

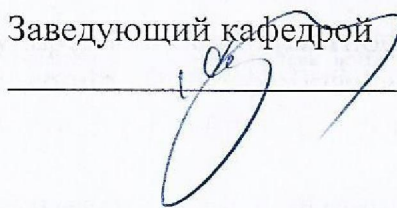
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»**

**Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная техника»**

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная техника»
«28» января 2019г., протокол №8

Заведующий кафедрой

 А.Н. Ивутин

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению курсовой работы
по дисциплине (модулю)
«Численные методы»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

с направленностью (профилем)
«Электронно-вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 090301-02-21

Тула 2021 год

Разработчик(и) методических указаний

Разработчик(и):

Волошко А.Г., доцент, к.т.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

1. Цель и задачи работы

Получить навык

- построения интерполяционного многочлена с заданными характеристиками;
- разработки программных средств для интерполяции функции, заданной таблично.

2. Теоретические положения

Рассмотрим задачу интерполирования функции f с помощью алгебраических многочленов. В этом случае аппроксимирующая функция φ имеет вид

$$\varphi(x) \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}. \quad (1)$$

Выбор конкретного значения n во многом определяется свойствами аппроксимируемой функции, требуемой точностью, а также узлами интерполирования. На выбор величины n существенное влияние оказывает и вычислительный процесс, приводящий в результате дополнительную погрешность.

В качестве критерия согласия принимается условие совпадения φ и f в узловых точках. Для однозначного определения $n+1$ коэффициентов a_k многочлена P_n необходимо потребовать совпадения f и P_n в $(n+1)$ -й узловой точке:

$$f(x_i) = P_n(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (2)$$

Многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (2), называется *интерполяционным многочленом*.

Задача интерполирования.

На сетке $\Lambda_n : \{a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq b\}$ в узлах x_i заданы значения $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) функции f . Требуется построить интерполяционный многочлен P_n , совпадающий с f в узлах x_i .

Существует несколько классических подходов к определению вида интерполяционного многочлена.

2.1 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Базовой формой интерполяционного многочлена является многочлен Лагранжа, который представляет собой линейную комбинацию

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x), \quad (3)$$

где
$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Учитывая, что

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

Можно записать многочлен Лагранжа в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}.$$

Пример записи многочлена Лагранжа второго порядка:

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов интерполяции (т.е. $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$, где h – шаг интерполяции) можно записать в виде

$$L_n = L_n(x_0 + ht) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{C_n^i}{t-i} f_i, \quad (4)$$

где

$$t = (x - x_0) / h ; \quad (5)$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} .$$

2.2. Интерполяционные многочлены Стирлинга и Бесселя

Рассмотрим задачу построения интерполяционного многочлена для функции f , заданной своими значениями f_i и x_i равномерной сетки с шагом h .

Пусть точка x^* расположена вблизи некоторого узла, который обозначим x_0 . Требуется построить интерполяционный многочлен четной степени. В качестве узлов интерполирования следует выбрать сетку, симметричную относительно узла x_0 :

$$\dots, x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$$

Для представления интерполяционных многочленов Стирлинга и Бесселя используют центральные конечные разности и средние арифметические соседних конечных разностей одного и того же порядка μf_i^k .

Центральные разности $\delta^k f_i = f_i^k$ для построения центральных интерполяционных формул определяются по формулам -

$$\text{Первого порядка: } \delta^1 f_{i+1/2} = f_{i+1/2}^1 = f_{i+1} - f_i$$

$$\text{или } \delta^1 f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2} ;$$

$$k\text{-ого порядка } \delta^k f_i = f_i^k = \delta^{k-1} f_{i+1/2} - \delta^{k-1} f_{i-1/2} ; \quad (6)$$

средние арифметические соседних конечных разностей одного и того же порядка:

$$\mu f_i^k = \frac{1}{2}(f_{i+1/2}^k + f_{i-1/2}^k), \quad \mu f_{i+1/2}^k = \frac{1}{2}(f_{i+1}^k + f_i^k) \quad (7)$$

Интерполяционный многочлен Стирлинга от переменной t обычно обозначается S_{2k} :

$$\begin{aligned} S_{2k}(t) = & f_0 + \mu f_0^1 t + \frac{1}{2!} f_0^2 t^2 + \dots + \frac{\mu f_0^{2k-1}}{(2k-1)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-1)^2) + \\ & + \frac{f_0^{2k}}{(2k)!} t^2(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-1)^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть теперь точка интерполирования x^* лежит между узлами x_0 и x_1 вблизи точки $(x_0 + x_1)/2$. Требуется построить интерполяционный многочлен нечетной степени. Тогда сетка, минимизирующая погрешность, симметрична относительно точки $(x_0 + x_1)/2$, т.е. относительно точки $t = 1/2$.

На сетке $\dots, x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, \dots$ можно получить *интерполяционный многочлен Бесселя*, обычно обозначаемый B_{2k+1} :

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(t) = & \mu f_{1/2}^1 + \frac{f_{1/2}^1}{1!} \left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{\mu f_{1/2}^2}{2!} t(t-1) + \frac{f_{1/2}^3}{3!} t(t-1) \left(t - \frac{1}{2}\right) + \dots + \\ & + \frac{\mu f_{1/2}^{2k}}{(2k)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-1)^2) (t-k) + \\ & + \frac{f_{1/2}^{2k+1}}{(2k+1)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-1)^2) (t-k) \left(t - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, рассмотрено два интерполяционных многочлена: многочлен Стирлинга, который используется при построении многочлена четной степени и строится по нечетному числу узлов, и многочлен Бесселя, который

используется при построении многочлена нечетной степени и строится по четному числу узлов.

Если же степень многочлена фиксирована не жестко, т.е. может быть как четной, так и нечетно, то целесообразно использовать многочлен Стирлинга в случае, когда

$$|t^*| = |x^* - x_0| / h \leq 0,25, \quad (10)$$

т.е. когда точка интерполирования x^* расположена ближе к узлу x_0 , чем к середине между узлами. Многочлен Бесселя следует использовать в случае, когда

$$0,25 \leq t^* \leq 0,75, \quad (11)$$

т.е. когда точка интерполирования x^* расположена ближе к середине между узлами x_0 и x_1 . Одно из условий (10) или (11) всегда может быть обеспечено выбором соответствующего узла в качестве x_0 .

2.3 Интерполяционные многочлены Ньютона для сетки с постоянным шагом

Если точка интерполирования x^* находится в начале или в конце таблицы, то не всегда возможно выбрать достаточное количество узлов слева и справа от x^* для построения необходимых конечных разностей. В этом случае используются специальные формы интерполяционного многочлена.

Пусть точка x^* расположена вблизи первого узла сетки $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$. рассмотрим переменную t , определяемую соотношением (5), и построим интерполяционный многочлен, используя восходящие конечные разности:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i;$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i. \quad (12)$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона обычно обозначается N_k^I .

$$N_k^I(t) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1)\dots(t-k+1). \quad (13)$$

Пусть точка x^* расположена вблизи последнего узла сетки $\dots, x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0$. Для этой сетки, снова используя переменную t , определяемую соотношением (5), построим интерполяционный многочлен, используя нисходящие конечные разности:

$$\begin{aligned} \nabla f_i &= f_i - f_{i-1}; \\ \nabla^k f_i &= \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Второй интерполяционный многочлен Ньютона обычно обозначается N_k^{II} .

$$N_k^{II}(t) = f_0 + \frac{\nabla f_0}{1!} t + \frac{\nabla^2 f_0}{2!} t(t+1) + \dots + \frac{\nabla^k f_0}{k!} t(t+1)\dots(t+k-1). \quad (15)$$

Формулы (13) и (15) часто называют соответственно *интерполяционными формулами Ньютона для интерполирования вперед и назад*.

2.4 Интерполяционный многочлен Ньютона для произвольной сетки узлов

Для представления интерполяционного многочлена Ньютона для произвольной сетки узлов используют разделенные разности:

$$N_n(x) = f_0 + (x - x_0)f(x_0; x_1) + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f(x_0; \dots; x_n). \quad (16)$$

Разделенные разности нулевого порядка $f(x_i)$ совпадают со значениями функции в точках x_i . Разделенными разностями первого порядка называются отношения

$$f(x_0; x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}; f(x_1; x_2) = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}; \dots; f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}, \dots$$

Разделенная разность k -го порядка определяется через разделенную разность $(k-1)$ -го порядка по формуле

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}. \quad (17)$$

Отметим, что в формуле (16) интерполяционного многочлена на узлы накладывается единственное условие - их несовпадение. Поэтому нумерацию узлов можно произвести в произвольном порядке.

3. Объекты исследования, оборудование, материалы и наглядные пособия

Объектом исследования данной работы является метод численного решения дифференциальных уравнений.

Для выполнения работы необходимы ПК и соответствующее программное обеспечение:

- MSWINDOWS;
- VisualStudio (любая другая оболочка языка высокого уровня);
- MSOfficeили Мой Офис (для оформления отчета).

4. Задание на работу (рабочее задание)

1) Построить интерполяционные многочлены n -ой степени для функции, заданной таблично на интервале $[a, b]$ используя соответствующие варианты многочлены;

2) рассчитать значение функции по интерполяционной зависимости для произвольного аргумента $x^* \neq x_i$;

3) построить график исходной функции и ее интерполяции на интервале $[a, b]$.

4) выполнить сравнение полученных многочленов для интерполяции заданной функции.

Варианты заданий:

№	Задание	№	Задание
1.	$f(x) = -\sin x + 0,25x$ Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов	2.	$f(x) = \sin(0,58x + 0,1) - x^2$ Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона, Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона
3.	$f(x) = \sqrt{x} - \cos(0,387x)$ Интерполяционный многочлен Стирлинга, Интерполяционный многочлен Бесселя	4.	$f(x) = \cos(0,4x + 0,4) + x^2$ Интерполяционный многочлен Ньютона с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов
5.	$f(x) = \lg x - \frac{7}{2x + 6}$ Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона, Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов	6.	$f(x) = \sin(0,5x + 0,2) + x^2$ Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона, Интерполяционный многочлен Стирлинга
7.	$f(x) = 3x - \cos x - 1$ Интерполяционный многочлен Ньютона с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Бесселя	8.	$f(x) = x^2 - 4\sin x$ Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Ньютона с произвольной сеткой узлов

№	Задание	№	Задание
9.	$f(x) = \sin(0,5x + 0,1) - x^2$ Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов, Интерполяционный многочлен Стирлинга	10.	$f(x) = \sqrt{x} + 4\sin x$ Интерполяционный многочлен Бесселя, Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов
11.	$f(x) = \cos(1,05x) - x^2$ Интерполяционный многочлен Бесселя, Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона	12.	$f(x) = \sin(0,4x + 0,3) - x^2$ Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона, Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона
13.	$f(x) = x \lg x - 1,2$ Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона, Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов	14.	$f(x) = 1.8x^2 - \sin(10x)$ Интерполяционный многочлен Ньютона с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов
15.	$f(x) = \cos(x) - \frac{x}{4}$ Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов	16.	$f(x) = \sin(0,3x + 0,4) - x^2$ Интерполяционный многочлен Бесселя, Интерполяционный многочлен Стирлинга
17.	$f(x) = x^2 - 20\sin x$ Интерполяционный многочлен Бесселя, Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона	18.	$f(x) = \cos(x) - \frac{x}{3}$ Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона, Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов
19.	$f(x) = \sin(0,47x + 0,2) + x^2$ Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов, Интерполяционный многочлен Стирлинга	20.	$f(x) = x^2 + 4\sin x$ Интерполяционный многочлен Бесселя, Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона

№	Задание	№	Задание
21.	$f(x) = \cos(x) - \frac{x}{2}$ Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона, Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона	22.	$f(x) = 2x + \lg x - 7$ Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона, Интерполяционный многочлен Стирлинга
23.	$f(x) = \sin(0,44x + 0,3) - x^2$ Интерполяционный многочлен Стирлинга, Интерполяционный многочлен Бесселя	24.	$f(x) = 2x - \cos x - 1$ Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона, Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов
25.	$f(x) = \cos(x) + \frac{x}{5}$ Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона, Нисходящий Интерполяционный многочлен Ньютона	26.	$f(x) = x^2 + 3\sin x$ Интерполяционный многочлен Ньютона с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов
27.	$f(x) = \sin(0,36x + 0,4) + x^2$ Интерполяционный многочлен Стирлинга, Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона	28.	$f(x) = x + \lg x$ Интерполяционный многочлен Ньютона с произвольной сеткой узлов, Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов
29.	$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{5}$ Интерполяционный многочлен Лагранжа с постоянным шагом сетки узлов, Интерполяционный многочлен Лагранжа с произвольной сеткой узлов	30.	$f(x) = 2\lg x - \frac{x}{2} + 1$ Интерполяционный многочлен Бесселя, Восходящий интерполяционный многочлен Ньютона

5. Ход работы (порядок выполнения работы)

Для выполнения практической работы необходимо:

- 1) Ознакомиться с теоретической справкой;

- 2) Выполнить анализ поставленной задачи, выявить входную и выходную информацию и определить ее формат;
- 3) Разработать алгоритм решения задачи;
- 4) Разработать программное обеспечение;
- 5) Представить ПО преподавателю и получить допуск к защите работы;
- 6) Оформить пояснительную записку к курсовой работе;
- 7) Защитить работу преподавателю, ответив на вопросы по ее содержанию и выполнению.

6. Содержание отчета

В отчете должны присутствовать следующие пункты:

- 1) задание;
- 2) математическое описание интерполяционных многочленов;
- 3) описание входных – выходных данных;
- 4) алгоритмы построения интерполяционных многочленов;
- 5) описание основных функций программы;
- 6) распечатка результатов работы программы;
- 7) проверка корректности работы программы (для заданного примера вручную расписать вывод интерполяционных многочленов) ;
- 8) сравнительный анализ интерполяционных многочленов по критериям точности, вычислительной сложности.

7. Список использованных источников

1. Пирумов, У.Г. Численные методы / У.Г. Перумов. – М.: Дрофа, 2007. – 222 с.
2. Математика : практикум по численным методам / Белорус. нац. техн. ун-т, Каф. "Высшая математика №1"; сост. :А.В.Грекова [и др.] .— Минск, 2006 .— 127с. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 985-479-453-9