

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Финансы и менеджмент»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к курсовой работе по дисциплине

«ЭКОНОМЕТРИКА (продвинутый уровень)»

**«ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ»**

Направления подготовки: 38.04.04 «ГМУ »

Профиль подготовки: «Региональное управление»

Квалификация (степень) выпускника: 69– магистр

Форма обучения: заочная

Тула 2022 г.

Методические указания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Эконометрика (продвинутый уровень)» составлены доцентом Н.Е. Гучек и обсуждены на заседании кафедры «Финансы и менеджмент» института права и управления,

протокол № _1_ от «_30» августа 2022 г.

Зав. кафедрой _____ А.Л.Сабина

Финансово-экономическое образование, абстрагированное от дисциплины «Эконометрика (продвинутый курс)», не может отвечать современным требованиям, предъявляемым к магистрам экономики, и быть серьезно ориентированным на рыночную экономику. Данная программа предусматривает дальнейшее усложнение знаний по курсу эконометрики. Она позволяет построить и выполнить более полно анализ эконометрических моделей различных финансово-экономических объектов и процессов с привлечением современного вычислительного эконометрического пакета

Предлагаемая учебная программа исходит из принципов научности, доступности материала магистрантам первого года обучения. Она нацелена на обеспечение прочного усвоения теории эконометрики и в достаточной мере ориентирована на приложение этой теории к практике моделирования различных финансово-экономических процессов.

Формирование навыков разработки эконометрических моделей исследуемых процессов, явлений и объектов, относящихся к сфере профессиональной деятельности, оценки и интерпретации полученных результатов. Эконометрика выступает мощным инструментом экономической теории, и с ее помощью отвергаются теоретические концепции и принимаются новые, более полезные гипотезы.

Прикладное значение эконометрики состоит в том, что она является связующим звеном между экономической теорией и практикой. Эконометрика дает методы экономических измерений, методы оценки параметров моделей микро и макроэкономики. Важно, что эконометрические методы одновременно позволяют оценить ошибки измерений экономических величин и параметров модели. Экономист, не владеющий этими методами, не может эффективно работать аналитиком. Менеджер, не понимающий значение этих методов, обречен на принятие ошибочных решений.

Задача дисциплины – выработать у обучающихся навыки исследования и решения определенного круга задач, привить способность самостоятельному аналитическому мышлению, умение работать со специальной и справочной литературой, таблицами. Работа состоит из двух частей.

Часть 1 КР

Сложные экономические процессы описывают с помощью системы взаимосвязанных (одновременных) уравнений. Различают несколько видов систем уравнений:

- *система независимых уравнений* - когда каждая зависимая переменная у рассматривается как функция одного и того же набора факторов x :

[illegible]

Для решения этой системы и нахождения ее параметров используется метод наименьших квадратов;

- *система рекурсивных уравнений* - когда зависимая переменная y одного уравнения выступает в виде фактора X в другом уравнении:

$$\begin{cases} y_1 = \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1m}\mathbf{x}_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = \mathbf{b}_{21}y_1 + \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2m}\mathbf{x}_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = \mathbf{b}_{31}y_1 + \mathbf{b}_{32}y_2 + \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{3m}\mathbf{x}_m + \varepsilon_3, \\ \vdots \\ y_n = \mathbf{b}_{n1}y_1 + \mathbf{b}_{n2}y_2 + \dots + \mathbf{b}_{nn-1}y_{n-1} + \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{nm}\mathbf{x}_m + \varepsilon_n \end{cases}$$

Для решения этой системы и нахождения ее параметров используется метод наименьших квадратов;

- *система взаимосвязанных (совместных) уравнений* - когда одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую, часть, а в других - в правую:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \dots + b_{1n}y_n + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \dots \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n3}y_3 + \dots + b_{nn}y_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n \end{cases}$$

Такая система уравнений называется структурной формой модели.

Эндогенные переменные – взаимозависимые переменные, которые определяются внутри модели (системы) у.

Экзогенные переменные - независимые переменные, которые определяются вне системы x .

Предопределенные переменные - экзогенные и лаговые (за предыдущие моменты времени) эндогенные переменные системы.

Коэффициенты a и b при переменных - структурные коэффициенты модели.

Система линейных функций эндогенных переменных от всех предопределенных переменных системы - приведенная форма модели:

где δ_{ij} - коэффициенты приведенной формы модели.

$D + 1 = N$ - уравнение идентифицируемое;
 $D + 1 < N$ – уравнение неидентифицируемое;
 $D + 1 > N$ - уравнение сверхидентифицируемое,

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} y_1 = \mathbf{b}_{12}y_2 + \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2, \\ y_2 = \mathbf{b}_{21}y_1 + \mathbf{b}_{23}y_3 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2, \\ y_3 = \mathbf{b}_{32}y_2 + \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{33}\mathbf{x}_3. \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} y_1 = \mathbf{b}_{12}y_2 + \mathbf{b}_{13}y_3 + \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3, \\ y_2 = \mathbf{b}_{21}y_1 + \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3 + \mathbf{a}_{24}\mathbf{x}_4, \\ y_3 = \mathbf{b}_{31}y_1 + \mathbf{b}_{32}y_2 + \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2. \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} y_1 = \mathbf{b}_{12}y_2 + \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{14}\mathbf{x}_4, \\ y_2 = \mathbf{b}_{23}y_3 + \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3, \\ y_3 = \mathbf{b}_{31}y_1 + \mathbf{b}_{32}y_2 + \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{34}\mathbf{x}_4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$4) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{13}x_3, \\ y_2 = b_{23}y_3 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + a_{24}x_4, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{13}y_3 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{12}x_2 + a_{14}x_4, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ y_2 = b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + a_{24}x_4, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases}$$

Определить структурные коэффициенты структурных моделей. Для расчета использовать следующие статистические данные:

i	y _{1i}	y _{2i}	y _{3i}	x _{1i}	x _{2i}	x _{3i}	x _{4i}
1	2	3	5	1	2	5	3
2	3	6	9	2	7	2	4
3	5	5	6	4	3	3	5
4	4	7	4	6	2	1	2
5	2	8	7	5	1	4	6
Ср.зн.							

Рассмотрим пример решения задания 1.

1. Исследовать на идентифицируемость структурную форму модели:

$$\begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 \end{cases}$$

1.1. Необходимое условие идентификации

$$\begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 \end{cases}$$

Уравнение 1:

H=2
D=1

D+1=H уравнение идентифицируемое

Уравнение 2:

H=2
D=1

D+1=H уравнение идентифицируемое

Уравнение 3:

H=3
D=2

D+1=H поэтому уравнение идентифицируемое

Необходимое условие выполняется. Следовательно, система уравнений может быть идентифицируемой. Проверяем достаточное условие.

2. Достаточное условие идентификации

Уравнение 1: нет y_2, x_3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_{23} \\ b_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = -a_{23} \cdot b_{32} \neq 0$$

Уравнение 2: нет y_3, x_1

$$A = \begin{pmatrix} b_{13} & a_{11} \\ -1 & a_{31} \end{pmatrix} \quad \det A = b_{13} \cdot a_{31} \neq 0$$

Уравнение 3: нет x_2, x_3

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{12} \cdot a_{23} \neq 0$$

Достаточное условие выполняется. Следовательно, система уравнений будет точно идентифицируемой.

3. Для решения идентифицируемых систем уравнений применяем косвенный МНК.

Для расчета используем статистические данные:

y_{1i}	y_{2i}	y_{3i}	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}
2	3	5	1	2	5
3	6	9	2	7	2
5	5	6	4	3	3
4	7	4	6	2	1
2	8	7	5	1	4
Средние значения					
3.2	5.8	6.2	3.6	3	3

Приведенная форма для 1-ого уравнения системы:

$$\begin{cases} \sum y_1 x_1 = \sigma_{11} \sum x_1^2 + \sigma_{12} \sum x_1 x_2 + \sigma_{13} \sum x_1 x_3 \\ \sum y_1 x_2 = \sigma_{21} \sum x_1 x_2 + \sigma_{22} \sum x_2^2 + \sigma_{23} \sum x_2 x_3 \\ \sum y_1 x_3 = \sigma_{31} \sum x_1 x_3 + \sigma_{32} \sum x_2 x_3 + \sigma_{33} \sum x_3^2 \end{cases}$$

№ п/п	y ₂	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ ²	x ₂ ²	x ₃ ²	x ₁ x ₂	x ₂ x ₃	x ₁ x ₃	y ₂ x ₁	y ₂ x ₂	y ₂ x ₃
1	-2.8	-2.6	-1	2	6.76	1	4	2.6	-2	-5.2	7.28	2.8	-5.6
2	0.2	-1.6	4	-1	2.56	16	1	-6.4	-4	1.6	-0.32	0.8	-0.2
3	-0.8	0.4	0	0	0.16	0	0	0	0	0	-0.32	0	0
4	1.2	2.4	-1	-2	5.76	1	4	-2.4	2	-4.8	2.88	-1.2	-2.4
5	2.2	1.4	-2	1	1.96	4	1	-2.8	-2	1.4	3.08	-4.4	2.2
Σ	0	0	0	0	17.2	22	10	-9	-6	-7	12.6	-2	-6

Мы составим таблицу МНК:

$$\begin{cases} 4.4 = \sigma_{11} * 17.2 - 9\sigma_{12} - 7\sigma_{13} \\ 2 = -9\sigma_{21} + 22\sigma_{22} - 6\sigma_{23} \\ -5.4 = -7\sigma_{31} - 6\sigma_{32} + 10\sigma_{33} \end{cases}$$

тогда получается первое приведенное уравнение:

$$y_1 = -0.0952x_1 - 0.1357x_2 - 0.6881x_3$$

Приведенная форма для 2-ого уравнения:

$$\begin{cases} \sum y_2 x_1 = \sigma_{11} \sum x_1^2 + \sigma_{12} \sum x_1 x_2 + \sigma_{13} \sum x_1 x_3 \\ \sum y_2 x_2 = \sigma_{21} \sum x_1 x_2 + \sigma_{22} \sum x_2^2 + \sigma_{23} \sum x_2 x_3 \\ \sum y_2 x_3 = \sigma_{31} \sum x_1 x_3 + \sigma_{32} \sum x_2 x_3 + \sigma_{33} \sum x_3^2 \end{cases}$$

№ п/п	y ₁	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ ²	x ₂ ²	x ₃ ²	x ₁ x ₂	x ₂ x ₃	x ₁ x ₃	y ₁ x ₁	y ₁ x ₂	y ₁ x ₃
1	-1.2	-2.6	-1	2	6.76	1	4	2.6	-2	-5.2	3.12	1.2	-2.4
2	0.2	-1.6	4	-1	2.56	16	1	-6.4	-4	1.6	-0.32	0.8	-0.2
3	1.8	0.4	0	0	0.16	0	0	0	0	0	0.72	0	0
4	0.8	2.4	-1	-2	5.76	1	4	-2.4	2	-4.8	1.92	-0.8	-1.6
5	-1.2	1.4	-2	1	1.96	4	1	-2.8	-2	1.4	-1.68	2.4	-1.2
Σ	0.4	0	0	0	17.2	22	10	-9	-6	-7	3.76	3.6	-5.4

$$\begin{cases} 12.6 = \sigma_{11} * 17.2 - 9\sigma_{12} - 7\sigma_{13} \\ -2 = -9\sigma_{21} + 22\sigma_{22} - 6\sigma_{23} \\ -6 = -7\sigma_{31} - 6\sigma_{32} + 10\sigma_{33} \end{cases}$$

$$y_2 = 1.548x_1 + 0.8065x_2 + 0.9677x_3$$

Приведенная форма для 3-его уравнения системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum y_3 x_1 = \sigma_{11} \sum x_1^2 + \sigma_{12} \sum x_1 x_2 + \sigma_{13} \sum x_1 x_3 \\ \sum y_3 x_2 = \sigma_{21} \sum x_1 x_2 + \sigma_{22} \sum x_2^2 + \sigma_{23} \sum x_2 x_3 \\ \sum y_3 x_3 = \sigma_{31} \sum x_1 x_3 + \sigma_{32} \sum x_2 x_3 + \sigma_{33} \sum x_3^2 \end{cases}$$

№ п/п	y ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ ²	x ₂ ²	x ₃ ²	x ₁ x ₂	x ₂ x ₃	x ₁ x ₃	y ₃ x ₁	y ₃ x ₂	y ₃ x ₃
1	-1.2	-2.6	-1	2	6.76	1	4	2.6	-2	-5.2	3.12	1.2	-2.4
2	2.8	-1.6	4	-1	2.56	16	1	-6.4	-4	1.6	-4.48	11.2	-2.8
3	-0.2	0.4	0	0	0.16	0	0	0	0	0	-0.08	0	0
4	-2.2	2.4	-1	-2	5.76	1	4	-2.4	2	-4.8	-5.28	2.2	4.4
5	0.8	1.4	-2	1	1.96	4	1	-2.8	-2	1.4	1.12	-1.6	0.8
Σ	0	0	0	0	17.2	22	10	-9	-6	-7	-5.6	13	1.11E-15

$$\begin{cases} -5.6 = \sigma_{11} * 17.2 - 9\sigma_{12} - 7\sigma_{13} \\ 13 = -9\sigma_{21} + 22\sigma_{22} - 6\sigma_{23} \\ 1.11 = -7\sigma_{31} - 6\sigma_{32} + 10\sigma_{33} \end{cases}$$

$$y_3 = 1.76x_1 + 2.005x_2 + 2.5459x_3$$

Объединив все уравнения, мы получим приведенную форму для системы:

$$\begin{cases} y_1 = -0.0952x_1 - 0.1357x_2 - 0.6881x_3 \\ y_2 = 1.548x_1 + 0.8065x_2 + 0.9677x_3 \\ y_3 = 1.76x_1 + 2.005x_2 + 2.5459x_3 \end{cases}$$

*Из уравнения (3) выразим :

$$x_3 = \frac{y_3 - 1.76x_1 - 2.005x_2}{2.5459} = 0.3928y_3 - 0.6913x_1 - 0.7875x_2$$

Заменим в уравнении (1):

$$y_1 = -0.0952x_1 - 0.1357x_2 - 0.6881(0.3928y_3 - 0.6913x_1 - 0.7875x_2)$$

$$y_1 = 0.38048x_1 + 0.40618x_2 - 0.2703y_3$$

* Из уравнения (1):

$$x_1 = \frac{y_1 + 0.1357x_2 + 0.6881x_3}{-0.0952} = -10.504y_1 - 1.4254x_2 - 7.2279x_3$$

Заменим в уравнении (2):

$$y_2 = 1.548(-10.504y_1 - 1.4254x_2 - 7.2279x_3) = -16.2602y_1 - 2.2065x_2 - 11.189x_3$$

$$y_2 = -16.2602y_1 - 2.2065x_2 - 11.189x_3$$

*(1)*0,8065/0,1357+(2):

$$5.9433y_1 + y_2 = 0.9822x_1 - 3.1218x_3 \quad (4)$$

$$x_3 = -1.9038y_1 - 0.3203y_2 + 0.3146x_1$$

*(1)*0,9677/0,688+(2):

$$1.406y_1 + y_2 = 1.414x_1 + 0.6156x_2$$

$$x_2 = 2.284y_1 + 1.6244y_2 - 2.2969x_1$$

Заменим в уравнении (3):

$$y_3 = 1.76x_1 + 2.005(2.284y_1 + 1.6244y_2 - 2.2969x_1) + 2.5459(-1.9038y_1 - 0.3203y_2 + 0.3146x_1)$$

$$y_3 = -2.044x_1 - 0.2675y_1 + 2.4415y_2$$

Итак, получается структурная форма модели:

$$\begin{cases} y_1 = 0.38048x_1 + 0.40618x_2 - 0.2703y_3 \\ y_2 = -16.2602y_1 - 2.2065x_2 - 11.189x_3 \\ y_3 = -2.044x_1 - 0.2675y_1 + 2.4415y_2 \end{cases}$$

Для системы с 4 переменными структурная форма модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4 \end{cases}$$

Приведенная форма первого уравнения системы:

$$\begin{cases} \sum yx_1 = \delta_{11} \cdot \sum x^2_1 + \delta_{12} \cdot \sum x_1x_2 + \delta_{13} \cdot \sum x_1x_3 + \delta_{14} \cdot \sum x_1x_4 \\ \sum yx_2 = \delta_{21} \cdot \sum x_1x_2 + \delta_{22} \cdot \sum x^2_2 + \delta_{23} \cdot \sum x_2x_3 + \delta_{24} \cdot \sum x_2x_4 \\ \sum yx_3 = \delta_{31} \cdot \sum x_1x_3 + \delta_{32} \cdot \sum x_2x_3 + \delta_{33} \cdot \sum x^2_3 + \delta_{34} \cdot \sum x_3x_4 \\ \sum yx_4 = \delta_{41} \cdot \sum x_1x_4 + \delta_{42} \cdot \sum x_2x_4 + \delta_{43} \cdot \sum x_3x_4 + \delta_{44} \cdot \sum x^2_4 \end{cases}$$

Остальные уравнения решаете аналогично.

2 часть КР.

Задание к вариантам № 1-4 КР:

Требуется проверить гипотезы о факторах, определяющих уровень занятости населения в экономике региона, размеры инвестиционных

вложений в основной капитал, стоимость валового регионального продукта и о взаимодействии этих трех процессов.

1. Постройте систему рекурсивных уравнений, выполните расчет параметров каждого уравнения;

2. Проанализируйте результаты.

3. Выполните прогноз уровня занятости, размера инвестиций и стоимости валового регионального продукта (ВРП) при условии, что экзогенные переменные увеличатся на заданный процент прироста от своих средних значений.

Для изучения проблемы предлагается рассмотреть следующие показатели и их значения по территориям Центрального федерального округа за 2001 г: (источник: Приложения РЕКУРСИСТ).

y_1 – стоимость валового регионального продукта (валовая добавленная стоимость) млрд руб.;

y_2 – инвестиции в основной капитал за год, млрд руб.;

y_3 – среднегодовая численность занятых в экономике региона, млн чел.;

x_1 – численность мигрантов за год, тыс. чел.;

x_2 – среднегодовая стоимость основных фондов в экономике, млрд руб.;

x_3 – доля социальных выплат в денежных доходах населения, %;

x_4 – доля инвестиций в активную часть основных фондов экономики, %;

x_5 – оборот розничной торговли за год, млрд руб.

Вариант 1. Необходимо проверить следующие предположения:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_2, x_4, x_5) \\ y_2 = f(y_1) \\ y_3 = f(y_2, x_3) \end{cases}$$

Выполните прогноз стоимости ВРП, размера инвестиций и уровня занятости при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 4,8% от своих средних значений.

Вариант 2. Необходимо проверить следующие предположения:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_2, x_4, x_5) \\ y_3 = f(y_1, x_3) \\ y_2 = f(y_3) \end{cases}$$

Выполните прогноз стоимости ВРП, размера инвестиций и уровня занятости при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 3,8% от своих средних значений.

Вариант 3. Необходимо проверить следующие предположения:

$$\begin{cases} y_2 = f(x_2) \\ y_3 = f(y_2, x_3) \\ y_1 = f(y_3, x_1, x_5) \end{cases}$$

Выполните прогноз стоимости ВРП, размера инвестиций и уровня занятости при условии, что прирост экзогенных переменных составит 5,7% от их средних значений.

Вариант 4. Необходимо проверить следующие предположения:

$$\begin{cases} y_2 = f(x_2) \\ y_1 = f(y_2, x_4, x_5) \\ y_3 = f(y_1, x_3) \end{cases}$$

Выполните прогноз стоимости ВРП, размера инвестиций и уровня занятости при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 3,9% от своих средних значений.

Задание к вариантам № 5-8 КР:

Требуется проверить гипотезы о факторах, определяющих уровень занятости населения в экономике региона, размеры инвестиционных вложений в основной капитал, стоимость валового регионального продукта и о взаимодействии этих трех процессов.

1. Постройте систему рекурсивных уравнений, выполните расчет параметров каждого уравнения;

2. Проанализируйте результаты.

3. Выполните прогноз уровня занятости, размера инвестиций и стоимости ВРП при условии, что экзогенные переменные увеличатся на заданный процент прироста от своих средних значений.

Для изучения проблемы предлагается рассмотреть следующие показатели и их значения по территориям Центрального федерального округа за 2001 г.: (источник: Приложения **РЕКУРСИСТ**).

y_1 – среднегодовая численность занятых в экономике региона, млн чел.;

y_2 – инвестиции в основной капитал за год, млрд руб.;

y_3 – стоимость валового регионального продукта (валовая добавленная стоимость) млрд руб.;

x_1 – фонд оплаты труда занятого населения в экономике региона, млрд руб.;
 x_2 – численность мигрантов за год, тыс. чел.;
 x_3 – доля социальных выплат в денежных доходах населения, %;
 x_4 – финансовый результат деятельности (прибыль), млрд руб.;
 x_5 – среднегодовая стоимость основных фондов в экономике, млрд руб.;
 x_6 – оборот розничной торговли за год, млрд руб.;

Вариант 5. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha = 0,15$ следующие предположения:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_3) \\ y_2 = f(y_1, x_4, x_5) \\ y_3 = f(y_2, x_2, x_6) \end{cases}$$

Выполните прогноз численности занятых, размера инвестиций и стоимости ВРП при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 4,1% от своих средних значений.

Вариант 6. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha = 0,20$ следующие предположения:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_3) \\ y_3 = f(y_1, x_4, x_5) \\ y_2 = f(y_3) \end{cases}$$

Выполните прогноз численности занятых, стоимости ВРП и размера инвестиций при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 7,5% от своих средних значений.

Вариант 7. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha = 0,10$ следующие предположения:

$$\begin{cases} y_2 = f(x_4, x_5) \\ y_3 = f(y_2) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций и стоимости ВРП и при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 6,3% от своих средних значений.

Вариант 8. Необходимо проверить следующие предположения:

$$\begin{cases} y_3 = f(x_1, x_2) \\ y_1 = f(y_3, x_3) \end{cases}$$

Выполните прогноз стоимости ВРП и размера инвестиций при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 4,7% от своих средних значений.

Задание к вариантам № 9-15 КР:

Требуется проверить гипотезы о факторах, определяющих размеры инвестиционных вложений в основной капитал, стоимость валового регионального продукта, величину общей суммы доходов населения региона и о взаимодействии этих трёх процессов. Для изучения проблемы предлагается рассмотреть следующие показатели и их значения по территориям Центрального федерального округа за 2001 г: (источник: файл РЕКУРСИСТ).

y_1 – инвестиции в основной капитал за год, млрд руб.;

y_2 – стоимость валового регионального продукта (валовая добавленная стоимость) млрд руб.;

y_3 – сумма доходов населения региона за год, млрд руб.,

x_1 – финансовый результат деятельности (прибыль), млрд руб.;

x_2 – среднегодовая стоимость основных фондов в экономике, млрд руб.;

x_2 – доля инвестиций в активную часть основных фондов экономики, %;

x_4 – сумма остатков вкладов на счетах в Банке России, млрд руб.;

Вариант 9. Необходимо проверить следующие предположения:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(y_1, x_2) \\ y_3 = f(y_2) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 2,9% от своих средних значений.

Вариант 10. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha = 0,20$ следующие рабочие гипотезы:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_3 = f(y_1, x_3, x_4) \\ y_2 = f(y_3, x_2) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 5,9% от своих средних значений.

Вариант 11. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha = 0,10$ следующие рабочие гипотезы:

$$\begin{cases} y_2 = f(x_1, x_2) \\ y_1 = f(y_2) \\ y_3 = f(y_1, x_3, x_4) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 6,5% от своих средних значений.

Вариант 12. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha = 0,10$ следующие рабочие гипотезы:

$$\begin{cases} y_2 = f(x_1, x_2) \\ y_3 = f(y_2, x_3, x_4) \\ y_2 = f(y_3) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 7,1% от своих средних значений.

Вариант 13. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha = 0,10$ следующие рабочие гипотезы:

$$\begin{cases} y_3 = f(x_2, x_5) \\ y_1 = f(y_3, x_3) \\ y_2 = f(y_1, x_1, x_4) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 5,2% от своих средних значений.

Вариант 14. Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha=0,20$ следующие рабочие гипотезы:

$$\begin{cases} y_3 = f(x_2, x_5) \\ y_2 = f(y_3, x_1) \\ y_1 = f(y_2, x_3) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 4,9% от своих средних значений.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ НА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Задача 1.

1. Оценить следующую структурную модель на идентификацию:

$$\begin{cases} y_1 = b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{22}x_2, \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

2. Исходя из приведенной формы модели уравнений

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3, \\ y_2 = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3, \\ y_3 = -5x_1 + 8x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

найти структурные коэффициенты модели.

Решение: 1. Модель имеет три эндогенные (y_1, y_2, y_3) и три экзогенные (x_1, x_2, x_3) переменные. Проверим каждое уравнение системы на выполнение необходимого (Н) и достаточного (Д) условий идентификации.

Первое уравнение. Н: эндогенных переменных - 2 (y_1, y_3), отсутствующих экзогенных - 1 (x_2). Выполняется необходимое равенство: $2=1+1$, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: в первом уравнении отсутствуют y_2 и x_2 . Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

Уравнение	Отсутствующие переменные	
	y_2	x_2
Второе	-1	a_{22}
Третье	b_{32}	0

$$\text{Det}A = -1 \cdot 0 - b_{32}a_{22} \neq 0$$

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2; следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и первое уравнение точно идентифицируемо.

Второе уравнение. Н: эндогенных переменных - 3 (y_1, y_2, y_3), отсутствующих экзогенных - 2 (x_1, x_3).

Выполняется необходимое равенство: $3=2+1$, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: во втором уравнении отсутствуют x_1 и x_3 . Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

Уравнение	Отсутствующие переменные	
	x_1	x_3
Первое	a_{11}	a_{13}
Третье	a_{31}	a_{33}

$$\text{Det}A = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \neq 0$$

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2, следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и второе уравнение точно идентифицируемо.

Третье уравнение. **Н:** эндогенных переменных - 2 (y_2, y_3), отсутствующих экзогенных - 1 (x_2).

Выполняется необходимое равенство: $2=1+1$, следовательно, уравнение точно идентифицируемое.

Д: в третьем уравнении отсутствуют y_1 и x_2 . Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

Уравнение	Отсутствующие переменные	
	y_1	x_2
Первое	-1	0
Второе	b_{21}	a_{22}

$$\text{Det}A = -1 \cdot a_{32} - b_{21} \cdot 0 \neq 0$$

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2, следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и третье уравнение точно идентифицируемо.

Следовательно, исследуемая система точно идентифицируема и может быть решена косвенным методом наименьших квадратов.

2. Вычислим структурные коэффициенты модели:

а) из третьего уравнения приведенной формы выразим x_2 (так как его нет в первом уравнении структурной формы):

$$x_2 = \frac{y_3 + 5x_1 - 5x_3}{8}.$$

Данное выражение содержит переменные y_3, x_1 и x_3 , которые нужны для первого уравнения структурной формы модели (СФМ). Подставим полученное выражение x_2 в первое уравнение приведенной формы модели (ПФМ):

$$y_1 = 2x_1 + 4 \frac{y_3 + 5x_1 - 5x_3}{8} + 10x_3; \quad y_1 = \frac{1}{2}y_3 + 4\frac{1}{2}x_1 + 7\frac{1}{2}x_3 - \text{первое уравнение}$$

СФМ

б) во втором уравнении СФМ нет переменных x_1 и x_3 . Структурные параметры второго уравнения СФМ можно будет определить в два этапа:

Первый этап выразим x_1 в данном случае из первого или третьего уравнения ПФМ. Например, из первого уравнения:

$$x_1 = \frac{y_1 - 4x_2 - 10x_3}{2} = \frac{1}{2}y_1 - 2x_2 - 5x_3$$

Подстановка данного выражения во второе уравнение ПФМ не решило бы задачу до конца, так как в выражении присутствует x_3 , которого нет в СФМ.

$$x_3 = \frac{y_3 + 5x_1 - 8x_2}{5} \quad \text{Подставим его в выражение } x_1:$$

$$x_1 = \frac{1}{2}y_1 - 2x_2 - 5 \frac{y_3 + 5x_1 - 8x_2}{5} = \frac{1}{2}y_1 - y_3 + 6x_2 - 5x_1$$

$$x_1 = \frac{0,5y_1 - y_3 + 6x_2}{6}$$

Второй этап: аналогично, чтобы выразить x_3 через искомые y_3 и x_2 , заменим в выражении x_3 значение x_1 на полученное из первого уравнения ПФМ:

$$x_3 = \frac{y_3 + 5(0,5y_1 - 2x_2 - 5x_3) - 8x_2}{5} = 0,2y_3 + 0,5y_1 - 3,6x_2 - 5x_3$$

Следовательно,

$$x_3 = 0,033y_3 + 0,083y_1 - 0,6x_2$$

Подставим полученные x_1 и x_3 во второе уравнение ПФМ:

$$y_2 = 3 \frac{0,5y_1 - y_3 + 6x_2}{6} - 6x_2 + 2(0,033y_3 + 0,083y_1 - 0,6x_2)$$

$$y_2 = 0,416y_1 - 0,434y_3 - 4,2x_2 \text{ - второе уравнение СФМ.}$$

Это уравнение можно получить из ПФМ иным путем. Суммируя все уравнения, получим

$$\begin{array}{r} y_1 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3, \\ y_2 = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3, \\ y_3 = -5x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ \hline y_1 + y_2 + y_3 = 6x_2 + 17x_3. \end{array}$$

Далее из первого и второго уравнений ПФМ исключим x_1 , домножив первое уравнение на 3, а второе - на (-2) и просуммировав их:

$$\begin{array}{r} 3y_1 = 6x_1 + 12x_2 + 30x_3, \\ -2y_2 = -6x_1 + 12x_2 - 4x_3 \\ \hline 3y_1 - 2y_2 = 21x_2 + 26x_3. \end{array}$$

Затем аналогичным путем из полученных уравнений исключаем x_3 а именно:

$$\begin{array}{r}
y_1 + y_2 + y_3 = 6x_2 + 17x_3 \quad | -26 \\
3y_1 - 2y_2 = 21x_2 + 26x_3 \quad | 17, \\
-26y_1 - 26y_2 - 26y_3 = -156x_2 - 442x_3 \\
\hline
51y_1 - 34y_2 = 408x_2 + 442x_3 \\
25y_1 - 60y_2 - 26y_3 = 252x_2 \\
60y_2 = 25y_1 - 26y_3 - 252x_2 \\
y_2 = 0,416y_1 - 0,433y_3 - 4,2x_2.
\end{array}$$

в) из второго уравнения ПФМ выразим x_2 , так как его нет в третьем уравнении СФМ:

$$x_2 = \frac{-y_2 + 3x_1 + 2x_3}{6} = -0,167y_2 + 0,5x_1 + 0,333x_3.$$

Подставим полученное выражение в третье уравнение ПФМ:

$$y_3 = -5x_1 + 8(-0,167y_2 + 0,5x_1 + 0,333x_3) + 5x_3.$$

$$y_3 = -1,336y_2 - x_1 + 7,664x_3 - \text{третье уравнение СФМ.}$$

Таким образом, СФМ имеет вид:

$$\begin{cases}
y_1 = 0,5y_3 + 4,5x_1 + 7,5x_3, \\
y_2 = 0,416y_1 - 0,434y_3 - 4,2x_2, \\
y_3 = -1,336y_2 - x_1 + 7,664x_3
\end{cases}$$

Задача 2.

Изучается модель вида

$$\begin{cases}
y = a_1 + b_1(C + D) + \varepsilon_1, \\
C = a_2 + b_2y + b_3y_{-1} + \varepsilon_2.
\end{cases}$$

Где y - валовой национальный доход;
 y_{-1} - валовой национальный доход предшествующего года;
 C - личное потребление;
 D - конечный спрос (помимо личного потребления);
 ε_2 и ε_1 - случайные составляющие.

Информация за девять лет о приростах всех показателей дана в табл. 1.

Таблица 1

Год	D	y_{-1}	y	C
1	-6,8	46,7	3,1	7,4
2	22,4	3,1	22,8	30,4
3	-17,3	22,8	7,8	1,3
4	12,0	7,8	21,4	8,7

5	5,9	21,4	17,8	25,8
6	44,7	17,8	37,2	8,6
7	23,1	37,2	35,7	30,0
8	51,2	35,7	46,6	31,4
9	32,3	46,6	56,0	39,1
Σ	167,5	239,1	248,4	182,7

Для данной модели была получена система приведенных уравнений:

$$\begin{cases} y = 8,219 + 0,6688D + 0,2610y_{-1}, \\ C = 8,636 + 0,3384D + 0,2020y_{-1} \end{cases}$$

Требуется: Провести идентификацию модели. Рассчитать параметры первого уравнения структурной модели.

Решение: 1. В данной модели две эндогенные переменные (y и C) и две экзогенные переменные (D и y_{-1}). Второе уравнение точно идентифицировано, так как содержит две эндогенные переменные и не содержит одну экзогенную переменную из системы. Иными словами, для второго уравнения имеем по счетному правилу идентификации равенство: $2=1+1$. Первое уравнение сверх идентифицированное, так как в нем на параметры при C и D наложено ограничение: они должны быть равны. В этом уравнении содержится одна эндогенная переменная y .

Переменная C в данном уравнении не рассматривается как эндогенная, так как она участвует в уравнении не самостоятельно, а вместе с переменной D . В данном уравнении отсутствует одна экзогенная переменная, имеющаяся в системе. По счетному правилу идентификации получаем: $1+1=2$ $D+1>N$. Это больше, чем число эндогенных, переменных в данном уравнении, следовательно, система сверх идентифицирована.

2. Для определения параметров сверх идентифицированной модели используется двухшаговый метод наименьших квадратов.

Шаг 1. На основе системы приведенных уравнений по точно идентифицированному второму уравнению определим теоретические значения эндогенной переменной C . Для этого в приведенное уравнение

$$C = 8,636 + 0,3384D + 0,2020y_{-1}$$

Подставим значение D и y_{-1} , имеющиеся в условии задачи. Получим:

$$C_1=15,8; \quad C_2=16,8; \quad C_3=7,4; \quad C_4=14,3; \quad C_5=15,0; \quad C_6=27,4; \quad C_7=24,0; \\ C_8=33,2; \quad C_9=29,0.$$

Шаг 2. По сверх идентифицированному уравнению структурной формы модели заменяем фактические значения C на теоретические $\hat{C}$ и рассчитываем новую переменную $C + D$ (табл. 2).

Таблица 2

Год	D	y_{-1}	y	C
1	-6,8	46,7	3,1	7,4
2	22,4	3,1	22,8	30,4
3	-17,3	22,8	7,8	1,3
4	12,0	7,8	21,4	8,7
5	5,9	21,4	17,8	25,8
6	44,7	17,8	37,2	8,6
7	23,1	37,2	35,7	30,0
8	51,2	35,7	46,6	31,4
9	32,3	46,6	56,0	39,1
Σ	167,5	239,1	248,4	182,7

Далее к сверх идентифицированному уравнению применяется метод наименьших квадратов. Обозначим новую переменную $\hat{C} + D$ через $\hat{Z}$. Решаем уравнение $y = a_1 + b_1 \cdot Z$.

Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a_1 + b_1 \cdot \sum Z, \\ \sum y \cdot Z = a_1 \cdot \sum Z + b_1 \cdot \sum Z^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 248,4 = 9 \cdot a_1 + 350,4 \cdot b_1, \\ 13508,71 = 350,4 \cdot a_1 + 21142,02 \cdot b_1, \end{cases}$$

$$a_1 = 7,678; \quad b_1 = 0,512.$$

Итак, первое уравнение структурной модели будет таким:

$$y = 7,678 + 0,512 (C + D).$$

Задача 3. Рассмотрим применение двух шагового МНК.

Имеются данные за 2010-2014гг. (табл. 3)

Таблица 3

Год	Годовое потребление свинины на душу населения, фунтов, y_1	Оптовая цена за фунт, долл., y_2	Доход на душу населения, долл., x_1	Расходы по обработке мяса, % к цене, x_2
1990	60	5,0	1300	60
1991	62	4,0	1300	56
1992	65	4,2	1500	56

1993	62	5,0	1600	63
1994	66	3,8	1800	50

Требуется: Построить модель вида

$$\begin{cases} y_1 = f(y_2, x_1), \\ y_2 = f(y_1, x_2), \end{cases}$$

рассчитав соответствующие структурные коэффициенты.

Решение: Система одновременных уравнений с двумя эндогенными и двумя экзогенными переменными имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

В каждом уравнении две эндогенные и одна отсутствующая экзогенная переменная, из имеющихся в системе. Для каждого уравнения данной системы действует счетное правило $2 = 1 + 1$. Это означает, что каждое уравнение и система в целом идентифицированы. Для определения параметров такой системы применяется косвенный метод наименьших квадратов.

С этой целью структурная форма модели преобразуется в приведенную форму:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2, \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2, \end{cases}$$

в которой коэффициенты при x определяются методом наименьших квадратов. Для нахождения значений δ_{11} и δ_{12} запишем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y_1 x_1 = \delta_{11} \cdot \sum x_1^2 + \delta_{12} \cdot \sum x_1 x_2, \\ \sum y_1 x_2 = \delta_{11} \cdot \sum x_1 x_2 + \delta_{12} \cdot \sum x_2^2. \end{cases}$$

При ее решении предполагается, что x и y выражены через отклонения от средних уровней, т. е. матрица исходных данных составит:

Применительно к ней необходимые суммы оказываются следующими:
 $\sum y_1 x_1 = 1600$; $\sum y_1 x_2 = -37$; $\sum x_1^2 = 180000$; $\sum x_1 x_2 = -1900$; $\sum x_2^2 = 96$.

Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} 1600 = 180000 \cdot \delta_{11} - 1900 \cdot \delta_{12}, \\ -37 = -1900 \cdot \delta_{11} + 96 \cdot \delta_{12}. \end{cases}$$

Решая ее получим:

$$\delta_{11} = 0,00609; \delta_{12} = -0,26481.$$

Итак, имеем $y_1 = 0,00609 \cdot x_1 - 0,26481 \cdot x_2$.

Аналогично строим систему нормальных уравнений для определения коэффициентов δ_{21} и δ_{22}

$$\begin{cases} \sum y_2 x_1 = \delta_{21} \sum x_{12} + \delta_{22} \sum x_1 x_2, \\ \sum y_2 x_2 = \delta_{21} \sum x_1 x_2 + \delta_{22} \sum x_2^2, \end{cases}$$

$$\sum y_2 x_1 = -160; \quad \sum y_2 x_2 = 10,2.$$

$$\begin{cases} -160 = 180000 \delta_{21} - 1900 \delta_{22}, \\ 10,2 = -1900 \delta_{21} - 96 \delta_{22}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta_{21} = 0,00029; \quad \delta_{22} = 0,11207$$

тогда второе уравнение примет вид

$$y_2 = 0,00029 \cdot x_1 + 0,11207 \cdot x_2.$$

Приведенная форма модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 0,00609 \cdot x_1 - 0,26481 \cdot x_2, \\ y_2 = 0,00029 \cdot x_1 + 0,11207 \cdot x_2. \end{cases}$$

Из приведенной формы модели определяем коэффициенты структурной модели:

$$\begin{cases} y_1 = 0,00609 \cdot x_1 - 0,26481 \cdot x_2, \\ x_2 = \frac{y_2 - 0,00029 \cdot x_1}{0,11207}, \end{cases},$$

$$y_1 = 0,00609 x_1 - 0,26481 \cdot \frac{y_2 - 0,00029 \delta_1}{0,11207} = -2,36290 \cdot y_2 + 0,00678 x_1,$$

$$\begin{cases} y_1 = 0,00029 \cdot x_1 + 0,11207 \cdot x_2, \\ x_1 = \frac{y_1 + 0,26481 \cdot x_2}{0,00609}, \end{cases}$$

$$y_2 = 0,00029 \cdot \frac{y_1 + 0,26481 \delta_2}{0,00609} + 0,11207 x_2 = 0,04762 \cdot y_1 + 0,12468 x_2$$

Итак, структурная форма модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = -2,36290 \cdot y_2 + 0,00678 \cdot x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = 0,04762 \cdot y_1 + 0,12468 \cdot x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Пример решения 2 части КР

Задание.

Требуется проверить гипотезы о факторах, определяющих уровень занятости населения в экономике региона, размеры инвестиционных вложений в основной капитал, стоимость валового регионального продукта и о взаимодействии этих трех процессов.

1. Постройте систему рекурсивных уравнений, выполните расчет параметров каждого уравнения;

2. Проанализируйте результаты.

3. Выполните прогноз уровня занятости, размера инвестиций и стоимости валового регионального продукта (ВРП) при условии, что экзогенные переменные увеличатся на заданный процент прироста от своих средних значений.

Варианты 9-15.

Требуется проверить гипотезы о факторах, определяющих размеры инвестиционных вложений в основной капитал, стоимость валового регионального продукта, величину общей суммы доходов населения региона и о взаимодействии этих трёх процессов. Для изучения проблемы предлагается рассмотреть следующие показатели и их значения по территориям Центрального федерального округа за 2001 г:

y_1 – инвестиции в основной капитал за год, млрд руб.;

y_2 – стоимость валового регионального продукта (валовая добавленная стоимость) млрд руб.;

y_3 – сумма доходов населения региона за год, млрд руб.,

x_1 – финансовый результат деятельности (прибыль), млрд руб.;

x_2 – среднегодовая стоимость основных фондов в экономике, млрд руб.;

x_2 – доля инвестиций в активную часть основных фондов экономики, %;

x_4 – сумма остатков вкладов на счетах в Банке России, млрд руб.;

Необходимо проверить для уровня значимости $\alpha=0,10$ следующие рабочие гипотезы:

$$\begin{cases} y_3 = f(x_2, x_5) \\ y_1 = f(y_3, x_3) \\ y_2 = f(y_1, x_1, x_4) \end{cases}$$

Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 5,2% от своих средних значений.

Таблица 6 – исходные данные к вариантам 9-15

Территории федерального округа	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4
Белгородская обл.	13,5	44,3	38,302	3,687	164,1	44,0	3,717
Брянская обл.	3,7	26,2	28,737	0,967	129,9	26,4	2,183
Владимирская обл.	6,3	35,4	30,934	3,782	139,1	47,0	3,508
Воронежская обл.	10,1	52,1	58,806	2,960	251,2	40,6	6,742
Ивановская обл.	2,4	18,1	18,114	0,515	88,7	42,0	2,350

Территории федерального округа	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4
Калужская обл.	6,5	26,1	21,578	2,171	112,9	38,0	2,292
Костромская обл.	4,1	18,2	17,002	0,559	94,5	42,6	1,483
Курская обл.	6,2	31,9	28,837	2,287	143,5	37,2	2,300
Липецкая обл.	8,3	48,2	33,264	11,623	156,9	55,3	2,700
Орловская обл.	5,8	25,5	20,448	13,441	79,5	42,9	1,808
Рязанская обл.	10,1	32,0	27,887	3,882	139,9	59,9	2,775
Смоленская обл.	8,8	29,9	29,995	1,906	147,6	30,0	2,092
Тамбовская обл.	3,5	25,9	29,976	0,874	143,3	35,5	2,533
Тверская обл.	10,9	38,7	30,394	2,905	199,2	28,0	2,592
Тульская обл.	8,1	43,7	41,076	5,314	183,1	40,0	3,983
Ярославская обл.	14,5	46,9	41,805	9,625	221,6	48,5	3,692

Решение. Модель включает три эндогенные переменные (y_1, y_2, y_3) и четыре экзогенные переменные (x_1, x_2, x_3, x_4).

Система одновременных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y_3 = a_{12}x_2 + a_{14}x_4 + \varepsilon_3 \\ y_1 = b_{23}y_3 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2 \\ y_2 = b_{31}y_1 + a_{31}x_1 + a_{34}x_4 + \varepsilon_1 \end{cases}$$

Необходимое условие идентификации

Уравнение 1:

$$H=1$$

$$D=2$$

$$D+1>H$$

Уравнение сверхидентифицируемое

Уравнение 2:

$$H=2$$

$$D=3$$

$$D+1>H$$

Уравнение сверхидентифицируемое

Уравнение 3:

$$H=2$$

$$D=2$$

$$D+1>H$$

Уравнение сверхидентифицируемое

Все уравнения сверхидентифицируемые, значит система сверхидентифицируемая. Для определения параметров такой системы применяется двухшаговый МНК.

1. Определим уравнение регрессии для эндогенной переменной y_3 в зависимости от экзогенных переменных x_2 и x_4 .

Перенесем данные указанных переменных ниже на рабочем листе и найдем коэффициенты уравнения регрессии с помощью мастера «Анализ данных». Результаты представим на рис. 3.

y_3	x_2	x_4	ВЫВОД ИТОГОВ					
38,302	164,1	3,717						
28,737	129,9	2,183	Регрессионная статистика					
30,934	139,1	3,508	Множественный R	0,973				
58,806	251,2	6,742	R-квадрат	0,946				
18,114	88,7	2,35	Нормированный R-кв	0,938				
21,578	112,9	2,292	Стандартная ошибка	2,604				
17,002	94,5	1,483	Наблюдения	16				
28,837	143,5	2,3						
33,264	156,9	2,7	Дисперсионный анализ					
20,448	79,5	1,808		df	SS	MS	F	Значимость F
27,887	139,9	2,775	Регрессия	2	1545,683	772,841	113,964	5,73E-09
29,995	147,6	2,092	Остаток	13	88,159	6,781		
29,976	143,3	2,533	Итого	15	1633,841			
30,394	199,2	2,592						
41,076	183,1	3,983		Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%
41,805	221,6	3,692	Y-пересечение	1,596	2,255	0,708	0,492	-3,276
			x2	0,111	0,024	4,612	0,000	0,059
			x4	4,383	0,910	4,819	0,000	2,418

Рис. 3. Построение регрессии

Зададим уровень значимости 10%.

Коэффициенты уравнения регрессии при переменных x_2 и x_4 значимы, так как р-значения значительно меньше 0,1. Коэффициент детерминации составляет 0,946 (изменение признака y_3 на 94,6% объясняется изменением признаков x_2 и x_4). Значимость критерия Фишера 113,964, что больше табличного значения ($F_{\text{табл}}=3,80$), значит, уравнение регрессии статистически значимо, надежно.

Уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_3 = 1,596 + 0,111 \cdot x_2 + 4,383 \cdot x_4.$$

2. Т.к. первая эндогенная переменная зависит от третьей эндогенной и экзогенной переменной x_3 , то при построении уравнения регрессии необходимо использовать не точные значения y_3 , а расчетные по уравнению регрессии:

$$\hat{y}_{\text{расч}} = \hat{y}_3 = 1,596 + 0,111 \cdot x_2 + 4,383 \cdot x_4.$$

y_1	$y_3^{\text{расч}}$	x_3
13,5	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}23+\$G\$40*\text{D}23$	44
3,7	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}24+\$G\$40*\text{D}24$	26,4
6,3	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}25+\$G\$40*\text{D}25$	47
10,1	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}26+\$G\$40*\text{D}26$	40,6
2,4	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}27+\$G\$40*\text{D}27$	42
6,5	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}28+\$G\$40*\text{D}28$	38
4,1	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}29+\$G\$40*\text{D}29$	42,6
6,2	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}30+\$G\$40*\text{D}30$	37,2
8,3	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}31+\$G\$40*\text{D}31$	55,3
5,8	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}32+\$G\$40*\text{D}32$	42,9
10,1	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}33+\$G\$40*\text{D}33$	59,9
8,8	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}34+\$G\$40*\text{D}34$	30
3,5	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}35+\$G\$40*\text{D}35$	35,5
10,9	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}36+\$G\$40*\text{D}36$	28
8,1	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}37+\$G\$40*\text{D}37$	40
14,5	= $\$G\$38+\$G\$39*\text{C}38+\$G\$40*\text{D}38$	48,5

Рис. 4. К расчету второго уравнения регрессии

Результаты расчетов представлены на рис. 5.

y_1	$y_3^{\text{расч}}$	x_3	ВЫВОД ИТОГОВ				
13,5	36,16236456	44					
3,7	25,63005168	26,4	<i>Регрессионная статистика</i>				
6,3	32,4624246	47	Множественный R	0,678			
10,1	59,12080535	40,6	R-квадрат	0,460			
2,4	21,77433135	42	Нормированный R-кв.	0,377			
6,5	24,21483703	38	Стандартная ошибка	2,789			
4,1	18,61982155	42,6	Наблюдения	16			
6,2	27,65730158	37,2	<i>Дисперсионный анализ</i>				
8,3	30,90276634	55,3		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
5,8	18,37411425	42,9	Регрессия	2	86,161	43,081	5,537
10,1	29,33851811	59,9	Остаток	13	101,149	7,781	0,018
8,8	27,20211346	30	Итого	15	187,310		
3,5	28,6563494	35,5					
10,9	35,13959193	28					
8,1	39,44403774	40		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>
14,5	42,45557106	48,5	Y-пересечение	-2,702	3,865	-0,699	0,497
			$y_3^{\text{расч}}$	0,216	0,071	3,027	0,010
			x_3	0,089	0,080	1,120	0,283
							<i>Нижние 95%</i>
							-11,052
							0,062
							-0,083

Рис. 5. Построение регрессии

Уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_1 = -2,702 + 0,216 \cdot y_3 + 0,089 \cdot x_3.$$

Коэффициент детерминации составляет 0,46, значимость его и уравнения регрессии по критерию Фишера хорошая, и на уровне значимости 0,1 значим только коэффициент уравнения регрессии при $y_3^{\text{расч}}$. Поэтому пересчитаем уравнение регрессии, удалив фактор x_3 .

ВЫВОД ИТОГОВ					
<i>Регрессионная статистика</i>					
Множественный R	0,639				
R-квадрат	0,408				
Нормированный R-кв.	0,366				
Стандартная ошибка	2,815				
Наблюдения	16				
<i>Дисперсионный анализ</i>					
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
Регрессия	1	76,401	76,401	9,644	0,008
Остаток	14	110,909	7,922		
Итого	15	187,310			
	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>
У-пересечение	0,767	2,333	0,329	0,747	-4,237
у3расч	0,222	0,072	3,105	0,008	0,069

Рис. 6. Построение регрессии

Уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_1 = 0,767 + 0,222 \cdot y_3.$$

Коэффициент детерминации составляет 0,408, значимость его и уравнения регрессии по критерию Фишера хорошая, и на уровне значимости 0,1 коэффициент уравнения регрессии при $y_{3\text{расч}}$ значим.

3. Определим теперь зависимость второй эндогенной переменной от первой эндогенной переменной $y_{1\text{расч}}$ и экзогенных переменных x_1 и x_4 . Результаты сведены на рис.7.

				ВЫВОД ИТОГОВ					
y_2	$y_{1\text{расч}}$	x_1	x_4						
44,3	8,806677	3,687	3,717	<i>Регрессионная статистика</i>					
26,2	6,465074	0,967	2,183	Множественный R	0,948				
35,4	7,984085	3,782	3,508	R-квадрат	0,898				
52,1	13,91093	2,96	6,742	Нормированный R-кв.	0,873				
18,1	5,607848	0,515	2,35	Стандартная ошибка	3,810				
26,1	6,150435	2,171	2,292	Наблюдения	16				
18,2	4,906519	0,559	1,483						
31,9	6,915783	2,287	2,3	<i>Дисперсионный анализ</i>					
48,2	7,637333	11,623	2,7		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
25,5	4,851892	13,441	1,808	Регрессия	3	1534,390	511,463	35,227	3,15E-06
32	7,289561	3,882	2,775	Остаток	12	174,230	14,519		
29,9	6,814583	1,906	2,092	Итого	15	1708,619			
25,9	7,137897	0,874	2,533						
38,7	8,579288	2,905	2,592		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>
43,7	9,536277	5,314	3,983	У-пересечение	-4,881	4,556	-1,071	0,305	-14,807
46,9	10,20582	9,625	3,692	$y_{1\text{расч}}$	6,066	1,431	4,239	0,001	2,948
				x_1	0,963	0,249	3,866	0,002	0,420
				x_4	-4,016	2,589	-1,551	0,147	-9,658

Рис. 7. Построение регрессии

Уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_2 = -4,881 + 6,066 \cdot y_2 + 0,963 \cdot x_1 - 4,016 \cdot x_4.$$

Коэффициент при переменной x_4 не значим ($0,147 > 0,1$), поэтому пересчитаем уравнение регрессии без переменной x_4 :

пересчитаем уравнение регрессии без переменной x_4			ВЫВОД ИТОГОВ		
y_2	x_1	y_1 расч			
44,3	3,687	8,806677			
26,2	0,967	6,465074	<i>Регрессионная статистика</i>		
35,4	3,782	7,984085	Множественный R	0,937	
52,1	2,96	13,91093	R-квадрат	0,878	
18,1	0,515	5,607848	Нормированный R-кв	0,859	
26,1	2,171	6,150435	Стандартная ошибка	4,011	
18,2	0,559	4,906519	Наблюдения	16	
31,9	2,287	6,915783			
48,2	11,623	7,637333	<i>Дисперсионный анализ</i>		
25,5	13,441	4,851892		<i>df</i>	<i>SS</i>
32	3,882	7,289561	Регрессия	2	1499,473
29,9	1,906	6,814583	Остаток	13	209,147
25,9	0,874	7,137897	Итого	15	1708,619
38,7	2,905	8,579288			
43,7	5,314	9,536277			
46,9	9,625	10,20582			
				<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>
					<i>P-Значение</i>
					<i>Нижние 95%</i>
			Y-пересечение	-0,486	3,754
			x_1	0,984	0,262
			y_1 расч	3,953	0,460

Рис. 8. Построение регрессии

Уравнение регрессии адекватно, коэффициенты при переменных значимы.

Уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_2 = -0,486 + 3,953 \cdot y_2 + 0,984 \cdot x_1.$$

Окончательно получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \hat{y}_3 = 1,596 + 0,111 \cdot x_2 + 4,383 \cdot x_4 \\ \hat{y}_1 = 0,767 + 0,222 \cdot y_3 \\ \hat{y}_2 = -0,486 + 3,953 \cdot y_2 + 0,984 \cdot x_1 \end{cases}$$

4. Выполните прогноз размера инвестиций, стоимости ВРП и суммы доходов населения при условии, что экзогенные переменные увеличатся на 5,2% от своих средних значений.

Вычислим средние значения экзогенных переменных (рис.9):

E152		f _x		=CPЗНАЧ(E136:E151)				
	A	B	C	D	E	F	G	H
135	Территории федерального округа	y ₁	y ₂	y ₃	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
136	Белгородская обл.	13,5	44,3	38,302	3,687	164,1	44	3,717
137	Брянская обл.	3,7	26,2	28,737	0,967	129,9	26,4	2,183
138	Владимирская обл.	6,3	35,4	30,934	3,782	139,1	47	3,508
139	Воронежская обл.	10,1	52,1	58,806	2,96	251,2	40,6	6,742
140	Ивановская обл.	2,4	18,1	18,114	0,515	88,7	42	2,35
141	Калужская обл.	6,5	26,1	21,578	2,171	112,9	38	2,292
142	Костромская обл.	4,1	18,2	17,002	0,559	94,5	42,6	1,483
143	Курская обл.	6,2	31,9	28,837	2,287	143,5	37,2	2,3
144	Липецкая обл.	8,3	48,2	33,264	11,623	156,9	55,3	2,7
145	Орловская обл.	5,8	25,5	20,448	13,441	79,5	42,9	1,808
146	Рязанская обл.	10,1	32	27,887	3,882	139,9	59,9	2,775
147	Смоленская обл.	8,8	29,9	29,995	1,906	147,6	30	2,092
148	Тамбовская обл.	3,5	25,9	29,976	0,874	143,3	35,5	2,533
149	Тверская обл.	10,9	38,7	30,394	2,905	199,2	28	2,592
150	Тульская обл.	8,1	43,7	41,076	5,314	183,1	40	3,983
151	Ярославская обл.	14,5	46,9	41,805	9,625	221,6	48,5	3,692
152	Средние значения				4,156	149,688	41,119	2,922

Рис. 9. Вычисление средних значений экзогенных переменных

Далее увеличим средние значения на 5,2%:

E154		f _x		=E152*1,052				
	A	B	C	D	E	F	G	H
152	Средние значения				4,156	149,688	41,119	2,922
153	экзогенные переменные увеличим на 5,2% от своих средних значений							
154					4,372	157,471	43,257	3,074

Рис. 10. Увеличение средних значений на 5,2%

Вычисление прогнозируемых значений по построенным уравнениям:

I157		f _x		=B157+D157*F154+G157*H154					
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
153	экзогенные переменные увеличим на 5,2% от своих средних значений								
154					4,372	157,471	43,257	3,074	
155									
156									Прогноз
157	y ₃ =	1,596	+	0,111	* x ₂	+	4,383	* x ₄ =	32,605
158	y ₁ =	0,767	+	0,222	* y ₃ =				8,016
159	y ₂ =	-0,486	+	0,984	* x ₁	+	3,953	* y ₁ =	35,503
160									
161	y ₁ – инвестиции в основной капитал за год, млрд руб.								
162	y ₂ – стоимость валового регионального продукта (валовая добавленная стоимость) млрд руб.;								
163	y ₃ – сумма доходов населения региона за год, млрд руб.								

Рис. 11. Прогнозирование показателей

Таким образом, прогнозируемый размер инвестиций составит 8,016 млрд. руб., стоимость ВРП – 35,503 млрд. руб. и сумма доходов населения – 32,605 млрд. руб.

ПРИЛОЖЕНИЯ РЕКУРСИСТ

Исходные данные к задачам вариантов 1-5

Территории федерального округа	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Брянская обл.	26,2	3,7	0,596	-0,14	129,9	26,5	26,4	13,7
Владимирская обл.	35,4	6,3	0,721	2,69	139,1	24,8	47,0	14,6
Ивановская обл.	18,1	2,4	0,491	1,20	88,7	32,7	42,0	9,6
Калужская обл.	26,1	6,5	0,484	0,96	112,9	23,4	38,0	12,1
Костромская обл.	18,2	4,1	0,330	0,31	94,5	20,4	42,6	8,4
Курская обл.	31,9	6,2	0,606	-1,29	143,5	21,0	37,2	15,1
Липецкая обл.	48,2	8,3	0,570	5,05	156,9	17,7	55,3	19,4
Орловская обл.	25,5	5,8	0,416	1,51	79,5	20,7	42,9	12,1
Рязанская обл.	32,0	10,1	0,535	-0,38	139,9	22,7	59,9	14,8
Смоленская обл.	29,9	8,8	0,488	-1,44	147,6	17,6	30,0	19,4
Тамбовская обл.	25,9	3,5	0,514	-2,62	143,3	19,0	35,5	17,0
Тверская обл.	38,7	10,9	0,665	-0,31	199,2	24,8	28,0	18,0
Тульская обл.	43,7	8,1	0,781	-1,87	183,1	24,8	40,0	19,2
Ярославская обл.	46,9	14,5	0,663	1,53	221,6	16,9	48,5	17,7

Исходные данные к задачам 6-8

Территории федерального округа	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Брянская обл.	0,596	3,7	26,2	28,74	-0,14	26,5	0,967	129,9	13,7
Владимирская обл.	0,721	6,3	35,4	30,93	2,69	24,8	3,782	139,1	14,6
Воронежская обл.	1,076	10,1	52,1	58,81	2,67	19,1	2,960	251,2	38,0
Ивановская обл.	0,491	2,4	18,1	18,11	1,20	32,7	0,515	88,7	9,6
Калужская обл.	0,484	6,5	26,1	21,58	0,96	23,4	2,171	112,9	12,1
Костромская обл.	0,330	4,1	18,2	17,00	0,31	20,4	0,559	94,5	8,4
Курская обл.	0,606	6,2	31,9	28,84	-1,29	21,0	2,287	143,5	15,1
Липецкая обл.	0,570	8,3	48,2	33,26	5,05	17,7	11,623	156,9	19,4
Рязанская обл.	0,535	10,1	32,0	27,89	-0,38	22,7	3,882	139,9	14,8
Смоленская обл.	0,488	8,8	29,9	29,99	-1,44	17,6	1,906	147,6	19,4
Тамбовская обл.	0,514	3,5	25,9	29,98	-2,62	19,0	0,874	143,3	17,0
Тверская обл.	0,665	10,9	38,7	30,39	-0,31	24,8	2,905	199,2	18,0
Тульская обл.	0,781	8,1	43,7	41,08	-1,87	24,8	5,314	183,1	19,2
Ярославская обл.	0,663	14,5	46,9	41,81	1,53	16,9	9,625	221,6	17,7

Исходные данные к вариантам 9-15

Территории федерального округа	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4
Белгородская обл.	13,5	44,3	38,302	3,687	164,1	44,0	3,717
Брянская обл.	3,7	26,2	28,737	0,967	129,9	26,4	2,183
Владимирская обл.	6,3	35,4	30,934	3,782	139,1	47,0	3,508
Воронежская обл.	10,1	52,1	58,806	2,960	251,2	40,6	6,742
Ивановская обл.	2,4	18,1	18,114	0,515	88,7	42,0	2,350
Калужская обл.	6,5	26,1	21,578	2,171	112,9	38,0	2,292
Костромская обл.	4,1	18,2	17,002	0,559	94,5	42,6	1,483
Курская обл.	6,2	31,9	28,837	2,287	143,5	37,2	2,300
Липецкая обл.	8,3	48,2	33,264	11,623	156,9	55,3	2,700
Орловская обл.	5,8	25,5	20,448	13,441	79,5	42,9	1,808
Рязанская обл.	10,1	32,0	27,887	3,882	139,9	59,9	2,775
Смоленская обл.	8,8	29,9	29,995	1,906	147,6	30,0	2,092
Тамбовская обл.	3,5	25,9	29,976	0,874	143,3	35,5	2,533
Тверская обл.	10,9	38,7	30,394	2,905	199,2	28,0	2,592
Тульская обл.	8,1	43,7	41,076	5,314	183,1	40,0	3,983
Ярославская обл.	14,5	46,9	41,805	9,625	221,6	48,5	3,692

Библиографический список рекомендуемой литературы

1. Елисеева, И.И. Эконометрика : учебник для магистров/ под. ред. И.И.Елисеевой .— 2-е изд.,перераб.и доп. — М. :Юрайт, 2012 .— 450с.
2. Елисеева, И.И. Эконометрика : учебник для вузов/ И.И. Елисеева [и др]., под.ред. И.И. Елисеевой .— М. :Проспект, 2009 .— 288с.
3. Елисеева, И.И. Эконометрика : учебник для вузов/ И.И. Елисеева [и др]., под.ред. И.И. Елисеевой. — 2-е изд.,перераб.и доп. —М.:Финансы и статистика, 2008.— 576с.
4. Елисеева И.И. Практикум по эконометрике: учебное пособие для экономических вузов./И.И.Елисеева [и др].; под.ред. И.И.Елисеевой .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2008 .— 344с.+1 опт.диск (CD-ROM).
5. Кочетыгов, А.А. ТулГУ Эконометрика: учеб.пособие / А.А.Кочетыгов, Л.А.Толоконников; ТулГУ .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2006 .— 320с.
- 6.Эконометрика [Электрон.ресурс] : учебно-мультимедийный компьютерный курс .— Multimedia (110MB) .— М. : Диполь, 2007 .— 1 опт.диск. (CD ROM) .— (Вузовская серия).
7. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010, - 573с.