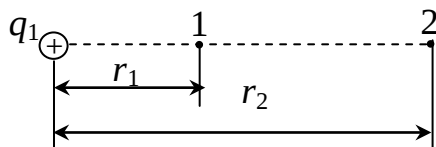


2.042. Электрическое поле создано заряженным проводящим шаром, потенциал которого $\phi = 300$ В. Определить работу сил поля по перемещению заряда $q = 0,2$ мкКл из точки 1 в точку 2, как показано на рисунке.

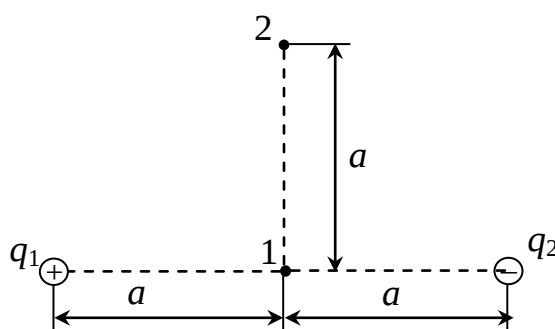
2.043. Электрическое поле создано зарядами $q_1 = 2$ мкКл и $q_2 = -2$ мкКл, находящимися на расстоянии $a = 10$ см друг от друга, определить работу сил поля, совершаемую при перемещении заряда $q = 0,5$ мкКл из точки 1 в точку 2.



2.044. Электрическое поле создано точечным положительным зарядом $q_1 = 6$ нКл. Положительный заряд q_2 переносится из точки 1 этого поля в точку 2. Определить изменение потенциальной энергии ΔW приходящееся на единицу переносимого заряда, если $r_1 = 20$ см и $r_2 = 50$ см.

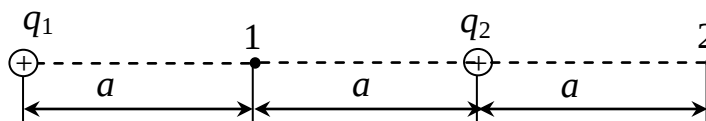


2.045. Определить работу сил поля, созданного двумя точечными зарядами $q_1 = 10,0$ нКл и $q_2 = -2$ нКл, при переносе заряда $q = 1$ нКл из точки 1 в точку 2 поля, если $a = 6$ см.

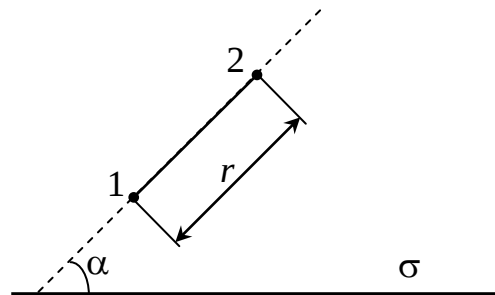


2.046. Точечные заряды $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = 0,1$ мкКл находятся на расстоянии $r_1 = 10$ см друг от друга. Определить работу A сил поля при удалении второго заряда от первого на расстояние: а) $r_2 = 10$ м; б) $r_3 = \infty$.

2.047. Электрическое поле создано двумя одинаковыми положительными зарядами q_1 и q_2 . Определить работу A сил поля по перемещению заряда $q = 10$ нКл из точки 1 с потенциалом $\phi_1 = 300$ В в точку 2.



2.048. Электрическое поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью $\sigma = 2$ мКл/м². В этом поле вдоль прямой, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с плоскостью, перемещается точечный положительный заряд $q = 10$ нКл. Определить работу A сил поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2, если расстояние между этими точками $r = 20$ см.



2.049. Определить работу A по перемещению точечного положительного заряда $q = 40$ нКл из точки, находящейся на расстоянии $r_1 = 1$ м, в точку, на расстоянии $r_2 = 1$ см от поверхности сферы радиусом $R = 2$ см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 100$ нКл/м².

2.050. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0,01$ м², расстояние между ними $d_1 = 1$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 0,1$ кВ. Пластины раздвигаются до расстояния $d_2 = 25$ мм. Определить энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключен; б) отключен.

2.051. Ёмкость плоского конденсатора $C = 100$ пФ. Диэлектрик – фарфор. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 600$ В и отключили от источника напряжения. Определить работу, которую нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора. Трением пренебречь.

2.052. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 100$ см², расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 300$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения, пространство между пластинами заполняется эбонитом. Определить: а) разность

потенциалов между пластинами после заполнения; б) поверхностную плотность заряда на пластинах до и после заполнения.

2.053. Имеется плоский воздушный конденсатор, площадь каждой обкладки которого S . Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы медленно увеличить расстояние между обкладками от x_1 до x_2 , если при этом поддерживать неизменным: а) заряд конденсатора, равный q ; б) напряжение на конденсаторе, равное U .

2.054. К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов $U_1 = 500$ В и отключённому от источника напряжения, присоединили параллельно второй конденсатор таких же размеров и формы, но с другим диэлектриком (стекло). Определить диэлектрическую проницаемость стекла, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до $U_2 = 70$ В.

2.055. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (фарфор), объём которого $V = 100$ см³. Поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma = 8,85 \cdot 10^{-9}$ Кл/м². Определить работу A , которую необходимо совершить для того, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора, после отключения его от источника. Трением диэлектрика о пластины конденсатора пренебречь.

2.056. Плоский воздушный конденсатор ёмкостью $C = 10$ пФ заряжен до разности потенциалов $U = 300$ В. После отключения от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в 5 раз. Определить: а) разность потенциалов на обкладках конденсатора после того, как их раздвинули; б) работу внешних сил по раздвижению пластин.

2.057. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Энергия конденсатора в этом случае равна $W = 20$ мкДж. После того, как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, $A = 70$ мкДж. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ диэлектрика.

2.058. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0,01$ м², расстояние между ними $d_1 = 2$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Определить: а) напряжённость поля конденсатора,

если, не отключая его от источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 5$ мм; б) энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин.

2.059. Пластины плоского конденсатора площадью $S = 1$ см² каждая, притягиваются друг к другу с силой $F = 10$ мН. Пространство между пластинами заполнено слюдой. Определить: а) заряды пластин; б) напряжённость E поля между пластинами; в) объёмную плотность энергии w поля.

2.060. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС батареи $\varepsilon = 24$ В, внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность $P = 80$ Вт. Определить силу тока I в цепи и КПД нагревателя η .

2.061. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1 = 8$ Вт, при силе тока $I_2 = 1$ А – соответственно $P_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление r батареи.

2.062. ЭДС батареи аккумуляторов $\varepsilon = 12$ В, сила тока короткого замыкания $I = 5$ А. Определить наибольшую мощность P , которую можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей.

2.063. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение на зажимах лампочки равно $U = 40$ В, сопротивление реостата $R = 10$ Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 120$ Вт. Определить силу тока в цепи.

2.064. Элемент с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнее сопротивление R . Наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи, $P = 9$ Вт. В цепи течет ток $I = 3$ А. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление элемента.

2.065. Две лампочки рассчитаны на напряжение $U = 220$ В, их мощность $P_{01} = 100$ Вт и $P_{02} = 200$ Вт и сопротивления $R_1 = 484$ Ом и $R_2 = 2420$ Ом. Определить мощности P_1 и P_2 , выделяемые в каждой лампочке, если их параллельно присоединить к источнику тока с ЭДС 10 В, внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом.

2.066. При включении электромотора в сеть с напряжением $U = 220$ В он потребляет ток $I = 5$ А. Определить мощность, потребляемую мотором, и его КПД, если сопротивление обмотки мотора $R = 6$ Ом.

2.067. К батарее аккумуляторов, ЭДС которой равна 2 В и внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность P , которая при этом выделяется в проводнике.

2.068. Батарея с ЭДС 240 В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнута на внешнее сопротивление $R = 23$ Ом. Определить полную мощность $P_{\text{полн}}$, полезную $P_{\text{полез}}$ и КПД батареи η .

2.069. Определить: 1) внутреннее сопротивление r генератора, если известно, что мощность P , выделяющаяся во внешней цепи, одинакова при внешних сопротивлениях $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 0,2$ Ом; 2) КПД генератора в каждом из этих случаев.

2.070. Две батареи аккумуляторов ($\varepsilon_1 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом; $\varepsilon_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом) и реостат ($R = 6$ Ом) соединены, как показано на рисунке 2.70. Определить силу тока в батареях и реостате.

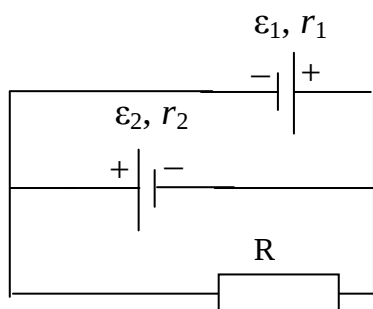


рис. 2.70

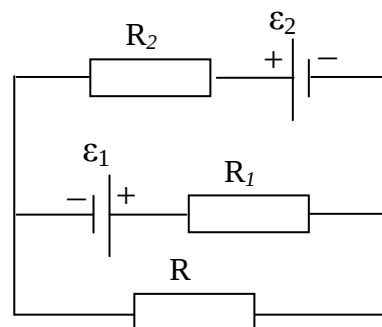


рис. 2.71

2.071. Определить значение и направление тока через сопротивление $R = 5$ Ом в схеме на рис. 2.71, если ЭДС источников $\varepsilon_1 = 1,5$ В, $\varepsilon_2 = 3,7$ В и сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

2.072. Определить силу тока I_3 в резисторе сопротивлением R_3 и напряжением U_3 на концах резистора, если $\varepsilon_1 = 4$ В, $\varepsilon_2 = 3$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 1$ Ом. Внутренним сопротивлением источников пренебречь, рис. 2.72.

2.073. Батареи имеют ЭДС $\varepsilon_1 = 2$ В и $\varepsilon_2 = 3$ В, сопротивление амперметра $R_A = 0,5$ кОм. Падение потенциала на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$ В (ток через R_2 направлен сверху вниз). Определить ток, текущий через амперметр на рис. 2.73.

2.074. В схеме на рис. 2.74, $\varepsilon_1 = 2$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В, $R_1 = 0,50$ Ом и падение потенциала на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$ В (ток через R_2 направлен справа налево). Определить показание амперметра. Внутренним сопротивлением элементов и амперметра пренебречь.

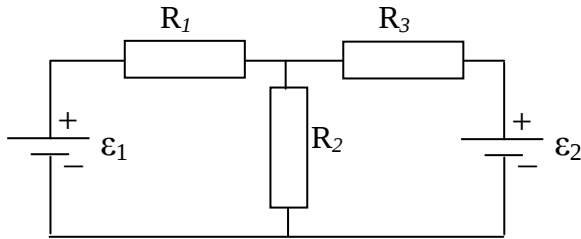


рис. 2.72

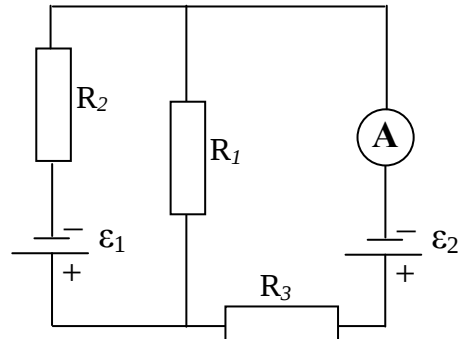


рис. 2.73

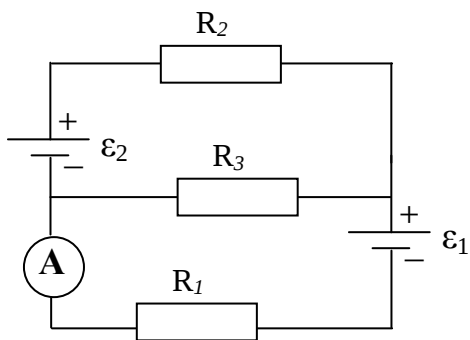


рис. 2.74

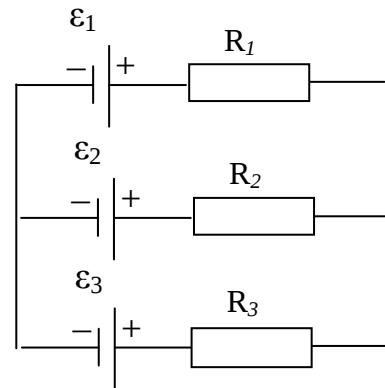


рис. 2.75

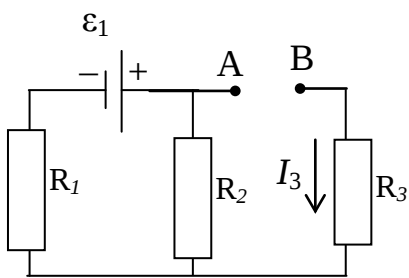


рис. 2.76

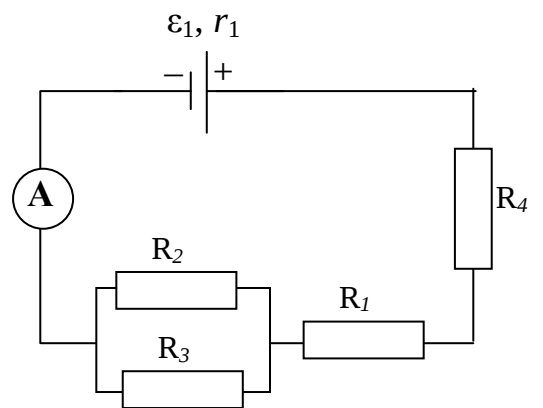


рис. 2.77

2.075. Три источника тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 11$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В и $\varepsilon_3 = 6$ В и три реостата с сопротивлением $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом и $R_3 = 2$ Ом соединены, как показано на рис. 2.75. Определить силы токов I в реостатах. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

2.076. Три сопротивления $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом и $R_3 = 3$ Ом, а также источник тока с ЭДС равной 1,4 В соединены, как показано на рис. 2.76. Определить ЭДС источника тока, который надо подключить в цепь между точками А и В, чтобы через сопротивление R_3 шел ток силой $I = 1$ А в направлении, указанном стрелкой.

Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

2.077. На рис. 2.77, ЭДС батареи $\varepsilon = 120$ В, сопротивления $R_3 = 20$ Ом и $R_4 = 25$ Ом. Падение напряжения на сопротивлении R_1 равно $U_1 = 40$ В. Амперметр показывает ток $I = 2$ А. Определить сопротивление R_2 .

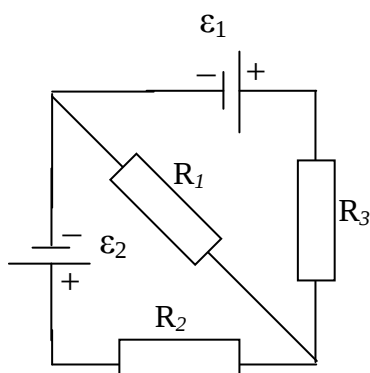


рис. 2.78

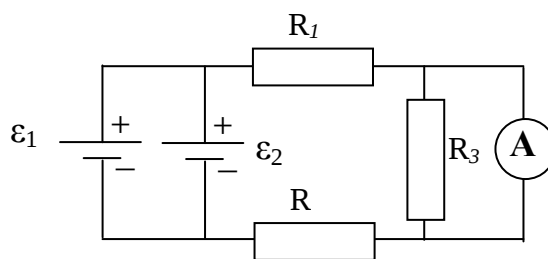


рис. 2.79

2.078. В схеме на рис. 2.78: $\varepsilon_1 = 2,1$ В, $\varepsilon_2 = 1,9$ В, $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = 10$ Ом и $R_3 = 10$ Ом. Определить силу тока во всех участках цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

2.079. Элементы имеют ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1,5$ В и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0,5$ Ом, сопротивления $R_1 = R_2 = 2$ Ом и $R_3 = 10$ Ом, сопротивление амперметра $R_A = 3$ Ом. Определить ток, текущий через амперметр на рис. 2.79.

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.

Основные понятия и формулы

Закон Био–Савара–Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} [d\vec{l} \cdot \vec{r}] \cdot \frac{1}{r^3} \quad \text{или} \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{l \cdot \sin \alpha}{r^2} \cdot dl,$$

где dB – магнитная индукция поля, создаваемого элементом провода длиной dl с током I ; $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция; α – угол между радиус-вектором и направлением тока в элементе провода.

Связь магнитной индукции B с напряженностью H магнитного поля

$$B = \mu\mu_0 H,$$

где μ – магнитная проницаемость изотропной среды; μ_0 – магнитная постоянная.

В вакууме $\mu = 1$, и тогда магнитная индукция в вакууме

$$B = \mu_0 H.$$

Магнитная индукция поля прямого бесконечного тока

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r},$$

где r – расстояние от оси провода до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током (см. рисунок 1),

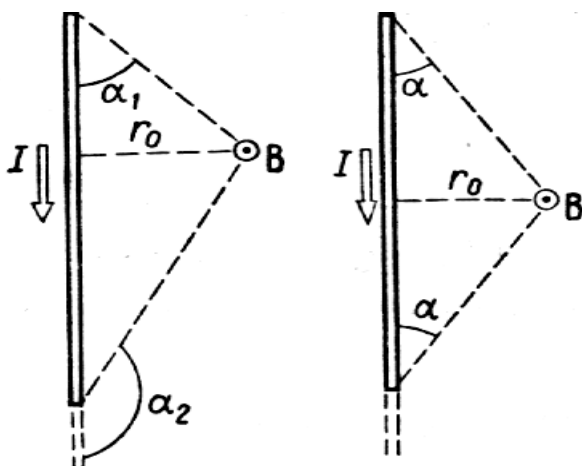


Рис. 1.

Рис. 2.

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Обозначения ясны из рисунка. Направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ обозначено точкой – это значит, что вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам.

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (см. рисунок 2), $-\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 = \cos \alpha$, тогда

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0} \cdot \cos \alpha.$$

Магнитная индукция в центре кругового тока

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

где R – радиус витка.

Магнитная индукция на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

где h – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля соленоида

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

где $n = \frac{N}{l}$ – отношение числа витков соленоида к его длине.

Сила, действующая на провод с током в магнитном поле (закон Ампера),

$$\vec{F} = I[\vec{l} \vec{B}], \quad \text{или} \quad F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha,$$

где l – длина провода; α – угол между направлением тока в проводе и вектором магнитной индукции B .

Это выражение справедливо для однородного магнитного поля и прямого отрезка провода. Если поле неоднородно и провод не является прямым, то закон Ампера можно применять к любому элементу провода в отдельности:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

Магнитный момент плоского контура с током

$$\vec{p}_m = \vec{n} \cdot I \cdot S,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура; I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь контура.

Механический (вращательный) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad \text{или} \quad M = p_m B \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$

Сила Лоренца – сила, с которой магнитное поле действует на движущуюся частицу зарядом q

$$\vec{F} = q[\vec{v} \vec{B}], \quad \text{или} \quad F = q \cdot v \cdot B \sin \alpha,$$

где $\vec{v}$ – скорость заряженной частицы; α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Если частица находится одновременно в электрическом и магнитном полях, то под силой Лоренца понимают выражение

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

Магнитный поток:

а) в случае однородного магнитного поля и плоской поверхности

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha, \quad \text{или} \quad \Phi = B_n S,$$

где S – площадь контура; α – угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции;

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

(интегрирование ведется по всей поверхности).

Потокосцепление (полный поток)

$$\Psi = N\Phi.$$

Эта формула верна для соленоида и тороида с равномерной намоткой плотно прилегающих друг к другу N витков.

Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi.$$

ЭДС индукции

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Разность потенциалов на концах провода, движущегося со скоростью v в магнитном поле,

$$U = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha,$$

где l – длина провода; α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R}, \quad \text{или} \quad q = \frac{N\Delta\Phi}{R} = \frac{\Delta\Psi}{R},$$

где R — сопротивление контура.

Индуктивность контура

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где $n = \frac{N}{l}$ – отношение числа витков соленоида к его длине; V – объем соленоида.

Энергия магнитного поля

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (отношение энергии магнитного поля соленоида к его объему)

$$\omega = \frac{BH}{2} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

где B – магнитная индукция; H – напряженность магнитного поля.

Закон Ома для цепи переменного тока с последовательным соединением активного R , индуктивного X_L и емкостного X_C сопротивлений

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где R – активное сопротивление, $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление, $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление.

Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления среды.

Оптическая длина пути световой волны

$$L = nl,$$

где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n .

Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_1 - L_2.$$

Зависимость разности фаз $\Delta\varphi$ от оптической разности хода Δ световых волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta,$$

где λ – длина световой волны.

Условие максимального усиления света при интерференции

$$\Delta = \pm k\lambda, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Условие максимального ослабления света

$$\Delta = \pm(2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Оптическая разность хода **световых волн, возникающая при отражении монохроматического света от тонкой пленки,**

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta = 2dn \cdot \cos i_2 \pm \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пленки; n – показатель преломления пленки; i_1 – угол падения; i_2 – угол преломления света в пленке.

Радиус светлых колец Ньютона **в отраженном свете**

$$r_k = \sqrt{(2k - 1) \cdot R \lambda / 2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где k – номер кольца; R – радиус кривизны линзы.

Радиус темных колец Ньютона **в отраженном свете**

$$r_k = \sqrt{k R \lambda}.$$

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) **при дифракции на одной щели,** определяется из условия

$$\alpha \sin \varphi = \pm (2k + 1) \lambda / 2, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где α – ширина щели; k – порядковый номер максимума.

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) **при дифракции света на дифракционной решетке,** определяется из условия

$$d \cdot \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где d – период дифракционной решетки.

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = kN,$$

где $\Delta \lambda$ – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta \lambda$), при которой эти линии могут быть видны отдельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N – полное число щелей решетки.

Формула Вульфа — Брэггов

$$2d \cdot \sin \theta = k \lambda,$$

где θ — угол скольжения (угол между направлением параллельного пучка рентгеновского излучения, падающего на кристалл, и атомной плоскостью в кристалле); d – расстояние между атомными плоскостями кристалла.

Закон Брюстера

$$t q i_B = n_{21},$$

где i_B – угол падения, при котором отразившийся от диэлектрика луч полностью поляризован; n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; I – интенсивность этого света после анализатора; α – угол между направлением колебаний электрического вектора света, падающего на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора (если колебания электрического вектора падающего света совпадают с этой плоскостью, то анализатор пропускает данный свет без ослабления).

Угол поворота плоскости поляризации монохроматического света при прохождении через оптически активное вещество:

а) в твердых телах – $\varphi = \alpha d$,

где α – постоянная вращения; d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

б) в растворах – $\varphi = [\alpha] \rho d$,

где $[\alpha]$ – удельное вращение; ρ – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Задача 3.1а. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C , по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ поля, создаваемого проводниками с током в точке A , отстоящей от оси одного проводника на расстоянии $r_1 = 5$ см, от другого – $r_2 = 12$ см.

Решение. Для нахождения магнитной индукции $\vec{B}$ в точке A воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления магнитных индукций $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

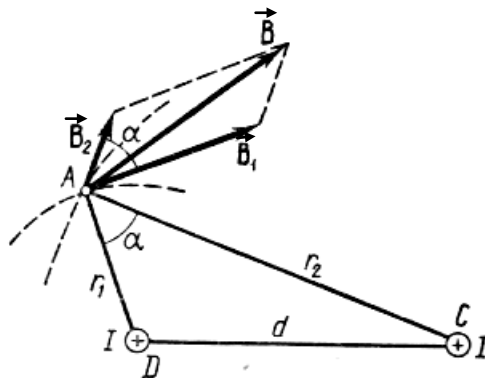
Модуль вектора B может быть найден по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

Магнитные индукции B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от проводов до точки A :

$$B_1 = \mu_0 I / (2\pi r_1), \quad B_2 = \mu_0 I / (2\pi r_2).$$



Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\mu_0 I / (2\pi)$ за знак корня, получаем

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos \alpha}. \quad (2)$$

Вычислим $\cos \alpha$. Заметив, что $\alpha = \angle DAC$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha,$$

где d — расстояние между проводами. Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}; \quad \cos \alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40}.$$

Подставим в формулу (2) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{1}{(0,05)^2} + \frac{1}{(0,12)^2} + \frac{2}{0,05 \cdot 0,12} \cdot \frac{23}{40}} \text{ Тл} = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 308 \text{ мкТл}.$$

$$B = 308 \text{ мкТл}.$$

Задача 3.16. Бесконечно длинный провод изогнут так, как это изображено на рис.1. Радиус R дуги окружности равен 10см. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ поля, создаваемого в точке O током $I = 80$ А, текущим по этому проводу.

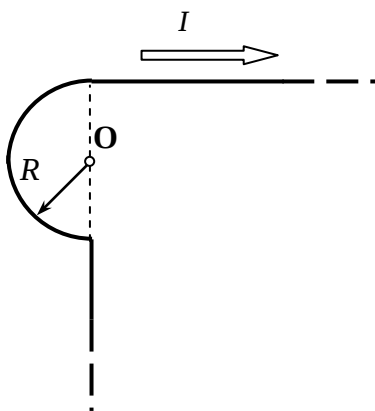


Рис. 1

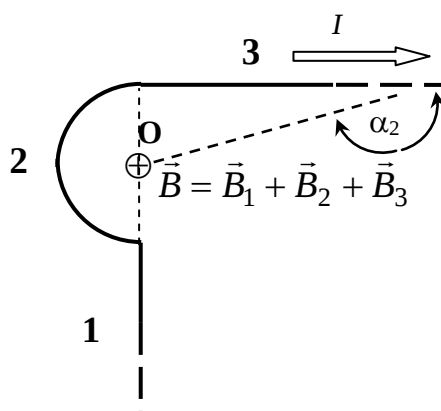


Рис. 2

Решение. Магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей: $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$. В нашем случае провод можно разбить на три части (рис. 2): два прямолинейных провода (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиуса R , то есть

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

где $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ — магнитные индукции в точке O , создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках провода.

Так как точка О лежит на оси провода 1, то $\vec{B}_1 = 0$ и тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Учитывая, что векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ направлены по одной прямой, в соответствии с правилом буравчика, перпендикулярно плоскости чертежа от нас, то геометрическое суммирование можно заменить алгебраическим:

$$B = B_2 + B_3.$$

Магнитную индукцию B_2 найдем, воспользовавшись выражением для магнитной индукции в центре кругового тока:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

В нашем случае магнитное поле в точке О создается лишь половиной такого кругового тока, поэтому

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Магнитную индукцию B_3 найдем, воспользовавшись соотношением

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

В нашем случае $r = R$, $\alpha_1 = \pi/2$ ($\cos \alpha_1 = 0$), $\alpha_2 \rightarrow \pi$ ($\cos \alpha_2 = -1$). Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.$$

Используя найденные выражения для B_2 и B_3 , получим

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R},$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\pi + 1).$$

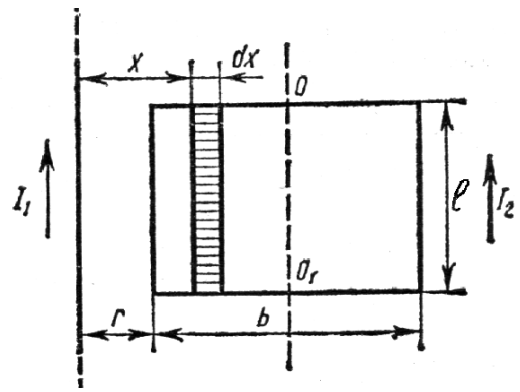
Произведем вычисления

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80}{4\pi \cdot 0,1} (\pi + 1) \text{ Тл} = 3,31 \cdot 10^{-4} \text{ Тл},$$

$$B = 331 \text{ мкТл}.$$

Задача 3.2. Прямой бесконечный ток $I_1 = 5 \text{ А}$ и прямоугольная рамка с током $I_2 = 3 \text{ А}$ расположены в одной плоскости так, что сторона рамки $l = 1 \text{ м}$ параллельна прямому току и отстоит от него на расстоянии $r = 0,1b$, где b – длина другой стороны рамки (см. рисунок). Определить, какую работу необходимо совершить для того, чтобы повернуть рамку на угол $\alpha = 90^\circ$ относительно оси OO_1 , параллельной прямому току и проходящей через середины противоположных сторон рамки b .

Решение. Из условия задачи понятно, что во втором положении магнитный поток через рамку равен нулю $\Phi_2 = 0$. Остается рассчитать магнитный поток Φ_1 через рамку в первом положении. Так как поле прямого бесконечного тока I_1



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

является неоднородным, то решение $\Phi_1 = B_1 S$ (где $S = l b$ – площадь рамки) неверно.

Применим дифференциально-интегральный метод. Разделим площадь рамки на столь узкие полосы, чтобы в пределах каждой такой полосы магнитное поле можно было бы считать однородным. Рассмотрим одну такую полосу шириной dx , находящуюся на расстоянии x от прямого тока I_1 . Элементарный магнитный поток через эту полосу

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi x} dx.$$

Отсюда после интегрирования по x находим магнитный поток

$$\Phi_1 = \int_{0,1b}^{0,1b+b} \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{0,1b+b}{0,1b}.$$

Таким образом,

$$A = I_2 \Delta \Phi = I_2 \Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \ln \frac{0,1b+b}{0,1b}.$$

После подстановки числовых значений получаем $A = 7,1 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Задача 3.3а. Определить ускоряющую разность потенциалов U , которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $v_1 = 10^6$ м/с, чтобы скорость его возросла в $n = 2$ раза.

Решение. Ускоряющую разность потенциалов можно найти, вычислив работу A сил электростатического поля. Эта работа определяется произведением элементарного заряда e на разность потенциалов U

$$A = eU. \quad (1)$$

Работа сил электростатического поля в данном случае равна изменению кинетической энергии электрона

$$A = W_{K1} - W_{K2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (2)$$

где W_{K1} и W_{K2} – кинетическая энергия электрона до и после прохождения ускоряющего поля; m – масса электрона; v_1 и v_2 – начальная и конечная скорости его.

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$eU = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mn^2v_1^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

где $n = v_2 / v_1$.

Отсюда искомая разность потенциалов

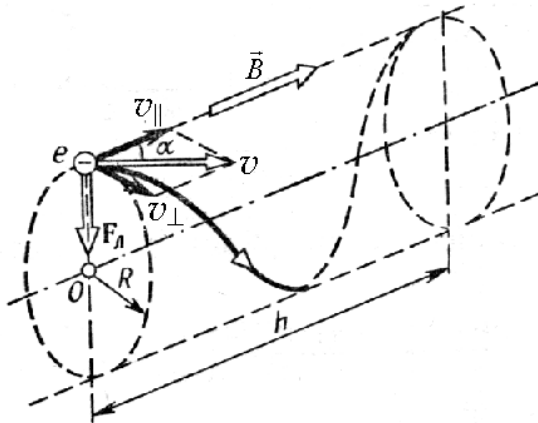
$$U = \frac{mv_1^2(n^2 - 1)}{2e}.$$

Произведем вычисления

$$U = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) \text{ В} = 8,53 \text{ В}.$$

Пример 3.36. Электрон движется в однородном магнитном поле ($B = 10 \text{ мТл}$) по винтовой линии, радиус R которой равен 1 см и шаг $h = 6 \text{ см}$. Определить период T обращения электрона и его скорость v .

Решение. Электрон будет двигаться по винтовой линии, если он влетает в однородное магнитное поле под некоторым углом ($\alpha \neq \pi/2$ и $\alpha \neq 0$) к линиям магнитной индукции. Разложим, как это показано на рисунке, скорость v электрона на две составляющие: параллельную вектору $\vec{B}$ ($v_{\parallel}$) и перпендикулярную ему ($v_{\perp}$). Скорость $v_{\parallel}$ в магнитном поле не изменяется и обеспечивает перемещение электрона вдоль силовой линии. Скорость $v_{\perp}$ в результате действия силы



Лоренца будет изменяться только по направлению ($\vec{F}_L \perp \vec{v}_{\perp}$) (в отсутствие параллельной составляющей ($v_{\parallel} = 0$) движение электрона происходило бы по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитным силовым линиям). Таким образом, электрон будет участвовать одновременно в двух движениях: равномерном перемещении со скоростью $v_{\parallel}$ и равномерном движении по окружности со скоростью $v_{\perp}$.

Период обращения электрона связан с перпендикулярной составляющей скорости соотношением

$$T = 2\pi R / v_{\perp}. \quad (1)$$

Найдем отношение $R/v_{\perp}$. Для этого воспользуемся тем, что сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = v_{\perp}^2 / R$. Согласно второму закону Ньютона можно написать

$$F_L = ma_n$$

или

$$|e|v_{\perp}B = mv_{\perp}^2 / R, \quad (2)$$

где $v_{\perp} = v \sin \alpha$.

Сократив (2) на $v_{\perp}$, выразим соотношение $R/v_{\perp}$ ($R/v_{\perp} = m/|e|B$) и подставим его в формулу (1):

$$T = 2\pi \frac{m}{|e|B}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу времени (с):

$$\left[\frac{[m]}{[e][B]} \right] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} \right] = [\text{с}].$$

Произведем вычисления:

$$T = \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \text{ с} = 3,57 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 3,57 \text{ нс}.$$

Модуль скорости v , как это видно из рисунка, можно выразить через $v_{\perp}$ и $v_{\parallel}$:

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}.$$

Из формулы (2) выразим перпендикулярную составляющую скорости:

$$v_{\perp} = \frac{|e|BR}{m}.$$

Параллельную составляющую скорости $v_{\parallel}$ найдем из следующих соображений. За время, равное периоду обращения T , электрон пройдет вдоль силовой линии расстояние, равное шагу винтовой линии, т.е. $h = T v_{\parallel}$, откуда

$$v_{\parallel} = h/T.$$

Подставив вместо T правую часть выражения (2), получим

$$v_{\parallel} = \frac{|e|Bh}{2\pi m}.$$

Таким образом, модуль скорости электрона

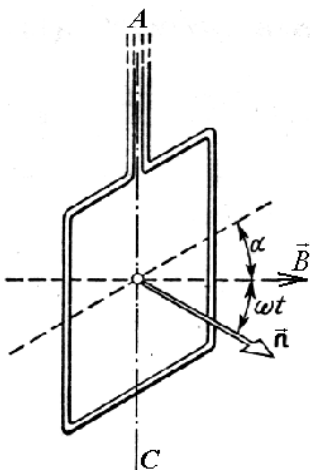
$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{|e|B}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2}.$$

Произведем вычисления

$$v = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left[(0,01)^2 + \left(\frac{0,06}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ м/с} = 2,46 \cdot 10^7 \text{ м/с},$$

$$\text{или } v = 24,6 \text{ Мм/с}.$$

Задача 3.4. Короткая катушка, содержащая $N = 10^3$ витков, равномерно вращается с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$ относительно оси AC , лежащей в плоскости катушки и перпендикулярной линиям однородного магнитного поля ($B = 0,04 \text{ Тл}$). Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями поля. Площадь S катушки равна 100 см^2 .



Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции ε_i определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (1)$$

Потокосцепление $\Psi = N\Phi$, где N – число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ . Подставив выражение Ψ в формулу (1), получим

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

При вращении катушки магнитный поток Φ , пронизывающий катушку в момент времени t , изменяется по

закону

$$\Phi = BS \cos \omega t,$$

где B – магнитная индукция; S – площадь катушки; ω – угловая скорость катушки.

Подставив в формулу (2) выражение магнитного потока Φ и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t,$$

где ωt – угол между нормалью $\vec{n}$ и вектором $\vec{B}$.

Из рисунка видно, что $\omega t = \pi/2 - \alpha$, тогда $\sin \omega t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$.

Заметив, что угловая скорость ω связана с частотой вращения n катушки соотношением $\omega = 2\pi n$, получим $\varepsilon_i = 2\pi n NBS \cos \alpha$.

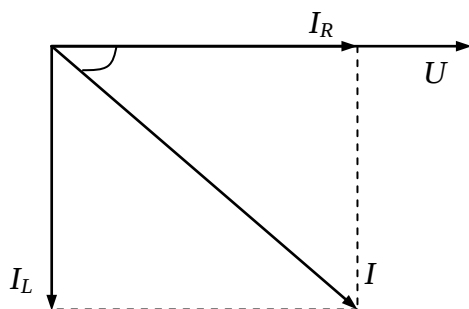
Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу ЭДС – Вольт:

$$[nBS] = \left[\frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} \right] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} \right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right] = [\text{В}].$$

Произведем вычисления

$$\varepsilon_i = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,04 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \text{ В} = 25,1 \text{ В}.$$

Задача 3.5а. Индуктивность $L = 2,26 \cdot 10^2$ Гн и активное сопротивление включены параллельно в цепи переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц. Найти активное сопротивление R , если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током равен $\varphi = 60^\circ$.



Решение. Для решения задачи при параллельном соединении элементов цепи переменного тока необходимо построить векторную диаграмму токов. Основная ось диаграммы – ось напряжения. Вектор тока на активном сопротивлении I_R совпадает с вектором напряжения. Так как индуктивность L меняет фазу на $\pi/2$, то вектор тока перпендикулярен оси напряжения.

Угол между векторами $I_m(U_m)$ и I_L – сдвиг фазы.

Таким образом, по диаграмме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L}{I_R}, \quad (1)$$

где $I_L = \frac{U_m}{X_L}$; $I_R = \frac{U_m}{R}$; $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$.

Подставим в выражение (1) последние соотношения

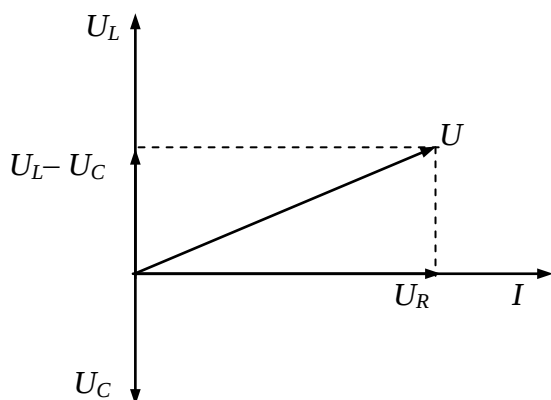
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_m \cdot R}{R_L \cdot U_m} = \frac{R}{R_L} = \frac{R}{2\pi\nu L}.$$

Получим, подставив данные задачи

$$R = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 2,26 \cdot 10^{-2} \cdot 1,73 = 12,3 \text{ Ом}.$$

Задача 3.56. Конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и реостат, активное сопротивление которого $R = 150$ Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть напряжения, приложенного к этой цепи, составляет падение напряжения: 1) на конденсаторе η_C ; 2) на реостате η_R ?

Решение. Для решения используем закон Ома для цепи переменного тока, который выводится из векторной диаграммы.



$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

где I_m и U_m – амплитудные (максимальные) значения тока и напряжения; R – активное сопротивление цепи; $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление цепи переменного тока; $X_C = \frac{1}{C\omega}$ – емкостное напряжение в цепи; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

По условию задачи в цепи нет индуктивного сопротивления, т.е. $X_L = 0$ и тогда выражение закона Ома преобразуется

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}.$$

Соответственно падения напряжения на элементах цепи:

$$U_C = I_m \cdot X_C = I_m \cdot \frac{1}{C\omega}$$

$$U_R = I_m \cdot R.$$

Найдем

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{U_m}{\sqrt{150^2 + \frac{1}{4\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}}} = 4,5 \cdot 10^{-3} U_m \text{ A}$$

$$I_m = 4,5 \cdot 10^{-3} U_m \text{ A.}$$

Зная значение максимального тока, рассчитаем соответственно доли падения напряжения на элементах цепи

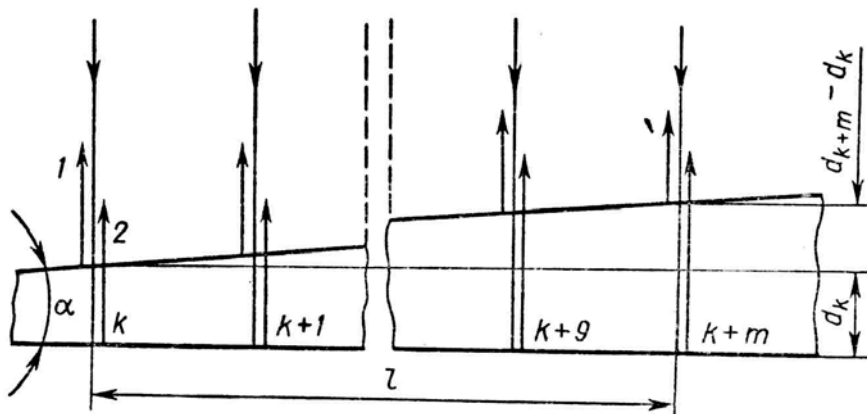
$$\eta_C = \frac{U_C}{U_m} = \frac{I_m \cdot X_C}{U_m} = \frac{4,5 \cdot 10^{-3} \cdot U_m}{U_m \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = \frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 10^{-3}} \cdot 100\% = \frac{4,5}{6,28} \cdot 100\% = 72\%.$$

$$\eta_R = \frac{U_R}{U_m} = \frac{I_m \cdot R}{U_m} = \frac{4,5 \cdot 10^{-3} U_m \cdot 150}{U_m} \cdot 100\% = 67,5\%.$$

Полученный результат еще раз подтверждает то, что при последовательном соединении элементов цепи переменного тока напряжения на элементах цепи складывается не алгебраически, а геометрически, согласно векторной диаграмме.

Задача 3.6а. На стеклянный клин с малым углом нормально к его грани падает параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Число m возникающих при этом интерференционных полос, проходящих на отрезок клина длиной l , равно 10. Определить угол α клина.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти отраженные пучки света когерентны. Поэтому на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Так как угол клина мал, то отраженные пучки 1 и 2 света (см. рисунок) будут практически параллельны.



Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода лучей равна нечетному числу половин длин волн:

$$\Delta = (2k + 1)\lambda/2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1)$$

Разность хода Δ двух волн складывается из разности оптических длин путей этих волн ($2dncos\beta$) и половины длины волны ($\lambda/2$). Величина $\lambda/2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении световой волны 1 от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (1) разность хода Δ световых волн, получаем

$$2d_kncos\beta + \lambda/2 = (2k + 1) \lambda/2, \quad (2)$$

где n – показатель преломления стекла ($n = 1,5$);

d_k – толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k ;

β – угол преломления.

Согласно условию, угол падения равен нулю; следовательно, и угол преломления β равен нулю, а $cos\beta = 1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (2), после упрощения получим

$$2d_kn = k\lambda. \quad (3)$$

Пусть произвольной темной полосе k -го номера соответствует толщина d_k клина, а темной полосе $(k + m)$ -го номера – толщина d_{k+m} клина. Тогда (см. рисунок), учитывая, что m полос укладывается на расстоянии l , найдем:

$$\sin\alpha = (d_{k+m} - d_k)/l. \quad (4)$$

Выразим из (3) d_k и d_{k+m} и подставим их в формулу (4). Затем, учитывая, что $\sin\alpha = \alpha$ (из-за малости угла α), получим

$$\alpha = \frac{(k + m)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{m\lambda}{2nl}.$$

Подставляя значения физических величин, найдем

$$\alpha = \frac{10 \cdot 0,6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,5 \cdot 1} \text{ рад} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Выразим α в секундах. Для этого можно воспользоваться соотношением между радианом и секундой: $1 \text{ рад} = 206\,265'' = 2,06 \cdot 10^5''$.

Тогда $\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,06 \cdot 10^5'' = 41,2''$.

Задача 3.66. Сферическая поверхность плосковыпуклой линзы ($n_1 = 1,52$) соприкасается со стеклянной пластинкой ($n_2 = 1,70$). Пространство между линзой, радиус кривизны которой $R = 1,00$ м, и пластинкой заполнено жидкостью. Наблюдая кольца Ньютона в отраженном свете ($\lambda_0 = 0,589$ мкм), измерили радиус r_{10} десятого темного кольца. Определить показатель преломления жидкости $n_{\text{ж}}$ в двух случаях: 1) $r = 2,05$ мм, 2) $r = 1,90$ мм.

Решение. Искомый показатель преломления $n_{\text{ж}}$ не входит в явном виде в формулы

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

$$r_k = \sqrt{(2k - 1)R\lambda/2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

для колец Ньютона. Его можно ввести в эти формулы, если воспользоваться соотношением между длиной волны λ , скоростью света c и частотой колебаний ν , а также зависимостью скорости c от показателя преломления среды:

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{c_0}{n_{\text{ж}} v} = \frac{\lambda_0}{n_{\text{ж}}}, \quad (3)$$

где c_0 — скорость света в вакууме.

Прежде чем подставить значение λ из (3) в формулу (1) для темных колец, обратим внимание на то, что эта формула выведена для случая, когда показатели преломления линзы и пластинки одинаковы. В данной задаче это условие не соблюдено. Так как, неизвестен показатель преломления жидкости, мы не можем сейчас решить вопрос о том, какая из формул (1), (2) относится к темным кольцам.

Предположим, что показатель преломления жидкости $n_{\text{ж}}$ удовлетворяет одному из двух неравенств:

$$n_{\text{ж}} < n_1 < n_2; \quad n_1 < n_2 < n_{\text{ж}}. \quad (4)$$

Тогда для темных колец будет верна формула (1). и, учитывая соотношение (3), получим

$$n_{\text{ж}} = kR\lambda_0 / r_k^2. \quad (5)$$

Выполнив вычисления, найдем:

$$1) \ n_{\text{ж}^1} = 1,41; \ 2) \ n_{\text{ж}^2} = 1,63.$$

Теперь сделаем единственно возможное другое предположение относительно величины $n_{\text{ж}}$: пусть¹

$$n_1 < n_{\text{ж}} < n_2. \quad (6)$$

В этом случае для темных колец верна формула (2). Вместе с соотношением (3) она дает

$$n_{\text{ж}} = \frac{(2k-1)R\lambda_0}{2r_k^2}. \quad (7)$$

Выполнив вычисление по формуле (7), получим:

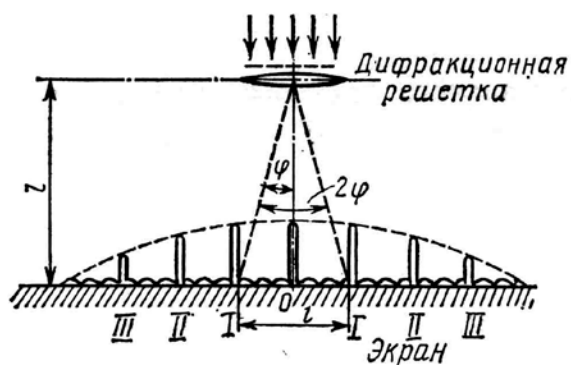
$$1) \ n_{\text{ж}^1} = 1,34; \ 2) \ n_{\text{ж}^2} = 1,55.$$

Сравнив результаты вычислений по формулам (5), (7) для обоих случаев (очевидно, соответствующих двум разным жидкостям), видим, что в первом случае ($n_{\text{ж}^1} = 1,41$; $n_{\text{ж}^1} = 1,34$) значения показателя преломления жидкости удовлетворяют одному из неравенств (4), но не удовлетворяют неравенству (6). Следовательно, из двух формул (5), (7) правильный ответ дает формула (5), т. е. для первой жидкости $n_{\text{ж}^1} = 1,41$. Во втором случае ($n_{\text{ж}^2} = 1,63$; $n_{\text{ж}^2} = 1,55$) выполняется только неравенство (6). Следовательно, теперь правильный ответ дает формула (7), т. е. для второй жидкости $n_{\text{ж}^2} = 1,55$.

Задача 3.7. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. Помещенная вблизи

¹ Нельзя предположить, что $n = n_1$ или $n = n_2$, так как в этих случаях свет будет отражаться лишь от одной поверхности слоя жидкости и колец Ньютона не будет.

решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1$ м. Расстояние l между двумя максимумами



сти первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см (см. рисунок). Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1 см; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол $\varphi_{\max}$ отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение. 1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k -му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (1)$$

где k — порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае $k = 1$, $\sin \varphi = \tan \varphi$ (ввиду того, что $l/2 \ll L$), $\tan \varphi = (l/2)L$ (следует из рисунка), с учетом последних трех равенств соотношение (1) примет вид

$$d \frac{l}{2L} = \lambda,$$

откуда постоянная решетки $d = 2 L \lambda / l$.

Подставляя данные, получим $d = 4,95$ мкм.

2. Число штрихов на 1 см найдем из формулы $n = 1/d$.

После подстановки числовых значений получим $n = 2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$.

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение $k_{\max}$ исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90° .

Из формулы (1) запишем

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} \sin \varphi. \quad (2)$$

Подставляя значения величин, получим $k_{\max} = 9,9$.

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как в этом случае $\sin \varphi$ будет больше единицы, что невозможно. Следовательно $k_{\max} = 9$.

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному $k_{\max}$, т.е. всего $2k_{\max}$. С учетом центрального нулевого максимума общее число максимумов равно $N = 2k_{\max} + 1$.

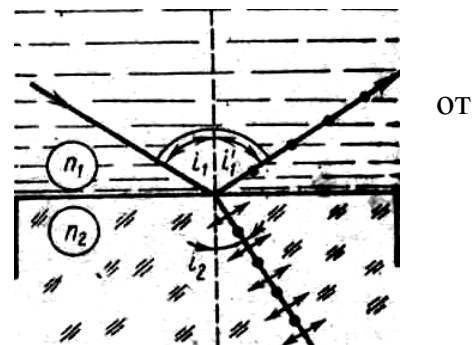
Подставляя значение $k_{\max}$, найдем $N = 18 + 1 = 19$.

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения (2) синус этого угла: $\sin \varphi_{\max} = k_{\max} \lambda / d$.

Отсюда $\varphi_{\max} = \arcsin (k_{\max} \lambda / d)$.

Подставив значения величин λ , d , $k_{\max}$ и произведя вычисления, получим $\varphi_{\max} = 65,4^\circ$.

Задача 3.8а. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный пучок света образует угол $\varphi = 2i = 97^\circ$ с падающим пучком (см. рисунок). Определить показатель преломления n_1 жидкости, если отраженный свет максимально поляризован.



Решение. Согласно закону Брюстера, пучок света, отраженный от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления $\operatorname{tg} i_B = n_{21}$, где n_{21} – показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления. Следовательно, $\operatorname{tg} i_B = n_2 / n_1$.

Так как угол падения равен углу отражения, то $i_B = \varphi / 2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi / 2) = n_2 / n_1$, откуда

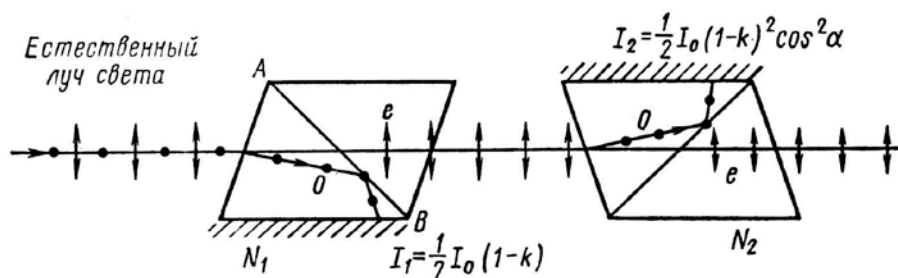
$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi / 2)}.$$

Произведем вычисления:

$$n_1 = \frac{1,5}{\operatorname{tg}(97^\circ / 2)} = \frac{1,5}{1,13} = 1,33.$$

Задача 3.8б. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их оптическими осями составляет угол $\alpha = 60^\circ$. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность I_0 естественного света: 1) при прохождении через один николю N_1 ; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе $k = 0,05$. Потери на отражение света не учитывать.

Решение 1. Естественный свет, падая на грань призмы Николя (см. рисунок), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полно-



стью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок света (o) вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (e) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму,

$$I_1 = 1/2 I_0(1-k).$$

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света, падающего на первый николю, на интенсивность I_1 поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}. \quad (1)$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1-0,05} = 2,1.$$

Интенсивность света при прохождении через николю N_1 уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный пучок света интенсивности I_1 падает на второй николю N_2 и также расщепляется на два пучка различной интенсивности: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается призмой, поэтому его интенсивность нас не интересует. Интенсивность I_2 необыкновенного пучка, вышедшего из призмы N_2 , определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где α — угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя N_2 .

Учитывая потери интенсивности на поглощение во втором николе, получим:

$$I_2 = I_1(1-k) \cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k) \cos^2 \alpha}.$$

Заменяя отношение I_0/I_1 его выражением по формуле (1), получаем:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - 0,05)^2 \cos^2 60^\circ} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

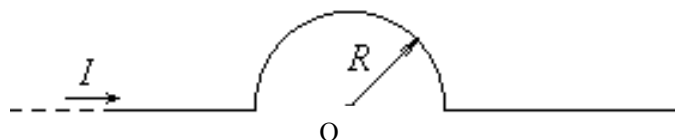
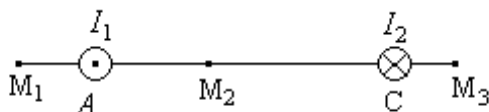
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Таблица вариантов для всех направлений.

Вариант	Номера задач							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3.010	3.020	3.030	3.040	3.050	3.060	3.070	3.080
1	3.011	3.021	3.031	3.041	3.051	3.061	3.071	3.081
2	3.012	3.022	3.032	3.042	3.052	3.062	3.072	3.082
3	3.013	3.023	3.033	3.043	3.053	3.063	3.073	3.083
4	3.014	3.024	3.034	3.044	3.054	3.064	3.074	3.084
5	3.015	3.025	3.035	3.045	3.055	3.065	3.075	3.085
6	3.016	3.026	3.036	3.046	3.056	3.066	3.076	3.086
7	3.017	3.027	3.037	3.047	3.057	3.067	3.077	3.087
8	3.018	3.028	3.038	3.048	3.058	3.068	3.078	3.088
9	3.019	3.029	3.039	3.049	3.059	3.069	3.079	3.089

Задачи для самостоятельного решения

3.010. На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояние между проводниками $AC = 10$ см, токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого токами I_1 и I_2 в точках M_1 , M_2 и M_3 . Расстояние $M_1A = 2$ см, $AM_2 = 4$ см и $CM_3 = 3$ см.



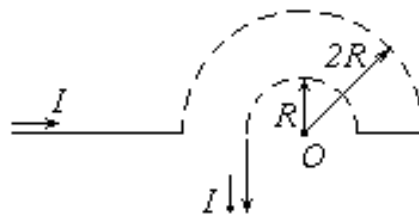
3.011. Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 50$ А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 10$ см. Определить в точке О магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током.

3.012. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи $I_1 = 10$ А и $I_2 = 15$ А. Расстояние между проводами $d = 10$ см.

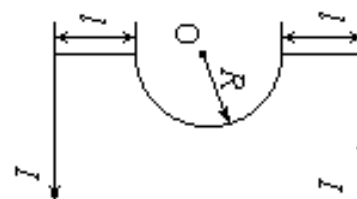
Определить индукцию магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на $r_1 = 8$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

3.013. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см, идет ток $I = 20$ А. Определить магнитную индукцию B в центре шестиугольника.

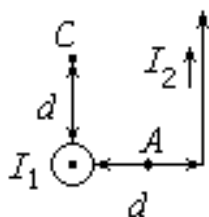
3.014. Бесконечно длинный провод с током $I = 100$ А изогнут так, как это показано на рисунке. Определить направление и величину магнитной индукции B в точке O . Радиус дуги $R = 10$ см.



3.015. Ток $I = 20$ А идет по длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Определить напряженность H магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе этого угла и отстоящей от вершины угла на расстоянии $a = 10$ см.



3.016. По тонкому длинному проводу течет ток силой $I = 10$ А. Определить направление и величину магнитной индукции B в центре полукруга ($R = \pi$ см, $l = 10$ см).



3.017. По двум бесконечно длинным проводникам проходят токи $I_1 = 30$ А и $I_2 = 40$ А. Расстояние между проводниками $d = 20$ см. Определить магнитную индукцию B в точках: а) C , одинаково удаленной от обоих проводников на расстояние, равное d ; б) A , одинаково удаленной от обоих проводников на расстояние, равное $d/2$.

3.018. Два параллельных бесконечно длинных провода с токами $I_1 = I_2 = 60$ А расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию B в точке, отстоящей на $a = 5$ см от одного проводника и на $b = 12$ см от другого. Рассмотреть случай, когда токи параллельны и антипараллельны.

3.019. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся в одной плоскости. . Определить индукцию магнитного поля в точках N и M , расположенных на расстоянии 5 см от проводников с токами I_1 и I_2 , если $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А.

3.020. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи $I = 20$ А. Определить силу F , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии равным ее длине.

3.021. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. По проводникам в одном направлении

текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А. Определить работу A , которую необходимо совершить (на единицу длины проводника), чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $d = 20$ см.

3.022. Рядом с длинным прямым проводом, по которому идет ток $I_1 = 30$ А, расположена квадратная рамка с током $I_2 = 2$ А. Рамка и провод лежат в одной плоскости. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на $l = 3$ см. Сторона рамки $a = 2$ см. Определить силу, действующую на рамку, и работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть рамку вокруг ее оси на 180° .

3.023. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым током $I_1 = 5$ А расположена прямоугольная рамка, обтекаемая током $I_2 = 1$ А. Длинная сторона рамки $b = 20$ см параллельна току и находится от него на расстоянии $r = 5$ см, меньшая сторона $a = 10$ см. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы перенести рамку параллельно самой себе вправо на расстояние a .

3.024. По трем параллельным прямым проводам, находящимися на одинаковом расстоянии $a = 10$ см друг от друга, текут одинаковые токи силой $I = 100$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Определить силу F_1 , действующую на отрезок длиной $l = 1$ см каждого проводника.

3.025. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым током $I_1 = 10$ А расположена прямоугольная рамка, обтекаемая током $I_2 = 2$ А. Длинная сторона рамки $b = 30$ см параллельна току, короткая сторона $a = 6$ см. Определить силу, действующую на рамку, и работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть рамку на 180° относительно стороны a , если центр рамки находится на расстоянии $c = 3,5$ см от прямого длинного провода с током.

3.026. Из проволоки длиной $l = 20$ см сделаны квадратный и круговой контуры. Определить вращающие моменты сил M_1 и M_2 , действующие на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. По контурам течет ток силой $I = 2$ А. Плоскость каждого контура составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением поля.

3.027. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $d_1 = 15$ см друг от друга. По проводникам в разных направлениях текут токи $I_1 = 25$ А и $I_2 = 35$ А. Какую работу надо совершить на единицу длины проводников, чтобы сдвинуть эти проводники до расстояния $d_2 = 10$ см?

3.028. Из медной проволоки сечением $S_1 = 0,5$ мм² сделали круговой контур сопротивлением $0,1$ Ом и поместили в однородное магнитное поле напряженностью $H = 150$ кА/м так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. По контуру пропустили ток $I = 2$ А. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть контур на угол $\varphi = 90^\circ$ вокруг оси, совпадающей с диаметром контура?

3.029. В однородное магнитное поле поместили квадратный проволочный контур с перемычкой так, что плоскость контура перпендикулярна направлению вектора магнитной индукции. Контур присоединили к цепи постоянного

тока углами без перемиčky. Определить направление силы, действующей на контур со стороны магнитного поля.

3.030. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скорость $v = 10^5$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 8$ мм. Определить а) разность потенциалов U между пластинами; б) поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

3.031. Ион, попав в магнитное поле с индукцией $B = 0,01$ Тл, стал двигаться по окружности. Определить кинетическую энергию (в эВ) иона, если магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока равен $1,6 \cdot 10^{-4}$ А·м².

3.032. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом $\phi_1 = 100$ В электрон имел скорость $v_1 = 6$ Мм/с. Определить потенциал ϕ_2 точки поля, дойдя до которой электрон потеряет половину своей скорости.

3.033. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 100$ В и, влетев в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, стала двигаться по винтовой линии с шагом $h = 6,5$ см и радиусом $R = 1$ см. Определить отношение заряда частицы к ее массе.

3.034. Заряженная частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ кВ, приобрела скорость $v = 5,4$ Мм/с. Определить удельный заряд частицы q/m .

3.035. Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в однородное магнитное поле, перпендикулярное к скорости. Определить во сколько раз радиус кривизны R_1 , траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона.

3.036. Протон, начальная скорость v_0 которого равна 100 км/с, влетел в однородное электрическое поле так, что вектор скорости совпал с направлением линий напряженности. Напряженность поля $E = 300$ В/см. Определить путь l пройденный протоном в направлении линий поля, за время, за которое его скорость удвоилась.

3.037. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-4}$ Тл по винтовой линии. Определить скорость электрона, если шаг винтовой линии $h = 20$ см, а радиус $R = 5$ см.

3.038. Бесконечная плоскость заряжена отрицательно с поверхностной плотностью $\sigma = -35,4$ нКл/м². По направлению силовой линии летит электрон. Определить минимальное расстояние $l_{\min}$, на которое может подойти к плоскости электрон, если на расстоянии $l_0 = 5$ см он имел кинетическую энергию $T = 80$ эВ.

3.039. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 300$ В, движется параллельно прямолинейному длинному проводу на расстоянии $a = 5$ мм от него. Определить силу F , действующую на электрон, если по проводнику пустить ток $I = 5$ А.

3.040. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл движется проводник длиной $l = 10$ см. Скорость движения проводника $v = 15$ м/с и направлена перпендикулярно к магнитному полю. Определить индуцированную в проводнике ЭДС.

3.041. Рамка площадью $S = 50$ см², содержащая $N = 100$ витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 40$ мТл. Определить максимальную ЭДС индукции $\varepsilon_{\max}$, если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции, а рамка вращается с частотой $n = 960$ мин⁻¹.

3.042. Между полюсами электромагнита помещена катушка, соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна линиям индукции. Катушка имеет $N = 15$ витков площадью $S = 2$ см². Сопротивление катушки $R_1 = 4$ Ом, сопротивление гальванометра $R_2 = 46$ Ом. Когда ток в обмотке электромагнита выключили, по цепи гальванометра протекло количество электричества $q = 9 \cdot 10^{-5}$ Кл. Определить магнитную индукцию B поля электромагнита.

3.043. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,35$ Тл равномерно с частотой $n = 480$ мин⁻¹ вращается рамка, содержащая $N = 1500$ витков площадью $S = 50$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающую в рамке.

3.044. Рамка площадью $S = 100$ см² содержит $N = 10^3$ витков провода сопротивлением $R_1 = 12$ Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление $R_2 = 20$ Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл с частотой $n = 8$ с⁻¹. Определить максимальную мощность $P_{\max}$ переменного тока в цепи.

3.045. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,1$ Тл, вращается катушка, состоящая из $N = 200$ витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к ее оси и к направлению магнитного поля. Период обращения катушки $T = 0,2$ с, площадь поперечного сечения витка $S = 4$ см². Определить максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке.

3.046. Проволочный виток диаметром $D = 5$ см и сопротивлением $R = 0,02$ Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,3$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\alpha = 40^\circ$ с линиями индукции. Определить заряд, который протечет по витку при выключении магнитного поля.

3.047. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл равномерно с частотой $n = 10$ с⁻¹ вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков. Площадь рамки $S = 150$ см². Определить мгновенное значение ЭДС, соответствующее углу поворота рамки 30° .

3.048. Проволочный контур площадью $S = 500$ см² и сопротивлением $R = 0,10$ Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. Ось вращения лежит в плоскости кольца и перпендикулярна линиям

магнитной индукции. Определить максимальную мощность $P_{\max}$, необходимую для вращения контура с угловой скоростью $\omega = 50$ рад/с.

3.049. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл вращается стержень длиной $l = 10$ см. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно к его длине. Определить разность потенциалов на концах стержня, если он делает 16 оборотов в секунду.

3.050. В сеть с напряжением $U = 120$ В включены последовательно катушка индуктивности с активным сопротивлением $R = 10$ Ом и конденсатор. При частоте 50 Гц индуктивное сопротивление равно $X_L = 2$ Ом, емкостное $X_C = 500$ Ом. Определите ток в цепи и напряжение на ее участках при резонансе, который получают, изменяя частоту.

3.051. Конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и резистор, сопротивление которого $R = 150$ Ом включены в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Определить какую часть напряжения U , приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе U_C и на резисторе U_R .

3.052. В сеть переменного тока частотой 50 Гц включены последовательно два дросселя: один с активным сопротивлением $R_1 = 12$ Ом и индуктивностью $L_1 = 22$ мГн, другой с активным сопротивлением $R_2 = 8$ Ом и индуктивностью $L_2 = 9,6$ мГн. Ток в цепи $I = 5,7$ А. Определить мощность, развиваемую каждым дросселем и напряжение на зажимах цепи.

3.053. Участок цепи состоит из параллельно соединенных катушки с индуктивностью $L = 1,0$ Гн и активным сопротивлением $R = 100$ Ом и конденсатора емкостью $C = 4$ мкФ. Определить эквивалентное сопротивление участка. Частота подаваемого на участок напряжения равна 50 Гц.

3.054. Два конденсатора с емкостями $C_1 = 0,2$ мкФ и $C_2 = 0,1$ мкФ включены последовательно с сопротивлением $R = 20$ Ом в цепь переменного тока напряжением $U = 220$ В и частотой 50 Гц. Определить ток в цепи и падения напряжения на первом и втором конденсаторах.

3.055. На последовательно соединенные реостат и катушку с индуктивностью $L = 1,0$ Гн подано напряжение частотой 50 Гц. Между током и напряжением наблюдается сдвиг фаз $\varphi = 30^\circ$. Определить сопротивление реостата.

3.056. В цепи с амплитудой напряжения 440 В и частотой 50 Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и конденсатор. Определить емкость конденсатора, если на лампочке написано "55 Вт, 110 В" и разность фаз между током и напряжением в сети.

3.057. В сеть с напряжением 127 В и частотой 50 Гц параллельно включены катушка с активным сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 1$ Гн и конденсатор. Определить емкость конденсатора при резонансе, общий ток и токи через конденсатор и катушку.

3.058. Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением $U = 440$ В и частотой 50 Гц. Определить какую емкость должен иметь конденсатор для того, чтобы через

лампочку протекал ток $I = 0,5$ А и падение напряжения на ней было равным $U_{\text{л}} = 110$ В.

3.059. Катушка длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 10$ см² включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Число витков катушки $N = 3000$. Определить сопротивление R катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60^\circ$.

3.060. На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45^\circ$ к поверхности пленки. Определить при какой минимальной толщине h пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$.

3.061. На установке для наблюдения колец Ньютона был измерен в отраженном свете радиус третьего темного кольца. Когда пространство между плоскопараллельной пластиной и линзой заполнили жидкостью, то тот же радиус стал иметь кольцо с номером, на единицу большим. Определить показатель преломления n жидкости.

3.062. На тонкий стеклянный клин, с показателем преломления $n = 1,55$, падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол α между поверхностями клина равен $2'$. Определить длину световой волны λ , если расстояние l между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете равно $0,3$ мм.

3.063. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 15$ м. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, равно $\Delta r_{25,5} = 9$ мм. Определить длину волны λ монохроматического света.

3.064. На тонкий стеклянный клин перпендикулярно к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить угол β между поверхностями клина, если расстояние l между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.

3.065. Расстояние $\Delta r_{2,1}$ между вторым и первым темными кольцами Ньютона в отраженном свете равно 1 мм. Определить расстояние $\Delta r_{10,9}$ между десятым и девятым кольцами.

3.066. На мыльную пленку с показателем преломления $n = 1,3$, находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. Определить при какой наименьшей толщине h пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции.

3.067. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается нормально падающим монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 590$ нм. Радиус кривизны линзы равен $R = 5$ м. Определить ширину воздушного промежутка в том месте, где наблюдается третье светлое кольцо в отраженном свете.

3.068. На тонкую глицериновую пленку толщиной $h = 1,5$ мкм нормально к ее поверхности падает белый свет. Определить длины волн лучей видимого

участка спектра ($0,75 \geq \lambda \geq 0,4$) мкм, которые будут ослаблены в результате интерференции.

3.069. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой находится жидкость. Определить показатель преломления жидкости, если радиус r_3 третьего темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм равен 0,82 мм. Радиус кривизны линзы $R = 0,5$ м.

3.070. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_1 = 14^\circ$. Определить на какой угол φ_2 отклонен максимум третьего порядка.

3.071. Дифракционная решетка содержит $n = 200$ штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Определить максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка.

3.072. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. Определить на какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница $\lambda = 0,4$ мкм спектра третьего порядка.

3.073. На дифракционную решетку, содержащую $n = 500$ штрихов на 1 мм, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину b спектра первого порядка на экране, если расстояние L линзы до экрана равно 3 м. Границы видимости спектра $\lambda_{\text{кр}} = 780$ нм, $\lambda_{\text{ф}} = 400$ нм.

3.074. С помощью дифракционной решетки с периодом $d = 20$ мм требуется разрешить дублет натрия с длинами натрия с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм в спектре второго порядка. Определить при какой наименьшей длине в решетке это возможно.

3.075. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает пучок света от разрядной трубки. Определить постоянную d дифракционной решетки при которой совпадут максимумы линий $\lambda_1 = 656,3$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм в направлении $\varphi = 41^\circ$.

3.076. На поверхность дифракционной решетки нормально к ее поверхности падает монохроматический свет. Постоянная дифракционной решетки в $n = 4,6$ раза больше длины световой волны. Определить общее число N дифракционных максимумов, которые теоретически можно наблюдать в данном случае.

3.077. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 20^\circ$. Определить длину волны λ света.

3.078. На дифракционную решетку, содержащую $n = 400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Определить общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка и угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

3.079. Постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Определить какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решетка в области желтых лучей с длиной волны $\lambda = 600$ нм в спектре второго порядка. Ширина решетки $l = 2,5$ см.

3.080. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд, и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $i_B = 42^\circ 37'$. Определить показатель преломления жидкости, если показатель преломления стекла равен $n = 1,5$.

3.081. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен φ . Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8% падающего на них света. Интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Определить угол φ .

3.082. Определить показатель преломления n стекла, если при отражении от него света, отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления $\beta = 30^\circ$.

3.083. Определить угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза.

3.084. Угол Брюстера при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57° . Определить скорость света в этом кристалле.

3.085. Угол α между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора равен 45° . Определить во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол α увеличить до 60° .

3.086. Предельный угол полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен $i_{\text{пр}} = 43^\circ$. Определить угол Брюстера для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

3.087. Определить во сколько раз уменьшится интенсивность света, проходящего через поляризатор и анализатор, у которых угол между оптическими осями равен 30° , если в поляризаторе и анализаторе теряется 10% интенсивности падающего на него света.

3.088. Под каким углом i_B к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были наиболее полно поляризованы.

3.089. Анализатор в $n = 2$ раза уменьшает интенсивность света, приходящего к нему от поляризатора и анализатора. Определить угол α между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора. Потерями интенсивности света в анализаторе пренебречь.

КВАНТОВАЯ ОПТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ.

Основные понятия и формулы

Закон Стефана-Больцмана

$$R_{\text{э}} = \sigma T^4,$$

где $R_{\text{э}}$ – энергетическая светимость (излучательность) абсолютно черного тела; σ – постоянная Стефана-Больцмана; T – температура.

Законы Вина

$$1) \lambda_m = \frac{b}{T}, \quad 2) r_{\lambda, T} = C T^5,$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения; b – постоянная Вина, равная $2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К; C – вторая постоянная Вина, равная $1,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кВт}}{\text{м}^3 \text{К}^5}$.

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \hbar \omega,$$

где h – постоянная Планка; $\hbar$ – постоянная Планка, деленная на 2π ; ν – частота фотона; ω – циклическая частота.

Масса фотона

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda},$$

где c – скорость света в вакууме; λ – длина волны фотона.

Импульс фотона

$$p = mc = h/\lambda.$$

Формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + T_{\text{max}} = A + \frac{m \cdot v_{\text{max}}^2}{2},$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла; A – работа выхода электрона; T_{max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона, m , v – масса электрона и его скорость.

Красная граница фотоэффекта

$$\nu_0 = A/h, \quad \text{или} \quad \lambda_0 = hc/A,$$

где ν_0 – минимальная частота света, при которой еще возможен фотоэффект; λ_0 – максимальная длина волны света, при которой еще возможен фотоэффект; h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Формула Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta),$$

или

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны фотона, встретившегося со свободным или слабосвязанным электроном; λ' – длина волны фотона, рассеянного на угол θ после столкновения с электроном; m_0 – масса покоящегося электрона.

Комптоновская длина волны

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c}, \quad (\Lambda = 2,436 \text{ пм}).$$

Давление света при нормальном падении на поверхность

$$P = \frac{E_e(1+\rho)}{c} = \omega \cdot (1+\rho),$$

где E_e – энергия, падающая на единицу площади поверхности в единицу времени; ω – объемная плотность энергии излучения; ρ – коэффициент отражения света.

Боровская теория водородоподобного атома

Момент импульса электрона (второй постулат Бора)

$$L_n = \hbar \cdot n, \quad \text{или} \quad m \nu_n r_n = \hbar \cdot n,$$

где m – масса электрона; ν_n – скорость электрона на n -й орбите; r_n – радиус n -й стационарной орбиты; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – приведенная постоянная Планка; n – главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Радиус n -й стационарной орбиты

$$r_n = a_0 n^2,$$

где a_0 – первый боровский радиус, $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м.

Энергия электрона в атоме водорода

$$E_n = \frac{E_i}{n^2},$$

где E_i – энергия ионизации атома водорода.

Энергия, излучаемая или поглощаемая атомом водорода,

$$\varepsilon = \hbar \cdot \omega = E_{n_2} - E_{n_1}$$

или

$$\varepsilon = E_i \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где n_1 и n_2 – квантовые числа, соответствующие энергетическим уровням, между которыми совершается переход электрона в атоме.

Сериальная формула, определяющая длину волны света, излучаемого атомом водорода при переходе электрона с орбиты n_2 на орбиту n_1

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где λ – длина волны излучения или поглощения атомом; R – постоянная Ридберга, равная $1,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$.

Волновые свойства частиц

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p},$$

где p — импульс частицы.

Импульс частицы p и его связь с кинетической энергией T

а) $p = m_0 v$, $p = \sqrt{2m_0 T}$ — для $v \ll c$;

б) $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$, $p = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(2E_0 + T)T}$, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ — для $v \approx c$.

где m_0 — масса покоя частицы; m — релятивистская масса; v — скорость частицы; c — скорость света в вакууме; E_0 — энергия покоя частицы ($E_0 = m_0 c^2$).

Соотношение неопределенностей

а) $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$,

где Δp_x — неопределенность проекции импульса на ось x ; Δx — неопределенность координаты;

б) $\Delta E \Delta t \geq \hbar$,

где ΔE — неопределенность энергии; Δt — время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Атомное ядро. Радиоактивность

Массовое число ядра (число нуклонов в ядре)

$$A = Z + N,$$

где Z — зарядовое число (число протонов); N — число нейтронов.

Закон радиоактивного распада

$$dN = -\lambda N dt, \text{ или } N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где dN — число ядер, распадающихся за интервал времени dt ; N — число ядер, не распавшихся к моменту времени t ; N_0 — число ядер в начальный момент ($t = 0$); λ — постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся за время t ,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

В случае, если интервал времени Δt , за который определяется число распавшихся ядер, много меньше периода полураспада $T_{1/2}$, то число распавшихся ядер можно определить по формуле

$$\Delta N = \lambda N \Delta t.$$

Зависимость периода полураспада T от постоянной радиоактивного распада λ

$$T_{1/2} = (\ln 2) / \lambda = 0,693 / \lambda.$$

Среднее время τ жизни радиоактивного ядра, т. е. интервал времени, за который число не распавшихся ядер уменьшается в e раз,

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Число N атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе,

$$N = \frac{m N_A}{M},$$

где m – масса изотопа; M – молярная масса; N_A – постоянная Авогадро.

Активность A радиоактивного изотопа

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad \text{или} \quad A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где dN – число ядер, распадающихся за интервал времени dt ; A_0 – активность изотопа в начальный момент времени.

Удельная активность изотопа

$$a = A/m.$$

Дефект массы ядра

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_{\text{я}},$$

где Z – зарядовое число (число протонов в ядре); A – массовое число (число нуклонов в ядре); $(A - Z)$ – число нейтронов в ядре; m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; $m_{\text{я}}$ – масса ядра.

Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2,$$

где Δm – дефект массы ядра; c – скорость света в вакууме.

Во внесистемных единицах энергия связи ядра равна $E_{\text{св}} = \Delta m c^2$, где дефект массы Δm – в а. е. м., $c^2 = 931 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}}$.

Примеры решения задач

Задача 4.1а. Длина волны λ_m , на которую приходится максимум энергии в спектре излучения черного тела, равна 0,58 мкм. Определить максимальную спектральную плотность энергетической светимости ($r_{\lambda, T_{\text{max}}}$), рассчитанную на интервал длин волн $\Delta \lambda = 1$ нм, вблизи λ_m .

Решение. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости пропорциональна пятой степени температуры Кельвина и выражается формулой

$$r_{\lambda, T_{\max}} = CT^5, \quad (1)$$

где C – вторая постоянная Вина.

Температуру T выразим из закона смещения Вина $\lambda_m = b/T$, откуда $T = b/\lambda_m$. Подставив полученное выражение температуры в формулу (1), найдем

$$r_{\lambda, T_{\max}} = C(b/\lambda_m)^5. \quad (2)$$

В таблице значение C дано в единицах СИ, в которых единичный интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ м. По условию же задачи требуется вычислить спектральную плотность энергетической светимости, рассчитанную на интервал длин волн 1 нм, поэтому выпишем значение C в единицах СИ и пересчитаем его на заданный интервал длин волн:

$$C = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5) = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{К}^5) = 1,30 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм} \cdot \text{К}^5).$$

Согласно формуле (2) получим:

$$r_{\lambda, T_{\max}} = 40,6 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм}).$$

Задача 4.16. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны $\lambda = 500$ нм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить: 1) энергетическую светимость R Солнца; 2) поток энергии Φ , излучаемый Солнцем; 3) массу m , теряемую Солнцем при излучении за 1 с.

Решение. Энергетическая светимость R черного тела выражается формулой Стефана – Больцмана

$$R = \sigma T^4. \quad (1)$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина: $\lambda_m = b/T$. Выразив отсюда температуру T и подставив ее в формулу (1), получим:

$$R = \sigma(b/\lambda_m)^4. \quad (2)$$

Произведя вычисления по формуле (2), найдем

$$R = 64 \text{ МВт}/\text{м}^2.$$

2. Поток энергии Φ , излучаемый Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь S его поверхности: $\Phi = R S$, или

$$\Phi = 4\pi r^2 R, \quad (3)$$

где r — радиус Солнца.

Подставив в формулу (3) значения π , r и R и произведя вычисления, получим

$$\Phi = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

3. Массу, теряемую Солнцем вследствие излучения за время $t = 1$ с, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии $E = mc^2$. Энергия излучаемая Солнцем за время t , равна произведению потока энергии Φ (мощности излучения) на время: $E = \Phi t$. Следовательно, $\Phi t = mc^2$, откуда

$$m = \frac{\Phi \cdot t}{c^2}, \text{ где } t = 1 \text{ с.}$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем $m = 4,3 \cdot 10^9$ кг.

Задача 4.2а. На металлическую пластину падает монохроматический свет ($\lambda = 0,413$ мкм). Поток фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, полностью задерживается, когда разность потенциалов тормозящего электрического поля достигает $U = 1,0$ В. Определить работу выхода в электронвольтах и красную границу фотоэффекта.

Решение. Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (1)

$$hc/\lambda = A + T. \quad (1)$$

Так как даже самые быстрые электроны задерживаются электрическим полем, пролетев в нем расстояние, соответствующее разности потенциалов U , то их начальная кинетическая энергия T связана с величиной U соотношением $T = eU$. Следовательно,

$$hc/\lambda = A + eU. \quad (2)$$

Отсюда найдем работу выхода:

$$A = hc/\lambda - eU = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,0 \text{ эВ.}$$

Красной (длинноволновой) границе фотоэффекта $\lambda_{\text{кр}}$ в уравнении Эйнштейна соответствует $T = 0$. Поэтому, полагая $\lambda = \lambda_{\text{кр}}$, получим

$$\lambda_{\text{кр}} = hc/A = 0,62 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,62 \text{ мкм.}$$

Задача 4.2б. Определить максимальную скорость электронов, вылетающих из металла под действием γ -излучения длиной волны $\lambda = 0,03 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение. Применим уравнение Эйнштейна (1). Обратим внимание на то, что длина волны γ -излучения близка к комптоновской длине волны λ_c для электрона и, следовательно, энергия γ -фотона $h\nu$ есть величина одного порядка с энергией покоя электрона $W_0 = 0,511 \text{ МэВ}$. Так как при этом работа выхода A электрона из металла (любого) измеряется всего лишь несколькими электронвольтами, то величиной A в (1) можно пренебречь, а электрон следует рассматривать как релятивистскую частицу, кинетическая энергия которой выражается формулой (3). Тогда уравнение (1) принимает вид (4):

$$T = mc^2 - m_0c^2 \quad (3)$$

$$\frac{hc}{\lambda} = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

или, введя комптоновскую длину волны для электрона $\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$, имеем:

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \quad (5)$$

Из выражения (5) найдем относительную скорость электрона $\beta = v/c$ при $\lambda_c = 0,0242 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

$$\beta = \frac{\sqrt{\lambda_c(\lambda_c + 2\lambda)}}{\lambda_c + \lambda} = 0,86.$$

Максимальная скорость электрона равна:

$$v = \beta c = 0,86 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 4.3а. Монохроматический ($\lambda = 0,662 \text{ мкм}$) пучок света, падает нормально на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,80$. Определить количество фотонов, ежесекундно поглощаемых 1 см^2 поверхности, если давление света на поверхность $P = 1,0 \text{ мкПа}$.

Решение. Так как условие задачи позволяет найти энергию фотона $h\nu$, то искомое число N поглощенных фотонов найдем как отношение энергии света W , поглощенного 1 см^2 поверхности за 1 с , к энергии $h\nu$ одного фотона,

$$N = \frac{W}{h\nu} = \frac{W\lambda}{hc}. \quad (1)$$

Чтобы связать величину W с данным давлением P света, воспользуемся формулой (2)

$$P = \frac{E_e}{c}(1 + \rho). \quad (2)$$

Входящую в нее энергетическую освещенность E_e , согласно определению, выразим так:

$$E_e = W_0/St, \quad (3)$$

где W_0 — энергия света, падающего на площадку S за время t .

Из определения коэффициента отражения ρ следует, что между величинами W , W_0 имеется соотношение

$$W = W_0(1 - \rho). \quad (4)$$

Таким образом, с учетом (3), (4) формула (2) примет вид:

$$P = \frac{W}{cSt} \cdot \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (5)$$

Исключив величину W из уравнений (1) и (5), получим ответ:

$$N = \frac{P\lambda St}{h} \cdot \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $P = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$, $\lambda = 0,662 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $S = 10^{-4} \text{ м}^2$, $t = 1,00 \text{ с}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$, $\rho = 0,80$. Выполнив вычисления, найдем число поглощенных фотонов

$$N = 1,0 \cdot 10^{21}.$$

Задача 4.3б Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600 \text{ нм}$ на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, равно $P = 0,1 \text{ мкПа}$. Определить: 1) концентрацию n фотонов в световом пучке; 2) число n_1 фотонов, падающих ежесекундно на поверхность площадью $S = 1 \text{ м}^2$.

Решение. 1). Концентрация n фотонов в пучке света может быть найдена, как частное от деления объёмной плотности энергии w на энергию ε одного фотона

$$n = w / \varepsilon \quad (1)$$

Из формулы, определяющей давление света

$$P = w (1 + \rho), \quad (2)$$

где ρ - коэффициент отражения. Выразим объёмную плотность энергии w из формулы (2)

$$w = P/(1 + \rho) \quad (3)$$

Энергия фотона зависит от частоты ν , и следовательно, от длины световой волны λ :

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda. \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в формулу (1), получим выражение для расчета концентрации фотонов

$$n = P\lambda/(1 + \rho)hc,$$

где ρ - коэффициент отражения для зачерненной поверхности равный нулю. С учетом этого расчетная формула примет вид

$$n = P\lambda/hc.$$

Подставив числовые данные, определим искомую концентрацию фотонов

$$n = \frac{0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 3,02 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}.$$

2). Искомая величина n_1 – число фотонов, падающих за $t = 1$ с на поверхность $S = 1 \text{ м}^2$, связана с числом N соотношением: $n = N/St$. Число фотонов N , падающих за время t на поверхность S , определяется по формуле:

$$N = W/\varepsilon,$$

где W – энергия излучения, получаемая поверхностью S за время t ; ε - энергия одного фотона.

Энергия излучения W определяется произведением светового потока Φ на время излучения t

$$W = \Phi t,$$

где световой поток $\Phi = E_e S$.

Энергетическую светимость E_e выразим из формулы для определения светового давления:

$$P = E_e (1 + \rho)/c,$$

отсюда

$$E_e = Pc/(1 + \rho).$$

Используя полученное выражение для энергетической светимости и учитывая, что энергия фотона равна $\varepsilon = hc/\lambda$, получим выражение для расчета числа фотонов n_1 , падающих на поверхность площадью $S = 1 \text{ м}^2$ за время $t = 1$ с:

$$n_1 = N/St = W/\varepsilon St = \Phi t \lambda / hc St = E_e S \lambda / hc S = Pc \lambda / (1 + \rho) hc.$$

В полученной расчетной формуле множитель $P\lambda/hc = n$, где n - концентрация фотонов рассчитанная в первой части решения задачи. Коэффициент отра-

жения по условию задачи $\rho = 0$, а скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. С учетом этого окончательно получим:

$$n_1 = n c.$$

Подставив данные, найдем искомую величину

$$n_1 = 3,09 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^8 = 9,06 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

Задача 4.3в. Фотон с энергией $\varepsilon = 0,75$ МэВ рассеялся на свободном электроном под углом $\theta = 60^\circ$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить: 1) энергию ε' рассеянного фотона; 2) кинетическую энергию T электрона отдачи; 3) направление его движения.

Решение. 1. Энергию рассеянного фотона найдем, воспользовавшись формулой Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Выразив длины волн λ и λ' через энергии ε' и ε соответствующих фотонов, получим

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}(1 - \cos\theta).$$

Разделим обе части этого равенства на $2\pi\hbar c$: $\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 - \cos\theta}{m_0 c^2}$. Отсюда, обозначив для краткости энергию покоя электрона $m_0 c^2$ через E_0 , найдем

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon/E_0)(1 - \cos\theta) + 1}. \quad (1)$$

Подставив числовые значения величин, получим $\varepsilon' = 0,43$ МэВ.

2. Кинетическая энергия электрона отдачи, как это следует из закона сохранения энергии, равна разности между энергией ε падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:

$$T = \varepsilon - \varepsilon' = 0,32 \text{ МэВ}.$$

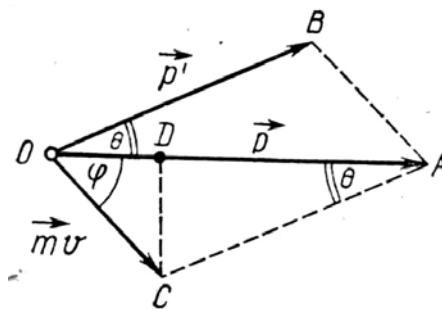
3. Направление движения электрона отдачи найдем, применив закон сохранения импульса, согласно которому импульс падающего фотона $\vec{p}$ равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона $\vec{p}'$ и электрона отдачи $m\vec{v}$:

$$\vec{p} = \vec{p}' + m\vec{v}.$$

Векторная диаграмма импульсов изображена на рисунке. Все векторы проведены из точки O , где находился электрон в момент соударения с фотоном. Угол φ определяет направление движения электрона отдачи.

Из треугольника OCD находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|CD|}{|OD|} = \frac{|CA|\sin\theta}{|OA| - |CA|\cos\theta},$$



или
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p' \sin \theta}{p - p' \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{p/p' - \cos \theta}.$$

Так как $p = \varepsilon/c$ и $p' = \varepsilon'/c$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{\varepsilon/\varepsilon' - \cos \theta}. \quad (2)$$

Преобразуем формулу (2) так, чтобы угол φ выражался непосредственно через величины ε и θ , заданные в условии задачи. Из формулы (1) следует

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon}{E_0} (1 - \cos \theta) + 1 \quad (3)$$

Заменим в формуле (2) соотношение ε/ε' по формуле (3):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon/E_0)(1 - \cos \theta)}.$$

Учитывая, что $\sin \theta = 2 \sin (\theta/2) \cos (\theta/2)$ и $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 (\theta/2)$, после соответствующих преобразований получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{1 + \varepsilon/E_0}. \quad (4)$$

После вычислений по формуле (4) найдем $\operatorname{tg} \varphi = 0,701$, откуда $\varphi = 35^\circ$.

Задача 4.4а. Вычислить радиус первой орбиты атома водорода (боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Решение. Согласно теории Бора, радиус r электронной орбиты и скорость v электрона на ней связаны равенством $m v r = n \hbar$. Так как в задаче требуется определить величины, относящиеся к первой орбите, то главное квантовое число $n = 1$, и равенство примет вид

$$m v r = \hbar. \quad (1)$$

Для определения двух неизвестных величин r и v необходимо еще одно уравнение. В качестве второго уравнения воспользуемся уравнением движения электрона. Согласно теории Бора, электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона можем записать

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2},$$

где e и m — заряд и масса электрона или

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}. \quad (2)$$

Совместное решение равенств (1) и (2) относительно r дает

$$r = 4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 / (me^2).$$

Подставив сюда значения $\hbar$, e , m и произведя вычисления, найдем боровский радиус:

$$r_1 = a = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Из равенства (1) получим выражение скорости электрона на первой орбите:

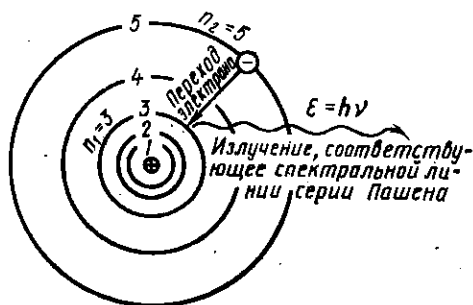
$$v = \hbar / (mr).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$v = 2,18 \text{ Мм/с.}$$

Задача 4.46. Определить энергию ε фотона, соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) атома водорода.

Решение. Энергия ε фотона, излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую



$$\varepsilon = E_i \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где E_i – энергия ионизации атома водорода; $n_1 = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбиты, на которую переходит электрон (см рисунок); $n_2 = n_1 + 1; n_1 + 2; \dots; n_1 + m$ – номер орбиты, с которой переходит электрон; m – номер спектральной линии в данной серии. Для серии Пашена $n_1 = 3$; для второй линии этой серии $m = 2$; $n_2 = n_1 + m = 3 + 2 = 5$. Подставив числовые значения, найдем энергию фотона:

$$\varepsilon = 0,97 \text{ эВ.}$$

Задача 4.5. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) $U_1 = 51 \text{ В}$; 2) $U_2 = 510 \text{ кВ}$.

Решение. Длина волны де Бройля λ частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = 2\pi\hbar / p. \quad (1)$$

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия T . Связь импульса с кинетической энергией для нерелятивистского (когда $T \ll E_0$) и для релятивистского (когда $T \approx E_0$) случаев соответственно выражается формулами:

$$p = \sqrt{2m_0T}, \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + T)T}. \quad (3)$$

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется соответственно в нерелятивистском и релятивистском случаях:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0T}}, \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{(1/c)\sqrt{(2E_0 + T)T}}. \quad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов $U_1 = 51 \text{ В}$ и $U_2 = 510 \text{ кВ}$, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим вопрос, какую из формул (4) и (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U ,

$$T = |e|U.$$

В первом случае $T_1 = |e|U_1 = 51 \text{ эВ} = 0,51 \cdot 10^{-4} m_0 c^2$, что много меньше энергии покоя электрона $T_0 = m_0 c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$. Следовательно, можно применить формулу (4).

Для упрощения расчетов заметим, что $T_1 = 10^{-4} m_0 c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} m_0 c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}.$$

Учтя, что $\left[\frac{2\pi\hbar}{m_0 c} \right]$ - комптоновская длина волны λ_C , получим:

$$\lambda_1 = (10^2 / \sqrt{2}) \lambda_C.$$

Так как $\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$, то

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \cdot 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 172 \text{ пм}.$$

Во втором случае кинетическая энергия $E_2 = |e|U_2 = 510 \text{ кэВ} = 0,51 \text{ МэВ}$, т.е. равна энергии покоя электрона. Следовательно, необходимо применить релятивистскую формулу (5).

Учитывая, что $T_2 = 0,51 \text{ МэВ} = m_0 c^2$, по формуле (5) найдем

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{\frac{1}{c} \sqrt{(2m_0 c^2 + m_0 c^2) m_0 c^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3} m_0 c}, \text{ или } \lambda_2 = \frac{\lambda_C}{\sqrt{3}}.$$

Подставив значение λ_C в последнюю формулу и произведя вычисления, получим $\lambda_2 = 1,4 \text{ пм}$.

Задача 4.6. Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ . Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (1)$$

где Δx – неопределенность координаты электрона; Δp – неопределенность его импульса.

Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а, следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей (1) можно записать в этом случае в виде $(l/2) \cdot \Delta p \geq \hbar$, откуда

$$l \geq 2 \hbar / (\Delta p). \quad (2)$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp не должна превышать значения самого импульса p , т. е. $\Delta p \leq p$.

Импульс p связан с кинетической энергией T соотношением $p = \sqrt{2mT}$. Заменим Δp значением $\sqrt{2mT}$ (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства (2) к равенству, получим

$$l_{\min} = 2\hbar / \sqrt{2mT}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, найдем

$$l_{\min} = 124 \text{ пм}.$$

Задача 4.7. При определении периода полураспада $T_{1/2}$ коротко живущего радиоактивного изотопа использован счетчик импульсов. За время $\Delta t = 1$ мин в начале наблюдения ($t=0$) было насчитано $\Delta n_1 = 250$ импульсов, а по истечении времени $t = 1$ ч – $\Delta n_2 = 92$ импульса. Определить постоянную радиоактивного распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Решение. Число импульсов Δn , регистрируемых счетчиком за время Δt , пропорционально числу распавшихся атомов ΔN .

Таким образом, при первом измерении

$$\Delta n_1 = k \Delta N_1 = k N_1 (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \quad (1)$$

где N_1 – количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; k – коэффициент пропорциональности (постоянный для данного прибора и данного расположения прибора относительно радиоактивного изотопа).

При повторном измерении (предполагается, что расположение приборов осталось прежним)

$$\Delta n_2 = k \Delta N_2 = k N_2 (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \quad (2).$$

где N_2 – количество радиоактивных атомов к моменту начала второго измерения.

Разделив соотношение (1) на выражение (2) и приняв во внимание, что по условию задачи Δt одинаково в обоих случаях, а также что N_1 и N_2 связаны между собой соотношением $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$, получим

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = e^{\lambda t}, \quad (3)$$

где t – время, прошедшее от первого до второго измерения. Для вычисления λ выражение (3) следует прологарифмировать: $\ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \lambda t$, откуда

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}.$$

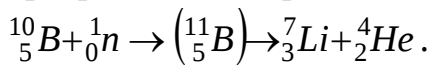
Подставив числовые данные, получим постоянную радиоактивного распада, а затем и период полураспада:

$$\lambda = \frac{1}{1} \ln \frac{250}{92} \text{ ч}^{-1} = 1 \text{ ч}^{-1};$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{1} \text{ ч} = 41,5 \text{ мин}.$$

Задача 4.8. Определить энергию реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha) ^7\text{Li}$, протекающей в результате взаимодействия весьма медленных нейтронов с покоящимися ядрами бора. Найти также кинетические энергии продуктов реакции.

Решение. Реакция $^{10}\text{B}(n, \alpha) ^7\text{Li}$ состоит в следующем. Ядро бора $^{11}_5\text{B}$, поглотив медленный нейтрон 1_0n , превращается в промежуточное ядро $^{11}_5\text{B}$. Последнее, будучи возбужденным, испускает α -частицу (т.е. ядро гелия ^4_2He), превращаясь в ядро лития ^7_3Li . В развернутом виде реакция записывается так:



Энергию реакции Q найдем по формуле:

$$Q = c^2 \left[(m_{^{10}\text{B}} + m_n) - (m_{^7\text{Li}} + m_{^4\text{He}}) \right].$$

Заменив массы покоя ядер атомов массами покоя самих атомов, значения которых даны в таблицах, получим:

$$Q = 931 \cdot (10,01294 + 1,00667 - 7,01601 - 4,00260) \text{ МэВ} = 2,80 \text{ МэВ}.$$

Чтобы найти кинетические энергии продуктов реакции – ядра лития ^7Li и α -частицы, применим закон сохранения релятивистской энергии, записанный в форме

$$\sum T + Q = \sum T', \quad (1)$$

где $\sum T$ – сумма кинетических энергий частиц до реакции; $\sum T'$ – сумма кинетических энергий продуктов реакции.

Из условия задачи следует, что величиной $\sum T$ можно пренебречь. Тогда получим, что сумма кинетических энергий частиц ^7Li и ^4He равна

$$T_{\text{Li}} + T_{\text{He}} = Q \quad (2)$$

Чтобы составить второе уравнение, связывающее неизвестные T_{Li} и T_{He} применим закон сохранения импульса. Полагая суммарный импульс частиц

до реакции равным нулю, приходим к выводу, что и после реакции он должен быть равен нулю:

$$\vec{p}_{Li} + \vec{p}_{He} = 0.$$

Отсюда для модулей импульсов имеем

$$p_{Li} = p_{He}.$$

Переходя от импульсов частиц к их кинетическим энергиям $p = \sqrt{2mT}$, получим, что

$$m_{Li}T_{Li} = m_{He}T_{He}. \quad (3)$$

Решив систему из уравнений (2), (3), определим:

$$T_{Li} = Qm_{He} / (m_{Li} + m_{He}); \quad T_{He} = Qm_{Li} / (m_{Li} + m_{He}).$$

Округлив значения масс ядер m_{Li} , m_{He} до целых чисел, получим:

$$T_{Li} = 4Q/11 = 1,02 \text{ МэВ}; \quad T_{He} = 7Q/11 = 1,78 \text{ МэВ}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	4.010	4.020	4.030	4.040	4.050	4.060	4.070	4.080
1	4.011	4.021	4.031	4.041	4.051	4.061	4.071	4.081
2	4.012	4.022	4.032	4.042	4.052	4.062	4.072	4.082
3	4.013	4.023	4.033	4.043	4.053	4.063	4.073	4.083
4	4.014	4.024	4.034	4.044	4.054	4.064	4.074	4.084
5	4.015	4.025	4.035	4.045	4.055	4.065	4.075	4.085
6	4.016	4.026	4.036	4.046	4.056	4.066	4.076	4.086
7	4.017	4.027	4.037	4.047	4.057	4.067	4.077	4.087
8	4.018	4.028	4.038	4.048	4.058	4.068	4.078	4.088
9	4.019	4.029	4.039	4.049	4.059	4.069	4.079	4.089

Задачи для самостоятельного решения

4.010. Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 34$ кВт. Определить температуру T этого тела, если известно, что его поверхность $S = 0,6 \text{ м}^2$.

4.011. Определить энергетическую светимость абсолютно черного тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 484 \text{ нм}$.

4.012. Мощность излучения абсолютно черного тела $P = 10$ кВт. Определить площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной

плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 700$ нм.

4.013. Определить длину волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру $T = 310$ К.

4.014. При нагревании абсолютно черного тела длина волны λ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 до 500 нм. Определить во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость R_λ тела.

4.015. Определить температуру T и энергетическую светимость R_λ абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения приходится на длину волны $\lambda = 600$ нм.

4.016. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре $T = 280$ К. Определить коэффициент черноты a_T Земли, если энергетическая светимость R_λ ее поверхности равна $325 \text{ кДж/м}^2\text{ч}$.

4.017. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(r_{\lambda, T})_{\max}$ абсолютно черного тела равна $4,16 \cdot 10^{11} (\text{Вт/м}^2)$. Определить на какую длину волны λ_m она приходится.

4.018. Мощность P излучения шара радиусом $R = 10$ см при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт. Определить эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом черноты $a_T = 0,25$.

4.019. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности $(r_{\lambda, T})_{\max}$ сместился $\lambda_1 = 2,4$ мкм на $\lambda_2 = 0,8$ мкм. Определить как и во сколько раз изменились энергетическая светимость R_λ тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости.

4.020. На фотоэлемент с катодом из лития падает излучение с длиной волны $\lambda = 200$ нм. Определить наименьшее значение задерживающей разности потенциалов, которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить фототок.

4.021. На металлическую пластину направлен монохроматический пучок света с частотой $\nu = 7,3 \cdot 10^{14}$ Гц. Красная граница фотоэффекта для данного материала $\lambda_0 = 560$ нм. Определить максимальную скорость фотоэлектронов.

4.022. Фотоны с энергией $\epsilon = 4,9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4,5$ эВ. Определить максимальный импульс $p_{\max}$, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

4.023. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Определить минимальную энергию ϵ фотона, вызывающего фотоэффект.

4.024. Определить частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 3$ В. Фотоэф-

фekt начинается при частоте света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить работу выхода A электрона из металла.

4.025. Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении γ -фотонами с энергией $\varepsilon = 1,53$ МэВ.

4.026. Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10 Мм/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

4.027. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,1$ мкм. Красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 0,3$ мкм. Определить какая доля энергии фотона расходуется на сообщение электрону кинетической энергии.

4.028. Фотон с энергией $\varepsilon = 10$ эВ падает на серебряную пластину и вызывает фотоэффект. Какую задерживающую разность потенциалов нужно приложить, чтобы прекратился фототок?

4.029. На поверхность лития падает монохроматический свет ($\lambda = 310$ Нм). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U не менее 1,7 В. Определить работу выхода A .

4.030. Определить коэффициент отражения поверхности, если при энергетической освещенности $E_e = 120$ Вт/м² давление света на нее равно $P = 0,5$ мкПа.

4.031. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой $F = 10$ мН. Определить число n фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность.

4.032. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 662$ нм падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление $P = 0,3$ мкПа. Определить концентрацию n фотонов в световом пучке.

4.033. Давление P монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на черную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 1$ с на поверхность площадью $S = 1$ см².

4.034. На зеркальную поверхность площадью $S = 6$ см² падает нормально поток излучения $\Phi_e = 0,8$ Вт. Определить давление P и силу давления F света на эту поверхность.

4.035. Свет падает нормально на зеркальную поверхность, находящуюся на расстоянии $r = 10$ см от конечного изотропного излучателя. Определить при какой мощности N излучателя давление P на зеркальную поверхность будет равным 1 мПа.

4.036. Определить энергетическую освещенность E_e зеркальной поверхности, если давление P , производимое излучением, равно 40 мкПа. Излучение падает нормально к поверхности.

4.037. На зеркальную поверхность площадью $S = 66$ мм² падает нормально поток излучения $\Phi_e = 0,8$ Вт. Определить давление и силу давления света на эту поверхность.

4.038. Давление света с длиной волны $\lambda = 400$ нм, падающего нормально на черную поверхность, равно 2 нПа. Определить число фотонов, падающих за время $t = 10$ с на площадь $S = 1$ мм² этой поверхности.

4.039. На поверхность площадью $S = 0,01$ м² в единицу времени падает световая энергия $W = 1,05$ Дж/с. Определить световое давление в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на нее лучи.

4.040. Определить энергию ε фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на основной.

4.041. Невозбужденный атом водорода поглощает квант излучения с длиной волны $\lambda = 102,6$ нм. Определить, пользуясь теорией Бора, радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода.

4.042. Определить по теории Бора радиус r_2 второй стационарной орбиты и скорость v_2 электрона на этой орбите для атома водорода.

4.043. Определить изменение энергии ΔE электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с частотой $\nu = 6,28 \cdot 10^{14}$ Гц.

4.044. Определить во сколько раз изменится период T вращения электрона в атоме водорода, если при переходе в невозбужденное состояние атом излучил фотон с длиной волны $\lambda = 97,5$ нм.

4.045. Определить на сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 435$ нм.

4.046. В одноразрядном ионе лития электрон перешел с четвертого энергетического уровня на второй. Определить длину волны λ излучения, испущенного ионом лития.

4.047. Электрон в атоме водорода находится на третьем энергетическом уровне. Определить кинетическую T , потенциальную U и полную E энергию электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

4.048. Фотон выбивает из атома водорода, находящегося в основном состоянии, электрон с кинетической энергией $T = 10$ эВ. Определить энергию ε фотона.

4.049. Невозбужденный атом водорода поглощает квант излучения с длиной волны $\lambda = 102,6$ нм. Определить, пользуясь теорией Бора, радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода.

4.050. Определить энергию, которую необходимо сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от $\lambda_1 = 0,2$ нм до $\lambda_2 = 0,1$ нм.

4.051. Определить наиболее вероятную дебройлевскую длину волны λ молекул азота, содержащихся в воздухе при комнатной температуре.

4.052. Определить с какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля λ электрона равна его комптоновской длине волны λ_c .

4.053. Электрон движется по окружности радиусом $r = 0,5$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 8$ мТл. Определить длину волны де Бройля λ электрона.

4.054. Определить какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля λ была равна $0,1$ нм.

4.055. Электрон движется со скоростью $v = 200$ мм/с. Определить длину волны де Бройля для такого электрона, учитывая изменение массы электрона в зависимости от скорости.

4.056. Определить длины волн де Бройля α - частицы и протона, прошедших одинаковую ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ.

4.057. Кинетическая энергия электрона равна удвоенному значению его энергии покоя. Определить длину волны де Бройля для такого электрона.

4.058. Электрон обладает кинетической энергией $T = 1,02$ МэВ. Определить во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если кинетическая энергия электрона уменьшится вдвое.

4.059. Протон обладает кинетической энергией $T = 1$ кэВ. Определить дополнительную энергию, которую нужно сообщить протону для того, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в 3 раза.

4.060. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося внутри сферы радиусом $R = 0,05$ мм.

4.061. Электрон с кинетической энергией $T = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить относительную неточность $\frac{\Delta v}{v}$, с которой может быть определена скорость электрона.

4.062. Определить какова должна быть кинетическая энергия T протона в моноэнергетическом пучке, используемого для исследования структуры с линейными размерами $l \approx 10^{-13}$ см.

4.063. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину l одномерного потенциального ящика, в котором минимальная энергия электрона $E_{min} = 10$ эВ.

4.064. Приняв, что минимальная энергия нуклона в ядре равна $T = 10$ МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

4.065. Используя соотношение неопределенностей, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \approx 0,1$ нм.

4.066. Альфа-частица находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину ящика, если известно, что минимальная энергия α -частицы $E_{min} = 8$ МэВ.

4.067. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неточность $\frac{\Delta p}{p}$ импульса этой частицы.

4.068. Используя соотношение неопределенностей, оценить наименьшие ошибки Δv в определении скорости электрона и протона, если координаты центра масс этих частиц могут быть установлены с неопределенностью $\Delta x = 1$ мкм.

4.069. Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $v = 1,5 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неточность Δv в определении скорости составляет 10% от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

4.070. Определить, какая часть начального количества атомов распадается за один год в радиоактивном изотопе тория Th^{229} .

4.071. Определить, какая часть начального количества атомов радиоактивного актиния Ac^{225} останется через 5 суток.

4.072. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в 3 раза. Определить, во сколько раз оно уменьшится за два года.

4.073. Определить, за какое время t распадается $\frac{1}{4}$ начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T_{1/2} = 24$ ч.

4.074. За время $t = 8$ сут. распалось $\frac{3}{4}$ начального количества ядер радиоактивного изотопа. Определить период полураспада $T_{1/2}$.

4.075. Период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного нуклида равен 1 ч. Определить среднюю продолжительность τ жизни этого нуклида.

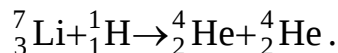
4.076. Определить, какая часть начального количества радиоактивного нуклида распадается за время t , равное средней продолжительности τ жизни этого нуклида.

4.077. Определить число N ядер, распадающихся в течение времени $t = 1$ мин. в радиоактивном изотопе фосфора P_{15}^{32} массой $m = 1$ мг.

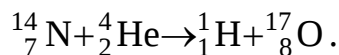
4.078. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Определить, через какое время t распадается 75% первоначальной массы m атомов.

4.079. Определить постоянную распада λ радона, если известно, что число атомов радона уменьшается за время $t = 1$ сут. на 18,2%.

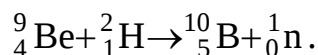
4.080. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



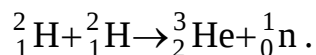
4.081. Вычислить энергию Q , поглощающуюся при реакции



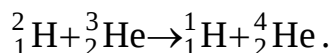
4.082. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



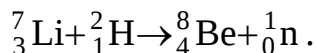
4.083. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



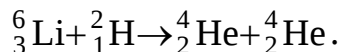
4.084. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



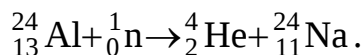
4.085. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



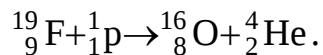
4.086. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



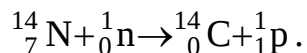
4.087. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



4.088. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



4.089. Вычислить энергию Q , выделяющуюся при реакции



ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Изучение курса физики включает как обязательные составляющие, не только выполнение контрольных работ, т.е. умение решать задачи, но и применение законов физики на практике.

ПОДГОТОВКА, ВЫПОЛНЕНИЕ И ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Подготовка к лабораторной работе включает:

- изучение теоретического материала, законов и явлений, по литературе с целью применения его на практике и подготовки ответов на контрольные вопросы о физических явлениях и законах;
- определение цели лабораторной работы;
- ознакомление с лабораторной установкой, средствами измерений и методикой измерений;
- Подготовка протокола измерений с таблицами и рабочими формулами.

Студент должен быть готов к ответу на вопросы о том, какое явление изучается в данной работе, какие основные законы описывают это явление, какая физическая величина подлежит экспериментальному определению, что она собой представляет и от чего зависит. Кроме того, необходимо быть готовым показать на схеме или виртуальной лабораторной установке ее основные элементы, измерительные приборы, охарактеризовать их назначение и принцип действия, представить вывод рабочих формул. Прежде чем приступить к систематическим измерениям, студент должен ознакомиться с устройством и работой приборов. Первые несколько измерений почти всегда менее надежны или менее ценны, чем последние, поэтому необходимо проделать несколько пробных замеров. *При подготовке к лабораторной работе необходимо выполнить пункты 1-6 отчета (см. с. 157).*

Выполнение лабораторной работы. Лабораторная работа выполняется группой из 2–3 студентов. Измерения проводятся в соответствии с описанием, приведённым в каждой лабораторной работе. Результаты измерений заносятся в протокол. *Протокол* – это часть отчета, в котором фиксируются результаты измерений. *Протокол с результатами измерений проверяет преподаватель и ставит подпись, подтверждающую выполнение работы.* В конце занятия необходимо представить отчет по лабораторной работе (Образец на стр. 226).

Запись результатов измерений, схем. Все результаты измерений записываются без какой-либо обработки (нельзя проводить даже самые простые арифметические расчеты в уме, прежде чем записывать результат). Протокол по лабораторной работе заполняется по мере измерений без переписываний «начисто». Результаты оформляются в виде таблиц (такая запись компактнее и проще для чтения). Значения одной и той же величины лучше всего записывать в столбик. Над каждым столбиком указывают название или символ соответствующей величины с единицами измерения. Следует избегать повторений, чтобы не загромождать записи. Необходимо также изобразить схему экспериментальной установки и указать наименование элементов.

Значение схемы в отчетах об эксперименте вряд ли можно переоценить; она может не быть точным изображением установки, но на ней должно быть указано всё, что имеет отношение к эксперименту.

Обработка результатов измерений. Окончательный результат получают после обработки результатов всех измерений. Как правило, при выполнении промежуточных расчётов необходимо сохранять один лишний знак, который при записи окончательного результата будет отброшен. При записи результата измерения последняя цифра должна соответствовать тому десятичному разряду абсолютной погрешности, который использован при указании погрешности.

Например: Для определения сопротивления проводника, определяют силу тока в проводнике $I=27,3 \text{ мА}$ и падение напряжения на нем $U=6,45 \text{ В}$. Абсолютная погрешность измерения приборов составляет 1%. Сопротивление проводника определим по закону Ома $R=U/I$; $R=6,45\text{В}/0,0273\text{А}=236,2637 \text{ Ом}$. Незначащие цифры следует отбросить, воспользовавшись правилами округления. Так как U и I определены с точностью до 1%, то погрешность найденного в результате вычислений R не может быть меньше 1%, поэтому вычисления следует делать не точнее, чем 10^{-4} . Ответ следует записать так: $R=236,3 \text{ Ом}$.

Основное правило округления: если первая отброшенная цифра больше или равна пяти, то последнюю из сохраняемых цифр увеличивают на единицу; если первая отброшенная цифра меньше пяти, то последнюю из сохраняемых цифр оставляют без изменения. Округление с избытком: цифра последнего сохраняемого разряда увеличивается на единицу. Округление с недостатком: цифра последнего сохраняемого разряда остаётся без изменения. При выполнении промежуточных и конечных вычислений необходимо выполнять правила

сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения из корня для приближённых вычислений.

Представление результатов на графике. Результаты наблюдений отображают на графике для наглядного представления изменения рассматриваемых величин и определения характера их взаимосвязи.

Обычно пользуются прямоугольной системой координат с равномерными масштабами по осям (x , y). На графиках принято по горизонтальной оси откладывать независимую переменную, т.е. величину, значение которой задает сам экспериментатор, а по вертикальной оси – зависимую величину, которую он при этом определяет (по горизонтали откладывается «причина», а по вертикали – «следствие»). Деления наносятся с внутренней стороны оси, не перечеркивая её, а числовые значения – с внешней стороны. Оси должны быть поименованы; рядом со стрелками проставлены обозначения откладываемой по оси физической величины с единицей ее измерения в выбранном масштабе.

Масштаб должен быть простым и кратным 1, 2, 3...или 10, 20, 30..., иначе при нанесении точек на график придется производить арифметические подсчеты. График должен быть наклонён примерно под углом 45° к осям и занимать большую часть площади. Наименьшее расстояние, которое можно отсчитать на графике, должно быть не меньше величины абсолютной ошибки измерений. В тех областях, где ход кривой монотонный, можно ограничиться небольшим числом измерений, а в области максимумов, минимумов и точек перегиба следует производить измерения значительно чаще. Все точки на графике при выбранном масштабе должны быть видны как отдельные.

Экспериментальные точки не соединяются ломаной линией, так как маловероятно, что соотношение между двумя величинами имеет скачкообразный характер. Через экспериментальные точки следует проводить плавную линию. Графики необходимо выполнять на миллиметровой бумаге. Построение графиков легко осуществляется в программе Excel. Использование программных средств позволяет производить линейную аппроксимацию графика и строить сглаженную кривую по экспериментальным точкам.

Следует иметь в виду, что начало координатных осей не обязательно должно совпадать с нулевыми значениями ox и oy . В случае линейной зависимости легко определить и коэффициент пропорциональности k , который равен тангенсу угла наклона прямой к оси x . Это коэффициент пропорциональности

между величиной функции y и аргументом x : $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$. В пределах произведенных наблюдений можно интерполировать зависимость, т.е. находить значения величины y для таких значений x , которые непосредственно не наблюдались.

Оформление отчета по лабораторной работе

Отчет по лабораторным работам *оформляется каждым студентом* на отдельных скрепленных между собой листах белой бумаги формата А4 или на двойных листах из школьной тетради в клетку. Оформление работ и вычисления можно выполнять на компьютере при условии соблюдения правил оформления. Если результат заносится в таблицу, то достаточно привести подробный расчет только для одного опыта. Графические зависимости оформляются в соответствии с правилами построения графиков. Допускается оформление графиков с применением компьютера. Полученные практические результаты сопоставляются с теоретическими или справочными данными. Обсуждение и анализ результатов эксперимента следует завершать краткими выводами, которые должны указывать на достижение целей, поставленных в лабораторной работе. *Образец лабораторной работы приведен в приложении.*

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист, на котором обязательно указывают название, номер лабораторной работы, а также нижеследующее:

Выполнил: студент группы ГО_{3У}-07

ФИО Бурлов С.А.

Дата выполнения: 14.02.09

Преподаватель ФИО Щетин В.И.

- 2) цель лабораторной работы;
- 3) краткую теорию и рабочие формулы;
- 4) описание экспериментальной установки и методики измерения;
- 5) порядок выполнения работы;
- 6) протокол или таблицу измерений, подписанные преподавателем;
- 7) обработку результатов, включая расчёт погрешностей;
- 8) графики (при необходимости);
- 9) конечные результаты и выводы.

Защита результатов лабораторного эксперимента

Результаты лабораторной работы, оформленные по правилам, студент обязан представить преподавателю и защитить их на собеседовании. При оценке лабораторной работы учитывается качество оформления: все записи должны быть аккуратными и разборчивыми; рисунки, схемы и таблицы выполнены карандашом с помощью линейки и других необходимых чертежных инструментов. При оформлении отчета следует ориентироваться на образец, приведенный в приложении. На собеседовании защищаются выводы о соответствии практического результата с теорией; о достижении поставленной цели; объясняются имеющиеся отклонения и дается анализ достижений или недочетов.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ЛАБОРАТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Инженеру в своей практической деятельности часто необходимо проводить эксперименты с целью описания процесса и получения его математической модели. Любая математическая модель не будет иметь смысла, если не учитывать погрешности при проведении эксперимента. В данных методических указаниях рассматриваются общие сведения, необходимые для оценки точности полученных лабораторных измерений. Студентам, желающим получить более глубокие знания по планированию и обработке лабораторного (технического) эксперимента, следует обратиться к литературе [8]. Прежде чем рассматривать некоторые правила обработки результатов измерений, приведем некоторые общепринятые термины и определения.

Определения и понятия

Измерение – это совокупность действий, выполняемых при помощи *средств измерений* для получения численного значения физической величины (*результата измерений*) в принятых единицах измерений. Различают прямые и косвенные измерения.

Прямые измерения – это измерения, при которых искомая величина находится путём сравнения с эталоном или с помощью измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах измерения (*например, изме-*

рение длины тела при помощи метра или силы тока в электрической цепи амперметром).

Косвенные измерения – это измерения, при которых значение физической величины находят на основании известной зависимости между искомой величиной и величинами, которые определяют путём прямых измерений (например, измерение сопротивления проводника по измерениям силы тока и падения напряжения). Бóльшая часть *средств измерений* показывает результат действия измеряемой величины на прибор, а не её искомое значение.

Измерение высоты столбика ртутя, проградуированного в градусах, показывает температуру, а угол поворота рамки вольтметра – напряжение. В данном случае видим, что измерение физических величин температуры и напряжения сводится к линейным и угловым измерениям. Численные значения физических величин получаем при помощи *средств измерений*.

Средства измерений подразделяют на *меры* и *измерительные приборы*.

Мера – это тело или устройство, предназначенное для измерений и воспроизводящее одно или несколько значений данной физической величины (например, измерительная линейка, гиря, мензурка и т. д.).

Измерительный прибор – это тело или устройство, предназначенное для измерений и имеющее части, которые воспринимают измеряемую физическую величину и преобразуют её в показания (например, термометр, весы, штангенциркуль, вольтметр и т. д.). Измерениями, средствами измерений и их погрешностями занимается наука **метрология**. Абсолютно точных измерительных приборов в физике и технике нет. Несовершенство измерительных приборов, методик измерения и наших органов чувств не позволяет определить точно искомую величину. Количественной характеристикой точности полученных результатов измерений является *погрешность результата измерения*.

Погрешность результата измерения – это отклонение результата измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины. Погрешности результатов измерений можно представить в абсолютных единицах измеряемой величины или в относительных.

Абсолютная погрешность результата измерения физической величины Δx (погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины) определяется разностью между истинным x_0 и измеренным значением физической величины x ; указывает на границы неопределённости значения измеряе-

мой величины и определяет точность измерения $\Delta x = |x - x_0|$. Точность измерения – это характеристика качества измерения, отражающая близость к нулю погрешности его результата.

Относительная погрешность результата измерения физической величины определяется отношением абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины и выражается в долях либо в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} 100 \% .$$

Погрешности могут быть вызваны различными причинами: неправильной градуировкой прибора, несовершенством метода измерений, колебаниями температуры, вибрацией и т.д. По характеру проявления подразделяют погрешности *систематические, случайные и промахи*.

Систематические погрешности измерения – это погрешности, которые при повторных измерениях остаются постоянными или изменяются по известному закону. Такие погрешности могут быть связаны с ограниченной точностью используемых измерительных приборов и их неправильной установкой (*инструментальная погрешность*), неверным выбором метода измерений (*методическая погрешность*) и постоянным воздействием различных внешних факторов. Основным отличительный признак систематических погрешностей состоит в том, что они могут быть предсказаны и благодаря этому частично или полностью устранены введением соответствующих поправок.

Случайные погрешности измерения – это погрешности измерения, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же физической величины; погрешности непредсказуемы ни по знаку, ни по величине. Случайные погрешности обусловлены большим количеством трудно учитываемых факторов, влияющих как на средства измерений, так и на самого экспериментатора. Причинами могут быть трение и зазоры в приборах, вибрации и др. Присутствие случайных погрешностей (в отличие от систематических) обнаруживается в виде некоторого разброса получаемых результатов при повторных измерениях. Таким образом, главной отличительной чертой случайных погрешностей является их непредсказуемость от одного отсчета к другому. Описание случайных погрешностей производится с помощью аппарата математической статистики и теории вероятностей.

Промах, или грубая погрешность – это случайная погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая при равных условиях наблюдений заметно отличается от остальных результатов этого ряда. Промахи возникают из-за грубого нарушения нормальных условий измерений и могут быть связаны с неисправностью измерительного устройства, неправильным его использованием или ошибочными записями и вычислениями. Погрешности такого рода должны быть исключены путем проверок.

Погрешности в зависимости от причин, их вызывающих, можно разделить на несколько групп, основные из которых рассмотрим далее.

Методическая погрешность возникает вследствие несовершенства методики измерения и получения окончательного результата, в том числе от пренебрежения по ходу вывода расчетной формулы тем или иным аргументом или условием протекания процесса, от наличия влияния средств измерения на характер исследуемого процесса и неучёта этого влияния в расчетной формуле.

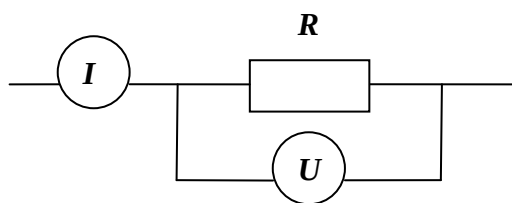


Рис. 1

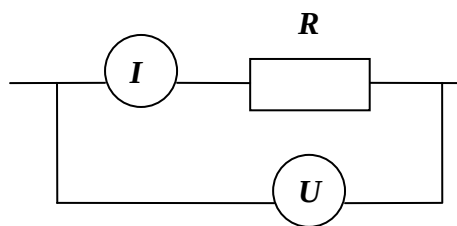


Рис. 2

В качестве примера погрешности метода рассмотрим измерение мощности постоянного тока при помощи амперметра и вольтметра для двух схем включения (рис.1, 2). Внутренние сопротивления амперметра, вольтметра и нагрузки соответственно равны R_a, R_v, R_n . Относительная методическая погрешность измерения мощности при использовании схемы 1 вычисляется как $\varepsilon_a = R_n / R_v$, а при использовании схемы 2 определяется по формуле $\varepsilon_b = R_a / R_n$. Анализ формул, описывающих относительные погрешности, показывает, что их величина различна. Первую схему включения (см. рис. 1) целесообразно применять для измерения низкоомных нагрузок, а измерение мощности на высокоомных нагрузках выгоднее производить по второй схеме.

Методическую погрешность можно значительно уменьшить, если воспользоваться вольтметром, сопротивление которого R_v много больше сопротивления нагрузки R_n , и амперметром, сопротивление которого R_a много меньше R_n .

Инструментальная погрешность, или погрешность средства измерения – это разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Это составляющая погрешности измерения, которая зависит от погрешностей применяемых средств измерений. Различают *основные* (допустимые погрешности мер и измерительных приборов) и *дополнительные* (возникающие вследствие износа, неисправности средств измерения их неправильной установки) погрешности. Инструментальная погрешность принадлежит данному средству измерений, может быть определена при его испытаниях в сравнении с эталоном и занесена в его паспорт.

Погрешности отсчета. *Отсчетом* называют число, полученное при данном измерении по *отсчетному устройству* меры или прибора или полученное путем счета последовательных отметок или сигналов. Отсчет по шкале получают при помощи *указателя*, которым может быть стрелка (в амперметре), уровень жидкости (в мензурке), световой луч (в зеркальном гальванометре), конец измеряемого стержня (для линейки). Если указатель установился точно на отметке шкалы, то за результат измерения принимается числовое значение этой отметки. Как правило, указатель устанавливается между отметками шкалы, поэтому доли деления оцениваются “на глаз”. Погрешность такого отсчета составляет от 1 до 5 десятых долей деления, т.е. не превосходит половины цены деления шкалы. Как правило, *независимо от того, к какой отметке ближе лежит указатель, его показание следует округлить до ближайшего значения или среднего арифметического двух значений, в промежутке между которыми он находится.*

Погрешность отсчёта равна половине цены деления. Исключение составляют приборы, стрелка которых движется от штриха к штриху скачками, например карманный секундомер, погрешность отсчета которого равна *цене деления* и составляет 0,2 с.

Цена деления равна диапазону шкалы, делённому на число делений в данном диапазоне. Рассмотренная погрешность отсчета, связанная с округлени-

ем показания средства измерения, является случайной величиной и называется *погрешностью округления*. Погрешность отсчета возникает не только от округления показаний прибора, но и вследствие других причин, например, от *параллакса*. Параллакс заключается в видимом смещении указателя шкалы, вызываемом изменением точки наблюдения. Для уменьшения погрешности, связанной, например, с параллаксом линейки, на краю линейки делают скос, кончики стрелки секундомера пригибают к шкале.

В стрелочных приборах для облегчения установки глаза применяют зеркальную шкалу. Отсчет производят тогда, когда стрелка прибора закроет собой свое изображение в зеркале. Погрешность от параллакса может быть случайной и систематической (например, если прибор постоянно находится сбоку от экспериментатора).

Общая погрешность складывается из *инструментальной погрешности*, *погрешности отсчета* и *случайной погрешности*. Систематическую погрешность средств измерения можно оценивать на основе классов точности.

Класс точности – это обобщённая характеристика средств измерения, выражаемая пределами допускаемых значений его основной и дополнительной погрешностей. Зная *класс точности прибора* γ , можно определить погрешность средств измерения:

$$\Delta x_{ci} = \frac{X_N \gamma}{100}, \quad (1)$$

где X_N – нормирующее значение (устанавливается равным наибольшему из пределов значений для средств измерений с равномерной шкалой).

Например: для вольтметра класса точности 0,5 с предельным значением 50 А абсолютная погрешность средства измерения выразится как $\Delta x_{ci} = \pm 50 \text{ А} \cdot 0,5\% / 100\% = \pm 0,25 \text{ А}$.

Если на приборе не указан класс точности, то погрешность измерения принимается равной $\frac{1}{2}$ цены деления прибора.

К таким приборам относятся штангенциркуль, термометр, барометр.

Оценка погрешностей прямых измерений

Как было сказано выше, в процессе определения физической величины могут присутствовать различные погрешности: методическая, погрешность

средства измерения Δx_{ci} , погрешности отсчета Δx_o , случайные погрешности Δx_{cl} и т.д. (по возможности необходимо исключать погрешности или их учитывать). Полная абсолютная погрешность прямых измерений рассчитывается как погрешность для некоррелированных составляющих:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{cl}^2 + \Delta x_{ci}^2 + \Delta x_o^2 + \dots}.$$

Различные составляющие погрешности необходимо сравнивать, так как они могут быть величинами разных порядков; тогда меньшей погрешностью можно пренебречь. При этом возможно следующее:

случайные погрешности значительно (как минимум на порядок) превышают погрешности средств измерения и др., тогда $\Delta x = \Delta x_{cl}$;

погрешности средств измерения заметно превышают случайные погрешности и др., тогда $\Delta x = \Delta x_{ci}$;

основным источником погрешностей являются погрешности средств измерения и случайные погрешности, тогда погрешность находят как

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{cl}^2 + \Delta x_{ci}^2}. \quad (2)$$

Результат измерения и его погрешность, как правило, зависит от большого количества факторов и в теории погрешностей рассматривается как случайная величина, к которой применимы законы теории вероятностей и математической статистики. Универсальным способом описания случайных величин является нахождение интегральных или дифференциальных характеристик функций распределения. Наиболее часто используется дифференциальная функция плотности распределения вероятностей, имеющая **нормальный закон распределения** случайных величин x , часто называемый *распределением Гаусса*, который описывается функцией вида

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}},$$

где x_0 – математическое ожидание (центр распределения); σ^2 – дисперсия; e – основание натуральных логарифмов.

На практике результаты измерений являются величинами дискретными и могут быть представлены рядом значений случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$; который называется *выборкой*.

Среднее арифметическое значение измеряемой величины $\bar{x}$ является оценкой математического ожидания и наиболее вероятной оценкой наблюдаемой величины по выборке и определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3)$$

где n – число измерений, или длина выборки.

Среднее квадратичное отклонение отдельных измерений является наилучшей оценкой средней погрешности для x и определяется как корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}},$$

а среднее квадратичное отклонение среднего значения – как

$$S = \sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (4)$$

В практике измерений важно определить не только параметры распределения $\bar{x}$ и σ^2 , но и *доверительный интервал*, соответствующий доверительной вероятности P . Надёжность измерений (их достоверность) количественно определяется как *доверительная вероятность* попадания истинного значения измеряемой величины X_0 в доверительный интервал $(X - \Delta x) \geq X_0 \leq (X + \Delta x)$, где Δx – абсолютная погрешность серии измерений. Доверительную вероятность P обычно задают в пределах 0,90; 0,95; 0,99. Расчёт доверительных интервалов для случая нормального распределения результатов измерений при малом числе наблюдений n , проведённых в одинаковых условиях, можно выполнить по методике, предложенной Стьюдентом (*английский математик У. Госсет опубликовал результаты работы под псевдонимом Стьюдент*). Абсолютная случайная погрешность $\Delta x_{сл}$ тогда может быть рассчитана следующим образом:

$$\Delta X_{сл} = t_{p,n} \cdot S, \quad (5)$$

где $t_{p,n}$ – коэффициент Стьюдента (зависит от заданного значения *доверительной вероятности* P и числа измерений n); S вычисляется по формуле (4). Таблица значений коэффициентов Стьюдента приведена ниже.

Таблица коэффициентов Стьюдента.

число изм. n	Доверительная вероятность P						
	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,99
2	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	637
3	0,82	1,06	1,5	1,9	2,9	4,3	35
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	8,6
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	6,9
7	0,72	0,91	1,1	1,4	1,9	2,4	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	5,4
9	0,71	0,89	1,1	1,4	1,9	2,3	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	4,8

Коэффициент Стьюдента изменяется незначительно при числе $n > 6$, поэтому при технических измерениях для $P=0,95$ число измерений может быть достаточным в пределах 6–10 измерений.

Определение случайной погрешности прямых измерений удобно выполнять, используя таблицу, в которую заносят результаты измерений, промежуточные вычисления и другие необходимые данные.

Таблица результатов прямых измерений

i	x_i	Δx_i	Δx_i^2	P	$t_{p,n}$	S	$\bar{x}$	Δx_{cl}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				0,95				
2								
...	...	...	...					
n								

Алгоритм обработки результатов прямых измерений:

1. Записать во второй столбец табл. 1 результаты серии многократных измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$.
2. Найти среднее арифметическое значение $\bar{x}$ измеряемой величины по формуле (3) и занести в восьмой столбец.
3. В третий столбец записать абсолютные погрешности отдельных измерений, которые находятся по формуле $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.

4. В четвёртый столбец занести квадраты значений абсолютных погрешностей отдельных измерений Δx_i^2 .
5. В пятый столбец занести значение доверительной вероятности (или надёжности). Мы принимаем значение надёжности 95 %, или $P = 0,95$.
6. Определить коэффициент Стьюдента $t_{p,n}$ с учетом заданной доверительной вероятности $P = 0,95$ и числа измерений n и занести в столбец 6.
7. Определить среднюю квадратичную погрешность среднего значения по формуле (4) и занести в седьмой столбец.
8. Вычислить абсолютную случайную погрешность серии n измерений $\Delta x_{сл}$ по формуле (5).
9. Сравнить абсолютную случайную погрешность серии измерений с другими погрешностями и найти полную абсолютную погрешность прямых измерений по формуле (1) или (2).
10. Определить верхнюю $(\bar{x} + \Delta x)$ и нижнюю $(\bar{x} - \Delta x)$ границы доверительного интервала.
11. Записать результат измерений в виде $x = (\bar{x} \pm \Delta x)$.
12. Определить относительную погрешность измерений в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} 100\% .$$

В результате измерений и вычислений получается не конкретное число, а интервал, внутри которого с вероятностью 95 % находится истинное значение измеряемой величины. Измеряемая величина может быть в любом месте интервала и с вероятностью 5 % находиться вне его границ.

Оценка погрешностей косвенных измерений

Часто приходится находить физическую величину X , которая является функцией других величин: $X = f(y, z, \dots, v)$, где $y, z, \dots, v$ – величины определяемые прямыми измерениями. *Например: Определить сопротивление проводника R по данным прямых измерений его длины l и диаметра d .*

Если величины $y, z, \dots, v$ независимы, то погрешность косвенных измерений для случая n величин находится в общем виде по приближенной формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X}{\partial z_k} \Delta z \right)^2}, \quad (6)$$

что позволяет получить вполне удовлетворительные оценки погрешности.

Если искомая величина $X = f(y, z)$ является известной функцией двух аргументов y, z , то формула (6) приобретает вид:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0^2 (\Delta z)^2}, \quad (7)$$

где $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ – частные производные функции $X = f(y, z)$, определяемые в области средних значений $\bar{y}, \bar{z}$; $\Delta y, \Delta z$ – погрешности прямых измерений величин y, z . Это метод разложения функции в ряд Тейлора с использованием свойства дисперсии суммы независимых случайных величин, или **метод частных производных**.

Каждая частная производная может быть найдена как полная производная функции $X = f(y, z)$ по одному из аргументов, если другие аргументы при этом рассматриваются как постоянные величины.

Пример: Рассчитать погрешность определения ускорения $|\vec{a}|$ по измерениям времени t и расстояния s . Расчётная формула: $a = 2s / t^2$.

Найдём частные производные: $\partial a / \partial s = 2 / t^2$ и $\partial a / \partial t = -4s / t^3$.

Полная абсолютная погрешность из выражения (2) тогда принимает вид $\Delta a = \sqrt{(2\Delta s / \bar{t}^2)^2 + (-4\bar{s} \cdot \Delta t / \bar{t}^3)^2}$. Для численного определения абсолютной погрешности необходимо знать средние значения времени $\bar{t}$ и расстояния $\bar{s}$, а также их абсолютные погрешности.

Приведём некоторые правила, используемые при оценке погрешностей косвенных измерений:

при сложении и вычитании абсолютные погрешности складываются;

при умножении и делении относительные погрешности складываются;

при возведении в степень и извлечении корня относительные погрешности умножаются на показатель степени;

дисперсия суммы и разности величин равна сумме их дисперсий.

Надо помнить, что погрешность результата измерения всегда значительно меньше самого результата.

Если это условие не выполняется, то опыт нужно провести заново.

**Расчёт погрешностей косвенных измерений
по методу приращения функций**

Рассмотрим частные случаи определения погрешности косвенных измерений: метод приращений и метод логарифмирования.

Полная абсолютная погрешность косвенно измеряемой величины $X = f(y, z)$ равна $\Delta x = \sqrt{\Delta x_y^2 + \Delta x_z^2}$, где $\Delta x_y, \Delta x_z$ – полные абсолютные погрешности прямых измерений величин y, z , включающие погрешности средств измерения и случайные погрешности.

**Расчёт погрешностей косвенных измерений с помощью
логарифмирования функции**

Если воспользоваться выражением для относительной погрешности в виде $\varepsilon = \Delta X / \bar{X}$ и подставить в него Δx из формулы (5), то, учитывая, что $\frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial \ln X}{\partial y}$, $\frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial \ln X}{\partial z}$, относительная погрешность будет определяться по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln X}{\partial y} \right)_0^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial \ln X}{\partial z} \right)_0^2 (\Delta z)^2}, \quad (8)$$

а абсолютная погрешность – по формуле

$$\Delta x = \bar{X} \sqrt{\left(\frac{\partial \ln X}{\partial y} \right)_0^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial \ln X}{\partial z} \right)_0^2 (\Delta z)^2}. \quad (9)$$

Здесь частные производные функции $X = f(y, z)$ определяют также в области средних значений $\bar{y}, \bar{z}$. Метод логарифмирования функции подходит, если она имеет удобный для логарифмирования вид, например, когда измеряемая величина может быть представлена в виде степенной функции:

$$X = f(y, z) = c \cdot y^a \cdot z^b.$$

Здесь показатели степени a, b и c могут принимать как целые, так и дробные значения, относительная погрешность измерения X будет иметь вид

$$\varepsilon_x = \sqrt{a^2 \varepsilon_y^2 + b^2 \varepsilon_z^2},$$

где $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ – относительные погрешности измерения величин y, z .

Пример: Используем метод логарифмирования для примера, приведённого выше (см. с. 18). Прологарифмировав функцию $a=2s/t^2$, получим:

$\ln a = \ln 2 + \ln s - 2 \ln t$. Найдём частные производные по (s) и (t):

$$\frac{\partial \ln a}{\partial s} = \frac{1}{s} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \ln a}{\partial t} = -\frac{2}{t}; \quad \text{подставим в формулу (8). Тогда относительная погрешность выразится как}$$

$$\varepsilon_a = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{\bar{s}^2} + 4 \frac{\Delta t^2}{\bar{t}^2}} = \sqrt{\varepsilon_s^2 + 4\varepsilon_t^2},$$

а абсолютная погрешность – как $\Delta a = \bar{a} \varepsilon_a$ [$\bar{a}$ определяется путем подстановки средних значений времени и расстояния или по формуле (3)].

Алгоритм обработки результатов косвенных измерений:

1. Выполнить прямые однократные или многократные измерения и найти средние значения аргументов ($\bar{y}, \bar{z}$).
2. Найти среднее значение искомой величины как $\bar{X} = f(\bar{y}, \bar{z})$ или по формуле (3).
3. Определить абсолютные погрешности каждого аргумента с учётом систематических и случайных погрешностей, применяя метод обработки прямых измерений при одинаковой доверительной вероятности $P = 0,95$.
4. Найти полную абсолютную погрешность функции ΔX , применяя метод частных производных [формула (7)] или метод логарифмирования [формула (9)], если функция удобна для логарифмирования.
5. Найти относительную погрешность ε_x .
6. Записать окончательный результат в виде $X = \bar{X} \pm \Delta x$.

Лабораторная работа 1.1. Математический маятник

Цель работы: изучение гармонических колебаний, исследование зависимости периода колебаний математического маятника от его длины и определение ускорения свободного падения. Вычисление погрешностей измерений и расчётов.

Теоретическая часть

Гармоническими колебаниями физической величины x называется процесс изменения ее во времени t по закону

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

где A – амплитуда колебаний; T – период колебаний. Величина $\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$ называется **фазой**, а φ_0 соответствует фазе в начальный момент времени ($t=0$) и называется начальной фазой. График таких колебаний представлен на рис. 1. Из определения гармонических колебаний следует, что *период колебаний является наименьшим промежутком времени, по истечении которого движение в точности повторяется*. Действительно,

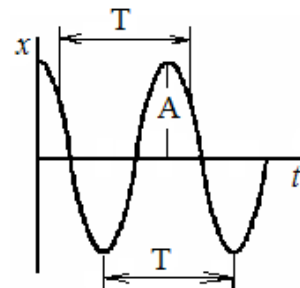


Рис. 1

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = A \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t + T) + \varphi_0\right],$$

и за время $t=T$ совершается одно полное колебание.

Амплитуда колебаний A равна максимальному значению x . Величина

$$\frac{2\pi}{T} = \omega.$$

называется **круговой (циклической) частотой**. Если начальная фаза равна $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, то уравнение гармонических колебаний можно записать в виде

$$x = A \cos \omega t.$$

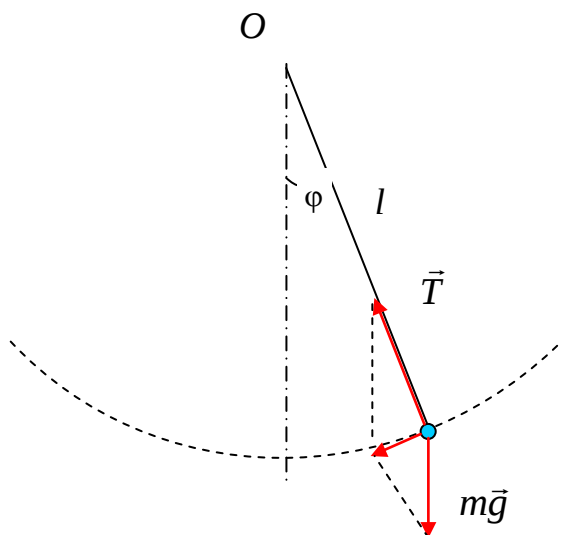


Рис. 2

Для изучения гармонических колебаний можно воспользоваться математическим маятником. **Математический маятник** – это (модель) идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на длинной нерастяжимой нити l , и совершающая колебания около положения равновесия.

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжёлый шарик диаметром, подвешенный на длинной тонкой нерастяжимой нити при выполнении условия $d \ll l$. Длина маятника l равна расстоянию от точки подвеса до центра тяжести шарика. Можно показать, что

шарик (рис. 2), отклонённый на угол φ от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания. На него действует возвращающая квазиупругая сила, составляющая силы тяжести. Уравнение динамики вращательного движения для этих условий можно записать в виде

$$mg \sin \varphi l = -I\varepsilon,$$

где $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение; g – ускорение свободного падения.

Для малых углов отклонения $\sin \varphi \approx \varphi$. С учетом того, что для шарика на нити можно принять $I = ml^2$, уравнение движения приобретает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) аналогично общему уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$

при условии, что собственная частота колебаний системы $\omega = \sqrt{g/l}$.

Можно показать, что частным решением последнего дифференциального уравнения является уравнение $x = A \cos \omega t$. Отсюда можно заключить, что математический маятник при малых углах отклонения совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{g/l}$ и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2)$$

Период колебаний маятника – это время, в течение которого маятник совершает одно полное колебание и возвращается в исходную точку.

Для определения ускорения свободного падения можно воспользоваться выражением (2), если решить его относительно g :

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \quad (3)$$

Действительно, достаточно измерить период колебаний T и длину маятника l , чтобы рассчитать по формуле (3) ускорение свободного падения.

Так как g – величина постоянная для данной географической точки, то видно, что при заданной длине маятника l период колебаний маятника T представляет собой постоянную величину. Поэтому при многократном измерении

времени t одного и того же количества N колебаний, казалось бы, должен получаться неизменный результат. Однако даже при использовании сравнительно точного прибора (например, электронного секундомера) можно убедиться в том, что от опыта к опыту значение t изменяется то в большую, то в меньшую сторону. Различия в результатах измерения одной и той же величины объясняются случайными погрешностями.

Изучение погрешностей измерений и расчётов является одной из главных целей данной лабораторной работы.

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки и входящие в неё приборы и принадлежности приведены на рис.3.

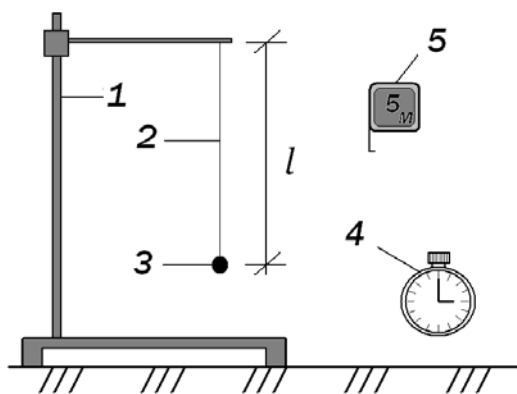


Рис. 3. Экспериментальная установка:

1 – штатив; 2 – длина маятника l ; 3 – шарик; 4 – секундомер; 5 – рулетка

Рассмотрим три способа (методики) экспериментального определения ускорения свободного падения.

Первый способ. Если измерить расстояние от точки подвеса до центра тяжести шарика l , вывести из положения равновесия шарик, отклоняя его на угол $5\text{--}7^\circ$, при помощи секундомера определить время t некоторого числа k полных колебаний, затем найти период $T = t / k$, то ускорение свободного падения можно определить по формуле (3). При работе с математическим маятником имеется возможность изменять длину нити l и число колебаний k . Следует иметь в виду: при увеличении длины маятника и числа колебаний уменьшается экспериментальная погрешность.

Второй способ: измерить расстояние от точки подвеса до центра тяжести шарика l_1 , период колебания T_1 , соответствующий этой длине, как в первом способе, и подставить в формулу (2). Получим:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}. \quad (4)$$

Затем, увеличивая или уменьшая длину маятника, повторить измерения для l_2 :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}. \quad (5)$$

Преобразуем равенства (4) и (5). Для этого возведём обе части в квадрат и возьмём их разность, получим выражение $T_2^2 - T_1^2 = \frac{4\pi^2(l_2 - l_1)}{g}$, из которого расчетная формула примет окончательный вид:

$$g = 4\pi^2 \frac{(l_2 - l_1)}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (6)$$

В эту формулу входят не длины маятников, а разность этих длин, которую в некоторых случаях можно определить более точно. Следовательно, при вычислении ускорения свободного падения по формуле (6) нет необходимости определять центр тяжести шарика.

Третий способ. Период колебаний маятника увеличивается с увеличением его длины. Если измерить период колебаний T для различных длин нити l , а затем построить эту зависимость в переменных T^2 и l , то получится прямая линия с коэффициентом наклона $\alpha = \frac{T^2}{l} = \frac{4\pi^2}{g}$. Если определить наклон α из экспериментального графика $T^2(l)$, то можно рассчитать величину ускорения свободного падения g по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha}. \quad (7)$$

Работу можно выполнить как на лабораторной установке, схема которой приведена на рис. 3, так и на виртуальной лабораторной установке. Кроме того, студенты заочной формы обучения могут самостоятельно изготовить экспериментальную лабораторную установку «математический маятник» (см. рис.3.), взяв в качестве груза тело небольшого размера, например гайку М10-М16.

Порядок выполнения работы

Разобраться с тремя способами определения g при помощи математического маятника. Получить свой вариант задания на выполнение лабораторной работы у преподавателя, в котором указываются способ определения ускорения свободного падения g , длина маятника l и число колебаний k .

Замечание: Для определения времени секундомер включают в тот момент, когда шарик находится в положении максимального отклонения от положения равновесия и отсчитывают время t , в течение которого маятник совершит k полных колебаний. Расчёт погрешностей, допускаемых при определении ускорения силы тяжести, выполняют в соответствии с методикой обработки прямых лабораторных измерений (см. с.163–167).

Первый способ:

1. Установить заданную длину маятника l , измеряя расстояние от точки подвеса до центра масс шарика при помощи рулетки.
2. Отклонить шарик на угол $5\text{--}7^\circ$ от положения равновесия. Измерить секундомером время t некоторого числа k колебаний.
3. Повторить измерения не менее пяти раз. Результаты измерений и погрешности измерительных приборов занести в протокол (табл. 1).
4. Найти период колебаний для каждого измерения $T = t/k$.
5. Определить ускорение свободного падения g для каждого измерения по рабочей формуле

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

6. Вычислить среднее арифметическое ускорение свободного падения, подставляя средние значения $\bar{l}$ и $\bar{T}$: $\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}^2}$.
7. Найти абсолютную погрешность $\Delta g = \bar{g} \sqrt{\varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2}$, где $\varepsilon_l, \varepsilon_T$ – относительные погрешности измерения длины и периода колебаний маятника. Погрешность измерения длины маятника определяют по цене деления рулетки, которой измеряют, а погрешность измерения периода колебаний – по методу обработки результатов прямых измерений.

Таблица 1

i	$l, \text{см}$	$\Delta l, \text{мм}$	k_i	$t_i, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$T, \text{с}$	$g_i, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\bar{g}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1									
2									
3									

Второй способ:

1. Установить заданную длину маятника l_1 , измеряя расстояние от точки подвеса до центра масс шарика при помощи рулетки.
2. Отклонить шарик на угол $5-7^\circ$ от положения равновесия. Измерить секундомером время t_1, t_2, t_3 для k_1, k_2 , и k_3 колебаний.
3. Установить новую длину маятника l_2 и повторить измерения аналогично п.2. Результаты измерений и погрешности измерительных приборов занести в протокол (табл. 2).

Таблица 2

k_i	$l_1, \text{м}$	$t_1, \text{с}$	$T_1, \text{с}$	$l_2, \text{м}$	$t_2, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$l_2 - l_1, \text{м}$	$\Delta t, \text{с}$	$\Delta l, \text{мм}$	$g_i, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\bar{g}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
k_1											
k_2											
k_3											

4. Найти период колебаний для каждого значения k ($T = t / k$).
5. Определить ускорение свободного падения g_i для каждой пары значений (l, T) и трёх различных значений k по формуле

$$g = 4\pi^2 \frac{(l_2 - l_1)}{T_2^2 - T_1^2}.$$

6. Рассчитать среднее арифметическое ускорения свободного падения:

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i.$$

7. Найти абсолютную погрешность так же, как в первом способе, по формуле $\Delta g = \bar{g} \cdot \sqrt{2\varepsilon_l^2 + 8 \cdot \varepsilon_T^2}$, где $\varepsilon_l, \varepsilon_T$ – относительные погрешности измерения длины и периода колебаний маятника.

Третий способ:

1. Установить заданную длину маятника l_1 , измеряя расстояние от точки подвеса до центра масс шарика при помощи рулетки.
2. Отклонить шарик на угол $5\text{--}7^\circ$ от положения равновесия. Измерить секундомером время t_1 некоторого числа k колебаний.
3. Повторить измерения не менее пяти раз, увеличивая каждый раз длину маятника l_1 примерно на $l_1/5$. Результаты измерений и погрешности измерительных приборов занести в протокол (см. табл. 1).
4. Найти период колебаний для каждого измерения как $T = t / k$.
5. Определить ускорение свободного падения g для каждого измерения:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

6. Вычислить среднее арифметическое ускорения свободного падения:

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i.$$

7. По полученным данным построить график функции $T^2(l)$. Найти из графика значение g , сравнить с $\bar{g}$.

Контрольные вопросы

Какие колебания называются гармоническими? Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний, его решение.

Что такое математический маятник? Запишите формулу периода колебаний математического маятника.

Что понимается под силой тяготения, силой тяжести и массой тела?

Объясните зависимость ускорения свободного падения тел от географической широты местности.

Лабораторная работа 1.2. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

Цель работы: изучение законов колебательных движений и определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника.

Теоретическая часть

Предварительно изучить теоретическую часть лабораторной работы 1.1.

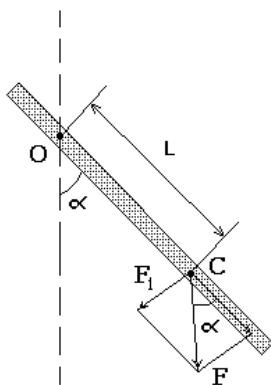


Рис. 1

Физическим маятником называется тело, закреплённое на неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести, и способное совершать колебания относительно этой оси (рис. 1). Маятник, отклонённый на малый угол α от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания. Найдём период колебаний такого маятника. Обозначим через J момент инерции маятника относительно оси O , точка C пусть будет его центром тяжести. Силу тяжести $F = mg$ можно разложить на две составляющие, одна из кото-

рых (F_2) направлена вдоль стержня и уравнивается реакцией опоры; под действием другой составляющей маятник приходит в движение: $F_1 = F \sin \alpha$. По второму закону Ньютона для вращательного движения $M = J\varepsilon$ можно записать

$$J \varepsilon = -F_1 L, \quad (1)$$

где ε – угловое ускорение, $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$; L – расстояние от точки подвеса до центра тяжести. Знак минус выбран потому, что момент силы M стремится вернуть маятник в положение равновесия, т.е. уменьшить угол α . Для малых углов отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$ и $F_1 \approx mg \alpha$. Подставляя ε и F_1 в уравнение (1), получим:

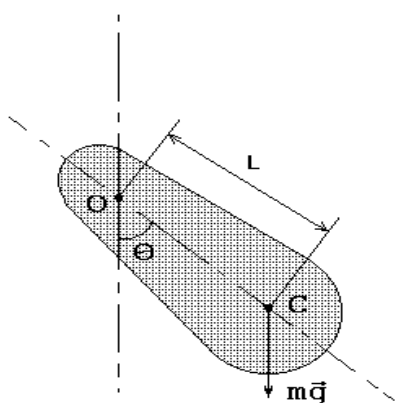
$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL\alpha = 0.$$

Частным решением последнего дифференциального уравнения является:

$\alpha = A \cos(\omega t)$, где $\omega^2 = \frac{mgL}{J}$. Тогда из определения циклической частоты $\omega = 2\pi/T$ и последнего соотношения можно получить уравнение для определения периода колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}}. \quad (2)$$

Соотношение (2) связывает период T малых колебаний физического маятника с его моментом инерции J относительно оси качаний O , массой m маятника, расстоянием L от оси качания до центра масс и ускорением силы тяжести g (рис.2) и может быть использовано для определения g .



Для этого необходимо измерить T , J и L и выразить через них g формулы (2). Оказывается, однако, что с высокой точностью можно измерить только период колебаний T маятника, а величины J и L достаточно точно измерить не удаётся. Например, для нахождения расстояния L от оси качаний до центра масс маятника необходимо предварительно определить положение центра масс, что сделать точно довольно трудно. Этих трудностей можно избежать, если воспользоваться обратным маятником.

Оборотный маятник является частным случаем физического маятника. Определение ускорения свободного падения с помощью обратного маятника основано на свойстве взаимности точки подвеса и центра качания: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания. Достоинством метода обратного маятника для определения ускорения свободного падения является то, что J и L не входят в расчётную формулу для g . Перейдём к обсуждению этого метода. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера [1] момент инерции маятника относительно оси качаний O

$$J = J_0 + mL^2, \quad (3)$$

где J_0 – момент инерции маятника относительно оси, параллельной оси качаний и проходящей через центр масс маятника; L – расстояние между точками O и C . Подставляя формулу (3) в выражение (2), получаем:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{J_0}{m \cdot L} + L \right)}. \quad (4)$$

Для очень малых значений L момент силы тяжести M , стремящийся вернуть маятник в положение равновесия, становится тоже очень малым, и период колебаний резко возрастает. При $L \rightarrow 0$ момент силы тяжести равен нулю, и колебания вообще невозможны: маятник находится в положении равновесия.

В обратном пределе для очень больших L можно пренебречь J_0 по сравнению с mL^2 и рассматривать физический маятник как математический с длиной подвеса L .

При возрастании L период колебаний сначала убывает до некоторого минимального значения $T_m = T_{\min}$, а затем снова неограниченно возрастает. Период минимален при $L_m = J_0/m$. Если подвешивать маятник по другую сторону от центра масс, то зависимость $T(L)$ будет точно такой же. Поэтому график $T(L)$ имеет две симметричные ветви, соответствующие положению точки подвеса маятника слева и справа от его центра масс. По каждую сторону от центра масс маятника имеется по два положения опорных призм, при которых периоды колебаний маятника совпадают. В случае, если $T = T_{\min}$, таких точек – по одной от центра масс, причем $L_1 = L_2$ (рис. 3).

Описание экспериментальной установки

В экспериментальной установке (см. рис. 3) оборотный маятник представляет собой стальной стержень массой m_3 , на котором находятся два подвижных груза (m_1 и m_2). Две легкие опорные призмы Π_1 и Π_2 могут перемещаться по стержню и фиксироваться винтами в разных его точках. Перемещая по стержню грузы, можно изменять период колебаний маятника.

Найдём два положения L_1 и L_2 опорных призм по разные стороны от центра масс C , чтобы периоды колебаний маятника совпадали: $T(L_1) = T(L_2)$. Как видно из формулы (4), для этого необходимо выполнение равенства

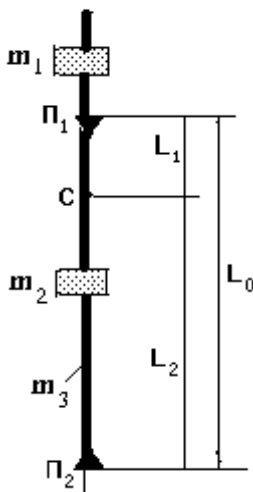


Рис. 3

$$\frac{J_0}{m \cdot L_1} + L_1 = \frac{J_0}{m \cdot L_2} + L_2,$$

которое имеет место при условии, что $L_1 = L_2$ либо при

$$L_2 = \frac{J_0}{m \cdot L_1}.$$

В последнем случае период колебаний маятника $T = T(L_1) = T(L_2)$, или

$$2 \cdot \pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{J_0}{m \cdot L_1} + L_1 \right)} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{J_0}{m \cdot L_2} + L_2 \right)} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{g}}.$$

Следовательно, ускорение свободного падения можно определить как

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} (L_1 + L_2). \quad (5)$$

Как видно из формулы (5), для нахождения g достаточно измерить только две величины: расстояние между рёбрами опорных призм $L_0 = L_1 + L_2$ и период колебаний маятника T в положении L_1 и в “перевернутом” положении L_2 (таким, для которого выполняется условие $T = T_1 = T_2$). Величина $L_0 = J/(m \cdot l)$ называется приведенной длиной физического маятника.

Порядок выполнения работы

Перед тем, как приступить к выполнению лабораторной работы, получите у преподавателя начальные значения и занесите их в табл. 3. Здесь приняты обозначения: L – длина маятника (стержня); m_1 , m_2 – массы грузов и m_3 – стержня; A_{x_i} – расстояние от верхнего конца стержня до точки подвеса; x_1 – то же до массы m_1 ; x_2 – то же до массы m_2 ; F_{i0} – начальный угол отклонения, рад.; n – число колебаний; i – номер измерений.

1. Познакомьтесь с работой виртуальной лабораторной установки на ПК и при необходимости воспользуйтесь кнопкой «Помощь». Проведите пробные измерения для заданных параметров, нарисуйте схему.
2. Выставьте на панели параметров заданные в вашем варианте числовые значения для $i=1$: L , A_{x_1} , x_1 , x_2 , m_1 ; m_2 , m_3 , F_{i0} , n и нажмите кнопку «Начать».
3. Снимите показания времени t_1 и определите период колебаний маятника для первого измерения T_1 по формуле $T_1 = t_1/n$; значения занесите в табл. 3.

4. Определите L_1 по формуле $L_1 = |X_c - Ax_1|$, где X_c – центр тяжести механической системы; $X_c = (m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot 0) / (m_1 + m_2 + m_3)$. Значения занесите в табл. 3.
5. Переверните маятник, нажав кнопку «Перевернуть». При этом масса первого груза m_1 займёт нижнее положение, а масса второго груза m_2 – верхнее. Соответственно изменятся значения величин x_1 и x_2 . При этом координата Ax_1 оси колебаний маятника останется прежней и будет определять начальное (приближенное) положение оси качания маятника, которое будем уточнять с помощью алгоритма, изложенного ниже.
6. Нажмите кнопку «Начать» и после определения значения времени t_2 вычислите значение периода $T_2 = t_2/n$.
7. Сравните значения T_2 и T_1 , выполните повторные измерения периодов, увеличивая или уменьшая расстояние от верхнего конца стержня до точки подвеса и подберите такое расстояние A_{xi} , при котором выполняется условие $T_2 = T_1 = T$ с точностью до 1,5 %. Тогда A_{xi} будет равно L_2 .

Положение грузов не менять!

8. Определите приведённую длину обратного маятника как $L_0 = L_1 + L_2$.
9. Вычислите ускорение свободного падения g по формуле (5) и занесите это значение в табл. 3.
10. Оцените абсолютную и относительную погрешность косвенного определения g .

Таблица 3

i	$L, \text{м}$	$x_1, \text{м}$	$x_2, \text{м}$	$m_1, \text{кг}$	$m_2, \text{кг}$	$m_3, \text{кг}$	$F_{i0}, \text{рад}$	n	$A_{xi}, \text{м}$	$x_c, \text{м}$	$t_i, \text{с}$	$T_i, \text{с}$	$g, \text{м/с}^2$
1													
2													
$L_1 =$				$L_2 =$				$L_0 =$					

Контрольные вопросы

- Как влияет на точность опытов амплитуда колебаний маятника?
- От чего зависит величина ускорения силы тяжести?
- Где и для каких целей используются маятники?
- Что называется приведенной длиной физического маятника?

При каком условии точка подвеса и центр качания физического маятника расположены симметрично относительно его центра масс?

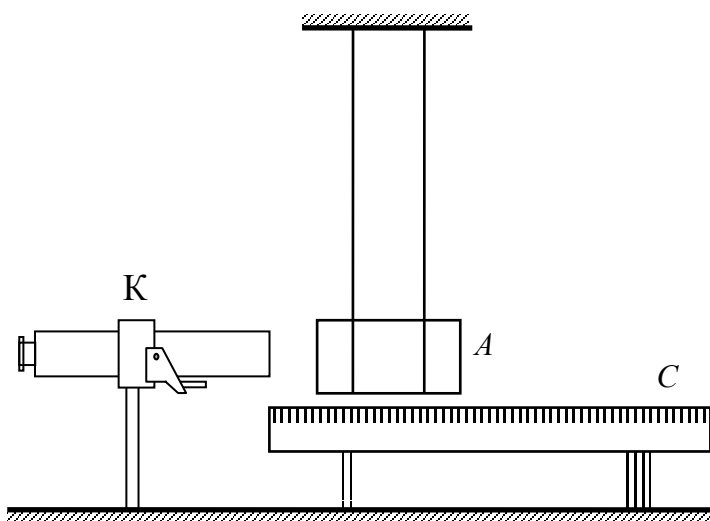
При каком расстоянии от оси колебаний до центра масс период колебаний маятника минимален?

Покажите, что точка опоры маятника и точка центра качания лежат по разные стороны от центра масс.

Лабораторная работа 1.3. *Определение скорости полета пули с помощью баллистического маятника*

Цель работы: *изучение законов сохранения энергии и импульса, экспериментальное определение скорости полета пули.*

Приборы и принадлежности: установка с баллистическим маятником, пружинный пистолет, набор «пуль», миллиметровая шкала.

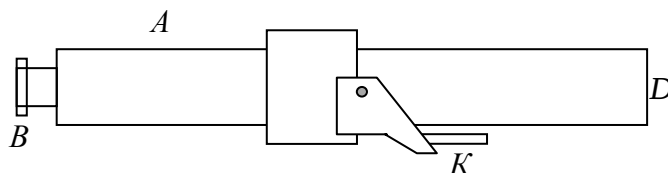


Скорость пули обычно достигает значительной величины (у боевой винтовки около 1000 м/с), поэтому для ее измерения применяют косвенные методы, например, метод баллистического маятника.

Баллистический маятник представляет собой тяжелый цилиндр А, подвешенный на четырех длинных нитях.

В маятник в горизонтальном направлении стреляют пулей из пружинного пистолета В. Пуля застревает в пластине, заполняющей цилиндр - происходит неупругий удар. После удара цилиндр с пулей движется поступательно, поднимаясь на высоту h . Его перемещение по горизонтали можно измерить с помощью линейки С с миллиметровой шкалой.

Пружинный пистолет закреплен на неподвижном штативе. Чтобы зарядить пистолет, т.е. сжать пружину, необходимо оттянуть назад ударный стержень, взявшись за выступ B . Другой рукой необходимо держать ствол A . Стержень оттягивается до щелчка. Это означает, что выступ спускового устройства вошел в отверстие ствола и удерживает ударный стержень. Затем в дуло пистолета D закладывается пуля. Для выстрела необходимо нажать на курок K .



Рассмотрим процессы, происходящие при работе на экспериментальной установке.

1. Выстрел.

При выстреле выполняется закон сохранения энергии для системы тел “пистолет + пуля”: потенциальная энергия упругой деформации пружины

$W_p = \frac{kx^2}{2}$ превращается в кинетическую энергию пули $W_k = \frac{mv^2}{2}$, т.е.

$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$. Здесь k - жесткость пружины, x - ее деформация, m - масса пули, v - ее скорость сразу после выстрела.

2. Неупругий удар.

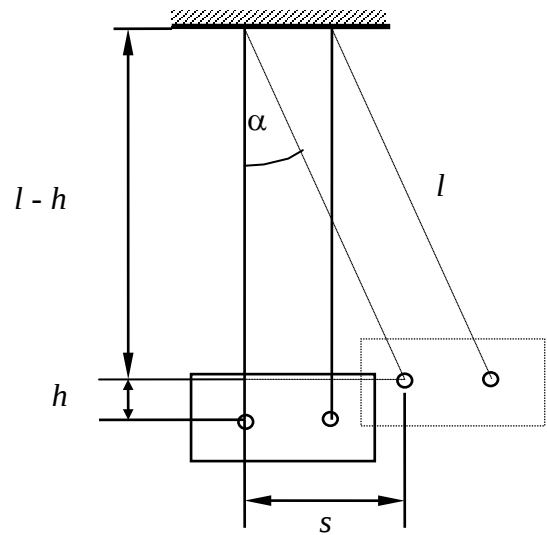
На систему тел “пуля + цилиндр” действуют внешние вертикальные силы тяжести и натяжения нитей. Импульсы тел системы как до, так и после удара направлены горизонтально. Обозначив массу цилиндра M , а скорость цилиндра с пулей через u , запишем закон сохранения импульса в виде:

$$mv = (M + m)u. \quad (1)$$

Энергия при неупругом ударе не сохраняется, ее изменение связано с работой, направленной на деформацию пластилина, и с увеличением внутренней энергии системы при нагревании.

3. Процесс подъема.

Хотя при подъеме каждая точка цилиндра движется по окружности, тем не менее цилиндр с пулей совершают поступательное движение: все точки системы имеют одинаковые скорости и совершают одинаковые перемещения. Внешние силы натяжения нитей работы не совершают, т.к. их направления перпендикулярны перемещению; силы тяжести являются потенциальными, поэтому можно применить закон сохранения энергии.



В начальном состоянии цилиндр с пулей обладают кинетической энергией поступательного движения $W_k = \frac{(M+m)u^2}{2}$, в конечном - потенциальной энергией $W_p = (M+m)gh$. Следовательно,

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)gh, \quad (2)$$

откуда $u = \sqrt{2gh}$.

Из (1) найдем скорость пули до удара:

$$v = u \frac{M+m}{m} = \sqrt{2gh} \frac{M+m}{m}. \quad (3)$$

Выразим высоту подъема цилиндра h через его горизонтальное смещение s . Из рисунка видно, что $\cos \alpha = \frac{l-h}{l}$, откуда $h = l(1 - \cos \alpha)$. Учитывая известное тригонометрическое соотношение $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ и условие малости угла отклонения α , при котором $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ и $s = l\alpha$, получаем:

$$h = l \frac{\alpha^2}{2} = l \frac{s^2}{2l^2} = \frac{s^2}{2l}. \quad (4)$$

Горизонтальное смещение цилиндра равно разности отсчетов, выполненных по миллиметровой шкале $s = a - a_0$. После подстановки (4) в (3) получаем расчетную формулу для определения скорости движения пули:

$$v = \frac{M + m}{m} (a - a_0) \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5)$$

Порядок выполнения работы

1. Снять по миллиметровой шкале отсчет начального положения маятника a_0 .
2. Сжать пружину пистолета, вложить пулю массой m_1 в ствол (на некоторых установках пулю следует дослать до упора карандашом).
3. Нажать спусковое устройство, снять отсчет максимального отклонения a цилиндра при попадании в него пули.
4. Измерения провести 5 раз.
5. Повторить пункты 2-4 с пулей массы m_2 .
6. Результаты измерений и погрешности измерительных приборов занести в таблицу.

m , г	M , г	l , м	Δl , м	a_0 , мм	a , мм	Δa_{cu} , мм

7. Произвести математическую обработку результатов измерений, найти по формуле (6) скорости пуль v и их погрешности Δv . В данной работе для расчёта погрешности целесообразно применять метод логарифмирования функции.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение импульса и момента импульса. В каких единицах они измеряются?

2. Механическая энергия и ее виды. Кинетическая энергия при поступательном и вращательном движении.
3. Что такое: «упругий удар» и «неупругий удар».
4. Сформулируйте законы изменения и сохранения энергии и импульса.
5. Какие процессы происходят при выполнении физического эксперимента в данной лабораторной работе? Какими законами описываются эти процессы?
6. Выведите расчетную формулу.

Лабораторная работа 1.4. Проверка основного закона динамики вращательного движения

Цель работы: изучение законов динамики поступательного и вращательного движения.

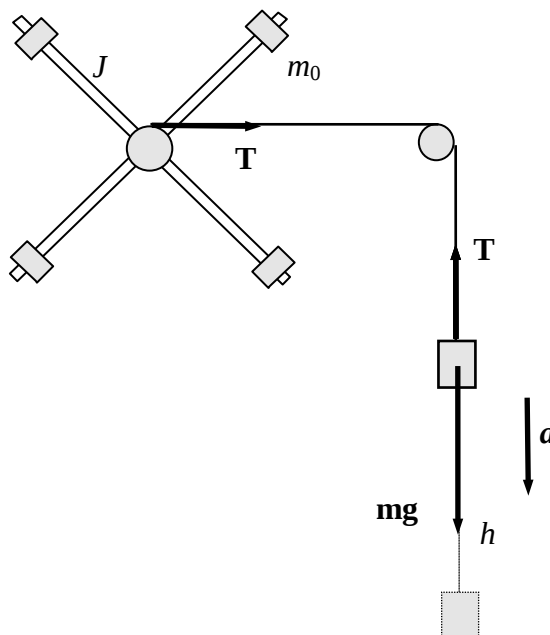
Приборы и принадлежности: маятник Обербека, набор грузов, штангенциркуль, электрический секундомер, метрическая шкала.

Маятник Обербека представляет собой крестовину, которая с малым трением может вращаться вокруг горизонтальной оси. С крестовиной скреплен вал диаметром d , на который можно наматывать нить, перекинутую через неподвижный блок. К свободному концу нити прикреплен груз массой m . На стержнях крестовины можно укреплять грузы массой m_0 . При отсутствии грузов на стержнях маятник Обербека имеет собственный момент инерции J_0 . Если систему предоставить самой себе, то груз m будет ускоренно опускаться, приводя в движение маятник. Высоту опускания груза h отсчитывают по вертикальной сантиметровой шкале, укрепленной на стене, а время, в течение которого груз проходит расстояние h , измеряют электрическим секундомером.

Применим законы динамики и кинематические уравнения для описания движения системы тел на экспериментальной установке.

На груз, движущийся **поступательно**, действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити T . По второму закону Ньютона

$$ma = mg - T. \quad (1)$$



Крестовина совершает **вращательное движение**

под действием момента силы натяжения нити **T**. Момент силы тяжести, приложенной к маховику, и момент силы реакции оси равны нулю, т.к. линии действия этих сил проходят через ось вращения.

Согласно основному закону динамики вращательного движения

$$J\varepsilon = M, \quad (2)$$

где J - момент инерции маховика, ε - его угловое ускорение, $M = TR$ - момент силы T , $R = d/2$ - радиус вала, d - диаметр вала.

Ускорение груза равно ускорению любой точки нити и, соответственно тангенциальному ускорению точек, лежащих на поверхности вала. Оно связано с угловым ускорением соотношением

$$a = a_\tau = \varepsilon R. \quad (3)$$

При равноускоренном движении

$$h = \frac{at^2}{2}. \quad (4)$$

$$\text{Из (4) } a = \frac{2h}{t^2}, \quad \text{из (3) } \varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{2h}{t^2} \frac{2}{d}.$$

$$\varepsilon = \frac{4h}{t^2 d}. \quad (5)$$

$$\text{Из (1) } T = m(g - a). \quad M = T \frac{d}{2}.$$

Подставив выражения для T и a , получим формулу момента силы M , действующего на вал

$$M = m \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(g - \frac{2h}{t^2} \right). \quad (6)$$

В первой части работы на маховике дополнительных грузов нет, его момент инерции постоянен и равен J_0 . Меняя грузы, движущиеся поступательно, мы тем самым изменяет момент силы **T**, соответственно, изменяется и угловое ускорение маховика. Запишем уравнение динамики вращательного движения для разных опытов.

$$J_0 \varepsilon_1 = M_1$$

$$J_0 \varepsilon_2 = M_2$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{M_1}. \quad (7)$$

Это соотношение и предлагается проверить в первой части работы.

Во второй части работы на крестовине помещают дополнительные грузы - сначала два, а затем четыре, тем самым изменяя момент инерции маховика. Поступательно движущийся груз остается неизменным. В приближении можно считать, что момент силы, действующей на маховик, не изменяется. Запишем уравнение динамики вращательного движения для разных опытов.

$$J_1 \varepsilon_1 = M$$

$$J_2 \varepsilon_2 = M$$

Здесь J_1 - момент инерции маховика с двумя грузами, J_2 - с четырьмя грузами:

$$J_1 = J_0 + 2m_0 R^2, \quad (8)$$

$$J_2 = J_0 + 4m_0 R^2. \quad (9)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{J_1}{J_2}. \quad (10)$$

Это соотношение и предлагается проверить во второй части работы.

Порядок выполнения работы

Часть 1

1. Освободить крестовину от дополнительных грузов, если таковые имеются.
2. Положить груз на платформочку, прикрепленную к шнуру, найти суммарную массу m платформочки и груза.
3. Вращая крестовину, поднять груз на такую высоту, чтобы край платформочки совпадал с нулевым делением вертикальной шкалы.
4. Отпустив колесо, измерить время t , в течение которого груз опустится на высоту h . Измерения времени произвести три раза.
5. Изменив массу груза на платформочке, выполнить пункты 2-4.
6. С помощью штангенциркуля провести однократное измерение диаметра вала.
7. Результаты измерений занести в таблицу.

8. По формулам (5) и (6) рассчитать угловое ускорение и момент силы

9. По формуле $J_0 = \frac{M}{\varepsilon}$ вычислить момент инерции крестовины.

10. Проверить соотношение (7).

Таблица измерений и вычислений

№ пп	m , кг	d , м	t , с	$t_{\text{ср}}$, с	h , м	ε , рад/с ²	M , Н·м	J_0 , кг·м ²
1								
2								

Часть 2

1. Укрепить на крестовине два груза на одинаковом расстоянии R от оси вращения. Выполнить пункты 2-4.

2. Укрепить на крестовине четыре груза на одинаковом расстоянии R от оси вращения. Выполнить пункты 2-4.

3. Результаты измерений занести в таблицу.

Таблица измерений и вычислений

Число грузов	m_0 , кг	d , м	t , с	$t_{\text{ср}}$, с	h , м	R , м	J_0 , кг м ²	J , кг м ²	ε , рад/с ²
2									
4									

4. По формулам (8), (9) и (6) рассчитать для каждого случая момент инерции и угловое ускорение. Проверить соотношение (10).

5. Сделать выводы по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Виды движения твердого тела. Какое движение называется поступательным? вращательным?

2. Сформулируйте теорему Штейнера.

3. Какие физические величины являются мерой воздействия при поступательном и вращательном движении?

4. Сформулируйте законы динамики поступательного и вращательного движения.

5. Ускорение при поступательном и вращательном движении. Угловое ускорение. Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами.
6. Выведите расчетные формулы.

Лабораторная работа 2.1. *Определение коэффициента динамической вязкости жидкости методом Стокса*

Цель работы: изучение явления внутреннего трения в жидкостях и опытное определение величины коэффициента вязкости жидкости методом Стокса на виртуальной лабораторной установке.

Теоретическая часть

Различают два типа течения вязкой жидкости - *ламинарное и турбулентное*. *Турбулентным* называется такое течение жидкости, при котором её частицы совершают неустановившееся и неупорядоченные движения по сложным траекториям, приводящим к перемешиванию слоёв. *Ламинарное* – это упорядоченное течение жидкости, при котором траектории движения соседних частиц мало отличаются друг от друга. При ламинарном течении жидкость можно рассматривать как совокупность отдельных слоёв, движущихся с различными скоростями. Это обусловлено тем, что при движении слоев жидкости относительно друг друга с различными скоростями между ними возникает тормозящая сила, это сила внутреннего трения, или сила *вязкости*. *Вязкость* – это свойство жидкости оказывать противодействие перемещению её слоёв относительно друг друга. Рассмотрим перемещение в жидкости пластинки параллельно плоской стенке (рис. 1).

Для перемещения пластинки необходимо приложить силу, по величине равную силе трения. Если слои жидкости находятся на расстоянии ΔX и движутся с различными скоростями, то верхние слои будут ускорять движение средних слоёв, а нижние – замедлять.

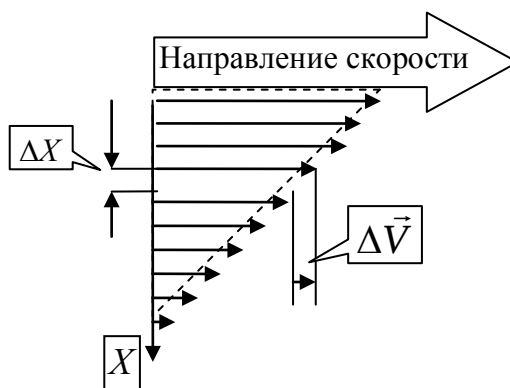


Рис. 1. Распределение скорости между движущейся пластинкой и стенкой

Природа этих сил заключается в том, что слои жидкости, движущиеся с разными скоростями, обмениваются энергией: слои с молекулами, имеющими большую скорость, передают некоторое количество движения более медленным слоям, ускоряя их, но при этом сами подвергаются торможению. Ньютон показал, что сила внутреннего трения, действующая на средние слои, прямо пропорциональна градиенту скорости слоев в направлении, перпендикулярном течению:

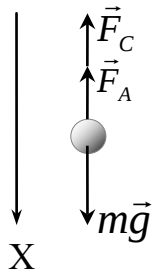


Рис. 2

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{d\vec{V}}{dX} \right| S.$$

где η – коэффициент динамической вязкости, равный силе внутреннего трения, возникающей на единице поверхности соприкосновения слоев, движущихся относительно друг друга с *градиентом скорости*, равным единице. *Градиент скорости* – это изменение скорости двух слоёв жидкости dV на расстоянии между слоями dX . Коэффициент динамической вязкости зависит от природы жидкости и уменьшается с повышением ее

температуры. Закон Ньютона определяет также силу трения, возникающую на границе между жидкостью и движущимся в ней твердым телом, например, шариком. В системе СИ коэффициент динамической вязкости измеряется в паскаль-секундах.

$$[\eta] = \text{паскаль} \cdot \text{секунда} \Rightarrow (\text{Па} \cdot \text{с}) = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{кг} / (\text{м} \cdot \text{с});$$

До 1980 г. применяли единицу измерения *пуаз (П)*; $1 \text{ пуаз} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$;

Метод Стокса. Стоксом был предложен метод определения η , основанный на анализе движения шарика, свободно падающего в вязкой жидкости. Это возможно, если плотность материала шарика $\rho_{ш}$ больше плотности жидкости $\rho_{ж}$, в которой он движется. Характер движения шарика определяется тремя действующими на него силами (рис. 2): силой тяжести $m\vec{g}$, выталкивающей силой Архимеда $\vec{F}_A$ и силой вязкого трения $\vec{F}_C$. Уравнение движения шарика из основного закона динамики в данном случае принимает вид

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_C, \quad (1)$$

где m – масса шарика; $\vec{V}$ – скорость его движения относительно жидкости; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения. В проекции на ось Ox , т.е. на направление движения шарика, уравнение (1) запишется следующим образом:

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg - F_A - F_C.$$

Особенность силы вязкого трения заключается в том, что ее величина зависит от скорости движения тела относительно жидкости. При малых скоростях эта зависимость прямо пропорциональна. В начале, при увеличении скорости тела сила трения возрастает настолько, что движение становится равномерным. Если тело имеет постоянную скорость, т.е. движение установившееся, то $dV/dt = 0$; получим уравнение

$$mg - F_A - F_C = 0. \quad (2)$$

Выразим составляющие силы, входящие в уравнение (2), через параметры жидкости и шарика. Для тел сферической формы модуль силы вязкого трения определяется формулой Стокса

$$F_C = 6\pi\eta rV, \quad (3)$$

где r – радиус шарика; V – скорость его движения относительно жидкости.

Важно отметить, что формула (3) справедлива только в случае *ламинарного* течения жидкости относительно шарика (скорость движения шарика должна быть небольшой), а жидкость по всем направлениям простирается безгранично, т.е. размеры сосуда, в котором находится жидкость, должны быть много больше по сравнению с размерами шарика. Условия ламинарности можно считать выполненными, если число Рейнольдса $Re < Re_{кр}$:

$$Re = \frac{\rho_{ж} \cdot V \cdot d}{\eta} \quad (4)$$

Здесь $\rho_{ж}$ – плотность жидкости, а критическое значение числа Рейнольдса для шарика $Re_{кр}$, движущегося в жидкости, можно принять равным единице.

Выразим массу шарика через его плотность и объем :

$$m = \rho_{ш} \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (5)$$

Тогда выражение для архимедовой силы принимает вид

$$F_A = \rho_{ж} \frac{4}{3} \pi r^3 g. \quad (6)$$

Подставляя выражения (3), (5) и (6) в уравнение (2) и учитывая, что $d=2r$, после простых преобразований получим:

$$\eta = \frac{1}{18} \frac{(\rho_{ш} - \rho_{ж}) d^2 g}{V}. \quad (7)$$

Описание экспериментальной установки

Установка для реализации метода Стокса состоит из стеклянного цилиндра 1, в котором находится исследуемая жидкость, вязкость которой необходимо определить (рис. 3).

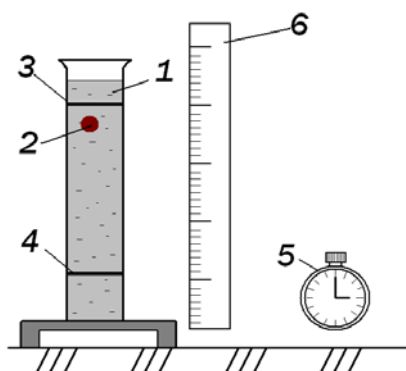


Рис. 3. Установка для измерения вязкости жидкости по методу Стокса

На цилиндре имеются метки 3 и 4. Расстояние между метками L можно замерить при помощи линейки 6, а диаметр шарика – при помощи микрометра. Время прохождения между метками 3 и 4 можно определить с помощью секундомера 5. Метка 3 помещена на несколько сантиметров ниже верхнего уровня жидкости для выполнения условия равномерного движения шарика в жидкости; $V = \text{const}$ на участке L . Цилиндр закрыт пробкой с воронкой, в которую опускается шарик,двигающийся в дальнейшем примерно по оси цилиндра так, чтобы на его движение не влияли стенки. При более точных измерениях необходимо учитывать влияние размеров стеклянного цилиндра.

Исследуемой жидкостью является глицерин, плотность которого $\rho_{ж} = (1,26 \pm 0,01)10^3 \text{ кг/м}^3$. Исследуемые шарики – стальные с плотностью $\rho_{ш} = (7,8 \pm 0,1)10^3 \text{ кг/м}^3$. Эксперимент можно проводить как на физической, так и на виртуальной модели установки.

Рабочая формула. Если в выражении (7) скорость равномерного движения шарика в жидкости V заменить отношением L/t , то получим:

$$\eta = \frac{1}{18} \frac{(\rho_{ш} - \rho_{ж}) d^2 g t}{L}. \quad (8)$$

Порядок выполнения работы

1. Получить свой вариант задания и допуск у ведущего преподавателя.
2. Познакомиться с работой виртуальной лабораторной установки.
3. Провести пробные измерения для различных значений диаметра шарика d и расстояния между метками L , определяя время прохождения между метками при помощи секундомера.
4. Занести в таблицу заданные в вашем варианте значения: расстояние L_i (между метками 3 и 4 (см. рис.3), диаметр шарика d_i и его плотность $\rho_{ш}$, а также плотность исследуемой жидкости $\rho_{ж}$.
5. Сбросить шарик в сосуд с жидкостью. В момент касания шариком верхней метки запустить секундомер, а в момент касания шариком нижней метки остановить его. Записать в таблицу показание секундомера t_i .
6. Кнопкой “СБРОС” установить нуль на табло секундомера.
7. Повторить измерения еще четыре раза, задавая различные значения диаметра шариков d_i и расстояние L_i между метками (пп. 4 и 5).
8. Вычислить скорость движения шарика в жидкости, коэффициент вязкости η для каждого из пяти опытов по рабочей формуле (8) и число Re.
9. Результаты опытов и вычислений занести в таблицу измерений.
10. Найти среднее значение коэффициента вязкости как

$$\bar{\eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{n}.$$

11. Определить абсолютные приборные погрешности прямых измерений (расстояния между метками ΔL , диаметр шарика Δd , время его падения Δt , плотности шарика $\Delta \rho_{ш}$ и жидкости $\Delta \rho_{ж}$), а также их относительные ошибки ε_L , ε_d , ε_ρ и ε_t .
12. Оценить полную абсолютную $\Delta \eta$ и относительную ε погрешности.
13. Записать конечный результат в виде $\eta = \bar{\eta} \pm \Delta \eta$.
14. Сравнить полученное значение η со справочными данными.
15. По результатам эксперимента сделать выводы.

Таблица измерений

№ п/п	Li , м	ΔL , м	di , м	Δd , м	ti , с	Δt , с	V , м/с	Re	η , $Па \cdot с$	$\Delta \eta$, $Па \cdot с$	$\bar{\eta}$, $Па \cdot с$

Замечание. Оценку абсолютной погрешности коэффициента вязкости $\Delta \eta$ рассчитать двумя способами:

1) по методике Стьюдента для расчета погрешностей случайной величины:

$\Delta \eta = t_{p,n} s_{\eta}$. Здесь $t_{p,n}$ – коэффициент Стьюдента для пяти измерений при доверительной вероятности $P=0,95$; находится из таблицы (см. с.154); а s_{η} – среднее квадратичное отклонение среднего,

$$s_{\eta} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2 / n(n-1)};$$

2) по методике расчёта погрешностей косвенных измерений –

$$\Delta \eta = \bar{\eta} \sqrt{(2\varepsilon_d)^2 + \varepsilon_{\rho}^2 + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_L^2},$$

или

$$\Delta \eta = \bar{\eta} \sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}.$$

Контрольные вопросы

1. Поясните сущность явления вязкого трения. Какова природа сил внутреннего трения жидкости?
2. Что такое коэффициент динамической вязкости? В каких единицах измеряется величина вязкости η в системе СИ?
3. Какие силы действуют на тело, движущееся в жидкости?
4. Дайте определение ламинарного и турбулентного течения жидкости.
5. Запишите формулу Стокса и укажите условия ее применимости.
6. Оцените величину силы трения, действующей на стальной шарик диаметром 3 мм, падающий со скоростью 0,75 м/с в жидкости с коэффициентом вязкости 1,5 Па·с.
7. Почему шарик в начале движения ускоряется, а затем движется равномерно? Что такое градиент скорости?

Лабораторная работа 2.2. Определение отношения теплоемкостей газов

Цель работы: *определить отношение теплоемкостей газов (коэффициент Пуассона) методом Клемана – Дезорма.*

Методика эксперимента Общая схема установки представлена на рис. 1. Стекло́нный баллон Б соединен с манометром М, измеряющим давление в сосуде. Изменение давления может осуществляться насосом Н, имеющим три рабочих положения, которые задействуются с помощью переключателя П.

Установив переключатель П в положение "Насос", накачиваем воздух до некоторого давления, превышающего атмосферное. Через 1 – 2 минуты температура воздуха в баллоне становится равной температуре окружающей среды. Это состояние газа характеризуется давлением p_1 , температурой T_1 и удельным объёмом $V_1 = \frac{V}{m_1}$ (V – объём баллона, m_1 – масса газа, находящегося в нем).

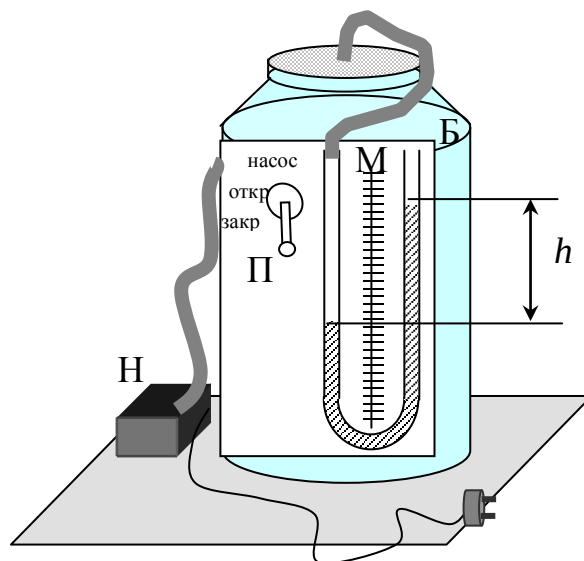


Рис. 1.

Давление p_1 определяется по формуле:

$$p_1 = p_0 + \Delta p_1,$$

где p_0 – атмосферное давление а Δp_1 – добавочное давление, измеряемое разностью уровней в манометре М.

Затем переводим переключатель в положение "Открыто", и, как только уровни в манометре сравняются – в положение "Закрыто". Выход воздуха происходит очень быстро и, пренебрегая в первом приближении передачей тепла через стенки сосуда, процесс расширения воздуха можно считать адиабатическим ($\delta Q = 0$). В сосуде устанавливается давление p , равное атмосферному p_0 . Газ имеет удельный объём $V_2 = \frac{V}{m_2}$ (m_2 – масса газа, оставшегося в баллоне), и температуру T_2 .

Для адиабатического процесса справедливо уравнение Пуассона:

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma \quad \text{или,} \quad (p_0 + \Delta p_1) V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma. \quad (1)$$

напомним V_1 и V_2 объёмы единицы массы газа.

Через 1 – 2 минуты газ нагреется до температуры окружающей среды T_2 . Его давление в баллоне будет $p_2 = p_0 + \Delta p_2$, где Δp_2 добавочное давление, измеряемое разностью уровней в манометре, удельный объём останется равным V_2 , так как масса и объём газа не меняются. Сравнивая конечное состояние с начальным, видим, что температура в этих состояниях одинакова. Запишем для изотермического процесса закон Бойля-Мариотта:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \text{или} \quad p V_1 = p_0 V_2. \quad (2)$$

Решая систему уравнений ((3.46) и (3.47) Воронов) , найдем γ :

$$\gamma = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}.$$

Добавочные давления Δp_1 и Δp_2 определяются по формулам:

$$\Delta p_1 = \rho g h_1 ; \quad \Delta p_2 = \rho g h_2 ,$$

где ρ – плотность воды, h_1 и h_2 – разность уровней воды в коленях манометра.

Окончательно получаем расчетную формулу для нашего опыта:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (3)$$

Таким образом, измеряя разности уровней воды в коленях манометра h_1 и h_2 , можно найти отношение теплоемкостей $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

Примечание. При выполнении работы можно варьировать величину h_1 , соответственно будет изменяться и h_2 . Однако слишком большие значения h_1 брать нельзя, так как при этом в манометре возникают колебания столбика воды большой амплитуды.

Порядок выполнения работы

1. Включить насос в сеть 220 В.
2. Поставить переключатель П в положение "Насос" и накачать воздух в баллон Б до разности уровней воды в коленях манометра М приблизительно 8 – 10 см (см. примечание выше).
3. Перекрыть сообщение между баллоном Б и насосом Н, поставив переключатель П в положение "Закрето".
4. Подождать 2 – 3 минуты пока разность уровней воды в коленях манометра не перестанет меняться. Измерить h_1 (разность уровней воды в коленях манометра) по шкале линейки. Записать результат измерения в таблицу.
5. Поставить переключатель П в положение "Открыто", как только уровни воды в коленях манометра сравняются, сразу перевести его в положение "Закрето".
6. Выждав 2 – 3 минуты (пока давление в манометре перестанет изменяться), снять отсчет h_2 – установившейся разности уровней воды в коленях манометра. Записать результат измерения в таблицу.
7. Повторить пункты 2 – 6 пятикратно.

Т а б л и ц а

	h_1	h_2	γ_i	$\gamma_{\text{теор}}$	$\gamma_{\text{эксп}}$	$\Delta\gamma$
1						
2						
3						
4						
5						

Обработка результатов измерений

1. Рассчитать значения коэффициента Пуассона по формуле (3) для всех пяти измерений.
2. Вычислить теоретическое значение коэффициента Пуассона ($\gamma_{\text{теор}}$) по формуле $\gamma = \frac{i + 2}{i}$.
3. В качестве результата эксперимента ($\gamma_{\text{эксп}}$) выбрать наиболее близкое к теоретическому значению из пяти, рассчитанных в п. 1.
4. Для $\gamma_{\text{эксп}}$ рассчитать относительную погрешность по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(h_2 \Delta h_1)^2 + (h_1 \Delta h_2)^2}}{h_1(h_1 - h_2)}.$$

5. Определить абсолютную погрешность по формуле $\Delta\gamma = \gamma_{\text{эксп}}\varepsilon$.
6. Записать результат экспериментального определения коэффициента Пуассона: $\gamma = (\gamma_{\text{эксп}} \pm \Delta\gamma)$
7. Сделать вывод по проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первое начало термодинамики.
2. Как определяется внутренняя энергия системы? Запишите выражение для внутренней энергии идеального газа.
3. Что такое число степеней свободы? Как определяется это число для одно-, двух- и трехатомных молекул?
4. Что называется удельной и молярной теплоёмкостями?
5. Какие физические величины обозначаются знаками C_p и C_v ? Каким уравнением описывается связь между ними? Какие законы используются при выводе этого уравнения?
6. Какой процесс называется изотермическим? Изобарическим? Изохорическим? Адиабатическим? Запишите уравнения состояния для этих процессов.
7. Запишите первое начало термодинамики для всех изопроцессов и для адиабатического процесса.

Лабораторная работа 3.1. Исследование электростатического поля

двух точечных зарядов

Цель работы: экспериментальное исследование электростатического поля двух зарядов и описание его при помощи эквипотенциальных поверхностей и силовых линий напряженности электрического поля.

Теоретическая часть

Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля и создается неподвижными электрическими зарядами. Наличие этого поля проявляется в том, что пробный точечный заряд q_0 оказывается под действием силы $\vec{F}$, если его поместить в какую-либо точку пространства около других зарядов. Для описания поля ввели понятие напряженности $\vec{E}$.

Напряжённость электростатического поля в данной точке есть векторная физическая величина, равная отношению силы $\vec{F}$, действующей на неподвижный точечный заряд q_0 , к величине этого заряда, не зависящая от величины пробного заряда и характеризующая электростатическое поле в данной точке:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (1)$$

Согласно формуле (1), направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. На рис.1 показана напряженность электрического поля точечного заряда. Напряженность поля, созданного точечным зарядом $+q$ в вакууме, как следует из закона Кулона, в системе СИ определяется формулой

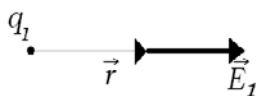


Рис. 1

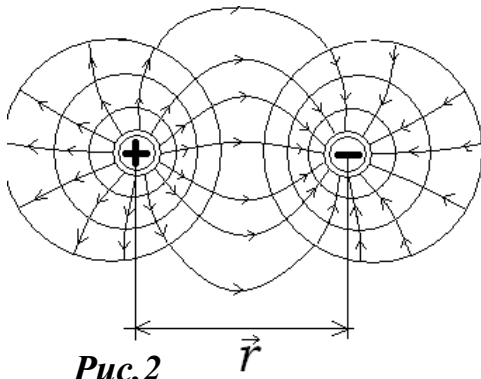
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e},$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная, равная $8,85 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}$; r – расстояние от заряда до данной точки; $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный от заряда к данной точке. Для электрического поля выполняется **принцип суперпозиции**: напря-

женность поля, созданного n зарядами, $\vec{E}$ равна векторной сумме напряженностей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

где $\vec{E}_i$ – напряженность поля, создаваемая отдельным зарядом. Таким образом, электрическое поле можно описать, указав для каждой точки пространства величину и направление вектора напряженности $\vec{E}$.



Совокупность этих векторов образует некоторое векторное поле. Для наглядности это векторное поле изображают в виде силовых линий (рис. 2). Линии вектора напряженности проводят так, чтобы касательные к ним в каждой точке совпадали с направлением вектора $\vec{E}$ в каждой точке. Поскольку силы, действующие между зарядами, являются центральными, а поле центральных сил *консервативно* (работа по перемещению заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы пути), можно наряду с напряженностью поля $\vec{E}$ ввести для описания поля величину φ , называемую *потенциалом*.

Потенциал данной точки поля φ – это скалярная физическая величина, численно равная работе, которую совершает сила поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi - \varphi_{\infty} = A/q. \quad (2)$$

Принято считать, что потенциал на бесконечности равен нулю. Работа по перемещению заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 будет равна $q(\varphi_1 - \varphi_2)$, это следует из уравнения (2). Потенциал является энергетической характеристикой поля.

При графическом изображении электрического поля наряду с силовыми линиями используются эквипотенциальные поверхности, которые получаются, если соединить все точки, имеющие одинаковый потенциал. Силовые линии ортогональны (перпендикулярны) эквипотенциальным поверхностям. В случае равномерно заряженной сферы эквипотенциальные поверхности будут сферами, а силовые линии направлены по радиусам этих сфер. Исходя из свойства взаимной ортогональности силовых линий и эквипотенциальных поверхностей,

можно по силовым линиям поля найти поверхности равного потенциала и, наоборот, по положению эквипотенциальных поверхностей можно построить силовые линии поля. Определим аналитическую связь между вектором напряженности $\vec{E}$ и потенциалом электростатического поля φ .

При бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ заряда в произвольном направлении силы электростатического поля совершают элементарную работу $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, где $\vec{F} = q_0 \vec{E}$. Эту же работу можно выразить через приращение потенциала: $\delta A = -q_0 \cdot d\varphi$. Тогда, приравнявая элементарную работу δA , выраженную через $\vec{E}$ и φ , и сокращая q_0 , получаем:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = |\vec{E}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha = E_{dr} \cdot |d\vec{r}| = -d\varphi. \quad (3)$$

Поскольку работа не зависит от пути, заряд можно перемещать последовательно вдоль координатных осей x , y и z . Тогда с учетом формулы (3) можно записать, что

$$E_x = -\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{y=\text{const}, z=\text{const}} \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Подобная производная по одной из переменных называется частной производной. Для направлений y и z получаем, соответственно:

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

Окончательно в векторном виде

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = -\text{grad} \varphi, \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi,$$

где $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – оператор набла.

Если перемещать заряд вдоль любого направления по эквипотенциальной поверхности, то работа будет равна нулю, т.е. проекция напряженности поля на любую касательную к эквипотенциальной поверхности также равна нулю. Отсюда следует, что вектор напряженности электрического поля всегда перпендикулярен к эквипотенциальным поверхностям.

Более полное описание изучаемых явлений можно найти в [1, гл. 11, §81,82]; [2, гл. 14, § 14.1, 14.2].

Описание экспериментальной установки

Непосредственное экспериментальное изучение электростатического поля неподвижных зарядов затруднительно, по-

этому в данной работе изучение электростатического поля неподвижных зарядов заменено изучением постоянного во времени поля электрического тока в той части пространства, где оно совпадает по направлению с электростатическим полем.

Такая замена позволяет определять потенциал любой точки поля. Для этого в проводящую среду помещают зонд, потенциал которого становится равным потенциалу той точки, куда зонд поставлен.

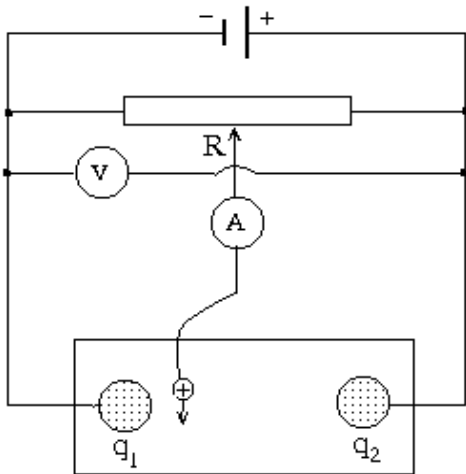


Рис. 3

зонд поставлен. Передвигая зонд и следя за показаниями измерительного прибора, можно найти точки поля с равным потенциалом. По эквипотенциальным поверхностям, построенным по экспериментальным данным, можно восстановить силовые линии напряженности электрического поля. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 3.

Для построения эвипотенциальных линий в работе используется *мостовая схема*. На листе электропроводящей бумаги расположены металлические электроды q_1 и q_2 , присоединенные к источнику постоянного напряжения. Одна из клемм микроамперметра (гальванометра) соединяется с подвижным контактом потенциометра R , другая – с положительным измерительным зондом. В блоке питания предусмотрено автоматическое регулирование напряжения. Напряжение V и положение подвижного контакта потенциометра R устанавливаются такими, чтобы отсутствовал ток в микроамперметре (гальванометре). Это означает равенство потенциалов на клеммах микроамперметра (гальванометра). В этом случае потенциал φ вычисляется через текущее значение напряжения и число делений шкалы потенциометра.

В качестве электропроводящей среды применяется специальная бумага. Обычная бумага в сухом виде является хорошим диэлектриком, однако, если при ее изготовлении ввести в бумажную массу электропроводящие частицы сажи или графита так, чтобы они соприкасались друг с другом, то бумага ока-

жется проводящей. Рассматриваемая физическая установка реализована как виртуальная лабораторная установка на ПК.

Порядок выполнения работы

Перед выполнением лабораторной работы необходимо: познакомиться с физической или виртуальной моделями лабораторной установки и методикой измерений; получить допуск к лабораторной работе у преподавателя.

При выполнении работы необходимо соблюдать следующие условия:

Абсолютные значения величины зарядов не должны превышать 2,5 нКл. Геометрические размеры поля: $1 < L, H < 100$ см (L – длина, H – высота). Ограничения на изменение координат: $0,5 < X < L-0,5$; $0 < Y < H$.

1. Получить у преподавателя свой вариант параметров q_1 , q_2 , L и H и установить их значения в диалоговом окне (нажмите кнопку “Ввод”).
2. Измерить потенциал φ_i в различных точках исследуемой области с помощью положительного зонда. Измерения проводить в узлах координатной сетки с шагом в 2 см в горизонтальном и вертикальном направлениях, записывая в протокол координаты X и Y и значения потенциала φ .
3. После окончания эксперимента таблицу измерений (протокол) необходимо подписать у преподавателя.
4. Построить по полученным данным эквипотенциальные кривые на листе миллиметровой бумаги с изображением зарядов.
5. По полученным эквипотенциальным кривым построить семейство силовых линий напряженности электрического поля $\vec{E}$.
6. Написать и защитить отчет по проделанной работе.

Контрольные вопросы

Что такое напряженность электрического поля и потенциал? В каких единицах они измеряются?

Какая связь существует между напряженностью поля и его потенциалом, что такое градиент?

Как можно вычислить напряженность и потенциал поля точечного заряда?

Что такое силовые линии и эквипотенциальные поверхности?

Как по картине эквипотенциальных линий построить картину силовых линий электростатического поля?

Сформулируйте теорему Гаусса для вектора напряженности электростатического поля в вакууме. Объясните, для чего и как она применяется.

Лабораторная работа 3.2. Определение заряда электрона из законов Фарадея

Цель работы: изучение тока в электролитах и экспериментальное определение заряда электрона на основе законов Фарадея.

Теоретическая часть

Электролитами называются вещества (соли), растворы которых состоят из ионов противоположных знаков и проводят электрический ток. Ионы удерживаются около друг друга кулоновскими силами притяжения. Основными представителями электролитов, используемых в технике, являются водные растворы неорганических солей, кислот и щелочей.

Электролиз – это выделение вещества на электродах (электрохимическое окисление-восстановление) при прохождении электрического тока через электролит. **Электрический ток в электролитах** представляет собой движение положительных ионов к отрицательному электроду (катоду), а отрицательных ионов – к положительному электроду (аноду). Положительные и отрицательные ионы образуются в водных растворах солей, кислот и щелочей в результате распада растворённого вещества на ионы при взаимодействии с растворителем.

Это явление получило название **электролитической диссоциации**.

Первый закон Фарадея (1834). *Масса вещества, выделяющегося на электродах при электролизе, прямо пропорциональна заряду q , прошедшему через электролит:*

$$m = k q, \quad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности (зависит от вида выделяющегося на электроде вещества и называется **электрохимическим эквивалентом**), $k=1\text{кг}/1\text{Кл}$; q – заряд, прошедший через электролит.

Второй закон Фарадея. *Масса выделившегося на электроде вещества равна массе всех ионов, подошедших к электроду: $m = N m_0$.* При этом полный

заряд, перенесенный ими, можно выразить через элементарный заряд:
 $q = N q_0$. Тогда с учетом формулы (1) имеем

$$k = \frac{m}{q} = \frac{m_0}{q_0} = \frac{m_0}{ze} = \frac{m_0 \cdot N_A}{ze \cdot N_A} = \frac{1}{e N_A} \frac{A}{z}.$$

Здесь m_0 и q_0 – масса и заряд одного иона; z – валентность иона; e – заряд электрона; N – число ионов, пришедших к электроду при прохождении через электролит заряда q ; A – атомный вес вещества; N_A – **число Авогадро**. Величина $e \cdot N_A$ обозначается как F и называется **числом Фарадея**.

Число Фарадея численно равно заряду, который необходимо пропустить через электролит для выделения на электроде одного моля одновалентного вещества. Для электролиза значение k приобретает вид

$$k = \frac{1}{F} \frac{A}{z}, \quad (2)$$

где отношение A/Z называется **химическим эквивалентом** вещества. Формула (2) является математическим выражением **второго закона Фарадея**: *электрохимические эквиваленты веществ прямо пропорциональны их химическим эквивалентам*. Обобщенный закон Фарадея получается объединением обоих законов:

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{z} q. \quad (3)$$

Если сила тока, проходящего через электролит, постоянна, то формула (3) может быть записана в виде:

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{z} It.$$

Описание экспериментальной установки



Рис. 1

Экспериментальная установка для проведения электролиза приведена на рис.1. В электролитическую ванну с раствором серной кислоты (H_2SO_4) опускают электроды, которые соединяют с батареей. Она создает электрическое поле между анодом A и катодом K , а сила тока, проходящего через электролитическую ванну, измеряется амперметром A . Под

воздействием этого поля молекулы серной кислоты диссоциируют на положительные ионы H^+ и отрицательные ионы SO_4^- , а затем перемещаются к катоду и аноду. В итоге на катоде выделяются молекулы водорода H_2 , а на аноде – молекулы кислорода O_2 . Количество вещества, т.е. массу m , можно найти по первому закону Фарадея для электролиза. На экран монитора ПЭВМ выводится значение массы водорода (в сантиграммах) в зависимости от мощности электрического источника и времени эксперимента t (в секундах).

Порядок выполнения работы

1. Получить у преподавателя свой вариант значений *силы тока* (I, A) и *времени* (t, c). Установить эти значения в диалоговом окне и нажать кнопку «Начать».
2. Через каждые пять секунд на протяжении времени t измерять массу водорода, выделившуюся на катоде. Данные занести в протокол.
3. После окончания эксперимента подписать протокол у преподавателя и приступить к обработке данных.
4. На миллиметровом листе бумаги изобразить координатную сетку (m , сантиграмм; t, c) и нанести на неё опытные данные из протокола.
5. Вычислить электрохимический эквивалент k из первого закона Фарадея [см. формулу (1)] по рабочей формуле

$$k = \frac{m}{It}.$$

6. Определите число Фарадея F из второго закона Фарадея [см. формулу (2)]:

$$F = \frac{A}{kZ},$$

где $A = 1,008$ – атомный вес водорода; $Z = 1$ – его валентность.

7. Найти заряд электрона как $e = -\frac{F}{N_A}$.
8. Оценить погрешность эксперимента, используя число Фарадея значение заряда электрона:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}; F = 96\,485 \text{ Кл/моль}; N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Контрольные вопросы

Какие растворы проводят электрический ток? Почему? Что такое электролитическая диссоциация?

Что является носителями тока в жидком проводнике? Какие величины характеризуют их свойства как носителей тока?

Что называется электролизом? В чем различие между процессами переноса заряда в твердом проводнике и жидком электролите?

Сформулируйте и запишите законы Фарадея для электролиза.

Объясните физический смысл постоянной Фарадея.

Назовите табличные значения заряда электрона, его массы и их размерности.

Лабораторная работа 3.3. Определение неизвестных сопротивлений при помощи мостовой схемы

Цель работы: изучение законов постоянного тока.

Теоретическая часть

В проводниках существуют свободные носители электрического заряда – электроны. Под действием электрического поля, которое можно создать в проводнике, возникает непрерывное упорядоченное движение электронов. Такое движение называется **электрическим током**. За направление электрического тока принято направление движения свободных положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока I** . Это скалярная физическая величина, которая определяет количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за единицу времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Если сила тока и его направление не изменяются со временем, то такой ток называется **постоянным**. В Международной системе единиц СИ сила тока измеряется в **амперах (А)**. Для существования постоянного тока необходимо наличие в электрической цепи устройства, способного создавать и поддерживать разности потенциалов $\Delta\phi$ на участках цепи за счет работы сил неэлектростатического происхождения. Такие устройства называются **источниками постоянного тока**. Силы неэлектростатического происхождения, действующие

на свободные носители заряда со стороны источников тока, называются **сторонними силами**. При перемещении электрических зарядов по цепи постоянного тока сторонние силы, действующие внутри источников тока, совершают работу.

Электродвижущей силой источника (ЭДС) называется физическая величина, равная работе сторонних сил при перемещении заряда q от отрицательного полюса источника тока к положительному полюсу, отнесённая к величине этого заряда. ЭДС и $\Delta\varphi$ в системе СИ измеряется в **вольтах (В)**:

$$\text{ЭДС} = \varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q}.$$

Цепь постоянного тока можно разбить на участки, на которых не действуют сторонние силы, то есть участки, не содержащие источников тока. Эти участки называются однородными. Участки, включающие источники тока, называются неоднородными.

Немецкий физик Г.Ом в 1826 г. экспериментально установил, что сила тока I , текущего по однородному проводнику (то есть проводнику, в котором не действуют сторонние силы), пропорциональна напряжению на концах проводника:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напряжение на участке цепи; R – его сопротивление, Ом. Аналогично тому, как трение в механике создаёт противодействие движению тел, сопротивление проводника создаёт противодействие направленному движению электрических зарядов и определяет превращение электрической энергии во внутреннюю энергию проводника.

Закон Ома для замкнутой цепи: *сила тока в электрической цепи прямо пропорциональна ЭДС и обратно пропорциональна сумме сопротивлений внешней и внутренней цепи:*

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

где R – внешнее сопротивление цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока. Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1)$$

где ρ – удельное сопротивление проводника, Ом·м; l – длина проводника; s – площадь поперечного сечения. Большинство электрических цепей содержат комбинации последовательно или параллельно включённых сопротивлений.

Полное сопротивление цепей определяется из выражения $R = U/I$. При последовательном соединении через все сопротивления течёт один и тот же ток, и падение напряжения на сопротивлениях пропорционально величинам этих сопротивлений. Сопротивление последовательно соединённых проводников

$$R = \sum_{i=1}^N R_i .$$

При параллельном соединении сопротивлений имеем одинаковое падение напряжения, но различную силу тока на участках $I = I_1 + I_2 + \dots$. Следовательно, разделив на U обе части этого выражения, получим:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} ,$$

где R_i – сопротивление i -го проводника; N – число проводников.

Для расчёта более сложных цепей существует способ, основанный на применении правил Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа (правило для узла) – алгебраическая сумма всех N токов, сходящихся в узле, равна нулю. Узел-точка разветвления проводников

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 .$$

Первое правило является следствием закона сохранения заряда.

Второе правило Кирхгофа (правило для контура) – алгебраическая сумма падений напряжений, подсчитанных вдоль любого замкнутого контура, равна алгебраической сумме ЭДС источников, включённых в контур:

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k ,$$

где N – количество сопротивлений в контуре; M – число источников ЭДС.

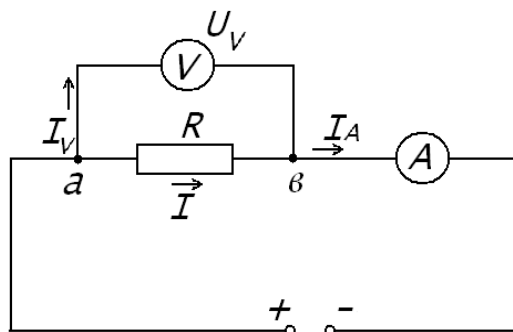


Рис. 1

Второе правило Кирхгофа является следствием закона сохранения энергии.

Измерение сопротивлений. Наиболее простой способ определения сопротивлений основан на измерении силы тока

при помощи амперметра и напряжения – при помощи вольтметра (рис. 1). Если амперметр показывает силу тока в амперах (I), а вольтметр – напряжение на концах проводника в вольтах (U), то сопротивление проводника в омах равно $R=U/I$. При этом должно соблюдаться условие $I \gg I_V$. Точность этого метода определяется приборной погрешностью вольтметра и амперметра. Для точного

определения сопротивлений используют метод сравнения сопротивлений, не требующий измерения тока и напряжения. Этот метод осуществляется по схеме моста, изображенного на рис.2.

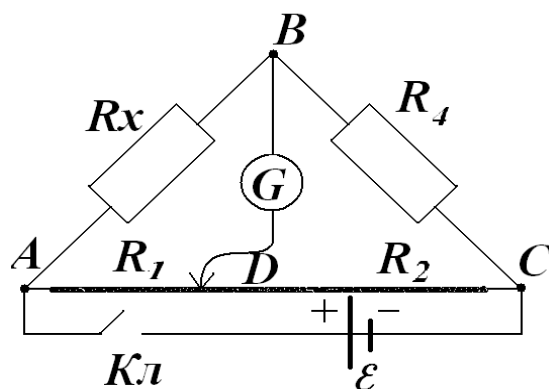


Рис.2

Электрическая мостовая схема (мост Уитстона) служит для определения электрического сопротивления. Четыре сопротивления R_1, R_2, R_X, R_4 составляют замкнутый четырёхугольник $ABCD$. Противоположные вершины четырёхугольника соединяются диагоналями. В одну диагональ, между точками C и D , подключается гальванометр G , в другую – батарея $\mathcal{E}$ через ключ $Kл$.

Если участок последовательно включённых сопротивлений R_1 и R_2 заменяют прямым однородным проводом, натянутым вдоль линейки, то такой мост называется реохордным. Вдоль реохорда перемещается подвижной контакт D и сопротивления R_1 и R_2 изменяются пропорционально длине проволоки из формулы (1). Положение движка D реохорда можно подобрать таким образом, чтобы ток в гальванометре G , включённом в диагональ моста, был равен нулю.

Если участок последовательно включённых сопротивлений R_1 и R_2 заменяют прямым однородным проводом, натянутым вдоль линейки, то такой мост называется реохордным. Вдоль реохорда перемещается подвижной контакт D и сопротивления R_1 и R_2 изменяются пропорционально длине проволоки из формулы (1). Положение движка D реохорда можно подобрать таким образом, чтобы ток в гальванометре G , включённом в диагональ моста, был равен нулю.

Это возможно тогда, когда потенциалы в точках B и D окажутся равными, т.е. когда $\varphi_B = \varphi_D$. При отсутствии тока через гальванометр по первому правилу Кирхгофа можно записать: $I_1 = I_2; I_X = I_4$.

Так как потенциалы точек B и D равны, значения падения напряжения на участках AB и AD и участках BC и DC тоже будут равны; т.е. $I_1 R_1 = I_2 R_2$,

$I_x R_x = I_4 R_4$. Измерительный мост в этом случае оказывается сбалансированным. Полученные равенства разделим почленно и, принимая во внимание, что $I_1 = I_2$ а $I_x = I_4$, получим:

$$R_x = R_4 \frac{R_1}{R_2}.$$

Таким образом, зная сопротивление одного проводника, например, R_4 и отношение сопротивлений двух других проводников, можно определить сопротивление четвёртого проводника. Заменяя сопротивления R_1 и R_2 длинами плеч L_1 и L_2 , получим рабочую формулу для определения неизвестного сопротивления:

$$R_x = R_4 \frac{L_1}{L_2}. \quad (2)$$

Описание экспериментальной установки

Мост Уитстона реализован в виртуальной лабораторной установке (рис. 2, рис. 3), состоит из сопротивлений R_1 , R_2 , R_x , R_4 , которые соединены между собой таким образом, что образуют замкнутый четырехугольник.

Два противоположных угла четырехугольника соединяются с батареей ($E = 25 \text{ В}$) через ключ K , а два других угла – через гальванометр G . Сопротивления R_1 , R_2 соответствуют сопротивлению проволоки реохорда, т.е. плечам L_1 , L_2 реохорда [запишите рабочую формулу (2)]. Длину плеч можно изменить при помощи кнопки-движка “RHEOHORD CONTROL”.

Сопротивление R_4 представляет собой магазин сопротивлений, позволяющий набрать любое сопротивление в пределах от $R_0 = 0 \text{ Ом}$ до $R_{\max} = 999,9 \text{ Ом}$. Неизвестное сопротивление на схеме обозначено цифрами 1 или 2. Нажимая на кнопку неизвестного сопротивления, можно получить в схеме известные сопротивления 1 (R_{x1}) или 2 (R_{x2}), а также их последовательное (R_{x3}) и параллельное (R_{x4}) включение. Когда источник тока замкнут, то через «плечи» моста пойдет ток и гальванометр покажет этот ток. При помощи кнопки-движка «RHEOHORD CONTROL» можно добиться такого положения контакта D на реохорде, когда ток через гальванометр будет равен нулю и окажется справедливым соотношение (2). То же самое можно сделать подбором сопротивления R_4 , не изменяя соотношение плеч L_1 , L_2 реохорда.

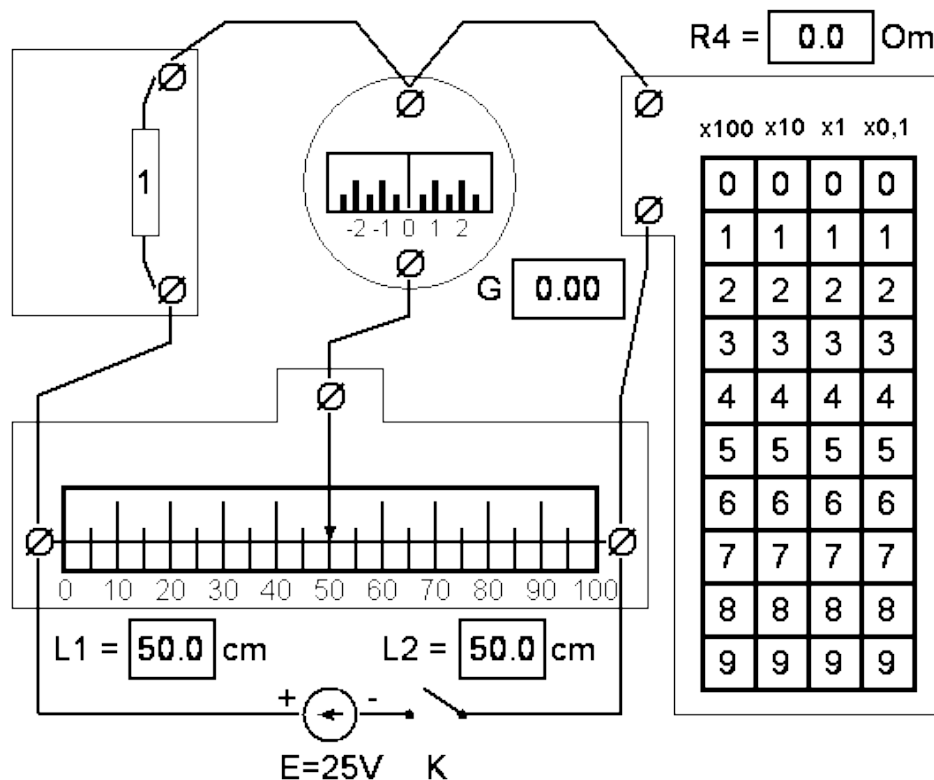


Рис. 3. Схема виртуальной лабораторной установки
Порядок выполнения работы

1. Получить свой вариант задания и допуск у ведущего преподавателя.
2. Ознакомиться с работой мостовой схемы на виртуальной лабораторной установке: включение/выключение, работа реохорда и гальванометра, подключение сопротивлений, изменение значений R_4 .
3. Выполнить пробные измерения, добиваясь нулевого отклонения стрелки гальванометра G : а) подбором R_4 при различных фиксированных значениях $L1/L2$; б) подбором соотношения плеч $L1/L2$ при различных фиксированных значениях сопротивления R_4 .
4. Установить движок реохорда D на середину реохорда, а значение R_4 на магазине сопротивлений вывести на ноль.
5. Подключить к установке первое неизвестное сопротивление R_{X1} и замкнуть ключ K .
6. Изменяя сопротивления R_4 , добиться минимального (нулевого) отклонения стрелки гальванометра G при равном отношении плеч реохорда $L1$ и $L2$ ($L1/L2=50/50$).
7. Отсчитать и записать длину плеч реохорда $L1$ и $L2$, а также значение R_4 в таблицу результатов измерений.

8. Увеличить сопротивление магазина R_4 на 20 % больше, чем было в п. 7 и, изменяя отношение плеч реохорда L_1 и L_2 , добиться того, чтобы отклонение стрелки гальванометра G от нуля было наименьшим.
9. Данные записать в таблицу результатов измерений.
10. Уменьшить сопротивление магазина R_4 на 20 % меньше, чем было в п. 7 и, изменяя отношение плеч реохорда L_1 и L_2 , добиться того, чтобы отклонение стрелки гальванометра G от нуля было наименьшим.
11. Значение R_4 и длину плеч реохорда L_1 и L_2 записать в таблицу результатов измерений.

Измеряемые сопротивления	Опыт	$R_4, \text{ Ом}$	$L_1, \text{ см}$	$L_2, \text{ см}$	$R_{xi}, \text{ Ом}$	$\bar{R}_x, \text{ Ом}$
Неизвестное сопротивление R_{x1}	1					
	2					
	3					
Неизвестное сопротивление R_{x2}	1					
	2					
	3					
Последовательное соединение сопротивлений R_{x3}	1					
	2					
	3					
Параллельное соединение сопротивлений R_{x4}	1					
	2					
	3					

12. Заменить неизвестное сопротивление R_{x1} на неизвестное сопротивление R_{x2} и повторить измерения, следуя пп. 4–11.
13. Заменить неизвестное сопротивление R_{x2} на последовательно соединённые неизвестные сопротивления R_{x1} , и R_{x2} и повторить измерения, следуя пп. 4–11.
14. Повторить измерения по пп. 4–11 для параллельно соединённых неизвестных сопротивлений R_{x1} , и R_{x2} . Полученные данные записать в таблицу результатов измерений.
15. Найти по результатам каждого опыта значения неизвестных сопротивлений R_{x1} , и R_{x2} , а также их общее сопротивление при последовательном R_{x3} и параллельном R_{x4} соединениях, их средние значения $\bar{R}_{xi}$.
16. Оценить погрешности измерений. Сделать выводы и написать отчёт.

Контрольные вопросы

1. Что такое электрический ток, сила тока?
2. Что называют сторонними силами?
3. Дать определение потенциала, разности потенциалов.
4. Написать формулу для определения сопротивления трёх последовательно соединённых резисторов.
5. Написать формулу для определения сопротивления двух параллельно соединённых резисторов.
6. Сформулировать и написать закон Ома для участка цепи.
7. Какой участок цепи называется неоднородным?
8. Записать закон Ома для неоднородного участка цепи.
9. Сформулировать и записать первое и второе правила Кирхгофа.

Лабораторная работа 3.4. Определение ёмкости конденсатора при помощи баллистического гальванометра

Цель работы: изучение баллистического метода нахождения заряда, определение неизвестных ёмкостей.

Теоретическая часть

Если изолированному проводнику сообщить электрический заряд q , то его потенциал φ будет возрастать пропорционально заряду:

$$q = c\varphi,$$

где c – коэффициент пропорциональности (остаётся постоянным и называется электрической ёмкостью проводника).

В системе СИ за единицу электроёмкости принята *фарада*. $1\text{ Ф} = 10^6$ микрофарад (мкФ) = 10^{12} пикофарад (пФ); $[c] = \text{Кл/В}$. Электрическая ёмкость зависит от геометрических размеров и формы проводника. Уединённые проводники имеют очень малую ёмкость, *конденсаторы* – намного бóльшую.

Конденсатор – это устройство, состоящее из двух электродов (обкладок), разделённых диэлектриком, толщина которого много меньше по сравнению с толщиной обкладок. Накопление зарядов на обкладках конденсатора называется зарядкой. Чтобы зарядить конденсатор, нужно соединить его обкладки с источником электроэнергии, например, с батареей. Заряд q , находящийся на од-

ной из обкладок заряженного конденсатора, прямо пропорционален напряжению U между обкладками конденсатора. Ёмкость конденсатора выражается формулой $c = q/U$.

Во многих случаях для получения необходимой ёмкости конденсаторы соединяют в батарею. Для увеличения ёмкости используют параллельное соединение конденсаторов. *Параллельным* называется соединение конденсаторов,

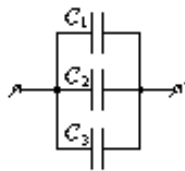


Рис. 1

при котором все положительно заряженные обкладки присоединены к одному проводу, а отрицательно заряженные – к другому (рис. 1). В этом случае напряжения на всех конденсаторах одинаковы и равны U , а заряд батареи q_0 равен сумме зарядов отдельных конденсаторов: $q_0 = q_1 + q_2 + q_3$.

Полная ёмкость батареи, состоящей из n конденсаторов:

$$C_{\text{пар}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (1)$$

Для уменьшения ёмкости конденсаторы соединяют *последовательно*.

Последовательным называют такое соединение конденсаторов, при котором положительно заряженная обкладка предыдущего кон-

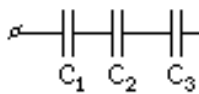


Рис. 2

денсатора соединяется с отрицательно заряженной обкладкой последующего, и т. д. (рис. 2). Заряды на последовательно соединённых конденсаторах одинаковы, а полное напряжение равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}.$$

Тогда при последовательном соединении конденсаторов ёмкость батареи

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Для двух конденсаторов формула упрощается:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}. \quad (2)$$

Для определения ёмкости конденсаторов можно использовать мостовые схемы или баллистический *гальванометр*.

Гальванометр – высокочувствительный электроизмерительный прибор, реагирующий на малую величину тока и предназначенный для измерения малых токов или заряда на конденсаторе. Магнитоэлектрический гальванометр состоит из: подвижной рамки с несколькими витками проволоки, которая явля-

ется механической колебательной системой; постоянного магнита, в магнитном поле которого находится рамка, а также шкалы. Если замкнём на гальванометр какой-нибудь заряженный конденсатор, конденсатор начнёт разряжаться и в гальванометре возникает короткий импульс тока.

Теория показывает, что угол α отклонения стрелки (зеркальца) гальванометра пропорционален количеству электричества q , протекающего через гальванометр за малый промежуток времени:

$$q = b \cdot \alpha. \quad (3)$$

где b – баллистическая постоянная гальванометра.

Описание экспериментальной установки

Схема, приведённая на рис. 3, позволяет опытным путём определять неизвестные ёмкости и баллистическую постоянную. Здесь C – конденсатор, G – гальванометр, V – вольтметр, R – реостат, включённый по схеме потенциометра, E – батарея и X – двухполюсный переключатель.

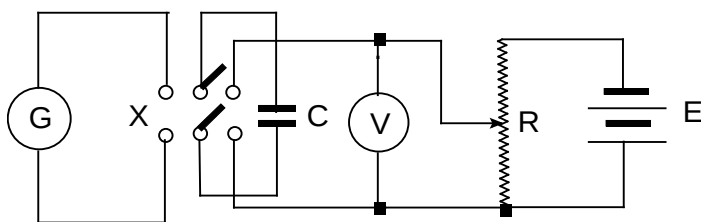


Рис.3

Конденсатор, ёмкость которого известна, заряжают до разности потенциалов U ; очевидно, что количество электричества можно определить как

$$q = C U. \quad (4)$$

После этого конденсатор разряжают через гальванометр и измеряют угол отклонения (отброса) стрелки α . Баллистическую постоянную b определяют из формулы (3) по известным из опытных данных значениям заряда q и угла α . Величина отброса стрелки α прямо пропорциональна величине заряда q . Следовательно, изменяя величину заряда от q_{min} до q_{max} , можно градуировать шкалу гальванометра в зарядах. Зная напряжение заряда конденсатора по вольтметру и величину отброса стрелки гальванометра, можно вычислить ёмкость конденсатора по формуле (4).

Рассмотрим другой метод определения неизвестной ёмкости. В схему (см. рис. 3) включают один раз конденсатор с известной ёмкостью C , а другой раз – с неизвестной ёмкостью C_x . Отношение показаний (отбросов) гальванометра в обоих случаях будет равно отношению ёмкостей $\alpha / \alpha_x = C/C_x$, откуда можно найти неизвестную ёмкость

$$C_x = C \frac{\alpha_x}{\alpha}. \quad (5)$$

Баллистический гальванометр позволяет сравнивать ёмкости; при этом напряжение батареи знать не нужно.

Схема для определения неизвестных ёмкостей, приведённая на рис. 3, реализована на виртуальной лабораторной установке (рис. 4).

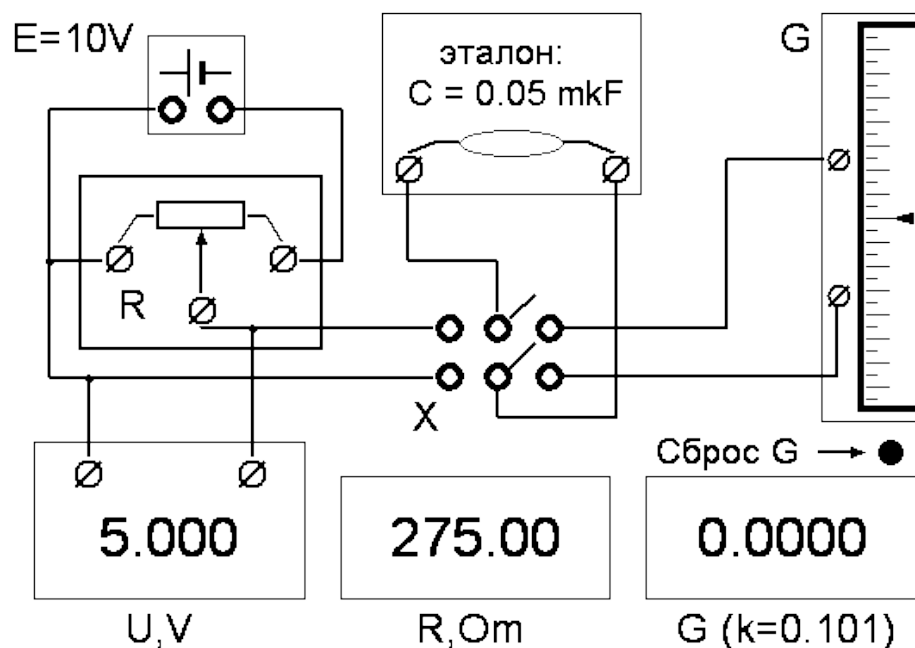


Рис.4. Схема виртуальной лабораторной установки

В лабораторной установке реализована схема попеременного подключения известного и неизвестного конденсаторов к аккумуляторной батарее и к баллистическому гальванометру. Установка состоит из: гальванометра G , источника ЭДС, реостата R , переключателя X , кнопки сброса заряда гальванометра G , вольтметра V , указателя сопротивления и управления реостатом.

Попеременное включение эталонного C или неизвестного конденсатора C_x на источник E или гальванометр G с помощью переключателя X осуществляется путём кратковременного нажатия на левую кнопку «мышки». Управление реостатом R позволяет задать значения напряжения заряда конденсатора. Подключение различных конденсаторов также возможно путём кратковременного нажатия на левую кнопку «мышки».

Порядок выполнения работы

1. Получить свой вариант задания и допуск у ведущего преподавателя.
2. Ознакомиться с работой виртуальной лабораторной установки: подключение различных ёмкостей, изменение значений напряжения зарядки конденсатора, баллистического гальванометра.
3. Установить нулевые показания гальванометра кнопкой сброс G и ключ X в положение “Разомкнут”.
4. Установить с помощью движка реостата R заданное напряжение, подводимое к конденсатору.
5. Включить в схему эталонный конденсатор с известной ёмкостью.
6. Зарядить конденсатор; для этого подключить его при помощи ключа X к источнику с заданным напряжением U .
7. Переключателем X переключить эталонный конденсатор на гальванометр. Записать его показания в таблицу измерений.
8. Перекинуть переключатель X на зарядку конденсатора. Обнулить показания гальванометра с помощью кнопки “Сброс G ”. Измерение повторить не менее трех раз. Результаты записать в таблицу.
9. Присоединить конденсатор неизвестной емкости C_{x1} и повторить измерения, как указано в пп. 6,7,8, снимая показания гальванометра G не менее трех раз при заданном напряжении U . Ёмкость испытуемого конденсатора можно определить по формуле (5):

$$C_{x1} = C \frac{\alpha_{x1}}{\alpha},$$

где C – ёмкость эталонного конденсатора; α и α_x – соответственно средние значения показаний гальванометра для эталонного и испытуемого конденсаторов.

10. Подключить второй конденсатор неизвестной ёмкости C_{x2} , повторить измерения и определить его ёмкость, как указано в пп. 6–9.
11. Повторить измерения для батареи конденсаторов C_{x1} и C_{x2} , соединённых параллельно, определить ёмкость и результат записать в таблицу.
12. Соединив конденсаторы C_{x1} и C_{x2} последовательно, определить ёмкость всей батареи, как указано в пп. 6–9.

13. Пользуясь экспериментальными значениями емкостей C_{x1} и C_{x2} , рассчитать емкость батареи при параллельном и последовательном соединении по формулам для последовательного [формула (2)] и параллельного [формула (1)] соединения.
14. Сравнивая результаты расчетов с результатами опытов, сделать вывод об их соответствии.
15. Определить баллистическую постоянную гальванометра для эталонной ёмкости по формуле

$$b = k \frac{CU}{\alpha}.$$

Конденсатор	Показания гальванометра α , мм				Ёмкость C , мкФ	
	α_1	α_2	α_3	$\bar{\alpha}$	Опыт	Расчет
Эталонный C						
Испытуемый C_{x1}						
Испытуемый C_{x2}						
Последовательное соединение C_{x1} и C_{x2}						
Параллельное соединение C_{x1} и C_{x2}						
Заданное значение $U =$	Эталонная ёмкость $C =$					

16. По результатам эксперимента сделать выводы и написать отчёт.

Контрольные вопросы

1. Что называется электрической ёмкостью проводника?
2. Как определяется электроёмкость конденсатора? Записать формулу.
3. При каком соединении конденсаторов одинаковы заряды и почему?
4. При каком соединении конденсаторов одинаковы напряжения?
5. Даны два конденсатора одинаковой ёмкости: как получить максимальную и минимальную ёмкости?
6. Объясните работу баллистического гальванометра магнитоэлектрической системы. Что такое нуль-гальванометр?

Лабораторная работа 3.5. Исследования цепи постоянного тока

Цель работы: изучение характера зависимости КПД источника тока от величины тока в цепи, а также характера изменения полезной и полной мощностей источника при изменении величины тока.

Приборы и принадлежности: источник постоянного тока, реостат, амперметр, вольтметр, ключ.

Методика эксперимента. Рассмотрим практически важный вопрос об использовании энергии источника тока. Пусть какой-либо источник с ЭДС E и внутренним сопротивлением R_0 замкнут на внешнюю цепь с сопротивлением R . Во внешней цепи будет выделяться мощность P_a

$$P_a = U \cdot I = R \cdot I^2 = R \cdot \frac{E^2}{(R + R_0)^2}. \quad (1)$$

Изменяя внешнее сопротивление R , получим во внешней цепи максимальную мощность $P_{a \max}$, возможную при данном источнике. Значение $R = R_m$, соответствующее максимальной мощности, мы получим, дифференцируя выражение P_a по R и приравнявая первую производную нулю.

Это дает $\frac{dP_a}{dR} = E^2 \cdot \frac{R_0^2 - R_m^2}{(R_0 + R_m)^4} = 0$, откуда получаем $R_0 = R_m$.

Мощность, выделяемая во внешней цепи, достигает наибольшего значения, если сопротивление во внешней цепи равно внутреннему сопротивлению источника. При этом ток в цепи

$$I_{\max} = \frac{E}{2R_0}. \quad (2)$$

Наибольшее возможное значение мощности есть $P_{a \max} = \frac{E^2}{4R_0}$.

Однако, при практическом использовании источников тока важна не только мощность, но и их коэффициент полезного действия (КПД). Когда источник работает на внешнюю цепь, то ток протекает и внутри источника, и поэтому некоторая мощность тратится бесполезно на выделение тепла внутри источника. Эта мощность имеет значение, $P_i = R_0 \cdot I^2$, тогда как полная мощность источника

$$P = R \cdot I^2 + R_0 \cdot I^2. \quad (3)$$

Поэтому КПД источника

$$\eta = \frac{P_a}{P} = \frac{U}{E}. \quad (4)$$

Так как $U \leq E$, то и $\eta \leq 1$.

Рассмотрим подробнее, как зависит P_a и η от силы тока, потребляемой от источника. Полезную мощность P_a можно представить в следующем виде

$$P_a = P - P_i = E \cdot I - R_0 \cdot I^2 = I \cdot (E - R_0 I).$$

P_a меняется с изменением I по параболическому закону и обращается в нуль, если $I \cdot (E - R_0 \cdot I) = 0$.

Это дает два значения тока

$$I_1 = 0 \quad \text{и} \quad I_2 = I_{\text{кз}} = \frac{E}{R_0}. \quad (5)$$

Первое решение соответствует разомкнутой цепи ($R \gg R_0$), а второе – короткому замыканию ($R \ll R_0$), I_2 – ток короткого замыкания.

Зависимость КПД от силы тока выражается следующей формулой

$$\eta = \frac{P_a}{P} = \frac{E \cdot I - R_0 \cdot I^2}{E \cdot I} = 1 - \frac{R_0}{E} \cdot I. \quad (6)$$

КПД достигает наибольшего значения $\eta = 1$ в случае разомкнутой цепи и затем уменьшается по линейному закону, обращаясь в нуль при коротком замыкании. Зависимость P , P_a и U от силы тока I изображена на рис. 1. Мы видим, что условия получения наибольшей полезной мощности P_a и наибольшего падения напряжения U несовместимы. Когда P_a достигает наибольшего значения, сила тока равна $E/2R_0$, и когда падение напряжения U близко к ЭДС, полезная мощность P_a мала по сравнению с максимальной мощностью $P_{a\text{max}}$, которую мог бы развить данный источник.

В силовых электрических установках важнейшим требованием является получение высокого КПД. А для этого должно быть

$$\frac{R_0 \cdot I}{E} = \frac{R_0 \cdot I}{(R + R_0) \cdot I} = \frac{R_0}{R + R_0} \ll 1,$$

то есть внутреннее сопротивление R_0 источника должно быть мало по сравнению с сопротивлением R нагрузки. При этом мощность P_i , выделяемая внутри источника мала по сравнению с полезной мощностью нагрузки.

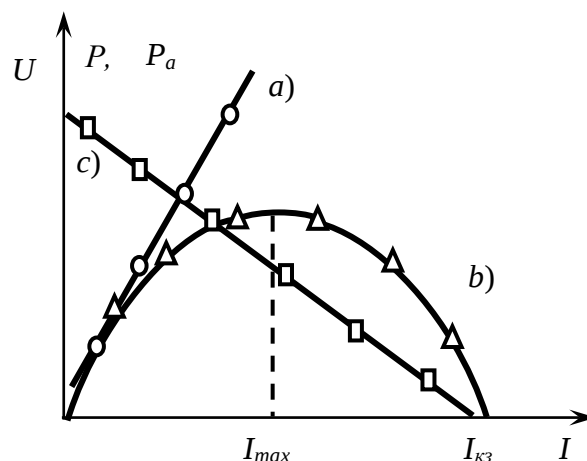


Рис.1. Зависимость полной, полезной мощностей и напряжения от силы тока в цепи:

- a) —○— — зависимость *полной мощности от силы тока*;
b) —△— — зависимость *полезной мощности от сил тока*;
c) —□— — зависимость *напряжения U от силы тока*.

В случае короткого замыкания, как мы видели выше, $P_a=0$, и вся мощность выделяется внутри источника, что может привести к перегреву внутренних частей источника и выходу его из строя. По этой причине короткие замыкания мощных источников (динамомашины, аккумуляторные батареи) недопустимы.

Порядок выполнения работы

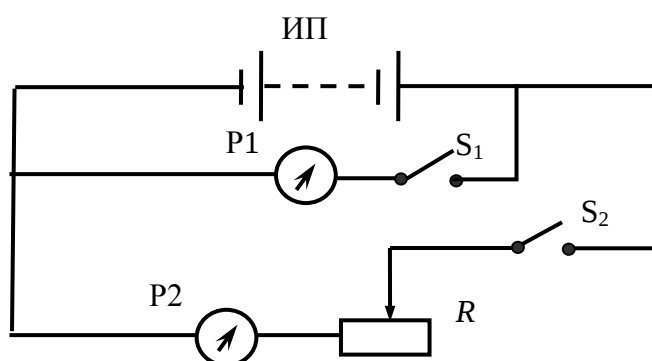


Рис. 2. Рабочая электрическая схема

1. Ознакомиться со схемой, представленной на рис. 2.
2. Записать характеристики электроизмерительных приборов.
3. Включить установку в сеть.

4. Тумблером замкнуть цепь, записать показания силы тока I и напряжения U в делениях.

5. Изменяя реостатом ток через 10 делений до максимально возможного значения амперметра. Показания вольтметра и амперметра занести в таблицу.

6. Построить график зависимости напряжения от силы тока. Экстраполируя линию графика функции $U = f(I)$ до пересечения с осями, находим ЭДС источника тока E и ток короткого замыкания $I_{кз}$.

Результаты измерений				Результаты расчета							
I		U		$E, В$	$R_0, Ом$	$P, Вт$	$P_a, Вт$	η	График $I_{к.з.}, А$	График $I_{max}, А$	$I_{max}, А$
дел.	А	дел.	В								

7. Рассчитать внутреннее сопротивление тока R_0 из формулы (5), по формуле (2) определить ток, при котором полезная мощность максимальна.

8. Вычислить полную мощность источника тока по формуле $P = I \cdot E$, полезную мощность $P_a = I \cdot U$ и коэффициент полезного действия (КПД) $\eta = \frac{U}{E}$.

9. Построить график зависимости P_a от I . В том же масштабе, на тех же осях строим график зависимости P от I .

10. Сравнить расчетные и графические значения тока короткого замыкания и тока, при котором полезная мощность максимальна.

Контрольные вопросы

1. Сформулировать закон Ома для однородного участка цепи, для не однородного участка цепи, для полной цепи.

2. Дайте определение полезной, полной мощностей и КПД источника тока и каким образом они зависят от величины силы тока.

3. Определить значение силы тока, при которых полезная мощность батареи максимальна и обращается в нуль.

4. При каком значении силы тока КПД = 0,5, и какую полезную мощность при этом получаем?

5. Что называется током короткого замыкания? Почему недопустимо короткое замыкание?

Л И Т Е Р А Т У Р А

Основная:

1. Курс физики: учеб. пособие для инженер. – техн. специальностей вузов /Т. И. Трофимова. – 17-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. – 557 с.
2. Курс физики: учебн. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 7-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. – 719 с.
3. Сборник задач по общему курсу физики: для техн. вузов / В. С. Волькенштейн. – Изд. доп. и перераб. – СПб.: СпецЛит, 2007 – 327с.
4. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – Изд. 8-е, перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2009. – 640 с. :
5. ФИЗИКА. Лабораторные работы: ч.1 метод. указания по выполнению лабораторных работ/ сост. В.И. Щепин. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2009.– 64 с.
6. ФИЗИКА. Лабораторные работы: ч.2 сост. В.И. Щепин. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2010.– 64 с.

Дополнительная:

7. Савельев И.В. Курс общей физики, т. 1, 2, 3. – М.: Наука, 2008 г.
8. Зайдель А.Н. Погрешности измерения физических величин. Наука, Л. 2010. – 108с.

Сайты свободного доступа

9. <http://fizzzika.narod.ru/1-5.html>
10. <http://www.alleng.ru/d/phys/phys01.htm>
11. <http://genphys.phys.msu.ru/rus/lab/>
12. www.studzona.com
13. <http://presfiz.narod.ru>

ПРИЛОЖЕНИЕ А

.... Основные физические постоянные (округленные значения). Таблица А. 1

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стандартный объем*	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Скорость света в вакууме	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная закона смещения Вина	b	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	R	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радиус Бора	a	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	μ_B	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} (13,6 \text{ эВ})$
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

* Молярный объем идеального газа при нормальных условиях

..Некоторые астрономические величины. Таблица А. 2

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$

Плотность твердых тел. Таблица А. 3

Твердое тело	Плотность, кг/м^3	Твердое тело	Плотность, кг/м^3
Алюминий	$2,70 \cdot 10^3$	Медь	$8,93 \cdot 10^3$
Барий	$3,50 \cdot 10^3$	Никель	$8,90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6,02 \cdot 10^3$	Свинец	$11,3 \cdot 10^3$
Висмут	$9,80 \cdot 10^3$	Серебро	$10,5 \cdot 10^3$
Железо	$7,88 \cdot 10^3$	Цезий	$1,90 \cdot 10^3$
Литий	$0,53 \cdot 10^3$	Цинк	$7,15 \cdot 10^3$

..... Плотность жидкостей. Таблица А. 4

Жидкость	Плотность, кг/м ³	Жидкость	Плотность, кг/м ³
Вода (при 4°С)	$1,00 \cdot 10^3$	Сероуглерод	$1,26 \cdot 10^3$
Глицерин	$1,26 \cdot 10^3$	Спирт	$0,80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$		

Плотность газов (при нормальных условиях). Таблица А. 5

Газ	Плотность, кг/м ³	Газ	Плотность, кг/м ³
Водород	0,09	Гелий	0,18
Воздух	1,29	Кислород	1,43

Диэлектрическая проницаемость. Таблица А. 6

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Вода	81	Парафин	2,0
Масло трансформаторное	2,2	Стекло	7,0
Эбонит	3,0	Фарфор	6,0

Удельное сопротивление металлов. Таблица А. 7

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Нихром	$1,1 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$

Показатель преломления Таблица А. 8

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50

Работа выхода электронов. Таблица А. 9

Металл	А, Дж	А, эВ
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезий	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

**Относительные атомные массы (округление значения) A_r
и порядковые номера Z некоторых элементов. Таблица А. 10**

Элемент	Символ	A_r	Z	Элемент	Символ	A_r	Z
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	196	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Ап	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

Массы атомов легких изотопов. Таблица А. 11

Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.	Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.
Нейтрон	${}_0^1n$	1,00867	Бор	${}_{5}^{10}B$ ${}_{5}^{11}B$	10,01294 11,00930
Водород	${}_1^1H$ ${}_1^2H$ ${}_1^3H$	1,00783 2,01410 3,01605	Углерод	${}_6^{12}C$ ${}_6^{13}C$ ${}_6^{14}C$	12,00000 13,00335 14,00324
Гелий	${}_2^3He$ ${}_2^4He$	3,01603 4,00260	Азот	${}_7^{14}N$	14,00307
Литий	${}_3^6L$ ${}_3^7Le$	6,01513 7,01601	Кислород	${}_8^{16}O$ ${}_8^{17}O$	15,99491 16,99913
Бериллий	${}_4^7Be$ ${}_4^9Be$	7,01693 9,01219			

Периоды полураспада радиоактивных изотопов. Таблица А. 12

Изотоп	Символ	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}\text{Ac}$	10 сут
Йод	$^{131}_{53}\text{I}$	8 сут
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	5,3 г
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	10 мин
Радий	$^{226}_{86}\text{Ra}$	1620 лет
Радон	$^{222}_{86}\text{Rn}$	3,8 сут
Стронций	$^{90}_{38}\text{Sr}$	27 лет
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	14,3 сут
Церий	$^{144}_{58}\text{Ce}$	285 сут

Масса и энергия покоя некоторых частиц. Таблица А. 12

Частица	m_0		E_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
Нейтральный π -мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования. Таблица А. 13

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пэта	П	10^{15}	санتي	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^9	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^3	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^1	атто	а	10^{-18}

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Образец оформления контрольной работы

Иркутский государственный технический университет
Кафедра общеобразовательных дисциплин

Ф И З И К А

Контрольная работа № 2
«Электростатика. Постоянный электрический ток»

Выполнил:

Ст-т гр. ЭП_{бз}-10 Бурлов С.А.

№ 11257320
(номер зачётной книжки)

Проверил преподаватель:

доц. кафедры ООД Щепин В.И.

Иркутск - 2012

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Пример выполнения лабораторной работы и написание отчёта

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Цель работы: *изучение гармонических колебаний, исследование зависимости периода колебаний математического маятника от его длины. Определение ускорения свободного падения. Изучение погрешностей измерений.*

Теоретическая часть

Теоретический материал изложен на с. 21–25 данной работы и в [1, гл. 18, §140], [2, гл. 27, § 27.1, 27.2].

Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания математического маятника, по форме аналогично общему уравнению вида:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \quad (1)$$

при условии, что собственная частота колебаний системы $\omega = \sqrt{g/l}$ (g – ускорение свободного падения, l – длина маятника, φ – угол отклонения).

Частным решением дифференциального уравнения (1) является уравнение $x = A \cos \omega t$.

Частота ω связана с периодом T выражением $\omega = \frac{2\pi}{T}$, поэтому период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Этим выражением можно воспользоваться для определения ускорения свободного падения, если решить его относительно g :

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) видно, что для экспериментального определения g необходимо для заданной длины маятника определить его период колебаний. Для более точного определения периода колебаний можно воспользоваться формулой $T = t / k$, где t – время, k – число колебаний. Задаём длину маятника l_i и определяем время t_i десяти колебаний маятника. Измерения повторяем пять раз ($n=5$)

для различных значений длины $l_1, l_2, l_3, \dots$; данные заносим в таблицу результатов измерений (табл. 1). Описание экспериментальной установки и порядок выполнения работы аналогичны описанию, приведенному на с. 170–173.

Таблица 1

i	$l_i, \text{ см}$	$\Delta l, \text{ мм}$	k_i	$t_i, \text{ с}$	$\Delta t, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$g_i, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\bar{g}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1	186,5	5	10	28	1	2,8	9,38	9,76
2	167,0		10	26		2,6	9,74	
3	145,5		10	24		2,4	9,96	
4	124,5		10	22		2,2	9,98	
5	104,0		10	20		2,0	9,76	

Ускорение свободного падения g_i определяем для каждого измерения как

$$g_i = 4\pi^2 \frac{l_i}{T_i^2}.$$

Среднее арифметическое ускорение свободного падения вычисляем по формуле

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i; \quad \bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = \frac{1}{5} 48,82 = 9,764 \text{ м/с}^2.$$

Для определения случайной погрешности измерений составим табл. 2, в которую занесём результаты измерений, промежуточные вычисления и другие необходимые данные.

Таблица 2

i	$g, \text{ м/с}^2$	$\Delta g, \text{ м/с}^2$	$(\Delta g)^2, (\text{м/с}^2)^2$	P	$t_{p,n}, \text{ с}$	$S, \text{ м/с}^2$	$\bar{g}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1	9,38	0,384	0,1475	0,95	2,78	0,108	9,76
2	9,74	0,022	0,0005				
3	9,96	-0,196	0,0384				
4	9,98	-0,216	0,0467				
5	9,76	0,004	0,0000				
	$\Sigma = 48,82$	$\Sigma = -0,002$	$\Sigma = 0,2331$				

Оценку абсолютной погрешности Δg ускорения свободного падения g рассчитаем двумя способами:

- 1) по стандартной методике расчета погрешностей случайной величины:
 $\Delta g = t_{p,n} s$. Здесь $t_{p,n}$ – коэффициент Стьюдента для пяти измерений при доверительной вероятности $P=0,95$; находится из таблицы (см. с.16); s – среднее квадратичное отклонение среднего,

$$S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta g_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} 0,2331} \approx 0,108 \text{ м/с}^2.$$

Коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $P=0,95$ и числа измерений $n=5$ определяется из таблицы коэффициентов $t_{p,n} = 2,78$.

Тогда абсолютная случайная погрешность

$$\Delta_s g = t_{p,n} s = 2,78 \cdot 0,108 \approx 0,30 \text{ м/с}^2;$$

- 2) по методике расчёта погрешностей косвенных измерений – как

$$\Delta g = \bar{g} \sqrt{(2\varepsilon_T)^2 + \varepsilon_l^2},$$

где $\varepsilon_l, \varepsilon_T$ – относительные погрешности измерения длины и периода колебаний маятника. Вычислим относительные погрешности определения периода колебаний ε_T и длины маятника ε_l . Приборные погрешности определения длины маятника определяем по цене деления рулетки, которой измеряем $\Delta l = 5 \text{ мм}$, а погрешность измерения периода колебаний по цене деления секундомера $\Delta t = 1 \text{ с}$. Метод обработки результатов прямых многократных измерений для нахождения случайных погрешностей $\Delta t_{cl}, \Delta l_{cl}$ не применяем, так как при повторных измерениях начальные условия проведения опыта изменялись ($l_1, l_2, l_3 \dots$):

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta t}{t_{\min}} = \frac{1}{20} = 0,05; \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_{\min}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,04} = 0,048.$$

Вычисления показали, что погрешности ε_T и ε_l – одного порядка. Подставим полученные данные в формулу

$$\Delta g = \bar{g} \sqrt{(2\varepsilon_T)^2 + \varepsilon_l^2} = 9,764 \sqrt{(2 \cdot 0,05)^2 + 0,048^2} \approx 0,11 \text{ м/с}^2.$$

Сравнение полученных результатов показало, что случайная погрешность измерений даёт наибольший вклад.

Запишем окончательный результат определения ускорения свободного падения с учётом:

$$\text{абсолютной погрешности как } g = \bar{g} \pm \Delta g, \quad g = 9,76 \pm 0,30 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{относительной – как } \varepsilon = \frac{\Delta g}{\bar{g}} 100\%, \quad \varepsilon = \frac{0,30}{9,764} 100\% \approx 3\%.$$

На основании полученных результатов измерений построим график зависимости квадрата периода колебаний математического маятника от его длины.

*

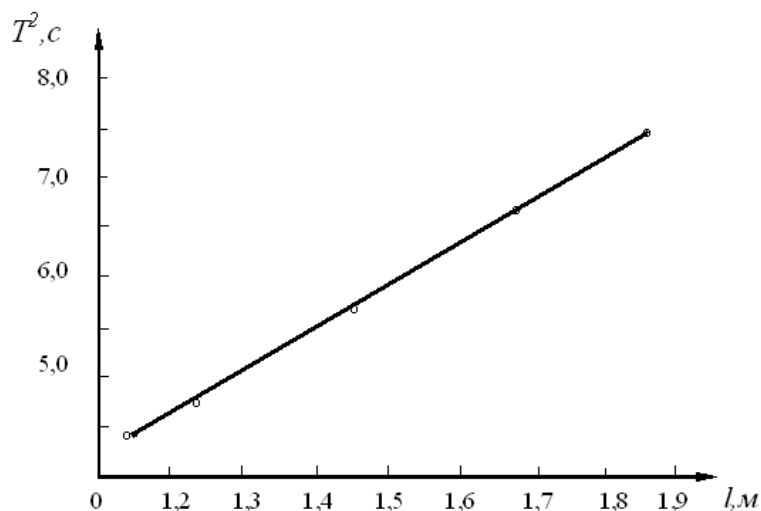


Рис.1. График зависимости квадрата периода колебаний математического маятника от его длины

Выводы

Экспериментальное определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника связано со случайными и систематическими погрешностями измерений.

Относительная погрешность измерений составляет более 3 %.

Абсолютная погрешность пяти измерений с надёжностью 95 % составляет около $0,30 \text{ м/с}^2$.

Оценка погрешностей показывает, что при использовании данного метода случайная погрешность превышает систематическую.

Истинное (табличное) значение величины $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ во всех случаях попадает в полученный доверительный интервал.

Ускорение силы тяжести, определенное из графика, $g \approx 9,4 \text{ м/с}^2$.

Для получения более точного результата необходимо увеличить число измерений и учесть все погрешности.

Пример расчёта погрешностей косвенных измерений.
Лабораторная работа “Определение динамического коэффициента
вязкости жидкостей методом Стокса”

Расчетная формула в этой лабораторной работе имеет вид:

$$\eta = \frac{d^2 g(\rho_0 - \rho)t}{18l}. \quad (14)$$

Измеряемыми величинами являются время падения шарика t и пройденное им расстояние l . Погрешность в измерении расстояния определяется погрешностью измерительного прибора - линейки: $\Delta l = \Delta l_{cu}$. Время падения шарика имеет статистический разброс, поэтому измерения обрабатываются по методу. Стьюдента, т.е. находится среднее значение $\bar{t}$ и случайная погрешность $\Delta t_{сл}$. Как правило, $\Delta t_{сл} \ll \Delta t_{сл}$, поэтому полная погрешность прямых измерений времени $\Delta t \approx \Delta t_{сл}$. После обработки результатов прямых измерений рассчитывается наилучшее значение динамического коэффициента вязкости; для этого в расчетную формулу подставляется среднее значение времени:

$$\bar{\eta} = \frac{d^2 g(\rho_0 - \rho)\bar{t}}{18l}.$$

При применении метода логарифмирования функции вначале рассчитывается относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \eta}{\bar{\eta}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial t} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial l} \Delta l\right)^2}.$$

Для нахождения подкоренного выражения прологарифмируем расчетную формулу (14):

$$\ln \eta = 2 \ln d + \ln g + \ln(\rho_0 - \rho) + \ln \bar{t} - \ln 18 - \ln l$$

и найдем частные производные:

$$\frac{\partial \ln \eta}{\partial t} = \frac{1}{\bar{t}}, \quad \frac{\partial \ln \eta}{\partial l} = -\frac{1}{l}.$$

Тогда формула для относительной погрешности примет компактный вид:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \eta}{\bar{\eta}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}.$$

После этого вычислим абсолютную погрешность $\Delta \eta = \bar{\eta} \cdot \varepsilon$.