

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

**Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)**

**А. А. Мицель, В. В. Романенко, Е. Б. Грибанова**

# **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Учебно-методическое пособие  
по выполнению контрольных и лабораторных работ**

**Томск 2018**

Корректор: А. Н. Миронова

**Мицель А. А. и др.**

Методы оптимизации : учебно-методическое пособие по выполнению контрольных и лабораторных работ / А. А. Мицель, В. В. Романенко, Е. Б. Грибанова. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2018. – 445 с.

© Мицель А. А.,  
Романенко В. В.,  
Грибанова Е. Б., 2018  
© Оформление.  
ФДО, ТУСУР, 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Введение.....</b>                                              | <b>7</b>  |
| <b>2 Поиск оптимального маршрута лодки.....</b>                     | <b>8</b>  |
| 2.1 Постановка задачи.....                                          | 8         |
| 2.2 Методы исключения интервалов.....                               | 11        |
| 2.2.1 Метод равномерного поиска.....                                | 11        |
| 2.2.2 Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии).....          | 13        |
| 2.2.3 Метод Фибоначчи.....                                          | 15        |
| 2.2.4 Метод золотого сечения.....                                   | 17        |
| 2.3 Полиномиальная аппроксимация и методы точечного оценивания .... | 20        |
| 2.3.1 Квадратичная аппроксимация.....                               | 20        |
| 2.3.2 Метод Пауэлла.....                                            | 21        |
| 2.4 Методы с использованием производных.....                        | 25        |
| 2.4.1 Метод Ньютона – Рафсона.....                                  | 25        |
| 2.4.2 Метод средней точки (поиск Больцано).....                     | 28        |
| 2.5 Метод поиска с использованием кубичной аппроксимации.....       | 29        |
| <b>3 Проектирование канала наименьшей длины.....</b>                | <b>33</b> |
| 3.1 Постановка задачи.....                                          | 33        |
| 3.2 Методы прямого поиска.....                                      | 41        |
| 3.2.1 Симплексный метод.....                                        | 41        |
| 3.2.2 Метод поиска Хука – Дживса.....                               | 46        |
| 3.2.3 Метод сопряженных направлений Пауэлла.....                    | 51        |
| 3.3 Градиентные методы и методы второго порядка.....                | 54        |
| 3.3.1 Метод наискорейшего спуска (метод Коши).....                  | 55        |
| 3.3.2 Метод Ньютона.....                                            | 58        |
| 3.3.3 Модифицированный метод Ньютона.....                           | 60        |
| 3.3.4 Метод Марквардта.....                                         | 63        |
| 3.3.5 Методы сопряженных градиентов.....                            | 66        |
| 3.3.6 Квазиньютоновские методы (методы с переменной метрикой)....   | 79        |

|                                                                                                 |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4 Задача технического контроля .....</b>                                                     | <b>90</b>  |
| 4.1 Постановка задачи.....                                                                      | 90         |
| 4.2 Стандартная форма записи ЗЛП .....                                                          | 92         |
| 4.3 Поиск начального базиса.....                                                                | 94         |
| 4.3.1 Метод Жордана – Гаусса .....                                                              | 95         |
| 4.3.2 Метод искусственного базиса .....                                                         | 98         |
| 4.4 Графическое решение ЗЛП .....                                                               | 100        |
| 4.5 Решение ЗЛП симплекс-методом .....                                                          | 106        |
| 4.6 Целочисленное программирование .....                                                        | 126        |
| 4.6.1 Графический метод решения ЗЦП.....                                                        | 126        |
| 4.6.2 Метод Гомори .....                                                                        | 129        |
| <b>5 Оптимизация плана доставки муки и хлеба .....</b>                                          | <b>133</b> |
| 5.1 Постановка задачи.....                                                                      | 133        |
| 5.2 Сбалансированные и несбалансированные модели.....                                           | 137        |
| 5.3 Первоначальное закрепление потребителей за поставщиками .....                               | 140        |
| 5.4 Решение транспортной задачи симплекс-методом.....                                           | 161        |
| 5.5 Решение транспортной задачи методом потенциалов .....                                       | 164        |
| 5.6 Задача о назначениях .....                                                                  | 183        |
| 5.7 Венгерский метод решения задачи о назначениях .....                                         | 185        |
| <b>6 Определение наилучшего положения приемной антенны.....</b>                                 | <b>193</b> |
| 6.1 Постановка задачи.....                                                                      | 193        |
| 6.2 Задачи с ограничениями в виде равенств .....                                                | 199        |
| 6.2.1 Метод замены переменных.....                                                              | 199        |
| 6.2.2 Метод множителей Лагранжа .....                                                           | 203        |
| 6.3 Необходимые и достаточные условия оптимальности .....                                       | 205        |
| 6.3.1 Необходимые и достаточные условия оптимальности задач<br>с ограничениями общего вида..... | 205        |
| 6.3.2 Необходимые и достаточные условия оптимальности<br>второго порядка .....                  | 209        |

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| 6.4 Методы штрафов .....                             | 211        |
| 6.4.1 Квадратичный штраф .....                       | 211        |
| 6.4.2 Логарифмический штраф.....                     | 216        |
| 6.4.3 Штраф типа обратной функции .....              | 218        |
| 6.4.4 Штраф типа квадрата срезки .....               | 220        |
| 6.5 Методы, основанные на линеаризации .....         | 225        |
| 6.5.1 Базовый метод линеаризации .....               | 225        |
| 6.5.2 Алгоритм Франка – Вульфа.....                  | 230        |
| 6.5.3 Метод допустимых направлений Зойтендейка ..... | 234        |
| 6.5.4 Метод условного градиента.....                 | 243        |
| 6.6 Метод проекции градиента .....                   | 252        |
| 6.6.1 Случай линейных ограничений.....               | 252        |
| 6.6.2 Случай нелинейных ограничений.....             | 258        |
| <b>7 Краткий математический справочник .....</b>     | <b>261</b> |
| 7.1 Приближенные числа.....                          | 261        |
| 7.2 Уравнения и неравенства.....                     | 265        |
| 7.2.1 Решение уравнений .....                        | 265        |
| 7.2.2 Решение систем уравнений .....                 | 275        |
| 7.2.3 Доказательство неравенств.....                 | 281        |
| 7.3 Векторы и матрицы .....                          | 286        |
| 7.3.1 Основные операции с матрицами .....            | 290        |
| 7.3.2 Операции с квадратными матрицами.....          | 296        |
| 7.3.3 Операции с векторами.....                      | 304        |
| 7.4 Дифференцирование функций .....                  | 307        |
| 7.4.1 Производная функции скалярного аргумента ..... | 308        |
| 7.4.2 Частные производные .....                      | 317        |
| <b>8 Контрольная работа .....</b>                    | <b>327</b> |
| 8.1 Задание на контрольную работу .....              | 327        |
| 8.1.1 Анализ экстремальных задач .....               | 327        |

|                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------|------------|
| 8.1.2 Одномерный поиск.....                                 | 331        |
| 8.1.3 Функции многих переменных.....                        | 339        |
| 8.1.4 Линейное программирование.....                        | 351        |
| 8.1.5 Нелинейное программирование.....                      | 376        |
| 8.2 Оформление работы.....                                  | 385        |
| <b>9 Лабораторные работы .....</b>                          | <b>387</b> |
| 9.1 Задание на лабораторную работу № 1 .....                | 387        |
| 9.1.1 Одномерный поиск.....                                 | 387        |
| 9.1.2 Многомерный поиск.....                                | 390        |
| 9.2 Задание на лабораторную работу № 2 .....                | 392        |
| 9.2.1 Линейное программирование.....                        | 393        |
| 9.2.2 Нелинейное программирование.....                      | 396        |
| 9.3 Работа в пакете Mathcad .....                           | 397        |
| 9.3.1 Интерфейс пакета Mathcad .....                        | 398        |
| 9.3.2 Работа в редакторе документов.....                    | 403        |
| 9.3.3 Входной язык Mathcad .....                            | 408        |
| 9.3.4 Программирование в среде Mathcad.....                 | 433        |
| 9.4 Тестирование .....                                      | 438        |
| 9.5 Оформление отчета .....                                 | 442        |
| <b>Литература .....</b>                                     | <b>443</b> |
| <b>Приложение А (обязательное) Образец титульного листа</b> |            |
| <b>контрольной работы .....</b>                             | <b>444</b> |
| <b>Приложение Б (обязательное) Образец титульного листа</b> |            |
| <b>лабораторной работы.....</b>                             | <b>445</b> |

## 1 ВВЕДЕНИЕ

В учебно-методическом пособии описаны контрольные и лабораторные работы по дисциплине «Методы оптимизации», а также краткая теория, необходимая для их выполнения. Более полное изложение теории с примерами решения задач дается в базовом учебнике [1].

Для успешного освоения дисциплины и выполнения контрольных и лабораторных работ необходимо предварительное изучение таких дисциплин, как «Математика» (линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление) и «Численные методы» (или ее аналогов – «Вычислительная математика», «Методы вычислений»). Также для выполнения лабораторных работ потребуются навыки программирования на языке высокого уровня (Pascal, C/C++, C# и т. д.) или работы с математическими пакетами (PTC MathCAD, MathWorks MATLAB, Wolfram Mathematica и т. п.).

В каждой лабораторной или контрольной работе необходимо выполнить несколько пунктов задания. В каждом пункте предусмотрено различное количество вариантов заданий. Выбор варианта задания осуществляется по общим правилам с использованием следующей формулы:

$$V = (N \cdot K) \operatorname{div} 100,$$

где  $V$  – искомый номер варианта,

$N$  – общее количество вариантов задания,

$\operatorname{div}$  – целочисленное деление,

$K$  – код варианта.

При  $V = 0$  выбирается максимальный вариант.

## 2 ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА ЛОДКИ

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимизации. Лодка с рыбаком находится на озере, на расстоянии 3 км от ближайшей точки  $A$  берега (рис. 2.1). Рыбак желает достигнуть села  $B$ , находящегося на берегу на расстоянии 5 км от точки  $A$  ( $AB$  – отрезок прямой). Скорости лодки по воде и рыбака по суше соответственно 4 км/ч и 5 км/ч. Где должна пристать к берегу лодка, чтобы рыбак смог достичь села  $B$  за минимальное время?

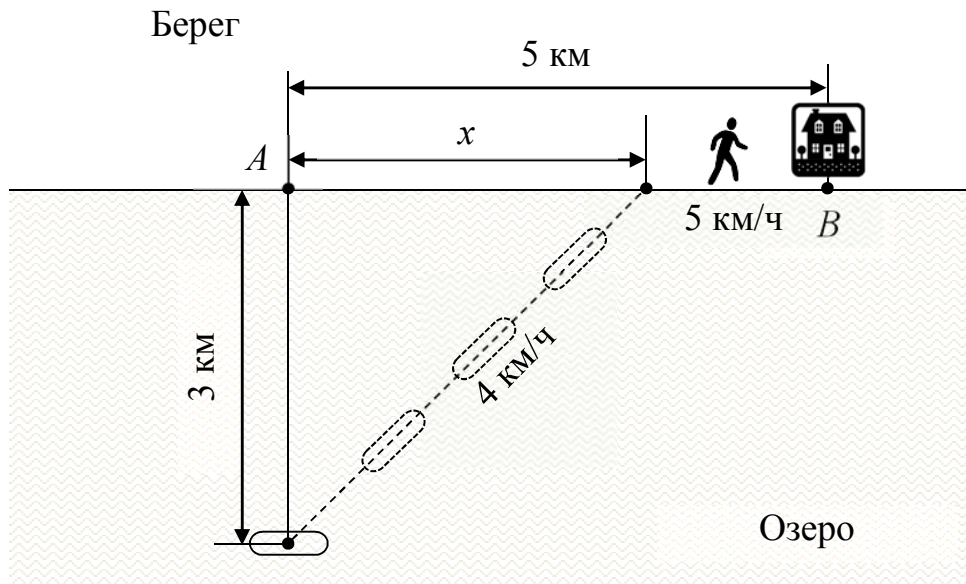


Рис. 2.1 – Графическое пояснение к задаче

Проведем анализ этой задачи. Во-первых, общее время путешествия  $t$  зависит только от одного параметра – расстояния  $x$  (это расстояние от точки  $A$  до места высадки рыбака на сушу), поэтому целевая функция будет зависеть только от одной переменной  $x$ . Во-вторых, задача относится к классу задач безусловной оптимизации, т. к. никаких ограничений на параметр  $x$  не накладывается. Теоретически он может быть даже отрицательным, если

лодка пристанет к берегу слева от точки  $A$ , хотя очевидно, что оптимальным такое решение не будет.

Таким образом, имеем задачу безусловной оптимизации для функции одной переменной (функции скалярного аргумента), или задачу одномерного поиска.

Составим целевую функцию (ЦФ) задачи. Пусть расстояние от точки  $A$  до места высадки рыбака из лодки составляет  $x$  км. Тогда расстояние, которое лодка преодолеет по озеру (пунктирная линия), составит

$$D_1 = \sqrt{x^2 + 9} \text{ км.}$$

Соответственно, время, затраченное на движение по озеру, можно найти из выражения

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} \text{ ч.}$$

Расстояние от места высадки до села составит

$$D_2 = 5 - x \text{ км.}$$

Соответственно, время, затраченное на движение по суше, можно найти из выражения

$$t_2 = \frac{5 - x}{5} \text{ ч.}$$

Общее время в пути составит

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{5 - x}{5} \text{ ч.}$$

Таким образом, получаем задачу:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{5 - x}{5} \rightarrow \min. \quad (2.1)$$

Здесь  $f(x)$  – время в пути (время, затраченное на движение по воде и суше). Найдём оптимум данной функции аналитически, решив уравнение

$$f'(x) = 0.$$

Получаем

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{x^2+9}}{20\sqrt{x^2+9}} = 0,$$

$$5x - 4\sqrt{x^2+9} = 0,$$

$$5x = 4\sqrt{x^2+9}.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат (соответственно, добавится условие  $x \geq 0$ , т. к.  $\sqrt{x^2+9} \geq 0$ ):

$$25x^2 = 16(x^2 + 9), \quad x \geq 0 \Rightarrow x^* = 4 \text{ км.}$$

Время в пути составит

$$f(4) = \frac{\sqrt{16+9}}{4} + \frac{5-4}{5} = 1,45 \text{ ч.}$$

Классифицируем найденную точку – убедимся, что это минимум:

1. Проверим знаки производной по обе стороны от точки  $x^* = 4$ :

$$f'(3) \approx -0,023 < 0,$$

$$f'(5) \approx 0,014 > 0.$$

2. Вычислим вторую производную ЦФ в точке  $x^* = 4$ :

$$f''(x) = \frac{9}{4\sqrt{(x^2+9)^3}},$$

$$f''(4) \approx 0,018 > 0.$$

Согласно обоим критериям,  $x^* = 4$  – точка минимума. Можно видеть, что  $f''(x) > 0$  для любого значения  $x$ , т. е. функция является выпуклой и унимодальной. Следовательно, минимум глобальный.

Таким образом, чтобы минимизировать время в пути, рыбак должен высадиться на берег в 4 км от точки  $A$  или в 1 км от села (точки  $B$ ). Далее рассмотрим примеры решения данной задачи численными методами.

## 2.2 Методы исключения интервалов

Решим задачу поиска оптимального маршрута лодки:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{5-x}{5} \rightarrow \min.$$

Минимум будем искать на интервале  $[-3, 8]$ .

### 2.2.1 Метод равномерного поиска

Положим  $N = 10$ ,  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ .

Шаг 1.1.  $k = 0$ ,  $a^0 = -3$ ,  $b^0 = 8$ ,  $\Delta^0 = b^0 - a^0 = 8 - (-3) = 11$ ,

$$\bar{x}^0 = \frac{a^0 + b^0}{2} = \frac{-3 + 8}{2} = 2,5.$$

Шаг 1.2, 1.3. Вычисляем узлы сетки и значения ЦФ в узлах:

$$x_i^0 = a^0 + \frac{\Delta^0}{N} \cdot i = -3 + \frac{11}{10} \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, 10.$$

| $i$        | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6            | 7     | 8     | 9     |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|-------|-------|-------|
| $x_i^0$    | -1,9  | -0,8  | 0,3   | 1,4   | 2,5   | <b>3,6</b>   | 4,7   | 5,8   | 6,9   |
| $f(x_i^0)$ | 2,268 | 1,936 | 1,694 | 1,548 | 1,476 | <b>1,452</b> | 1,454 | 1,472 | 1,501 |

Шаг 1.4.  $j = 6$ .

Шаг 1.5.  $a^1 = 2,5$ ,  $b^1 = 4,7$ ,  $\bar{x}^1 = x_6^0 = 3,6$ ,

$$\Delta^1 = \left(\frac{2}{10}\right)^1 \cdot \Delta^0 = b^1 - a^1 = 4,7 - 2,5 = 2,2.$$

Шаг 1.6. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{\Delta^1}{2} = \frac{2,2}{2} = 1,1 > \varepsilon_x, \quad |f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^0)| \approx 0,025 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаги 2.2, 2.3. Вычисляем узлы сетки и значения ЦФ в узлах:

$$x_i^1 = a^1 + \frac{\Delta^1}{N} \cdot i = 2,5 + \frac{2,2}{10} \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, 10.$$

| $i$        | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7             | 8      | 9      |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|--------|--------|
| $x_i^1$    | 2,72   | 2,94   | 3,16   | 3,38   | 3,60   | 3,82   | <b>4,04</b>   | 4,26   | 4,48   |
| $f(x_i^1)$ | 1,4684 | 1,4621 | 1,4573 | 1,4538 | 1,4515 | 1,4503 | <b>1,4500</b> | 1,4506 | 1,4519 |

Шаг 2.4.  $j = 7$ .

Шаг 2.5.  $a^2 = 3,82$ ,  $b^2 = 4,26$ ,  $\bar{x}^2 = x_7^1 = 4,04$ ,

$$\Delta^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 \cdot \Delta^0 = b^2 - a^2 = 4,26 - 3,82 = 0,44.$$

Шаг 2.6. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{\Delta^2}{2} = \frac{0,44}{2} = 0,22 > \varepsilon_x, \quad \left| f(\bar{x}^2) - f(\bar{x}^1) \right| \approx 1,523 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаги 3.2, 3.3. Вычисляем узлы сетки и значения ЦФ в узлах:

$$x_i^2 = a^2 + \frac{\Delta^2}{N} \cdot i = 3,82 + \frac{0,44}{10} \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, 10.$$

| $i$        | 1       | 2       | 3       | 4              | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       |
|------------|---------|---------|---------|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_i^2$    | 3,864   | 3,908   | 3,952   | <b>3,996</b>   | 4,040   | 4,084   | 4,128   | 4,172   | 4,216   |
| $f(x_i^2)$ | 1,45017 | 1,45008 | 1,45002 | <b>1,45000</b> | 1,45001 | 1,45006 | 1,45014 | 1,45026 | 1,45041 |

Шаг 3.4.  $j = 4$ .

Шаг 3.5.  $a^3 = 3,952$ ,  $b^3 = 4,040$ ,  $\bar{x}^3 = x_4^2 = 3,996$ ,

$$\Delta^3 = \left(\frac{2}{10}\right)^3 \cdot \Delta^0 = b^3 - a^3 = 4,040 - 3,952 = 0,088.$$

Шаг 3.6. Условия останова итерационного процесса выполняются:

$$\frac{\Delta^3}{2} = \frac{0,088}{2} = 0,044 < \varepsilon_x, \quad \left|f(\bar{x}^3) - f(\bar{x}^2)\right| \approx 3,152 \cdot 10^{-5} < \varepsilon_y,$$

поэтому решение окончено. С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* = \bar{x}^3 \approx 4,00$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}^3) \approx 1,450$  ч.

### 2.2.2 Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии)

Положим  $\delta = 0,02$ ,  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ .

Шаг 1.1.  $k = 0$ ,  $a^0 = -3$ ,  $b^0 = 8$ ,

$$\bar{x}^0 = \frac{a^0 + b^0}{2} = \frac{-3 + 8}{2} = 2,5.$$

Шаг 1.2. Находим

$$x_1^0 = \bar{x}^0 - \frac{\delta}{2} = 2,5 - \frac{0,02}{2} = 2,49,$$

$$x_2^0 = \bar{x}^0 + \frac{\delta}{2} = 2,5 + \frac{0,02}{2} = 2,51.$$

Шаг 1.3.  $f(x_1^0) \approx 1,477$ ,  $f(x_2^0) \approx 1,476$ .

Шаг 1.4.  $f(x_1^0) > f(x_2^0)$ , поэтому  $a^1 = x_1^0 = 2,49$ ,  $b^1 = b^0 = 8$ ,

$$\bar{x}^1 = \frac{a^1 + b^1}{2} = \frac{2,49 + 8}{2} = 5,245.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{\Delta^1}{2} = \frac{8 - 2,49}{2} = 2,755 > \varepsilon_x, \quad \left|f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^0)\right| \approx 0,0147 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Находим

$$x_1^1 = \bar{x}^1 - \frac{\delta}{2} = 5,245 - \frac{0,02}{2} = 5,235,$$

$$x_2^1 = \bar{x}^1 + \frac{\delta}{2} = 5,245 + \frac{0,02}{2} = 5,255.$$

Шаг 2.3.  $f(x_1^1) \approx 1,4614$ ,  $f(x_2^1) \approx 1,4618$ .

Шаг 2.4.  $f(x_1^1) < f(x_2^1)$ , поэтому  $a^2 = a^1 = 2,49$ ,  $b^2 = x_2^1 = 5,255$ ,

$$\bar{x}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{2,49 + 5,255}{2} \approx 3,873.$$

Шаг 2.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{\Delta^2}{2} = \frac{5,255 - 2,49}{2} \approx 1,382 > \varepsilon_x, \quad \left| f(\bar{x}^2) - f(\bar{x}^1) \right| \approx 0,0114 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Остальные итерации решения сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Решение задачи методом дихотомии

| $k$ | $a^k, b^k$                                   | $\bar{x}^k$ | $f(\bar{x}^k)$ | $x_1^k, x_2^k$                               | $f(x_1^k),$<br>$f(x_2^k)$                        | $\frac{\Delta^k}{2}$ | $ \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|----------------------------------------------|-------------|----------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 0   | $\begin{matrix} -3 \\ 8 \end{matrix}$        | 2,5         | 1,476          | $\begin{matrix} 2,49 \\ 2,51 \end{matrix}$   | $\begin{matrix} 1,477 \\ 1,476 \end{matrix}$     | 5,5                  | 0,0147                        |
| 1   | $\begin{matrix} 2,49 \\ 8 \end{matrix}$      | 5,245       | 1,462          | $\begin{matrix} 5,235 \\ 5,255 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1,4614 \\ 1,4618 \end{matrix}$   | 2,755                | 0,0114                        |
| 2   | $\begin{matrix} 2,49 \\ 5,255 \end{matrix}$  | 3,873       | 1,4501         | $\begin{matrix} 3,863 \\ 3,882 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1,4502 \\ 1,4501 \end{matrix}$   | 1,382                | $2,427 \times 10^{-3}$        |
| 3   | $\begin{matrix} 3,863 \\ 5,255 \end{matrix}$ | 4,559       | 1,4526         | $\begin{matrix} 4,549 \\ 4,569 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1,4525 \\ 1,4527 \end{matrix}$   | 0,696                | $2,172 \times 10^{-3}$        |
| 4   | $\begin{matrix} 3,863 \\ 4,569 \end{matrix}$ | 4,216       | 1,4504         | $\begin{matrix} 4,206 \\ 4,226 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1,45037 \\ 1,45044 \end{matrix}$ | 0,353                | $3,871 \times 10^{-4}$        |

Окончание табл. 2.1

| $k$ | $a^k, b^k$     | $\bar{x}^k$ | $f(\bar{x}^k)$ | $x_1^k, x_2^k$ | $f(x_1^k),$<br>$f(x_2^k)$ | $\frac{\Delta^k}{2}$ | $ \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|----------------|-------------|----------------|----------------|---------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 5   | 3,863<br>4,226 | 4,044       | 1,45002        | 4,034<br>4,054 | 1,45001<br>1,45003        | 0,182                | $1,582 \times 10^{-6}$        |
| 6   | 3,863<br>4,054 | 3,958       | 1,45002        | 3,948<br>3,968 | 1,45002<br>1,45001        | 0,0958               | $1,576 \times 10^{-5}$        |
| 7   | 3,948<br>4,054 | 4,001       | 1,45000        | 3,991<br>4,011 | 1,4500007<br>1,4500011    | 0,0529               | $3,699 \times 10^{-6}$        |
| 8   | 3,948<br>4,011 | 3,980       | 1,45000        |                |                           | 0,0314               |                               |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* = \bar{x}^8 \approx 3,98$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}^8) \approx 1,450$  ч.

### 2.2.3 Метод Фибоначчи

Положим  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\delta = \varepsilon_x = 0,05$ . Определим порядок числа Фибоначчи  $N$ . Из (2.20, [1]) имеем

$$F_N = \frac{b-a}{2\varepsilon_x} = \frac{8-(-3)}{2 \cdot 0,05} = 110,$$

т. к.  $F_{11} = 144 > 100$ , то  $N = 11$ .

I. Первый этап.

Итерация № 1:  $k = 0$ ,  $a^0 = -3$ ,  $b^0 = 8$ ,

$$x_1^0 = a^0 + \Delta^0 \cdot \frac{F_{N-2}}{F_N} = -3 + (8 - (-3)) \cdot \frac{55}{144} \approx 1,201,$$

$$x_2^0 = a^0 + \Delta^0 \cdot \frac{F_{N-1}}{F_N} = -3 + (8 - (-3)) \cdot \frac{89}{144} \approx 3,799;$$

$$f(x_1^0) \approx 1,5676,$$

$$f(x_2^0) \approx 1,4504;$$

$$f(x_1^0) > f(x_2^0) \Rightarrow a^1 = x_1^0 \approx 1,201, \quad b^1 = b^0 = 8.$$

Согласно (2.15, [1]), точку  $x_2^0$  можно также получить следующим способом:

$$x_2^0 = b^0 - \Delta^0 \cdot \frac{F_{N-2}}{F_N} = 8 - (8 - (-3)) \cdot \frac{55}{144} = 3,799$$

или

$$x_2^0 = b + a - x_1^0 = 8 - 3 - 1,201 = 3,799.$$

Итерация № 2:  $k = 1$ ,  $a^1 \approx 1,201$ ,  $b^1 = 8$ ,

$$x_1^1 = a^1 + \Delta^1 \cdot \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}} \approx 1,201 + (8 - 1,201) \cdot \frac{34}{89} \approx 3,799 = x_2^0,$$

$$x_2^1 = a^1 + \Delta^1 \cdot \frac{F_{N-2}}{F_{N-1}} \approx 1,201 + (8 - 1,291) \cdot \frac{55}{89} \approx 5,403;$$

$$f(x_1^1) = f(x_2^0) \approx 1,4504,$$

$$f(x_2^1) \approx 1,4644;$$

$$f(x_1^1) < f(x_2^1) \Rightarrow a^2 = a^1 \approx 1,201, \quad b^2 = x_2^1 \approx 5,403.$$

Остальные итерации решения сведем в таблицу 2.2.

Таблица 2.2 – Первый этап решения задачи методом Фибоначчи

| $k$ | $a^k$ | $b^k$ | $x_1^k$ | $x_2^k$ | $f(x_1^k)$ | $f(x_2^k)$ |
|-----|-------|-------|---------|---------|------------|------------|
| 0   | -3    | 8     | 1,201   | 3,799   | 1,5676     | 1,4504     |
| 1   | 1,201 | 8     | 3,799   | 5,403   | 1,4504     | 1,4644     |

Окончание табл. 2.2

| $k$ | $a^k$ | $b^k$ | $x_1^k$ | $x_2^k$ | $f(x_1^k)$ | $f(x_2^k)$ |
|-----|-------|-------|---------|---------|------------|------------|
| 2   | 1,201 | 5,403 | 2,806   | 3,799   | 1,4658     | 1,4504     |
| 3   | 2,806 | 5,403 | 3,799   | 4,410   | 1,4504     | 1,4514     |
| 4   | 2,806 | 4,410 | 3,417   | 3,799   | 1,4534     | 1,4504     |
| 5   | 3,417 | 4,410 | 3,799   | 4,028   | 1,4504     | 1,45001    |
| 6   | 3,799 | 4,410 | 4,028   | 4,181   | 1,45001    | 1,45029    |
| 7   | 3,799 | 4,181 | 3,951   | 4,028   | 1,45002    | 1,45001    |
| 8   | 3,951 | 4,181 | 4,028   | 4,104   | 1,45001    | 1,45010    |
| 9   | 3,951 | 4,104 | 4,028   | 4,028   | 1,45001    | 1,45001    |

II. Второй этап.

Итерация № 6.  $k = 10$ ,  $a^{10} = a^9 \approx 3,951$ ,  $b^{10} = b^9 \approx 4,104$ ,

$$x_1^{10} = x_1^9 = x_2^9 \approx 4,028,$$

$$x_2^{10} = x_1^{10} + \delta \approx 4,078;$$

$$f(x_1^{10}) = f(x_1^9) = f(x_2^9) \approx 1,45001,$$

$$f(x_2^{10}) \approx 1,45005;$$

$$f(x_1^{10}) < f(x_2^{10}) \Rightarrow a^{11} = a^{10} \approx 3,951, \quad b^{11} = x_1^{10} \approx 4,028;$$

$$x^* = \frac{a^{11} + b^{11}}{2} \approx \frac{3,951 + 4,028}{2} \approx 3,990.$$

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx 3,99$  км. Погрешность по функции метод Фибоначчи контролировать не позволяет,  $f^* \approx 1,45$  ч.

#### 2.2.4 Метод золотого сечения

Положим  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ .Шаг 1.1.  $k = 0$ ,  $a^0 = -3$ ,  $b^0 = 8$ ,

$$\bar{x}^0 = \frac{a^0 + b^0}{2} = \frac{-3 + 8}{2} = 2,5.$$

Шаг 1.2. Находим

$$x_1^0 = b^0 - \frac{\Delta^0}{\gamma} = 8 - \frac{8 - (-3)}{\gamma} \approx 1,202,$$

$$x_2^0 = a^0 + \frac{\Delta^0}{\gamma} = -3 + \frac{8 - (-3)}{\gamma} \approx 3,798,$$

Шаг 1.3.  $f(x_1^0) \approx 1,5676$ ,  $f(x_2^0) \approx 1,4504$ .

Шаг 1.4.  $f(x_1^0) > f(x_2^0)$ , поэтому  $a^1 = x_1^0 = 1,202$ ,  $b^1 = b^0 = 8$ ,

$$\bar{x}^1 = \frac{a^1 + b^1}{2} \approx \frac{1,202 + 8}{2} \approx 4,601.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{\Delta^1}{2} \approx \frac{8 - 1,202}{2} \approx 3,399 > \varepsilon_x, \quad |f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^0)| \approx 0,0233 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Находим

$$x_1^1 = b^1 - \frac{\Delta^1}{\gamma} \approx 8 - \frac{8 - 1,202}{\gamma} \approx 3,798,$$

$$x_2^1 = a^1 + \frac{\Delta^1}{\gamma} \approx 1,202 + \frac{8 - 1,202}{\gamma} \approx 5,403.$$

Шаг 2.3.  $f(x_1^1) \approx 1,4504$ ,  $f(x_2^1) \approx 1,4644$ .

Шаг 2.4.  $f(x_1^1) < f(x_2^1)$ , поэтому  $a^2 = a^1 = 1,202$ ,  $b^2 = x_2^1 = 5,403$ ,

$$\bar{x}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \approx \frac{1,202 + 5,403}{2} \approx 3,302.$$

Шаг 2.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{\Delta^2}{2} \approx \frac{5,403 - 1,202}{2} \approx 2,101 > \varepsilon_x, \quad |f(\bar{x}^2) - f(\bar{x}^1)| \approx 1,958 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Остальные итерации решения сведем в таблицу 2.3.

Таблица 2.3 – Решение задачи методом золотого сечения

| $k$ | $a^k, b^k$     | $\bar{x}^k$ | $f(\bar{x}^k)$ | $x_1^k, x_2^k$ | $f(x_1^k),$<br>$f(x_2^k)$ | $\frac{\Delta^k}{2}$ | $ \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|----------------|-------------|----------------|----------------|---------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 0   | -3<br>8        | 2,5         | 1,476          | 1,202<br>3,798 | 1,5676<br>1,4504          | 5,5                  | 0,0233                        |
| 1   | 1,202<br>8     | 4,601       | 1,453          | 3,798<br>5,403 | 1,4504<br>1,4644          | 3,399                | $1,958 \times 10^{-3}$        |
| 2   | 1,202<br>5,403 | 3,302       | 1,455          | 2,807<br>3,798 | 1,4657<br>1,4504          | 2,101                | $4,821 \times 10^{-3}$        |
| 3   | 2,807<br>5,403 | 4,105       | 1,4501         | 3,798<br>4,411 | 1,4504<br>1,4514          | 1,298                | $1,370 \times 10^{-3}$        |
| 4   | 2,807<br>4,411 | 3,609       | 1,4510         | 3,420<br>3,798 | 1,4533<br>1,4504          | 0,802                | $1,402 \times 10^{-3}$        |
| 5   | 3,420<br>4,411 | 3,915       | 1,4501         | 3,798<br>4,033 | 1,4504<br>1,45001         | 0,496                | $3,214 \times 10^{-5}$        |
| 6   | 3,798<br>4,411 | 4,105       | 1,4501         | 4,033<br>4,177 | 1,45001<br>1,45027        | 0,307                | $9,602 \times 10^{-5}$        |
| 7   | 3,798<br>4,177 | 3,988       | 1,450001       | 3,943<br>4,033 | 1,45003<br>1,45001        | 0,189                | $3,092 \times 10^{-5}$        |
| 8   | 3,943<br>4,177 | 4,060       | 1,450032       | 4,033<br>4,088 | 1,45001<br>1,45007        | 0,117                | $3,012 \times 10^{-5}$        |
| 9   | 3,943<br>4,088 | 4,015       | 1,450002       | 3,988<br>4,033 | 1,45000<br>1,45001        | 0,0724               | $7,994 \times 10^{-7}$        |
| 10  | 3,943<br>4,033 | 3,988       | 1,450001       |                |                           | 0,0447               |                               |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* = \bar{x}^{10} \approx 3,99$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}^{10}) \approx 1,450$  ч.

## 2.3 Полиномиальная аппроксимация и методы точечного оценивания

Решим задачу поиска оптимального маршрута лодки

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{5-x}{5} \rightarrow \min.$$

### 2.3.1 Квадратичная аппроксимация

Оценим координаты минимума ЦФ на интервале  $x \in [0; 5]$ . Пусть  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 5$ ,  $x_2 = \frac{0+5}{2} = 2,5$ . Вычислим соответствующие значения функции:  $f_1 = 1,75$ ,  $f_2 \approx 1,476$ ,  $f_3 = 1,458$ . Далее находим параметры  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Имеем:

$$a_0 = 1,75; \quad a_1 \approx \frac{1,476 - 1,75}{2,5 - 0} \approx -0,109;$$

$$a_2 \approx \frac{1}{5 - 2,5} \cdot \left[ \frac{1,458 - 1,75}{5 - 0} - (-0,109) \right] \approx 0,0204.$$

Таким образом, на интервале  $[0; 5]$  функцию, определяющую время лодки в пути, можно аппроксимировать функцией

$$q(x) = 1,75 - 0,109x + 0,0204x(x - 2,5).$$

Подставляя эти значения в выражение (2.38, [1]), получим точку минимума функции  $q(x)$ :

$$\bar{x} \approx \frac{2,5 + 0}{2} + \frac{0,109}{2 \cdot 0,0204} \approx 3,932 \text{ км},$$

$$f(\bar{x}) \approx 1,45004 \text{ ч.}$$

В данном случае получили достаточно точное приближение точки экстремума  $x^* = 4$  (рис. 2.2). Однако это – следствие удачного выбора точек для аппроксимации. При выборе других точек полученная парабола может  $q(x)$  сильно отличаться от исходной функции  $f(x)$ , а точка минимума параболы будет сильно отличаться от точки  $x^*$ .

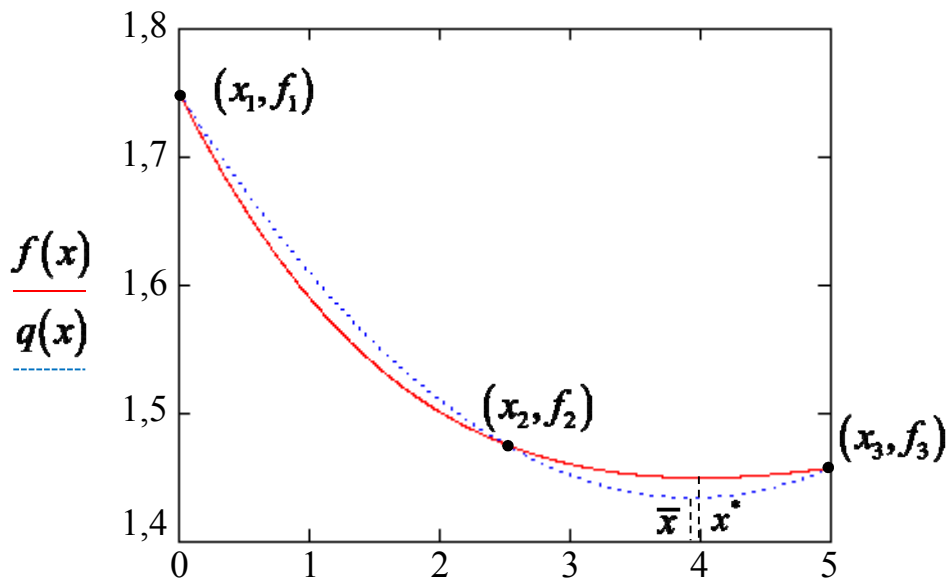


Рис. 2.2 – Результаты квадратичной аппроксимации

### 2.3.2 Метод Пауэлла

Положим  $x^0 = 2,5$ ,  $\Delta x = 5,5$ ,  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ .

Шаг 1.1.  $k = 0$ ,  $x_1^0 = x^0 = 2,5$ ,  $x_2^0 = x_1^0 + \Delta x = 2,5 + 5,5 = 8$ .

Шаг 1.2.  $f_1^0 = f(x_1^0) \approx 1,476$ ,  $f_2^0 = f(x_2^0) \approx 1,536$ .

Шаг 1.3.  $f_1^0 < f_2^0$ , поэтому

$$x_3^0 = x_1^0 - \Delta x = 2,5 - 5,5 = -3, \quad f_3^0 = f(x_3^0) \approx 2,661.$$

Так как  $x_3^0 < x_1^0$ , перенумеруем точки в естественном порядке:  $x_1^0 = -3$ ,  $x_2^0 = 2,5$ ,  $x_3^0 = 8$ ,  $f_1^0 \approx 2,661$ ,  $f_2^0 \approx 1,476$ ,  $f_3^0 \approx 1,536$ . Таким образом, получили тот же интервал  $[-3; 8]$ , на котором искали точку экстремума интервальными методами. Отметим, что если положить  $x^0 = -3$ , результат будет аналогичным ( $x^0 + \Delta x = 2,5$ ,  $x^0 + 2\Delta x = 8$ ).

Шаг 1.4.  $f_{\min} = f_2^0 \approx 1,476$ ,  $x_{\min} = x_2^0 = 2,5$ .

Шаг 1.5. Квадратичная аппроксимация:

$$\begin{aligned} a_0 &\approx 2,661, \quad a_1 \approx \frac{1,476 - 2,661}{2,5 - (-3)} \approx -0,215, \\ a_2 &\approx \frac{1}{8 - 2,5} \left( \frac{1,536 - 2,661}{8 - (-3)} - (-0,215) \right) \approx 0,0206, \\ \bar{x} &\approx \frac{2,5 + (-3)}{2} - \frac{-0,216}{2 \cdot 0,0206} \approx 4,986, \quad f(\bar{x}) \approx 1,458. \end{aligned}$$

Точка  $\bar{x} \in [x_1^0, x_3^0]$ , дополнительная проверка не требуется.

Шаг 1.6. Условия окончания поиска не выполняются:

$$|x_{\min} - \bar{x}| \approx |2,5 - 4,986| \approx 2,486 > \varepsilon_x, \quad |f_{\min} - f(\bar{x})| \approx 0,0187 > \varepsilon_y.$$

Шаг 1.7. Так как  $f(\bar{x}) < f_{\min}$ , то наилучшей точкой является  $\bar{x}$ , ее окружают точки  $x_2^0$  и  $x_3^0$ . Поэтому  $x_1^1 = x_2^0 = 2,5$ ,  $x_2^1 = \bar{x} \approx 4,986$ ,  $x_3^1 = x_3^0 = 8$ ,  $f_1^1 \approx 1,476$ ,  $f_2^1 \approx 1,458$ ,  $f_3^1 \approx 1,536$ . Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 4.

Шаг 2.4.  $f_{\min} = f_2^1 \approx 1,458$ ,  $x_{\min} = x_2^1 = 4,986$ .

Шаг 2.5. Квадратичная аппроксимация:

$$\begin{aligned} a_0 &\approx 1,476, \quad a_1 \approx \frac{1,458 - 1,476}{4,986 - 2,5} \approx -7,540 \cdot 10^{-3}, \\ a_2 &\approx \frac{1}{8 - 4,986} \left( \frac{1,536 - 1,476}{8 - 2,5} - (-7,540 \cdot 10^{-3}) \right) \approx 6,104 \cdot 10^{-3}, \end{aligned}$$

$$\bar{x} \approx \frac{4,986 + 2,5}{2} - \frac{-7,540 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 6,104 \cdot 10^{-3}} \approx 4,361, \quad f(\bar{x}) \approx 1,451.$$

Точка  $\bar{x} \in [x_1^1, x_3^1]$ , дополнительная проверка не требуется.

Шаг 2.6. Условия окончания поиска не выполняются:

$$|x_{\min} - \bar{x}| \approx |4,986 - 4,361| \approx 0,625 > \varepsilon_x, \quad |f_{\min} - f(\bar{x})| \approx 6,432 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_y.$$

Шаг 2.7. Так как  $f(\bar{x}) < f_{\min}$ , то наилучшей точкой является  $\bar{x}$ , ее окружают точки  $x_1^1$  и  $x_2^1$ . Поэтому  $x_1^2 = x_1^1 = 2,5$ ,  $x_2^2 = \bar{x} \approx 4,361$ ,  $x_3^2 = x_2^1 \approx 4,986$ ,  $f_1^2 \approx 1,476$ ,  $f_2^2 \approx 1,451$ ,  $f_3^2 \approx 1,458$ . Полагаем  $k = 2$ , возвращаемся на шаг 4.

$$\text{Шаг 3.4. } f_{\min} = f_2^2 \approx 1,451, \quad x_{\min} = x_2^2 = 4,361.$$

Шаг 3.5. Квадратичная аппроксимация:

$$\begin{aligned} a_0 &\approx 1,476, \quad a_1 \approx \frac{1,451 - 1,476}{4,361 - 2,5} \approx -0,0135, \\ a_2 &\approx \frac{1}{4,986 - 4,361} \left( \frac{1,458 - 1,476}{4,986 - 2,5} - (-0,0135) \right) \approx 9,580 \cdot 10^{-3}, \\ \bar{x} &\approx \frac{4,361 + 2,5}{2} - \frac{-0,0135}{2 \cdot 9,580 \cdot 10^{-3}} \approx 4,137, \quad f(\bar{x}) \approx 1,4502. \end{aligned}$$

Точка  $\bar{x} \in [x_1^2, x_3^2]$ , дополнительная проверка не требуется.

Шаг 3.6. Условия окончания поиска не выполняются:

$$|x_{\min} - \bar{x}| \approx |4,361 - 4,137| \approx 0,224 > \varepsilon_x, \quad |f_{\min} - f(\bar{x})| \approx 9,418 \cdot 10^{-4} < \varepsilon_y.$$

Шаг 3.7. Так как  $f(\bar{x}) < f_{\min}$ , то наилучшей точкой является  $\bar{x}$ , ее окружают точки  $x_1^2$  и  $x_2^2$ . Поэтому  $x_1^3 = x_1^2 = 2,5$ ,  $x_2^3 = \bar{x} \approx 4,137$ ,  $x_3^3 = x_2^2 \approx 4,361$ ,  $f_1^3 \approx 1,476$ ,  $f_2^3 \approx 1,4502$ ,  $f_3^3 \approx 1,451$ . Полагаем  $k = 3$ , возвращаемся на шаг 4.

$$\text{Шаг 4.4. } f_{\min} = f_2^3 \approx 1,4502, \quad x_{\min} = x_2^3 = 4,137.$$

Шаг 4.5. Квадратичная аппроксимация:

$$a_0 \approx 1,476, \quad a_1 \approx \frac{1,4502 - 1,476}{4,137 - 2,5} \approx -0,0160,$$

$$a_2 \approx \frac{1}{4,361 - 4,137} \left( \frac{1,451 - 1,476}{4,361 - 2,5} - (-0,0160) \right) \approx 0,0108,$$

$$\bar{x} \approx \frac{4,137 + 2,5}{2} - \frac{-0,0160}{2 \cdot 0,0108} \approx 4,055, \quad f(\bar{x}) \approx 1,45003.$$

Точка  $\bar{x} \in [x_1^3, x_3^3]$ , дополнительная проверка не требуется.

Шаг 4.6. Условия окончания поиска не выполняются:

$$|x_{\min} - \bar{x}| \approx |4,137 - 4,055| \approx 0,0819 > \varepsilon_x, \quad |f_{\min} - f(\bar{x})| \approx 1,375 \cdot 10^{-4} < \varepsilon_y.$$

Шаг 4.7. Так как  $f(\bar{x}) < f_{\min}$ , то наилучшей точкой является  $\bar{x}$ , ее окружают точки  $x_1^3$  и  $x_2^3$ . Поэтому  $x_1^4 = x_1^3 = 2,5$ ,  $x_2^4 = \bar{x} \approx 4,055$ ,  $x_3^4 = x_2^3 \approx 4,137$ ,  $f_1^4 \approx 1,476$ ,  $f_2^4 \approx 1,45003$ ,  $f_3^4 \approx 1,4502$ . Полагаем  $k = 4$ , возвращаемся на шаг 4.

Шаг 5.4.  $f_{\min} = f_2^4 \approx 1,45003$ ,  $x_{\min} = x_2^4 = 4,055$ .

Шаг 5.5. Квадратичная аппроксимация:

$$a_0 \approx 1,476, \quad a_1 \approx \frac{1,45003 - 1,476}{4,055 - 2,5} \approx -0,0169,$$

$$a_2 \approx \frac{1}{4,137 - 4,055} \left( \frac{1,4502 - 1,476}{4,137 - 2,5} - (-0,0169) \right) \approx 0,0113,$$

$$\bar{x} \approx \frac{4,055 + 2,5}{2} - \frac{-0,0169}{2 \cdot 0,0113} \approx 4,022, \quad f(\bar{x}) \approx 1,450004.$$

Точка  $\bar{x} \in [x_1^4, x_3^4]$ , дополнительная проверка не требуется.

Шаг 5.6. Условия окончания поиска выполняются:

$$|x_{\min} - \bar{x}| \approx |4,055 - 4,022| \approx 0,0331 < \varepsilon_x, \quad |f_{\min} - f(\bar{x})| \approx 2,244 \cdot 10^{-5} < \varepsilon_y.$$

Так как  $f(\bar{x}) < f_{\min}$ , то  $x^* = \bar{x}$ ,  $f^* = f(\bar{x})$ . С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:

$x^* = \bar{x} \approx 4,02$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}) \approx 1,450$  ч.

## 2.4 Методы с использованием производных

Решим задачу поиска оптимального маршрута лодки:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{5-x}{5} \rightarrow \min.$$

Минимум будем искать на интервале  $[-3, 8]$ . Первую и вторую производные ЦФ мы уже находили ранее:

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5},$$

$$f''(x) = \frac{9}{4\sqrt{(x^2 + 9)^3}}.$$

Также найдем третью производную:

$$f'''(x) = -\frac{27x}{4\sqrt{(x^2 + 9)^5}}.$$

### 2.4.1 Метод Ньютона – Рафсона

Положим  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ .

Шаг 1.1. Полагаем  $k = 0$  и выбираем начальную точку. Проверим выполнение критерия (2.42, [1]) на границах отрезка:

$$f'(-3) \cdot f'''(-3) \approx -5,550 \cdot 10^{-3} < 0,$$

$$f'(8) \cdot f'''(8) \approx -4,042 \cdot 10^{-5} < 0,$$

т. е. обе точки критерию не удовлетворяют. Проверим середину отрезка:

$$f'(2,5) \cdot f'''(2,5) \approx 7,424 \cdot 10^{-4} > 0,$$

следовательно,  $x^0 = 2,5$ ,  $f(x^0) \approx 1,476$ ,  $f'(x^0) \approx -0,0400$ ,  $f''(x^0) \approx 0,0378$ .

Далее ищем точку экстремума:

Шаг 1.2. Находим

$$x^1 = x^0 - \frac{f'(x^0)}{f''(x^0)} \approx 2,5 - \frac{-0,0400}{0,0378} \approx 3,558.$$

Шаг 1.3. Вычисляем  $f(x^1) \approx 1,452$ ,  $f'(x^1) \approx -8,884 \cdot 10^{-3}$ ,  $f''(x^1) \approx 0,0223$ .

Шаг 1.4. Условия окончания итерационного процесса не выполняются:

$$|x^1 - x^0| \approx 1,058 > \varepsilon_x, \quad |f'(x^1)| = 8,884 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Находим

$$x^2 = x^1 - \frac{f'(x^1)}{f''(x^1)} \approx 3,558 - \frac{-8,884 \cdot 10^{-3}}{0,0223} \approx 3,955.$$

Шаг 2.3. Вычисляем  $f(x^2) \approx 1,45002$ ,  $f'(x^2) \approx -8,115 \cdot 10^{-4}$ ,  $f''(x^2) \approx 0,0184$ .

Шаг 2.4. Условия окончания итерационного процесса не выполняются:

$$|x^2 - x^1| \approx 0,398 > \varepsilon_x, \quad |f'(x^2)| = 8,115 \cdot 10^{-4} < \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$ , и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 3.2. Находим

$$x^3 = x^2 - \frac{f'(x^2)}{f''(x^2)} \approx 3,955 - \frac{-8,115 \cdot 10^{-4}}{0,0184} \approx 3,9995.$$

Шаг 3.3. Вычисляем  $f(x^3) \approx 1,45000$ ,  $f'(x^3) \approx -8,551 \cdot 10^{-6}$ ,  $f''(x^3) \approx 0,0184$ .

Шаг 3.4. Условия окончания итерационного процесса выполняются:

$$|x^3 - x^2| \approx 0,0441 < \varepsilon_x, \quad |f'(x^3)| = 8,551 \cdot 10^{-6} < \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $\bar{x} = x^3 \approx 3,9995$  и переходим на шаг 5.

Шаг 3.5. Выполним классификацию найденной точки. Например, проверим знак второй производной:

$$f''(\bar{x}) \approx 0,0184 > 0,$$

следовательно, получена точка минимума. С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* = \bar{x} \approx 4,00$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(x^3) \approx 1,450$  ч.

Иногда на отрезке  $[a, b]$  трудно найти точку, в которой выполняется критерий (2.42, [1]). Если такую точку найти не удалось, то сходимость метода не гарантирована. Например, примем  $x^0 = a = -3$ .

| $k$ | $x^k$  | $f(x^k)$ | $f'(x^k)$ | $f''(x^k)$             | $ x^{k+1} - x^k $ | $ f'(x^{k+1}) $ |
|-----|--------|----------|-----------|------------------------|-------------------|-----------------|
| 0   | -3     | 2,661    | -0,377    | $2,946 \times 10^{-2}$ | 12,79             | 0,0390          |
| 1   | 9,788  | 1,602    | 0,0390    | $2,097 \times 10^{-3}$ | 18,61             | 0,437           |
| 2   | -8,823 | 5,094    | -0,437    | $2,781 \times 10^{-3}$ | 157,1             | 0,0499          |
| 3   | 148,2  | 8,419    | 0,0499    | $6,904 \times 10^{-7}$ | ...               | ...             |

Процесс расходится. Примем  $x^0 = b = 8$ .

| $k$ | $x^k$  | $f(x^k)$ | $f'(x^k)$ | $f''(x^k)$             | $ x^{k+1} - x^k $ | $ f'(x^{k+1}) $        |
|-----|--------|----------|-----------|------------------------|-------------------|------------------------|
| 0   | 8      | 1,536    | 0,0341    | $3,607 \times 10^{-3}$ | 9,488             | 0,309                  |
| 1   | -1,448 | 2,122    | -0,309    | $6,087 \times 10^{-2}$ | 5,071             | $7,451 \times 10^{-3}$ |
| 2   | 3,623  | 1,451    | -0,00745  | $2,162 \times 10^{-2}$ | 0,345             | $5,929 \times 10^{-4}$ |
| 3   | 3,967  | 1,45     | ...       | ...                    | ...               | ...                    |

Видно, что в данном случае процесс сходится. Но для гарантированного схождения все же требуется выполнение данного критерия. Его можно рассматривать как неравенство. Точки, удовлетворяющие этому неравенству, подходят для начала итерационного процесса. Решим неравенство (2.42, [1]) для данной задачи:

$$f'(x) \cdot f'''(x) = \left( \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} \right) \cdot \left( -\frac{27x}{4\sqrt{(x^2+9)^5}} \right) > 0.$$

Третья производная меняет свой знак в точке  $x=0$  – она отрицательна на интервале  $(0, +\infty)$  и положительна на интервале  $(-\infty, 0)$ . Исследуем знак первой производной:

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 4.$$

Первая производная меняет свой знак в точке  $x=4$  – она отрицательна на интервале  $(-\infty, 4)$  и положительна на интервале  $(4, +\infty)$ . То есть знаки первой и третьей производной совпадают только на интервале  $(0, 4)$ . Выбор начальной точки из этого интервала гарантирует сходимость.

#### 2.4.2 Метод средней точки (поиск Больцано)

Положим  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ .

Шаг 1.1.  $k=0$ ,  $a^0 = -3$ ,  $b^0 = 8$ .

Шаг 1.2.  $\bar{x}^0 = \frac{a^0 + b^0}{2} = \frac{-3+8}{2} = 2,5$ ,  $f'(\bar{x}^0) \approx -0,040$ .

Шаг 1.3. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{b^0 - a^0}{2} = \frac{8 - (-3)}{2} = 5,5 > \varepsilon_x, \quad |f'(\bar{x}^0)| \approx 0,0400 > \varepsilon_y.$$

Так как  $f'(\bar{x}^0) < 0$ , то  $a^1 = \bar{x}^0 = 2,5$ ,  $b^1 = b^0 = 8$ . Полагаем  $k=1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2.  $\bar{x}^1 = \frac{a^1 + b^1}{2} = \frac{2,5+8}{2} = 5,25$ ,  $f'(\bar{x}^1) \approx 0,0171$ .

Шаг 2.3. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\frac{b^1 - a^1}{2} = \frac{8 - 2,5}{2} = 2,75 > \varepsilon_x, \quad |f'(\bar{x}^1)| \approx 0,0171 > \varepsilon_y.$$

Так как  $f'(\bar{x}^1) > 0$ , то  $a^2 = a^1 = 2,5$ ,  $b^2 = \bar{x}^1 = 5,25$ . Полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Остальные итерации решения сведем в таблицу 2.4.

Таблица 2.4 – Решение задачи методом дихотомии

| $k$ | $a^k$ | $b^k$ | $\bar{x}^k$ | $f(\bar{x}^k)$ | $f'(\bar{x}^k)$         | $\frac{b^k - a^k}{2}$ |
|-----|-------|-------|-------------|----------------|-------------------------|-----------------------|
| 0   | -3    | 8     | 2,5         | 1,476          | $-3,995 \times 10^{-2}$ | 5,5                   |
| 1   | 2,5   | 8     | 5,25        | 1,462          | $1,706 \times 10^{-2}$  | 2,75                  |
| 2   | 2,5   | 5,25  | 3,875       | 1,4501         | $-2,319 \times 10^{-3}$ | 1,375                 |
| 3   | 3,875 | 5,25  | 4,563       | 1,4526         | $8,889 \times 10^{-3}$  | 0,688                 |
| 4   | 3,875 | 4,563 | 4,219       | 1,4504         | $3,739 \times 10^{-3}$  | 0,344                 |
| 5   | 3,875 | 4,219 | 4,047       | 1,45002        | $8,343 \times 10^{-4}$  | 0,172                 |
| 6   | 3,875 | 4,047 | 3,961       | 1,45001        | $7,098 \times 10^{-4}$  | 0,0859                |
| 7   | 3,961 | 4,047 | 4,004       | 1,45           | $7,025 \times 10^{-5}$  | 0,0430                |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* = \bar{x}^7 \approx 4,00$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}^7) \approx 1,450$  ч.

## 2.5 Метод поиска с использованием кубической аппроксимации

Решим задачу поиска оптимального маршрута лодки:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{5 - x}{5} \rightarrow \min.$$

Положим  $x^0 = -3$ ,  $\Delta = 5,5$ ,  $\varepsilon_x = 0,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ , переходим на шаг 2.

Шаг 1.2. Полагаем  $\bar{x}^0 = x^0 = -3$ . Вычисляем  $f'(\bar{x}^0) = f'(-3) \approx -0,377$

. Следовательно,  $x_1^0 = \bar{x}^0 = -3$ . Далее определим  $x_2^0$ :

$$- \text{ при } m=0 \quad f'(\bar{x}^0 + 2^m \cdot \Delta) = f'(-3 + 2^0 \cdot 5,5) = f'(2,5) \approx -0,0400 < 0;$$

$$- \text{ при } m=1 \quad f'(\bar{x}^0 + 2^m \cdot \Delta) = f'(-3 + 2^1 \cdot 5,5) = f'(8) \approx 0,0341 > 0.$$

Таким образом,  $x_2^0 = 8$ . Переходим на шаг 4. Заметим, что такой же результат был бы получен, если бы для поиска минимума интервал  $[-3; 8]$  был бы задан изначально.

Шаг 1.4. Находим точку минимума кубического полинома  $F(x)$ , построенного по точкам  $x_1^0$  и  $x_2^0$ :

$$f_1 = f(x_1^0) = f(-3) \approx 2,661, \quad f_2 = f(x_2^0) = f(8) \approx 1,536,$$

$$f'_1 = f'(x_1^0) = f'(-3) \approx -0,377, \quad f'_2 = f'(x_2^0) = f'(8) \approx 0,0341,$$

$$z = \frac{3 \cdot (f_1 - f_2)}{x_2^0 - x_1^0} + f'_1 + f'_2 \approx \frac{3 \cdot (2,661 - 1,536)}{8 - (-3)} - 0,377 + 0,0341 \approx -0,0360,$$

$$w = \sqrt{z^2 - f'_1 f'_2} \approx \sqrt{(-0,0360)^2 - (-0,377) \cdot 0,0341} \approx 0,119,$$

$$\mu = \frac{f'_2 + w - z}{f'_2 - f'_1 + 2w} \approx \frac{0,0341 + 0,119 - (-0,0360)}{0,0341 - (-0,377) + 2 \cdot 0,119} \approx 0,291,$$

$$\bar{x}^1 = x_2^0 - \mu(x_2^0 - x_1^0) \approx 8 - 0,291 \cdot (8 - (-3)) \approx 4,796.$$

Шаг 1.5. Вычисляем  $f'(\bar{x}^1) \approx f'(4,796) \approx 0,0119 > 0$ , поэтому

$$x_1^1 = x_1^0 = -3, \quad x_2^1 = \bar{x}^1 \approx 4,796.$$

Шаг 1.6. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$|\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \approx |4,796 - (-3)| \approx 7,796 > \varepsilon_x, \quad |f'(\bar{x}^1)| \approx 1,195 \cdot 10^{-2} > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k=1$  и возвращаемся на шаг 4.

Шаг 2.4. Находим точку минимума кубического полинома  $F(x)$ , построенного по точкам  $x_1^1$  и  $x_2^1$ :

$$f_1 = f(x_1^1) = f(-3) \approx 2,661, \quad f_2 = f(x_2^1) \approx f(4,796) \approx 1,455,$$

$$f'_1 = f'(x_1^1) = f'(-3) \approx -0,377, \quad f'_2 = f'(x_2^1) = f'(4,796) \approx 0,0119,$$

$$z = \frac{3 \cdot (f_1 - f_2)}{x_2^1 - x_1^1} + f'_1 + f'_2 \approx \frac{3 \cdot (2,661 - 1,455)}{4,796 - (-3)} - 0,377 + 0,0119 \approx 0,0991,$$

$$w = \sqrt{z^2 - f'_1 f'_2} \approx \sqrt{0,0991^2 - (-0,377) \cdot 0,0119} \approx 0,120,$$

$$\mu = \frac{f'_2 + w - z}{f'_2 - f'_1 + 2w} \approx \frac{0,0119 + 0,120 - 0,0991}{0,0119 - (-0,377) + 2 \cdot 0,120} \approx 0,0518,$$

$$\bar{x}^2 = x_2^1 - \mu(x_2^1 - x_1^1) \approx 4,796 - 0,0518 \cdot (4,796 - (-3)) \approx 4,392.$$

Шаг 2.5. Вычисляем  $f'(\bar{x}^2) \approx f'(4,392) \approx 0,00644 > 0$ , поэтому

$$x_1^2 = x_1^1 = -3, \quad x_2^2 = \bar{x}^2 \approx 4,392.$$

Шаг 2.6. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$|\bar{x}^2 - \bar{x}^1| \approx |4,392 - 4,796| \approx 0,404 > \varepsilon_x, \quad |f'(\bar{x}^2)| \approx 6,440 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 4.

Остальные итерации решения сведем в таблицу 2.5.

Таблица 2.5 – Решение задачи методом кубической аппроксимации

| $k$ | $x_1^k, x_2^k$ | $f(x_1^k),$<br>$f(x_2^k)$ | $f'(x_1^k),$<br>$f'(x_2^k)$ | $z,$<br>$w,$<br>$\mu$     | $\bar{x}^{k+1}$ | $ \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k $ | $ f'(\bar{x}^{k+1}) $  |
|-----|----------------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|-----------------|-------------------------------|------------------------|
| 0   | -3<br>8        | 2,661<br>1,536            | -0,377<br>0,0341            | -0,0360<br>0,119<br>0,291 | 4,796           | 7,796                         | $1,195 \times 10^{-2}$ |

Окончание табл. 2.5

| $k$ | $x_1^k, x_2^k$ | $f(x_1^k),$<br>$f(x_2^k)$ | $f'(x_1^k),$<br>$f'(x_2^k)$      | $z,$<br>$w,$<br>$\mu$                   | $\bar{x}^{k+1}$ | $ \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k $ | $ f'(\bar{x}^{k+1}) $  |
|-----|----------------|---------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------|-----------------|-------------------------------|------------------------|
| 1   | -3<br>4,796    | 2,661<br>1,455            | -0,377<br>0,0119                 | 0,0991<br>0,120<br>0,0518               | 4,392           | 0,404                         | $6,440 \times 10^{-3}$ |
| 2   | -3<br>4,392    | 2,661<br>1,451            | -0,377<br>$6,440 \times 10^{-3}$ | 0,120<br>0,130<br>0,0251                | 4,207           | 0,185                         | $3,547 \times 10^{-3}$ |
| 3   | -3<br>4,207    | 2,661<br>1,4504           | -0,377<br>$3,547 \times 10^{-3}$ | 0,131<br>0,136<br>0,0132                | 4,112           | 0,0948                        | $1,966 \times 10^{-3}$ |
| 4   | -3<br>4,112    | 2,661<br>1,4501           | -0,377<br>$1,966 \times 10^{-3}$ | 0,136<br>0,139<br>$7,12 \times 10^{-3}$ | 4,062           | 0,0506                        | $1,092 \times 10^{-3}$ |
| 5   | -3<br>4,062    | 2,661<br>1,45003          | -0,377<br>$1,092 \times 10^{-3}$ | 0,139<br>0,140<br>$3,90 \times 10^{-3}$ | 4,034           | 0,0276                        | $6,073 \times 10^{-4}$ |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,05$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* = \bar{x}^6 \approx 4,03$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}^6) \approx 1,450$  ч.

### 3 ПРОЕКТИРОВАНИЕ КАНАЛА НАИМЕНЬШЕЙ ДЛИНЫ

#### 3.1 Постановка задачи

Итак, пусть в некоторой местности имеется озеро, южная часть которого по форме напоминает параболу  $y = x^2$ . Мимо озера протекает река. Русло реки пролегает по прямой между точками, расположенными на 2 км южнее и 2 км восточнее озера (рис. 3.1). Для водного сообщения между озером и рекой требуется построить канал. Чтобы минимизировать затраты на рытье канала, требуется минимизировать его длину. В каком месте нужно построить канал?

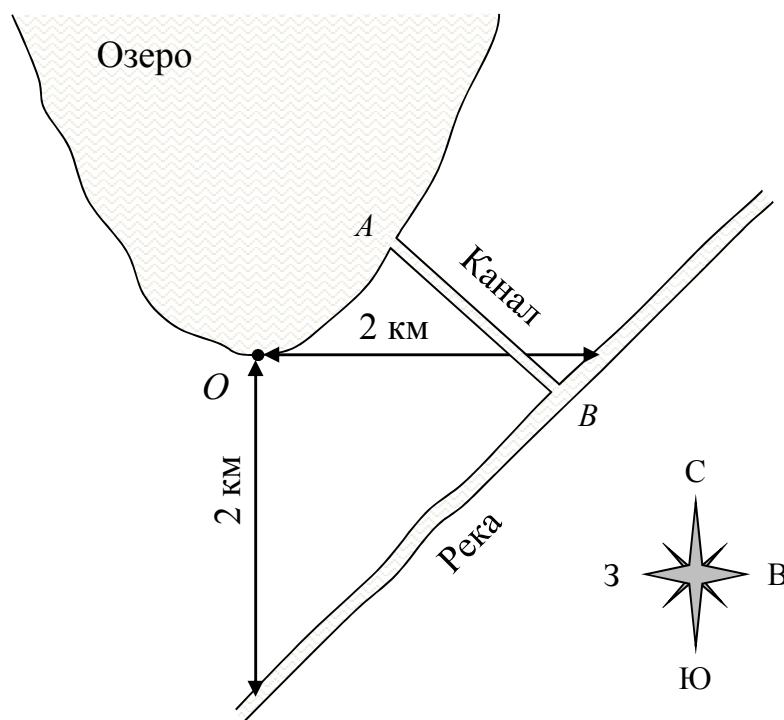


Рис. 3.1 – Графическое пояснение к задаче

Проведем анализ этой задачи. Во-первых, длина канала  $L$  зависит от двух параметров (рис. 3.2):

- расстояния  $l_1$  от южной оконечности озера  $O$  до точки  $A$  (места входа канала в озеро) в одном из направлений, например в восточном направлении;

– расстояния  $l_2$  от южной оконечности озера  $O$  до точки  $B$  (места входа канала в реку) в одном из направлений, например также в восточном направлении.

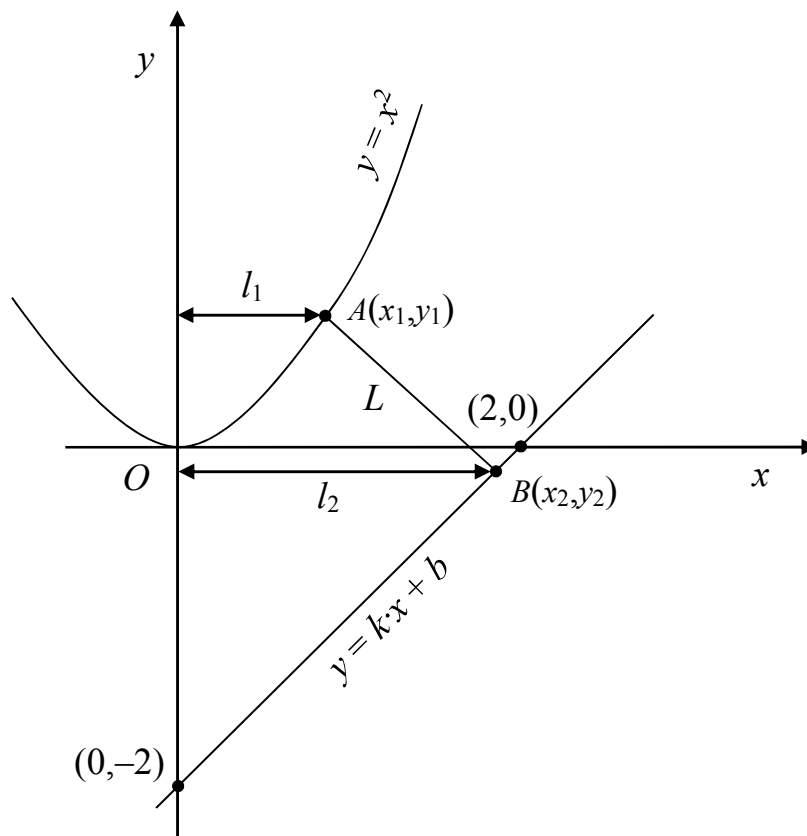


Рис. 3.2 – Анализ задачи

Вообще, у точек  $A$  и  $B$  четыре координаты, поэтому может показаться, что задача имеет 4 неизвестные. Но, учитывая то, что нам известна форма берега озера (парабола) и реки (прямая), одна из координат  $x$  или  $y$  зависима от другой. Поэтому независимых переменных остается две. Во-вторых, задача относится к классу задач безусловной оптимизации, т. к. никаких ограничений на параметры  $l_1$  и  $l_2$  не накладывается. Теоретически, эти величины даже могут быть отрицательными, если оптимальная точка впадения канала в озеро или реку окажется слева от точки  $O$ .

*Замечание.* В качестве переменных задачи можно было выбрать и другие величины. Учитывая, что река – это приблизительно прямая линия,

а минимальное расстояние от точки до прямой – это длина отрезка, перпендикулярного прямой и проходящего через заданную точку, то канал будет впадать в реку под прямым углом. Поэтому неизвестными задачи можно выбрать две координаты точки  $A$  (что определит координаты точки  $B$ ) или точки  $B$  (что определит координаты точки  $A$ ). Попробуйте составить ЦФ задачи для таких неизвестных.

Таким образом, имеем задачу безусловной оптимизации для функции многих переменных (функции векторного аргумента), или задачу многомерного поиска.

Составим ЦФ задачи. Примем южную оконечность озера  $O$  за начало координат. Тогда, учитывая, что точка  $A$  лежит на параболе  $y = x^2$ , ее координатами будут  $x_1 = l_1$ ,  $y_1 = l_1^2$ . Точка  $B$  лежит на некоторой прямой  $y = kx + b$ , поэтому ее координатами будут  $x_2 = l_2$ ,  $y_2 = k \cdot l_2 + b$ . Таким образом,

$$L(l_1, l_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + (l_1^2 - k \cdot l_2 - b)^2}.$$

Определим параметры прямой  $k$  и  $b$ . Запишем параметрическое уравнение прямой, проходящей через две произвольные точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

отсюда

$$y = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot (y_2 - y_1) + y_1.$$

В нашем случае первая точка, в двух километрах южнее точки  $O$ , будет иметь координаты  $(0, -2)$ , вторая, в двух километрах восточнее точки  $O$  –  $(2, 0)$ . Следовательно,

$$y = \frac{x-0}{2-0} \cdot (0 - (-2)) + (-2) = x - 2,$$

т. е.  $k = 1$ ,  $b = -2$ . Окончательно имеем

$$L(l_1, l_2) = \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + (l_1^2 - l_2 + 2)^2}.$$

Полученную функцию можно упростить – минимизировать не само расстояние, а квадрат расстояния, т. е. можно избавиться от корня:

$$L_{\text{кв}}(l_1, l_2) = (l_1 - l_2)^2 + (l_1^2 - l_2 + 2)^2.$$

На чем основано такое предположение? Во-первых, функция  $f(x) = \sqrt{x}$  является монотонно возрастающей. То есть  $\forall x_1 \leq x_2$  выполняется неравенство  $\sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}$ . Соответственно, если  $f(x) = \sqrt{g(x)}$ , то точки минимума функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , если они существуют, будут совпадать. Во-вторых, в данном случае обе функции  $f(x) = L(l_1, l_2)$  и  $g(x) = L_{\text{кв}}(l_1, l_2)$  являются непрерывными.

Класс монотонно возрастающих функций достаточно широк – это квадратный корень, логарифм, экспонента и т. д. Например, точка минимума непрерывной функции  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1$  будет совпадать с точками минимума функций  $f(x) = k_1 \cdot \sqrt{g(x)} + k_2$ ,  $f(x) = k_1 \cdot \ln g(x) + k_2$ ,  $f(x) = k_1 \cdot e^{g(x)} + k_2$  и т. д. Здесь  $k_1$  – некоторая положительная константа,  $k_2$  – константа произвольного знака (рис. 3.3).

Если функция является монотонно убывающей, то наоборот – точка минимума функции  $g(x)$  будет совпадать с точкой максимума функции  $f(x)$ , например,  $f(x) = k_1/g(x) \pm k_2$ . Однако, изменив знак монотонно убывающей функции, получим монотонно возрастающую функцию. Соответственно, функция  $f(x) = -k_1/g(x) \mp k_2$  является монотонно возрастающей, и точка ее минимума совпадает с точкой минимума функции  $g(x)$ .

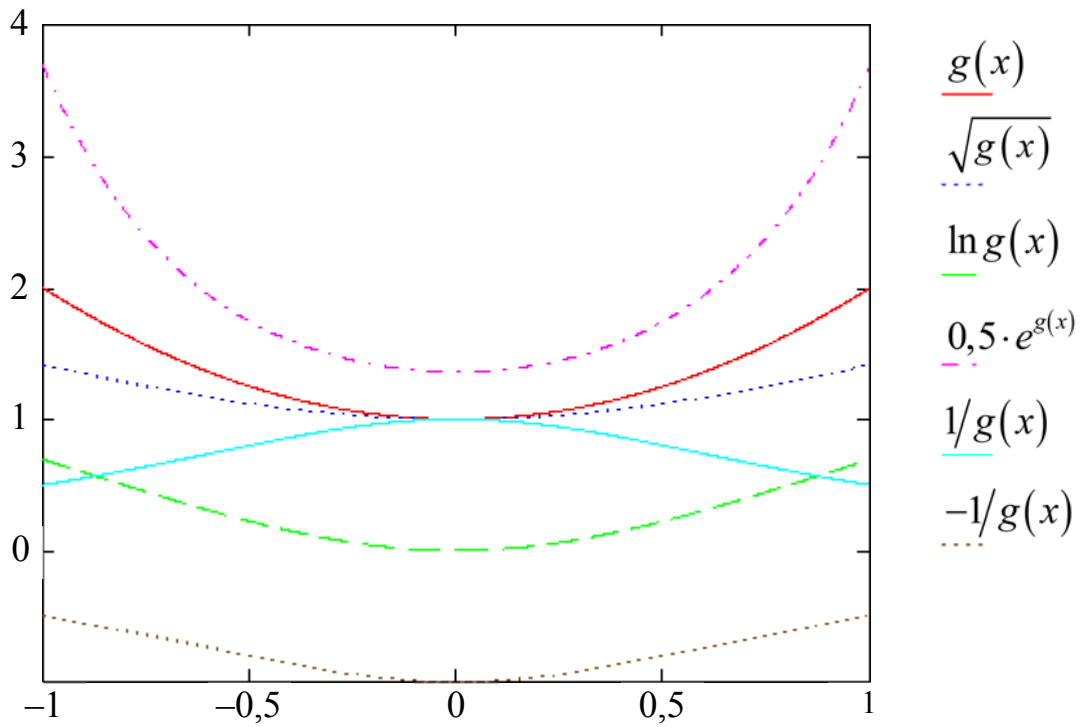


Рис. 3.3 – Совпадение точки минимума монотонных функций

Таким образом, окончательно получим задачу

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2 + 2)^2, \quad (3.1)$$

где аргумент  $x$  – векторный:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T.$$

Найдем оптимум данной задачи аналитически, решив систему уравнений

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0.$$

Выполняем дифференцирование:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) + 4x_1(x_1^2 - x_2 + 2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2) - 2(x_1^2 - x_2 + 2) = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + 1.$$

Подставляем в первое уравнение:

$$\begin{aligned} 2\left(x_1 - \left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + 1\right)\right) + 4x_1\left(x_1^2 - \left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + 1\right) + 2\right) = \\ = 2x_1^3 - 3x_1^2 + 5x_1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Решением этого уравнения будет  $x_1^* = 0,5$  км, следовательно,

$$x_2^* = \frac{1}{2} \cdot 0,25 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 + 1 = 1,375 \text{ км},$$

$$L_{\text{кв}}^* = f^* \approx 1,531 \text{ км}^2.$$

Классифицируем найденную точку – убедимся, что это минимум.

Найдем матрицу Гессе функции  $f(x)$ :

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4x_2 + 10 & -4x_1 - 2 \\ -4x_1 - 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим ее определенность в точке  $x^*$ :

$$H_f(x^*) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 0,5^2 - 4 \cdot 1,375 + 10 & -4 \cdot 0,5 - 2 \\ -4 \cdot 0,5 - 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = H_{11} = 7,5 > 0,$$

$$\Delta_2 = |H| = 7,5 \cdot 4 - (-4) \cdot (-4) = 14 > 0.$$

Матрица Гессе положительно определена, следовательно, имеем точку локального минимума. Можно показать, что  $L_{\text{кв}}^* = \inf L_{\text{кв}}$ , т. е. минимум одновременно является глобальным.

Таким образом, канал нужно построить между точками  $A(0,5; 0,25)$  и  $B(1,375; -0,625)$ . То есть точка  $A$  будет находиться на 500 м восточнее

и 250 м севернее южной оконечности озера, а точка  $B$  – на 1375 м восточнее и 625 м южнее. Длина канала составит

$$L^* = \sqrt{L_{\text{KB}}^*} \approx 1,237 \text{ км.}$$

Однако некоторые методы многомерной безусловной оптимизации работают только с квадратичными целевыми функциями, т. е. функциями вида (1.6, [1]). Это, например, метод сопряженных градиентов. Другие методы (такие как метод сопряженных направлений и т. д.) могут работать с любыми функциями, но для квадратичных функций гарантируют нахождение точного решения за фиксированное число шагов. Метод Ньютона и его модификации вообще гарантируют нахождение оптимального решения всего за одну итерацию, если ЦФ является строго выпуклой. В рассмотренной задаче ЦФ не является квадратичной, т. к. содержит члены вплоть до 4-й степени. Также она не является строго выпуклой, т. к. в зависимости от значения аргумента знак гессиана ЦФ может меняться. Поэтому в перечисленных методах используем следующую ЦФ:

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2x_2 + 2)^2. \quad (3.2)$$

Определим градиент и гессиан:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) + 2(x_1 - 2x_2 + 2) \\ -2(x_1 - x_2) - 4(x_1 - 2x_2 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_2 + 4 \\ -6x_1 + 10x_2 - 8 \end{pmatrix},$$

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Гессиан положительно определен на всем пространстве  $R^2$ :

$$\Delta_1 = 4 > 0,$$

$$\Delta_2 = 4 \cdot 10 - (-6) \cdot (-6) = 4 > 0,$$

поэтому функция выпуклая и имеет единственный локальный и одновременно глобальный экстремум – минимум. Таким образом, данная функция является квадратичной и строго выпуклой.

Если переписать ЦФ (3.2) в виде (1.6, [1]), то

$$A = H_f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix},$$

$$b = \nabla f(0) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 4 \\ -6 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$c = f(0) = (0 - 0)^2 + (0 - 2 \cdot 0 + 2)^2 = 4.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2x_2 + 2)^2 &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + \\ + x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 4 &= 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 4x_1 - 8x_2 + 4, \\ \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 4 = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_2 \\ -6x_1 + 10x_2 \end{pmatrix} + 4x_1 - 8x_2 + 4 = \\ &= \frac{1}{2} (4x_1^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2) + 4x_1 - 8x_2 + 4 = \\ &= 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 + 4, \end{aligned}$$

т. е. полученные выражения тождественны.

Найдем точку минимума:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_2 + 4 \\ -6x_1 + 10x_2 - 8 \end{pmatrix} = 0.$$

Имеем систему линейных уравнений, решением которой будет

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f^* = 0.$$

Геометрически данное решение можно интерпретировать как точку пересечения прямых  $y = x$  и  $y = 2x - 2$ .

Далее рассмотрим численные методы решения данных задач.

*Замечание.* Многие методы безусловной многомерной оптимизации в процессе решения требуют применения методов одномерной минимизации, например, для решения задач вида

$$\Phi(\lambda) \rightarrow \min, \quad (3.3)$$

или методов решения уравнений с одной переменной, например, для решения задач вида

$$\Phi'(\lambda) = 0. \quad (3.4)$$

Для решения задачи (3.3) можно применять рассмотренные в предыдущей главе численные методы одномерной оптимизации, а для решения задачи (3.4) – численные методы, изученные в рамках курса «Численные методы» или «Вычислительная математика». Однако применение вспомогательных численных методов вносит в решение дополнительные погрешности. Поэтому, если это возможно, задачи (3.3) и (3.4) следует решать аналитически. А если точного аналитического решения они не имеют или аналитическое решение затруднено – использовать специализированные математические пакеты (MathCAD, MATLAB и т. д.) или сервисы в сети Интернет (WolframAlpha и т. д.).

## 3.2 Методы прямого поиска

Решим задачу проектирования канала наименьшей длины

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2 + 2)^2.$$

Положим  $x^0 = (0; 0)^T$ ,  $\varepsilon_x = 0,02$ ,  $\varepsilon_y = 0,001$ . Аргумент ЦФ  $x \in R^2$ , поэтому  $n = 2$ .

### 3.2.1 Симплексный метод

Положим  $\Delta^0 = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ .

Шаг 1.1. Положим  $k = 0$ , вычислим

$$p_2 = \Delta^0 \cdot \frac{\sqrt{n+1} + n - 1}{n \cdot \sqrt{2}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2+1} + 2 - 1}{2 \cdot \sqrt{2}} \approx 0,966,$$

$$g_2 = \Delta^0 \cdot \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n \cdot \sqrt{2}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2+1} - 1}{2 \cdot \sqrt{2}} \approx 0,259,$$

$$V^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 \\ x_1^0 + p_2 & x_2^0 + g_2 \\ x_1^0 + g_2 & x_2^0 + p_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,966 & 0,259 \\ 0,259 & 0,966 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}^0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} V_i^0 \approx \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,966 \\ 0,259 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,259 \\ 0,966 \end{pmatrix} \right) \approx \begin{pmatrix} 0,408 \\ 0,408 \end{pmatrix},$$

$$f(\bar{x}^0) \approx 3,092.$$

Шаг 1.2. Вычисляем

$$F_1 = f(V_1^0) = (0 - 0)^2 + (0^2 - 0 + 2)^2 = 4,$$

$$F_2 = f(V_2^0) \approx (0,966 - 0,259)^2 + (0,966^2 - 0,259 + 2)^2 \approx 7,651,$$

$$F_3 = f(V_3^0) \approx (0,259 - 0,966)^2 + (0,259^2 - 0,966 + 2)^2 \approx 1,712.$$

Шаг 1.3. Так как  $\max(F_1, F_2, F_3) = F_2$ , то  $p = 2$ .

Шаг 1.4. Зеркальное отражение вершины  $V_2^0$ :

$$\tilde{V}_2^0 = \frac{2}{n} \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n+1} V_i^0 \right) - V_2^0 \approx \frac{2}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,259 \\ 0,966 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 0,966 \\ 0,259 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,707 \\ 0,707 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.5. Так как  $f(\tilde{V}_2^0) \approx 5,214 < F_2$ , то  $\Delta^1 = \Delta^0 = 1$ ,

$$V^1 = \begin{pmatrix} V_1^0 \\ \tilde{V}_2^0 \\ V_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,707 & 0,707 \\ 0,259 & 0,966 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.6. Новое приближение точки оптимума

$$\bar{x}^1 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} V_i^1 \approx \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,707 \\ 0,707 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,259 \\ 0,966 \end{pmatrix} \right) \approx \begin{pmatrix} -0,149 \\ 0,558 \end{pmatrix},$$

$$f(\bar{x}^1) \approx 2,645.$$

Шаг 1.7. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|\bar{x}^1 - \bar{x}^0\| \approx 0,577 > \varepsilon_x, \quad |f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^0)| \approx 0,447 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k=1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычисляем

$$F_1 = f(V_1^1) = (0-0)^2 + (0^2 - 0 + 2)^2 = 4,$$

$$F_2 = f(V_2^1) \approx (-0,707 - 0,707)^2 + ((-0,707)^2 - 0,707 + 2)^2 \approx 5,214,$$

$$F_3 = f(V_3^1) \approx (0,259 - 0,966)^2 + (0,259^2 - 0,966 + 2)^2 \approx 1,712.$$

Шаг 2.3. Так как  $\max(F_1, F_2, F_3) = F_2$ , то  $p=2$ .

Шаг 2.4. Зеркальное отражение вершины  $V_2^1$ :

$$\tilde{V}_2^1 = \frac{2}{n} \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n+1} V_i^1 \right) - V_2^1 \approx \frac{2}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,259 \\ 0,966 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} -0,707 \\ 0,707 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,966 \\ 0,259 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.5. Так как  $f(\tilde{V}_2^1) \approx 7,651 > F_2$ , то выполняем сжатие симплекса:

са:  $\Delta^2 = \alpha \cdot \Delta^1 = 0,5$ ,  $\min(F_1, F_2, F_3) = F_3$ ,  $m=3$ ,

$$V^2 = \begin{pmatrix} \alpha V_1^1 + (1-\alpha) V_3^1 \\ \alpha V_2^1 + (1-\alpha) V_3^1 \\ \alpha V_3^1 + (1-\alpha) V_3^1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 0 + (1-0,5) \cdot 0,259 & 0,5 \cdot 0 + (1-0,5) \cdot 0,966 \\ 0,5 \cdot (-0,707) + (1-0,5) \cdot 0,259 & 0,5 \cdot 0,707 + (1-0,5) \cdot 0,966 \\ 0,5 \cdot 0,259 + (1-0,5) \cdot 0,259 & 0,5 \cdot 0,966 + (1-0,5) \cdot 0,966 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0,129 & 0,483 \\ -0,224 & 0,837 \\ 0,259 & 0,966 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.6. Новое приближение точки оптимума

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} V_i^2 \approx \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 0,129 \\ 0,483 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,224 \\ 0,837 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,259 \\ 0,966 \end{pmatrix} \right) \approx \begin{pmatrix} 0,0547 \\ 0,762 \end{pmatrix},$$

$$f(\bar{x}^2) \approx 2,041.$$

Шаг 2.7. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|\bar{x}^2 - \bar{x}^1\| \approx 0,289 > \varepsilon_x, \quad |f(\bar{x}^2) - f(\bar{x}^1)| \approx 0,605 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Решение задачи симплексным методом

| $k$ | $\Delta^k$    | $V^k$          | $f(V^k)$ | $p, m$ | $\tilde{V}_p^k, f(\tilde{V}_p^k)$ | $\bar{x}^k$     | $f(\bar{x}^k)$ | $\ \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\ ,  \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|---------------|----------------|----------|--------|-----------------------------------|-----------------|----------------|--------------------------------------------------------------|
| 0   | 1             | (0;0)          | 4        | 2<br>3 | -0,707                            | 0,408<br>0,408  | 3,092          | 0,577<br>0,447                                               |
|     |               | (0,966;0,259)  | 7,651    |        | 0,707                             |                 |                |                                                              |
|     |               | (0,259;0,966)  | 1,712    |        | 5,214                             |                 |                |                                                              |
| 1   | 1             | (0;0)          | 4        | 2<br>3 | 0,966                             | -0,149<br>0,558 | 2,645          | 0,289<br>0,605                                               |
|     |               | (-0,707;0,707) | 5,214    |        | 0,259                             |                 |                |                                                              |
|     |               | (0,259;0,966)  | 1,712    |        | 7,651                             |                 |                |                                                              |
| 2   | $\frac{1}{2}$ | (0,129;0,483)  | 2,477    | 2<br>3 | 0,612                             | 0,0547<br>0,762 | 2,041          | 0,144<br>0,193                                               |
|     |               | (-0,224;0,837) | 2,598    |        | 0,612                             |                 |                |                                                              |
|     |               | (0,259;0,966)  | 1,712    |        | 3,107                             |                 |                |                                                              |
| 3   | $\frac{1}{4}$ | (0,194;0,724)  | 2,006    | 1<br>3 | 0,0820                            | 0,157<br>0,864  | 1,847          | 0,144<br>0,0439                                              |
|     |               | (0,0173;0,901) | 1,989    |        | 1,143                             |                 |                |                                                              |
|     |               | (0,259;0,966)  | 1,712    |        | 1,872                             |                 |                |                                                              |
| 4   | $\frac{1}{4}$ | (0,0820;1,143) | 1,872    | 2<br>3 | 0,324                             | 0,119<br>1,003  | 1,803          | 0,144<br>0,131                                               |
|     |               | (0,0173;0,901) | 1,989    |        | 1,207                             |                 |                |                                                              |
|     |               | (0,259;0,966)  | 1,712    |        | 1,586                             |                 |                |                                                              |

Продолжение табл. 3.1

| $k$ | $\Delta^k$     | $V^k$          | $f(V^k)$ | $p, m$ | $\tilde{V}_p^k, f(\tilde{V}_p^k)$ | $\bar{x}^k$    | $f(\bar{x}^k)$ | $\ \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\ ,  \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|----------------|----------------|----------|--------|-----------------------------------|----------------|----------------|--------------------------------------------------------------|
| 5   | $\frac{1}{4}$  | (0,0820;1,143) | 1,872    | 1<br>2 | 0,500                             | 0,221<br>1,105 | 1,672          | 0,144<br>0,0435                                              |
|     |                | (0,324;1,207)  | 1,586    |        | 1,031                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,259;0,966)  | 1,712    |        | 1,769                             |                |                |                                                              |
| 6   | $\frac{1}{4}$  | (0,500;1,031)  | 1,769    | 1<br>2 | 0,0820                            | 0,361<br>1,068 | 1,628          | 0,0722<br>0,0363                                             |
|     |                | (0,324;1,207)  | 1,586    |        | 1,143                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,259;0,966)  | 1,712    |        | 1,872                             |                |                |                                                              |
| 7   | $\frac{1}{8}$  | (0,412;1,119)  | 1,604    | 3<br>2 | 0,444                             | 0,342<br>1,138 | 1,592          | 0,0722<br>0,0263                                             |
|     |                | (0,324;1,207)  | 1,586    |        | 1,240                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,291;1,087)  | 1,629    |        | 1,550                             |                |                |                                                              |
| 8   | $\frac{1}{8}$  | (0,412;1,119)  | 1,604    | 1<br>3 | 0,356                             | 0,393<br>1,189 | 1,566          | 0,0722<br>$6,868 \times 10^{-3}$                             |
|     |                | (0,324;1,207)  | 1,586    |        | 1,328                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,444;1,240)  | 1,550    |        | 1,583                             |                |                |                                                              |
| 9   | $\frac{1}{8}$  | (0,356;1,328)  | 1,583    | 2<br>3 | 0,477                             | 0,375<br>1,258 | 1,559          | 0,0722<br>0,0179                                             |
|     |                | (0,324;1,207)  | 1,586    |        | 1,361                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,444;1,240)  | 1,550    |        | 1,532                             |                |                |                                                              |
| 10  | $\frac{1}{8}$  | (0,356;1,328)  | 1,583    | 1<br>2 | 0,565                             | 0,426<br>1,309 | 1,541          | 0,0361<br>$5,475 \times 10^{-3}$                             |
|     |                | (0,477;1,361)  | 1,532    |        | 1,272                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,444;1,240)  | 1,550    |        | 1,596                             |                |                |                                                              |
| 11  | $\frac{1}{16}$ | (0,416;1,344)  | 1,548    | 1<br>2 | 0,521                             | 0,451<br>1,335 | 1,536          | 0,0361<br>$1,453 \times 10^{-3}$                             |
|     |                | (0,477;1,361)  | 1,532    |        | 1,316                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,460;1,300)  | 1,537    |        | 1,545                             |                |                |                                                              |
| 12  | $\frac{1}{16}$ | (0,521;1,316)  | 1,545    | 1<br>2 | 0,416                             | 0,486<br>1,326 | 1,534          | 0,0180<br>$1,881 \times 10^{-3}$                             |
|     |                | (0,477;1,361)  | 1,532    |        | 1,344                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,460;1,300)  | 1,537    |        | 1,548                             |                |                |                                                              |

Окончание табл. 3.1

| $k$ | $\Delta^k$     | $V^k$         | $f(V^k)$ | $p, m$ | $\tilde{V}_p^k, f(\tilde{V}_p^k)$ | $\bar{x}^k$    | $f(\bar{x}^k)$ | $\ \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\ ,  \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|----------------|---------------|----------|--------|-----------------------------------|----------------|----------------|--------------------------------------------------------------|
| 13  | $\frac{1}{32}$ | (0,499;1,338) | 1,534    | 1<br>2 | 0,446                             | 0,481<br>1,343 | 1,5322         | $9,021 \times 10^{-3}$<br>$1,846 \times 10^{-4}$             |
|     |                | (0,477;1,361) | 1,532    |        | 1,352                             |                |                |                                                              |
|     |                | (0,469;1,330) | 1,533    |        | 1,538                             |                |                |                                                              |
| 14  |                |               |          |        |                                   | 0,479<br>1,352 | 1,5320         |                                                              |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx \bar{x}^{14} \approx (0,48;1,35)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}^{14}) \approx 1,532$  км<sup>2</sup>.  
Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,238$  км.

### 3.2.2 Метод поиска Хука – Дживса

Положим  $\Delta^0 = (0,3;0,3)^T$ ,  $\alpha = 2$ .

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ ,  $\bar{x}^0 = x^0 = (0;0)^T$ , вычислим  $f(\bar{x}^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Полагаем  $x_{\text{и}}^0 = \bar{x}^0 = (0;0)^T$ . Исследующий поиск для  $i = 1$ :

$$x^1 = x_{\text{и}}^0 + \Delta_1^0 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 + 0,3 \cdot 1 \\ 0 + 0,3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^1) \approx 4,458 > f(x_{\text{и}}^0)$ , то делаем шаг в обратном направлении:

$$x^1 = x_{\text{и}}^0 - \Delta_1^0 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 - 0,3 \cdot 1 \\ 0 - 0,3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^1) \approx 4,458 > f(x_{\text{и}}^0)$ , то шаг был неудачным,

$x_{\text{и}}^1 = x_{\text{и}}^0 = (0;0)^T$ . Далее выполняем исследующий поиск для  $i = 2$ :

$$x^2 = x_{\text{и}}^1 + \Delta_2^0 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 + 0,3 \cdot 0 \\ 0 + 0,3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^2) \approx 2,98 < f(x_{\text{и}}^1)$ , то шаг был удачным,  $x_{\text{и}}^2 = x^2 = (0; 0,3)^T$ .

Шаг 1.3. Так как исследующий поиск был удачным, переходим на шаг 5.

Шаг 1.5. Полагаем  $\Delta^1 = \Delta^0 = (0,3; 0,3)^T$ ,  $x_{\text{о}}^0 = x_{\text{и}}^2 = (0; 0,3)^T$ . Поиск по образцу:

$$x_{\text{о}}^0 = x_{\text{о}}^0 + (x_{\text{о}}^0 - \bar{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x_{\text{о}}^0) = 2,32 < f(x_{\text{о}}^0)$ , то поиск по образцу был удачным. Используем модификацию (3.12, [1]) для увеличения длины шага при поиске по образцу:

$$j = 2: x_{\text{о}}^0 = x_{\text{о}}^0 + 2 \cdot (x_{\text{о}}^0 - \bar{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \end{pmatrix},$$

$$f(x_{\text{о}}^0) = 2,02 < 2,32;$$

$$j = 3: x_{\text{о}}^0 = x_{\text{о}}^0 + 3 \cdot (x_{\text{о}}^0 - \bar{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,2 \end{pmatrix},$$

$$f(x_{\text{о}}^0) = 2,08 > 2,02.$$

Следовательно,  $j = 2$ ,  $x_{\text{о}}^0 = (0; 0,9)^T$ . Поиск по образцу был удачным, поэтому  $\bar{x}^1 = x_{\text{о}}^0 = (0; 0,9)^T$ .

Шаг 1.6. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|\Delta^1\| \approx 0,424 > \varepsilon_x, \quad |f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^0)| = 1,98 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Полагаем  $x_{\text{и}}^0 = \bar{x}^1 = (0; 0,9)^T$ . Исследующий поиск для  $i = 1$ :

$$x^1 = x_{\text{и}}^0 + \Delta_1^1 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 + 0,3 \cdot 1 \\ 0,9 + 0,3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,9 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^1) \approx 1,776 < f(x_{\text{и}}^0)$ , то шаг был удачным,

$x_{\text{и}}^1 = x^1 = (0,3; 0,9)^T$ . Далее выполняем исследующий поиск для  $i = 2$ :

$$x^2 = x_{\text{и}}^1 + \Delta_2^1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,3 \cdot 0 \\ 0,9 + 0,3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^2) \approx 1,602 < f(x_{\text{и}}^1)$ , то шаг был удачным,

$$x_{\text{и}}^2 = x^2 = (0,3; 1,2)^T.$$

Шаг 2.3. Так как исследующий поиск был удачным, переходим на шаг 5.

Шаг 2.5. Полагаем  $\Delta^2 = \Delta^1 = (0,3; 0,3)^T$ ,  $x_6^1 = x_{\text{и}}^2 = (0,3; 1,2)^T$ . Поиск по образцу:

$$x_o^1 = x_6^1 + (x_6^1 - \bar{x}^1) = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x_o^1) \approx 1,550 < f(x_6^1)$ , то поиск по образцу был удачным. Используем модификацию (3.12, [1]) для увеличения длины шага при поиске по образцу:

$$j = 2: x_o^1 = x_6^1 + 2 \cdot (x_6^1 - \bar{x}^1) = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left( \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,8 \end{pmatrix},$$

$$f(x_o^1) \approx 1,830 > 1,550.$$

Следовательно,  $j = 1$ ,  $x_o^1 = (0,6; 1,5)^T$ . Поиск по образцу был удачным, поэтому  $\bar{x}^2 = x_o^1 = (0,6; 1,5)^T$ .

Шаг 2.6. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|\Delta^2\| \approx 0,424 > \varepsilon_x, \quad |f(\bar{x}^2) - f(\bar{x}^1)| \approx 0,470 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 3.2. Полагаем  $x_{\text{н}}^0 = \bar{x}^2 = (0,6;1,5)^T$ . Исследующий поиск для  $i = 1$ :

$$x^1 = x_{\text{н}}^0 + \Delta_1^2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,3 \cdot 1 \\ 1,5 + 0,3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^1) \approx 2,076 > f(x_{\text{н}}^0)$ , то делаем шаг в обратном направлении:

$$x^1 = x_{\text{н}}^0 - \Delta_1^2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0,6 - 0,3 \cdot 1 \\ 1,5 - 0,3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^1) \approx 1,788 > f(x_{\text{н}}^0)$ , то шаг был неудачным,  $x_{\text{н}}^1 = x_{\text{н}}^0 = (0,6;1,5)^T$ . Далее выполняем исследующий поиск для  $i = 2$ :

$$x^2 = x_{\text{н}}^1 + \Delta_2^2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,3 \cdot 0 \\ 1,5 + 0,3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^2) \approx 1,754 > f(x_{\text{н}}^1)$ , то делаем шаг в обратном направлении:

$$x^2 = x_{\text{н}}^1 - \Delta_2^2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0,6 - 0,3 \cdot 0 \\ 1,5 - 0,3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Так как  $f(x^2) \approx 1,706 > f(x_{\text{н}}^1)$ , то шаг был неудачным,  $x_{\text{н}}^2 = x_{\text{н}}^1 = (0,6;1,5)^T$ .

Шаг 3.3. Исследующий поиск был неудачным, переходим на шаг 4.

Шаг 3.4. Полагаем  $\bar{x}^3 = \bar{x}^2 = (0,6;1,5)^T$ ,  $\Delta^3 = \Delta^2/\alpha = (0,15;0,15)^T$ ,  $k = 3$  и возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.2.

Таблица 3.2 – Решение задачи методом Хука – Дживса

| $k$ | $\Delta^k$ | $\bar{x}^k$ | $f(\bar{x}^k)$ | $x_{\text{о}}^k$ | $x_{\text{н}}^k$ | $j$ | $\ \Delta^k\ ,  \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|------------|-------------|----------------|------------------|------------------|-----|---------------------------------------------|
| 0   | 0,3        | 0           | 4              | 0                | 0                | 2   | 0,424                                       |
|     | 0,3        | 0           |                | 0,3              | 0,9              |     | 1,98                                        |
| 1   | 0,3        | 0           | 2,02           | 0,3              | 0,6              | 1   | 0,424                                       |
|     | 0,3        | 0,9         |                | 1,2              | 1,5              |     | 0,470                                       |

Окончание табл. 3.2

| $k$ | $\Delta^k$ | $\bar{x}^k$ | $f(\bar{x}^k)$ | $x_0^k$ | $x_o^k$ | $j$ | $\ \Delta^k\ ,  \bar{f}^{k+1} - \bar{f}^k $ |
|-----|------------|-------------|----------------|---------|---------|-----|---------------------------------------------|
| 2   | 0,3        | 0,6         | 1,550          | 0,6     | —       | —   | —                                           |
|     | 0,3        | 1,5         |                | 1,5     |         |     |                                             |
| 3   | 0,15       | 0,6         | 1,550          | 0,6     | —       | —   | —                                           |
|     | 0,15       | 1,5         |                | 1,5     |         |     |                                             |
| 4   | 0,075      | 0,6         | 1,550          | 0,6     | —       | —   | —                                           |
|     | 0,075      | 1,5         |                | 1,5     |         |     |                                             |
| 5   | 0,0375     | 0,6         | 1,550          | 0,563   | 0,488   | 2   | 0,0530                                      |
|     | 0,0375     | 1,5         |                | 1,462   | 1,387   |     | 0,0168                                      |
| 6   | 0,0375     | 0,488       | 1,5328         | 0,525   | 0,525   | 0   | 0,0530                                      |
|     | 0,0375     | 1,387       |                | 1,387   | 1,387   |     | $9,338 \times 10^{-5}$                      |
| 7   | 0,0375     | 0,525       | 1,5327         | 0,525   | —       | —   | —                                           |
|     | 0,0375     | 1,387       |                | 1,387   |         |     |                                             |
| 8   | 0,0188     | 0,525       | 1,5327         | 0,506   | 0,506   | 0   | 0,0265                                      |
|     | 0,0188     | 1,387       |                | 1,387   | 1,387   |     | $1,276 \times 10^{-3}$                      |
| 9   | 0,0188     | 0,506       | 1,5314         | 0,506   | —       | —   | —                                           |
|     | 0,0188     | 1,387       |                | 1,387   |         |     |                                             |
| 10  | 0,00938    | 0,506       | 1,5314         | 0,506   | 0,506   | 0   | 0,0133                                      |
|     | 0,00938    | 1,387       |                | 1,378   | 1,378   |     | $5,786 \times 10^{-5}$                      |
| 11  | 0,00938    | 0,506       | 1,5313         |         |         |     |                                             |
|     | 0,00938    | 1,378       |                |         |         |     |                                             |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* = \bar{x}^{11} \approx (0,51; 1,38)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(\bar{x}^{11}) \approx 1,531$  км<sup>2</sup>.  
 Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

### 3.2.3 Метод сопряженных направлений Пауэлла

Для  $n = 2$  начальные сопряженные направления

$$d_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Минимизируем ЦФ в направлении  $d_n = d_2$ :

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\lambda_0) = f(x^1) = (0 - \lambda_0)^2 + (0^2 - \lambda_0 + 2)^2,$$

$$\Phi'(\lambda_0) = 2\lambda_0 - 2(-\lambda_0 + 2) = 4\lambda_0 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1,$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(x^1) = 2.$$

Критерий останова итерационного процесса не выполняется:

$$\|x^1 - x^0\| = 1 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| = 2 > \varepsilon_y.$$

Минимизируем ЦФ в направлении  $d_1$ :

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\lambda_1) = f(x^2) = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_1^2 - 1 + 2)^2,$$

$$\Phi'(\lambda_1) = 2(\lambda_1 - 1) + 4\lambda_1(\lambda_1^2 + 1) = 4\lambda_1^3 + 6\lambda_1 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \approx 0,313.$$

Данное уравнение кубическое и точного аналитического решения не имеет. Поэтому можно численно минимизировать функцию  $\Phi(\lambda_1)$ , т. е. решить задачу (3.3), или численно найти решение уравнения  $\Phi'(\lambda_1) = 0$ , т. е. решить задачу (3.4) указанными выше способами. Далее:

$$x^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 1 \end{pmatrix}, f(x^2) \approx 1,678.$$

Критерий останова итерационного процесса не выполняется:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 0,313 > \varepsilon_x, \quad |f(x^2) - f(x^1)| \approx 0,322 > \varepsilon_y.$$

И, наконец, снова минимизируем ЦФ в направлении  $d_2$ :

$$x^3 = x^2 + \lambda_2 d_2 \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 1 + \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_2) = f(x^3) &\approx (0,313 - (1 + \lambda_2))^2 + (0,313^2 - (1 + \lambda_2) + 2)^2 \approx \\ &\approx (-0,687 - \lambda_2)^2 + (1,098 - \lambda_2)^2, \end{aligned}$$

$$\Phi'(\lambda_2) \approx -2(-0,687 - \lambda_2) - 2(1,098 - \lambda_2) \approx 4\lambda_2 - 0,822 = 0 \Rightarrow \lambda_2 \approx 0,205,$$

$$x^3 \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 1,205 \end{pmatrix}, \quad f(x^3) \approx 1,593.$$

Критерий останова итерационного процесса не выполняется:

$$\|x^3 - x^2\| \approx 0,205 > \varepsilon_x, \quad |f(x^3) - f(x^2)| \approx 0,0844 > \varepsilon_y.$$

$$\text{Шаг 1.3. } d_3 = x^3 - x^1 \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 1,205 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 0,205 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Шаг 1.4. } d_1 = d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 = d_3 \approx \begin{pmatrix} 0,313 \\ 0,205 \end{pmatrix}, \text{ возвращаемся на шаг 2.}$$

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.3.

Таблица 3.3 – Решение задачи методом сопряженных направлений

| $k$ | $i$ | $p$ | $x^p$  | $f(x^p)$ | $j$ | $d_j$  | $\lambda_i$ | $\ x^p - x^{p-1}\ ,$<br>$ f^p - f^{p-1} $ |
|-----|-----|-----|--------|----------|-----|--------|-------------|-------------------------------------------|
| 0   |     | 0   | 0<br>0 | 4        |     |        |             |                                           |
| 1   | 1   | 1   | 0<br>1 | 2        | 2   | 0<br>1 | 1           | 1<br>2                                    |

Окончание табл. 3.3

| $k$ | $i$ | $p$ | $x^p$          | $f(x^p)$ | $j$ | $d_j$          | $\lambda_i$ | $\ x^p - x^{p-1}\ ,$<br>$ f^p - f^{p-1} $ |
|-----|-----|-----|----------------|----------|-----|----------------|-------------|-------------------------------------------|
|     | 2   | 2   | 0,313<br>1     | 1,678    | 1   | 1<br>0         | 0,313       | 0,313<br>0,322                            |
|     | 3   | 3   | 0,313<br>1,205 | 1,593    | 2   | 0<br>1         | 0,205       | 0,205<br>0,0844                           |
| 2   | 1   | 4   | 0,484<br>1,318 | 1,535    | 2   | 0,313<br>0,205 | 0,548       | 0,205<br>0,0580                           |
|     | 2   | 5   | 0,484<br>1,360 | 1,532    | 1   | 0<br>1         | 0,0415      | 0,0415<br>$3,452 \times 10^{-3}$          |
|     | 3   | 6   | 0,498<br>1,369 | 1,531    | 2   | 0,313<br>0,205 | 0,0440      | 0,0165<br>$3,761 \times 10^{-4}$          |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^6 \approx (0,50; 1,37)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,001$ , округляем значение функции до трех цифр после запятой:  $f^* = f(x^6) \approx 1,531$  км<sup>2</sup>.  
Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Как было сказано выше, для квадратичной ЦФ метод сопряженных направлений обеспечивает поиск точной точки экстремума не более чем за  $n^2$  одномерных поисков. Проверим это утверждение на примере ЦФ

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2x_2 + 2)^2.$$

Положим  $x^0 = (0; 0)^T$ , начальные сопряженные направления

$$d_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итерации решения сведем в таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – Решение задачи методом сопряженных направлений для квадратичной ЦФ

| $k$ | $i$ | $p$ | $x^p$       | $f(x^p)$ | $j$ | $d_j$       | $\lambda_i$ |
|-----|-----|-----|-------------|----------|-----|-------------|-------------|
| 0   |     | 0   | 0<br>0      | 4        |     |             |             |
| 1   | 1   | 1   | 0<br>0,8    | 0,8      | 2   | 0<br>1      | 0,8         |
|     | 2   | 2   | 0,2<br>0,8  | 0,72     | 1   | 1<br>0      | 0,2         |
|     | 3   | 3   | 0,2<br>0,92 | 0,648    | 2   | 0<br>1      | 0,12        |
| 2   | 1   | 4   | 2<br>2      | 0        | 2   | 0,2<br>0,12 | 9           |

Полученное решение совпало с решением, полученным ранее аналитически. Для его получения потребовалось  $p = n^2 = 4$  одномерных поиска.

### 3.3 Градиентные методы и методы второго порядка

Решим задачу проектирования канала наименьшей длины:

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2 + 2)^2.$$

Положим  $x^0 = (0; 0)^T$ ,  $\varepsilon_x = 0,02$ ,  $\varepsilon_y = 0,05$ . Аргумент ЦФ  $x \in R^2$ , поэтому  $n = 2$ . Градиент и гессиан ЦФ мы уже находили ранее:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) + 4x_1(x_1^2 - x_2 + 2) \\ -2(x_1 - x_2) - 2(x_1^2 - x_2 + 2) \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x) = H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4x_2 + 10 & -4x_1 - 2 \\ -4x_1 - 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что в предыдущих примерах мы задавали большую точность по функции  $\varepsilon_y$ . Это делалось для того, чтобы в достаточной степени приблизиться к точке экстремума. Иначе, если в окрестности точки экстремума значение ЦФ изменяется слабо, может возникнуть ситуация, когда величина  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$  относительно мала (находится в пределах погрешности), но расстояние до точки экстремума все еще велико. То есть на самом деле данная разность не говорит нам о том, далеко ли находится точка экстремума от точки  $x^{k+1}$ . Но мы точно знаем, что в точке экстремума вектор градиента должен быть нулевым. Поэтому величина  $\|\nabla f(x^{k+1})\|$  гораздо точнее говорит о том, достигли ли мы точки экстремума в достаточной степени. Далее мы проверим это предположение.

### 3.3.1 Метод наискорейшего спуска (метод Коши)

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим градиент в точке  $x^0$  и направление спуска:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad d_0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^0 + \lambda \cdot d_0) = f\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 0 \\ 0 + \lambda \cdot 4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (0 - 4\lambda)^2 + (0^2 - 4\lambda + 2)^2 = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$ , найдем значение параметра  $\lambda_0$ :

$$\Phi'(\lambda) = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 32\lambda - 8(2 - 4\lambda) = 64\lambda - 16$$

$$\Rightarrow 64\lambda_0 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4}.$$

Шаг 1.4. Положим

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (0 - 1)^2 + (0^2 - 1 + 2)^2 = 2,$$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 1) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 1 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0^2 - 1 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение равенства (3.28, [1]):

$$d_0^T d_1 = \nabla f^T(x^0) \cdot \nabla f(x^1) = (0 \quad -4) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| = 1 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 2 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.5.

Таблица 3.5 – Решение задачи методом Коши

| $k$ | $x^k$  | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$ | $d_k$  | $\lambda_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|--------|----------|-----------------|--------|-------------|----------------------------------------------|
| 0   | 0<br>0 | 4        | 0<br>-4         | 0<br>4 | 0,25        | 1<br>2                                       |
| 1   | 0<br>1 | 2        | -2<br>0         | 2<br>0 | 0,156       | 0,313<br>0,822                               |

Окончание табл. 3.5

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$ | $d_k$       | $\lambda_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|----------------|----------|-----------------|-------------|-------------|----------------------------------------------|
| 2   | 0,313<br>1     | 1,678    | 0<br>-0,822     | 0<br>0,822  | 0,25        | 0,205<br>0,668                               |
| 3   | 0,313<br>1,205 | 1,593    | -0,668<br>0     | 0,668<br>0  | 0,148       | 0,0988<br>0,341                              |
| 4   | 0,412<br>1,205 | 1,559    | 0<br>-0,341     | 0<br>0,341  | 0,25        | 0,0852<br>0,311                              |
| 5   | 0,412<br>1,291 | 1,545    | -0,311<br>0     | 0,311<br>0  | 0,141       | 0,0438<br>0,163                              |
| 6   | 0,455<br>1,291 | 1,538    | 0<br>-0,163     | 0<br>0,163  | 0,25        | 0,0409<br>0,156                              |
| 7   | 0,455<br>1,331 | 1,535    | -0,156<br>0     | 0,156<br>0  | 0,137       | 0,0214<br>0,0829                             |
| 8   | 0,477<br>1,331 | 1,533    | 0<br>-0,0829    | 0<br>0,0829 | 0,25        | 0,0207<br>0,0810                             |
| 9   | 0,477<br>1,352 | 1,5322   | -0,0810<br>0    | 0,0810<br>0 | 0,135       | 0,0110<br>0,0431                             |
| 10  | 0,488<br>1,352 | 1,5317   | 0<br>-0,0431    |             |             |                                              |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^{10} \approx (0,49; 1,35)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^{10}) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>.

Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^{10}) - f(x^9)| \approx |1,5317 - 1,5322| \approx 4,450 \cdot 10^{-4}.$$

Убеждаемся в том, что эта величина оказалась меньшего порядка, чем используемая ранее величина погрешности по функции 0,001.

### 3.3.2 Метод Ньютона

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим градиент и гессиан в точке  $x^0$ :

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 10 & -4 \cdot 0 - 2 \\ -4 \cdot 0 - 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Направление спуска

$$\begin{aligned} d_0 &= -[\nabla^2 f(x^0)]^{-1} \nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -8 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 1.3. Положим

$$x^1 = x^0 + d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/9 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (2/9 - 10/9)^2 + ((2/9)^2 - 10/9 + 2)^2 \approx 1,670,$$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (2/9 - 10/9) + 4 \cdot (2/9) \cdot ((2/9)^2 - 10/9 + 2) \\ -2 \cdot (2/9 - 10/9) - 2 \cdot ((2/9)^2 - 10/9 + 2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,944 \\ -0,099 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.4. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 1,133 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 0,949 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.6.

Таблица 3.6 – Решение задачи методом Ньютона

| $k$ | $x^k$ | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$         | $\nabla^2 f(x^k)$ | $d_k$                  | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|-------|----------|-------------------------|-------------------|------------------------|----------------------------------------------|
| 0   | 0     | 4        | 0                       | 10    -2          | 0,222                  | 1,133                                        |
|     | 0     |          | -4                      | -2    4           | 1,111                  | 0,949                                        |
| 1   | 0,222 | 1,670    | -0,944                  | 6,148 -2,889      | 0,250                  | 0,323                                        |
|     | 1,111 |          | -0,0988                 | -2,889    4       | 0,205                  | 0,127                                        |
| 2   | 0,472 | 1,535    | 0,0239                  | 7,410 -3,889      | 0,0269                 | 0,0633                                       |
|     | 1,316 |          | -0,125                  | -3,889    4       | 0,0574                 | $2,464 \times 10^{-3}$                       |
| 3   | 0,499 | 1,531    | $-1,996 \times 10^{-3}$ | 7,494 -3,996      | $9,823 \times 10^{-4}$ | $1,664 \times 10^{-3}$                       |
|     | 1,374 |          | $-1,445 \times 10^{-3}$ | -3,996    4       | $1,343 \times 10^{-3}$ | $1,995 \times 10^{-6}$                       |
| 4   | 0,500 | 1,531    | $5,067 \times 10^{-7}$  | 7,500 -4,000      |                        |                                              |
|     | 1,375 |          | $-1,930 \times 10^{-6}$ | -4,000    4       |                        |                                              |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^4 \approx (0,50; 1,38)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^4) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>.

Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^4) - f(x^3)| \approx 1,951 \cdot 10^{-6}.$$

Решение получилось очень точным, и метод сошелся достаточно быстро. Это говорит о том, что ЦФ (по крайней мере в окрестностях начальной точки и точки экстремума) по форме близка к квадратичной.

Покажем, что для выпуклой квадратичной функции процесс решения МН сходится за одну итерацию. Найдем минимум ЦФ (3.2):

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2x_2 + 2)^2, \text{ где } x^0 = (0; 0)^T.$$

Выше мы уже находили градиент и матрицу Гессе данной ЦФ:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_2 + 4 \\ -6x_1 + 10x_2 - 8 \end{pmatrix}, \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Функция выпукла, т. к. угловые миноры

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = 4 \cdot 10 - (-6) \cdot (-6) = 4 > 0.$$

Следовательно, она имеет только один локальный и одновременно глобальный экстремум – минимум. Используя формулу МН, получаем:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^0 - [\nabla^2 f(x^0)]^{-1} \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 4 \\ -6 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Значение градиента в найденной точке

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 6 \cdot 2 + 4 \\ -6 \cdot 2 + 10 \cdot 2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно,  $x^* = (2; 2)^T$ ,  $f^* = 0$ .

### 3.3.3 Модифицированный метод Ньютона

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим градиент и гессиан в точке  $x^0$ :

$$\begin{aligned} \nabla f(x^0) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \\ \nabla^2 f(x^0) &= \begin{pmatrix} 12 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 10 & -4 \cdot 0 - 2 \\ -4 \cdot 0 - 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Находим направление спуска:

$$\begin{aligned} d_0 &= -[\nabla^2 f(x^0)]^{-1} \nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -8 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 1.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^0 + \lambda \cdot d_0) = f\left(\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot (2/9) \\ 0 + \lambda \cdot (10/9) \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 2\lambda/9 \\ 10\lambda/9 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \left(\frac{2\lambda}{9} - \frac{10\lambda}{9}\right)^2 + \left(\left(\frac{2\lambda}{9}\right)^2 - \frac{10\lambda}{9} + 2\right)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$  (см. (3.3), (3.4)), найдем значение параметра  $\lambda_0 \approx 1,084$ .

Шаг 1.4. Положим

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1,084 \cdot \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,241 \\ 1,205 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) \approx (0,241 - 1,205)^2 + (0,241^2 - 1,205 + 2)^2 \approx 1,657,$$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0,241 - 1,205) + 4 \cdot 0,241 \cdot (0,241^2 - 1,205 + 2) \\ -2 \cdot (0,241 - 1,205) - 2 \cdot (0,241^2 - 1,205 + 2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,105 \\ 0,221 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 1,229 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 1,127 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.7.

Таблица 3.7 – Решение задачи модифицированным методом Ньютона

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k),$<br>$\nabla^2 f(x^k)$             | $d_k$                  | $\lambda_k$        | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|----------------|----------|---------------------------------------------------|------------------------|--------------------|----------------------------------------------|
| 0   | 0<br>0         | 4        | 0<br>-4                                           | 0,222                  | 1,084              | 1,229                                        |
|     |                |          | 10   -2<br>-2   4                                 | 1,111                  |                    | 1,127                                        |
|     |                |          |                                                   |                        |                    |                                              |
| 1   | 0,241<br>1,205 | 1,657    | -1,105<br>0,221                                   | 0,256                  | 0,956              | 0,276                                        |
|     |                |          | 5,878   -2,964<br>-2,964   4                      | 0,134                  |                    | 0,124                                        |
|     |                |          |                                                   |                        |                    |                                              |
| 2   | 0,486<br>1,333 | 1,533    | 0,0577<br>-0,110                                  | 0,0140                 | 1,009              | 0,0440                                       |
|     |                |          | 7,496   -3,942<br>-3,942   4                      | 0,0413                 |                    | $1,789 \times 10^{-3}$                       |
|     |                |          |                                                   |                        |                    |                                              |
| 3   | 0,500<br>1,375 | 1,531    | $-1,694 \times 10^{-3}$<br>$5,753 \times 10^{-4}$ | $3,198 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-6}$ | $3,650 \times 10^{-10}$                      |
|     |                |          | 7,497   -3,999<br>-3,999   4                      | $1,759 \times 10^{-4}$ |                    | $1,789 \times 10^{-3}$                       |
|     |                |          |                                                   |                        |                    |                                              |
| 4   | 0,500<br>1,375 | 1,531    | $-1,694 \times 10^{-3}$<br>$5,753 \times 10^{-4}$ |                        |                    |                                              |
|     |                |          | 7,497   -3,999<br>-3,999   4                      |                        |                    |                                              |
|     |                |          |                                                   |                        |                    |                                              |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^4 \approx (0,50; 1,38)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем

значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^4) \approx 1,53 \text{ км}^2$ . Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237 \text{ км}$ .

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^4) - f(x^3)| \approx 4,405 \cdot 10^{-13}.$$

Решение еще более точное, чем в обычном методе Ньютона. Вообще, можно заметить, что на первых трех итерациях длина шага примерно равна 1, т. е. результаты ММН не сильно отличаются от результатов МН. Это лишний раз подтверждает, что форма ЦФ близка к квадратичной.

### 3.3.4 Метод Марквардта

Положим  $M = 10$ ,  $\lambda_0 = 10^4$ ,  $\beta = 10$ . Единичная матрица в пространстве  $R^2$  имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим градиент и гессиан в точке  $x^0$ :

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 10 & -4 \cdot 0 - 2 \\ -4 \cdot 0 - 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Направление спуска

$$\begin{aligned} d_0 &= -[H_f(x^0) + \lambda_0 E]^{-1} \nabla f(x^0) = -\left[ \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + 10^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10010 & -2 \\ -2 & 10004 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7,989 \cdot 10^{-8} \\ 3,998 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 1.3. Положим

$$x^1 = x^0 + d_0 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7,989 \cdot 10^{-8} \\ 3,998 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7,989 \cdot 10^{-8} \\ 3,998 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (7,989 \cdot 10^{-8} - 3,998 \cdot 10^{-4})^2 + ((7,989 \cdot 10^{-8})^2 - 3,998 \cdot 10^{-4} + 2)^2 \approx 3,998,$$

$$\nabla f(x^1) \approx \begin{pmatrix} -7,989 \cdot 10^{-4} \\ -3,998 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.4. Неравенство  $f(x^1) < f(x^0)$  выполняется, поэтому переходим на шаг 5.

Шаг 1.5. Положим  $\lambda_1 = \lambda_0 / \beta = 10^4 / 10 = 10^3$  и переходим на шаг 7.

Шаг 1.7. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 3,998 \cdot 10^{-4} < \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 3,998 > \varepsilon_y, \quad k = 0 < M,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.8.

Таблица 3.8 – Решение задачи методом Марквардта

| $k$ | $x^k$                                            | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k),$<br>$\nabla^2 f(x^k)$              | $d_k$                                            | $\lambda_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|--------------------------------------------------|----------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------|
| 0   | 0<br>0                                           | 4        | 0                                                  | $7,989 \times 10^{-8}$<br>$3,998 \times 10^{-4}$ | 10000       | $3,998 \times 10^{-4}$<br>3,998              |
|     |                                                  |          | -4                                                 |                                                  |             |                                              |
|     |                                                  |          | $\begin{matrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix}$    |                                                  |             |                                              |
| 1   | $7,989 \times 10^{-8}$<br>$3,998 \times 10^{-4}$ | 3,998    | $-7,989 \times 10^{-4}$                            | $8,667 \times 10^{-6}$<br>$3,982 \times 10^{-3}$ | 1000        | $3,982 \times 10^{-3}$<br>3,982              |
|     |                                                  |          | -3,998                                             |                                                  |             |                                              |
|     |                                                  |          | $\begin{matrix} 9,998 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix}$ |                                                  |             |                                              |

Окончание табл. 3.8

| $k$ | $x^k$                                            | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k),$<br>$\nabla^2 f(x^k)$              | $d_k$                                            | $\lambda_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $     |
|-----|--------------------------------------------------|----------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------|
| 2   | $8,757 \times 10^{-6}$<br>$4,382 \times 10^{-3}$ | 3,983    | $-8,677 \times 10^{-3}$<br>-3,982                  | $7,755 \times 10^{-4}$<br>0,0383                 | 100         | 0,0383<br>3,832                                  |
|     |                                                  |          | 9,982 -2<br>-2 4                                   |                                                  |             |                                                  |
| 3   | $7,843 \times 10^{-4}$<br>0,0427                 | 3,833    | -0,0777<br>-3,831                                  | 0,0320<br>0,278                                  | 10          | 0,280<br>2,807                                   |
|     |                                                  |          | 9,829 -2,003<br>-2,003 4                           |                                                  |             |                                                  |
| 4   | 0,0328<br>0,321                                  | 2,906    | -0,356<br>-2,784                                   | 0,175<br>0,631                                   | 1           | 0,655<br>0,905                                   |
|     |                                                  |          | 8,729 -2,131<br>-2,131 4                           |                                                  |             |                                                  |
| 5   | 0,208<br>0,952                                   | 1,744    | -0,583<br>-0,693                                   | 0,219<br>0,320                                   | 0,1         | 0,387<br>0,190                                   |
|     |                                                  |          | 6,708 -2,831<br>-2,831 4                           |                                                  |             |                                                  |
| 6   | 0,426<br>1,272                                   | 1,543    | -0,141<br>-0,128                                   | 0,0703<br>0,0967                                 | 0,01        | 0,120<br>0,0109                                  |
|     |                                                  |          | 7,092 -3,705<br>-3,705 4                           |                                                  |             |                                                  |
| 7   | 0,497<br>1,369                                   | 1,531    | $-1,247 \times 10^{-3}$<br>-0,0108                 | $3,431 \times 10^{-3}$<br>$6,128 \times 10^{-3}$ | 0,001       | $7,023 \times 10^{-3}$<br>$3,431 \times 10^{-5}$ |
|     |                                                  |          | 7,482 -3,986<br>-3,986 4                           |                                                  |             |                                                  |
| 8   | 0,500<br>1,375                                   | 1,531    | $-1,724 \times 10^{-5}$<br>$-2,967 \times 10^{-5}$ |                                                  |             |                                                  |
|     |                                                  |          | 7.500 -4,000<br>-4,000 4                           |                                                  |             |                                                  |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^8 \approx (0,50; 1,38)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^8) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>. Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^8) - f(x^7)| \approx 3,546 \times 10^{-5}.$$

Решение получилось точным. Можно заметить, что сначала (при больших значениях  $\lambda$ ) метод сходиллся весьма медленно и только при малых значениях  $\lambda$  сходимость ускорила. Это показывает, что для ЦФ данной задачи сходимость по методу Ньютона гораздо выше, чем по методу Коши, по крайней мере из выбранной начальной точки. Об этом также говорит разница в количестве итераций, которые требуются этим методам для получения точки экстремума. Следовательно, если бы мы выбрали начальное значение  $\lambda_0$  меньшего порядка (например,  $\lambda_0 = 10$  или даже  $\lambda_0 = 1$ ), то метод сошелся бы быстрее, за 3–4 итерации.

*Задание.* Проверьте это утверждение на практике.

### 3.3.5 Методы сопряженных градиентов

#### 1. Метод сопряженных градиентов (МСГ) для квадратичных функций

Так как данный метод предназначен только для квадратичных функций, минимизируем другую ЦФ (3.2):

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2x_2 + 2)^2.$$

Положим  $x^0 = (0; 0)^T$ . Точность задавать не требуется. Аргумент ЦФ  $x \in R^2$ , поэтому  $n = 2$ . Градиент и гессиан ЦФ мы уже находили ранее:

$$g(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_2 + 4 \\ -6x_1 + 10x_2 - 8 \end{pmatrix}, \quad A = H_f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим значение градиента и начальное направление спуска:

$$g_0 = \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 4 \\ -6 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad d_0 = -g_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Определяем длину шага:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{g_0^T d_0}{d_0^T A d_0} = -\frac{\begin{pmatrix} 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}} = -\frac{-16 - 64}{(-16 - 48 \quad 24 + 80) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}} = \\ &= -\frac{-80}{(-64 \quad 104) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}} = \frac{80}{256 + 832} = \frac{80}{1088} = \frac{5}{68}. \end{aligned}$$

Не будем приводить результат к десятичной дроби и округлять, чтобы получить точное решение. Таким образом, оно должно быть получено на второй итерации (т. к.  $n = 2$ ).

Шаг 1.4. Положим

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{68} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/17 \\ 10/17 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = \left( -\frac{5}{17} - \frac{10}{17} \right)^2 + \left( -\frac{5}{17} - 2 \cdot \frac{10}{17} + 2 \right)^2 = \frac{225}{289} + \frac{81}{289} = \frac{306}{289}.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются, т. к.  $k + 1 = 1 < n$ , поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 1.6. Вычислим новое направление поиска:

$$g_1 = \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-5/17) - 6 \cdot 10/17 + 4 \\ -6 \cdot (-5/17) + 10 \cdot 10/17 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/17 - 60/17 + 4 \\ 30/17 + 100/17 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/17 \\ -6/17 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{\mathbf{g}_1^T \mathbf{A} \mathbf{d}_0}{\mathbf{d}_0^T \mathbf{A} \mathbf{d}_0} = \frac{(-12/17 \quad -6/17) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}}{(-4 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}} = \\
&= \frac{((-48+36)/17 \quad (72-60)/17) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}}{(-16-48 \quad 24+80) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}} = \frac{(-12/17 \quad 12/17) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}}{(-64 \quad 104) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}} = \\
&= \frac{48/17 + 96/17}{256 + 832} = \frac{144}{1088 \cdot 17} = \frac{9}{1156}, \\
d_1 &= -\mathbf{g}_1 + \beta_0 \mathbf{d}_0 = -\begin{pmatrix} -12/17 \\ -6/17 \end{pmatrix} + \frac{9}{1156} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/17 \\ 6/17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/289 \\ 18/289 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (12 \cdot 17 - 9)/289 \\ (6 \cdot 17 + 18)/289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (12 \cdot 17 - 9)/289 \\ (6 \cdot 17 + 18)/289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195/289 \\ 120/289 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Шаг 1.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 2.3. Определяем длину шага:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{\mathbf{g}_1^T \mathbf{d}_1}{\mathbf{d}_1^T \mathbf{A} \mathbf{d}_1} = -\frac{(-12/17 \quad -6/17) \cdot \begin{pmatrix} 195/289 \\ 120/289 \end{pmatrix}}{(195/289 \quad 120/289) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 195/289 \\ 120/289 \end{pmatrix}} = \\
&= -\frac{(-12 \cdot 17 \quad -6 \cdot 17) \cdot \begin{pmatrix} 195 \\ 120 \end{pmatrix}}{(195 \quad 120) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 195 \\ 120 \end{pmatrix}} = -\frac{-39780 - 12240}{(780 - 720 \quad -1170 + 1200) \cdot \begin{pmatrix} 195 \\ 120 \end{pmatrix}} = \\
&= -\frac{-52020}{(60 \quad 30) \cdot \begin{pmatrix} 195 \\ 120 \end{pmatrix}} = \frac{52020}{11700 + 3600} = \frac{52020}{15300} = \frac{17}{5}.
\end{aligned}$$

Здесь, чтобы избавиться от дробных компонентов в векторах, сначала числитель и знаменатель умножили на  $289^2$ .

Шаг 2.4. Положим

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 = \begin{pmatrix} -5/17 \\ 10/17 \end{pmatrix} + \frac{17}{5} \cdot \begin{pmatrix} 195/289 \\ 120/289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/17 \\ 10/17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 39/17 \\ 24/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34/17 \\ 34/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (2-2)^2 + (2-2 \cdot 2 + 2)^2 = 0.$$

Шаг 2.5. Так как все вычисления были точными, то точка  $x^2$  должна быть точными координатами точки экстремума. Проверим это:

$$\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 6 \cdot 2 + 4 \\ -6 \cdot 2 + 10 \cdot 2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $x^* = x^2 = (2; 2)^T$ ,  $f^* = 0$ .

Остальными методами будем снова решать задачу проектирования канала наименьшей длины.

## 2. Метод Флетчера – Ривза (МФР)

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим градиент в точке  $x^0$  и направление спуска:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0-0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad d_0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^0 + \lambda \cdot d_0) = f\left(\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 0 \\ 0 + \lambda \cdot 4 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda \end{pmatrix}\right) = \\ &= (0 - 4\lambda)^2 + (0^2 - 4\lambda + 2)^2 = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$ , найдем значение параметра  $\lambda_0$ :

$$\Phi'(\lambda) = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 32\lambda - 8(2 - 4\lambda) = 64\lambda - 16$$

$$\Rightarrow 64\lambda_0 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4}.$$

То есть первая итерация МФР совпадает с первой итерацией МК, т. к. направления спуска совпадают. Отличия начинаются уже со второй итерации.

Шаг 1.4. Положим

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (0-1)^2 + (0^2 - 1 + 2)^2 = 2,$$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-1) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 1 + 2) \\ -2 \cdot (0-1) - 2 \cdot (0^2 - 1 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| = 1 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 2 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 1.6. Вычисляем новое направление спуска:

$$\beta_0 = \frac{\|\nabla f(x^1)\|^2}{\|\nabla f(x^0)\|^2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 0^2}^2}{\sqrt{0^2 + (-4)^2}^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

$$d_1 = -\nabla f(x^1) + \beta_0 d_0 = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 2.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^1 + \lambda \cdot d_1) = f\left(\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 2 \\ 1 + \lambda \cdot 1 \end{pmatrix}\right) = (2\lambda - (\lambda + 1))^2 + ((2\lambda)^2 - (\lambda + 1) + 2)^2 = \\ &= (\lambda - 1)^2 + (4\lambda^2 - \lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$  (см. (3.3), (3.4)), найдем значение параметра  $\lambda_1 \approx 0,224$ .

Шаг 2.4. Положим

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,224 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,224 \end{pmatrix},$$

$$f(x^2) \approx (0,449 - 1,224)^2 + (0,449^2 - 1,224 + 2)^2 \approx 1,556,$$

$$\nabla f(x^2) \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot (0,449 - 1,224) + 4 \cdot 0,449 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \\ -2 \cdot (0,449 - 1,224) - 2 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 0,501 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^2)\| \approx 0,450 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 2.6. Вычисляем новое направление спуска:

$$\beta_1 = \frac{\|\nabla f(x^2)\|^2}{\|\nabla f(x^1)\|^2} \approx \frac{\sqrt{0,201^2 + (-0,402)^2}^2}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2}^2} \approx 0,0506,$$

$$d_2 = -\nabla f(x^2) + \beta_1 d_1 \approx -\begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix} + 0,0506 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,100 \\ 0,453 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.9.

Таблица 3.9 – Решение задачи методом Флетчера – Ривза

| $k$ | $x^k$ | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$ | $d_k$  | $\lambda_k,$<br>$\beta_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|-------|----------|-----------------|--------|---------------------------|----------------------------------------------|
| 0   | 0     | 4        | 0               | 0      | 0,25                      | 1                                            |
|     | 0     |          | -4              | 4      | 0,25                      | 2                                            |
| 1   | 0     | 2        | -2              | 2      | 0,224                     | 0,501                                        |
|     | 1     |          | 0               | 1      | 0,0506                    | 0,450                                        |
| 2   | 0,449 | 1,556    | 0,201           | -0,100 | 0,164                     | 0,0761                                       |
|     | 1,224 |          | -0,402          | 0,453  | 0,202                     | 0,202                                        |

Окончание табл. 3.9

| $k$ | $x^k$ | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$         | $d_k$                  | $\lambda_k,$<br>$\beta_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|-------|----------|-------------------------|------------------------|---------------------------|----------------------------------------------|
| 3   | 0,432 | 1,540    | -0,198                  | 0,177                  | 0,348                     | 0,0776                                       |
|     | 1,299 |          | -0,044                  | 0,135                  | 0,335                     | 0,117                                        |
| 4   | 0,494 | 1,532    | 0,0710                  | -0,0116                | 0,152                     | 0,0211                                       |
|     | 1,346 |          | -0,0931                 | 0,138                  | 0,0480                    | 0,0257                                       |
| 5   | 0,492 | 1,5314   | -0,0256                 | 0,0250                 | 0,204                     | $5,402 \times 10^{-3}$                       |
|     | 1,367 |          | $-2,144 \times 10^{-3}$ | $8,789 \times 10^{-3}$ |                           | 0,0162                                       |
| 6   | 0,497 | 1,5313   | $-5,362 \times 10^{-3}$ |                        |                           |                                              |
|     | 1,368 |          | -0,0153                 |                        |                           |                                              |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^6 \approx (0,50; 1,37)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^6) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>.

Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^6) - f(x^5)| \approx 6,715 \times 10^{-5}.$$

### 3. Метод Полака – Рибьера (МПР)

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим градиент в точке  $x^0$  и направление спуска:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad d_0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= f(x^0 + \lambda \cdot d_0) = f\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 0 \\ 0 + \lambda \cdot 4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (0 - 4\lambda)^2 + (0^2 - 4\lambda + 2)^2 = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2.\end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$ , найдем значение параметра  $\lambda_0$ :

$$\begin{aligned}\Phi'(\lambda) &= 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 32\lambda - 8(2 - 4\lambda) = 64\lambda - 16 \\ &\Rightarrow 64\lambda_0 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Шаг 1.4. Положим

$$\begin{aligned}x^1 &= x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ f(x^1) &= (0 - 1)^2 + (0^2 - 1 + 2)^2 = 2, \\ \nabla f(x^1) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 1) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 1 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0^2 - 1 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| = 1 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 2 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 1.6. Вычисляем новое направление спуска:

$$\begin{aligned}\nabla f_0 &= \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_1 = \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Delta f_0 &= \nabla f_1 - \nabla f_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \beta_0 &= \frac{\nabla f_1^T \Delta f_0}{\|\nabla f_0\|^2} = \frac{(-2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + (-4)^2}^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

$$d_1 = -\nabla f(x^1) + \beta_0 d_0 = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Как уже было сказано, несмотря на то, что формулы расчета параметра  $\beta_k$  в МФР и МПР разные, на первой итерации получается одинаковые значения  $\beta_0$  и  $d_1$ .

Шаг 1.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 2.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^1 + \lambda \cdot d_1) = f\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 2 \\ 1 + \lambda \cdot 1 \end{pmatrix} = (2\lambda - (\lambda + 1))^2 + ((2\lambda)^2 - (\lambda + 1) + 2)^2 = \\ &= (\lambda - 1)^2 + (4\lambda^2 - \lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$  (см. (3.3), (3.4)), найдем значение параметра  $\lambda_1 \approx 0,224$ .

Шаг 2.4. Положим

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,224 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,224 \end{pmatrix},$$

$$f(x^2) \approx (0,449 - 1,224)^2 + (0,449^2 - 1,224 + 2)^2 \approx 1,556,$$

$$\nabla f(x^2) \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot (0,449 - 1,224) + 4 \cdot 0,449 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \\ -2 \cdot (0,449 - 1,224) - 2 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 0,501 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^2)\| \approx 0,450 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 2.6. Вычисляем новое направление спуска:

$$\nabla f_1 = \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_2 = \nabla f(x^2) \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix},$$

$$\Delta f_1 = \nabla f_2 - \nabla f_1 \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \frac{\nabla f_2^T \Delta f_1}{\|\nabla f_1\|^2} \approx \frac{(0,201 \quad -0,402) \cdot \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2}} \approx \frac{0,604}{4} \approx 0,151,$$

$$d_2 = -\nabla f(x^2) + \beta_1 d_1 \approx -\begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix} + 0,151 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,101 \\ 0,554 \end{pmatrix}.$$

Начиная с этого момента, решения задачи методами Флетчера – Ривза и Полака – Рибьера начинают отличаться.

Шаг 2.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.10.

Таблица 3.10 – Решение задачи методом Полака – Рибьера

| $k$ | $x^k$ | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$         | $d_k$                  | $\lambda_k,$<br>$\beta_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|-------|----------|-------------------------|------------------------|---------------------------|----------------------------------------------|
| 0   | 0     | 4        | 0                       | 0                      | 0,25                      | 1                                            |
|     | 0     |          | -4                      | 4                      | 0,25                      | 2                                            |
| 1   | 0     | 2        | -2                      | 2                      | 0,224                     | 0,501                                        |
|     | 1     |          | 0                       | 1                      | 0,151                     | 0,450                                        |
| 2   | 0,449 | 1,556    | 0,201                   | 0,101                  | 0,232                     | 0,131                                        |
|     | 1,224 |          | -0,402                  | 0,554                  | 0,234                     | 0,121                                        |
| 3   | 0,472 | 1,533    | -0,119                  | 0,143                  | 0,194                     | 0,0347                                       |
|     | 1,353 |          | 0,0218                  | 0,108                  | 0,0305                    | $4,756 \times 10^{-3}$                       |
| 4   | 0,500 | 1,531    | $2,866 \times 10^{-3}$  | $1,484 \times 10^{-3}$ | 0,170                     | $1,230 \times 10^{-3}$                       |
|     | 1,374 |          | $-3,795 \times 10^{-3}$ | $7,080 \times 10^{-3}$ | $9,313 \times 10^{-3}$    | $5,783 \times 10^{-5}$                       |
| 5   | 0,500 | 1,531    | $-5,659 \times 10^{-5}$ |                        |                           |                                              |
|     | 1,375 |          | $1,188 \times 10^{-5}$  |                        |                           |                                              |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^5 \approx (0,50; 1,38)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^5) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>.

Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^5) - f(x^4)| \approx 1,923 \times 10^{-6}.$$

#### 4. Метод Миля – Кентрелла (ММК)

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ .

Шаг 1.2. Вычислим градиент в точке  $x^0$  и направление спуска:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad d_0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^0 + \lambda \cdot d_0) = f \begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 0 \\ 0 + \lambda \cdot 4 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (0 - 4\lambda)^2 + (0^2 - 4\lambda + 2)^2 = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$ , найдем значение параметра  $\lambda_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda) &= 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 32\lambda - 8(2 - 4\lambda) = 64\lambda - 16 \\ \Rightarrow 64\lambda_0 - 16 &= 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Шаг 1.4. Положим

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (0 - 1)^2 + (0^2 - 1 + 2)^2 = 2,$$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-1) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 1 + 2) \\ -2 \cdot (0-1) - 2 \cdot (0^2 - 1 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| = 1 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 2 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 1.6. Вычисляем новое направление спуска:

$$\beta_0 = \frac{\|\nabla f(x^1)\|^2}{\|\nabla f(x^0)\|^2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 0^2}^2}{\sqrt{0^2 + (-4)^2}^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

$$d_1 = -\nabla f(x^1) - \beta_0 \nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 2.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^1 + \lambda \cdot d_1) = f\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 2 \\ 1 + \lambda \cdot 1 \end{pmatrix} = (2\lambda - (\lambda + 1))^2 + ((2\lambda)^2 - (\lambda + 1) + 2)^2 = \\ &= (\lambda - 1)^2 + (4\lambda^2 - \lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$  (см. (3.3), (3.4)), найдем значение параметра  $\lambda_1 \approx 0,224$ .

Шаг 2.4. Положим

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,224 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,224 \end{pmatrix},$$

$$f(x^2) \approx (0,449 - 1,224)^2 + (0,449^2 - 1,224 + 2)^2 \approx 1,556,$$

$$\nabla f(x^2) \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot (0,449 - 1,224) + 4 \cdot 0,449 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \\ -2 \cdot (0,449 - 1,224) - 2 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 0,501 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^2)\| \approx 0,450 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 2.6. Вычисляем новое направление спуска:

$$\beta_1 = \frac{\|\nabla f(x^2)\|^2}{\|\nabla f(x^1)\|^2} \approx \frac{\sqrt{0,201^2 + (-0,402)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2}} \approx 0,0506,$$

$$\begin{aligned} d_2 &= -\nabla f(x^2) - \beta_0 \nabla f(x^0) - \beta_1 \nabla f(x^1) \approx \\ &\approx -\begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 0,0506 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,176 \cdot 10^{-3} \\ 0,402 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 2.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.11.

Таблица 3.11 – Решение задачи методом Миля – Кентрелла

| $k$ | $x^k$ | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$        | $d_k$                  | $\lambda_k,$<br>$\beta_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|-------|----------|------------------------|------------------------|---------------------------|----------------------------------------------|
| 0   | 0     | 4        | 0                      | 0                      | 0,25                      | 1                                            |
|     | 0     |          | -4                     | 4                      | 0,25                      | 2                                            |
| 1   | 0     | 2        | -2                     | 2                      | 0,224                     | 0,501                                        |
|     | 1     |          | 0                      | 1                      | 0,0506                    | 0,450                                        |
| 2   | 0,449 | 1,556    | 0,201                  | $1,176 \times 10^{-3}$ | 0,251                     | 0,101                                        |
|     | 1,224 |          | -0,402                 | 0,402                  | 0,160                     | 0,180                                        |
| 3   | 0,449 | 1,536    | -0,180                 | 0,0834                 | 0,199                     | 0,0417                                       |
|     | 1,325 |          | $5,260 \times 10^{-3}$ | 0,193                  | 1,592                     | 0,227                                        |
| 4   | 0,465 | 1,534    | -0,208                 | 1,354                  | 0,0202                    | 0,0273                                       |
|     | 1,364 |          | 0,0902                 | -0,0935                | 0,0114                    | 0,0242                                       |

Окончание табл. 3.11

| $k$ | $x^k$ | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$         | $d_k$  | $\lambda_k,$<br>$\beta_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $ |
|-----|-------|----------|-------------------------|--------|---------------------------|----------------------------------------------|
| 5   | 0,493 | 1,5314   | $-1,671 \times 10^{-3}$ | 0,0136 | 0,629                     | 0,0147                                       |
|     | 1,362 |          | -0,0242                 | 0,0190 | 0,534                     | 0,0177                                       |
| 6   | 0,501 | 1,5313   | 0,0144                  |        |                           |                                              |
|     | 1,374 |          | -0,0103                 |        |                           |                                              |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^6 \approx (0,50; 1,37)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^6) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>. Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^6) - f(x^5)| \approx 1,517 \times 10^{-4}.$$

### 3.3.6 Квазиньютоновские методы (методы с переменной метрикой)

Решим задачу проектирования канала наименьшей длины:

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2 + 2)^2.$$

Положим  $x^0 = (0; 0)^T$ ,  $\varepsilon_x = 0,02$ ,  $\varepsilon_y = 0,05$ . Аргумент ЦФ  $x \in R^2$ , поэтому  $n = 2$ . Градиент мы уже находили ранее:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) + 4x_1(x_1^2 - x_2 + 2) \\ -2(x_1 - x_2) - 2(x_1^2 - x_2 + 2) \end{pmatrix}.$$

### 1. Метод Дэвидона – Флетчера – Пауэлла (МДФП)

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ , положим

$$A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.2. Вычислим градиент в точке  $x^0$  и направление спуска:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$d_0 = -A^0 \cdot \nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^0 + \lambda \cdot d_0) = f\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 0 \\ 0 + \lambda \cdot 4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (0 - 4\lambda)^2 + (0^2 - 4\lambda + 2)^2 = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$ , найдем значение параметра  $\lambda_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda) &= 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 32\lambda - 8(2 - 4\lambda) = 64\lambda - 16 \\ &\Rightarrow 64\lambda_0 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Шаг 1.4. Положим

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (0 - 1)^2 + (0^2 - 1 + 2)^2 = 2,$$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 1) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 1 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0^2 - 1 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| = 1 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 2 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 1.6. Вычисляем новое приближение обращенного гессиана:

$$\Delta x^0 = x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta g^0 = \nabla f(x^1) - \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A_c^0 &= \frac{\Delta x^0 (\Delta x^0)^T}{(\Delta x^0)^T \Delta g^0} - \frac{A^0 \Delta g^0 (\Delta g^0)^T (A^0)^T}{(\Delta g^0)^T (A^0)^T \Delta g^0} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} - \\ &\quad - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix}}{0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4} - \\ &\quad - \frac{\begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{4} - \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{4} - \frac{\begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) & -2 \cdot 4 \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 4 \end{pmatrix}}{-2 \cdot (-2) + 4 \cdot 4} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{4} - \frac{\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}}{20} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 \\ 0,4 & -0,55 \end{pmatrix}, \\ A^1 &= A^0 + A_c^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 \\ 0,4 & -0,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,45 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 1.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычислим новое направление спуска:

$$d_1 = -A^1 \cdot \nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= f(x^1 + \lambda \cdot d_1) = f\left(\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 1,6 \\ 1 + \lambda \cdot 0,8 \end{pmatrix}\right) = (1,6\lambda - (0,8\lambda + 1))^2 + \\ &+ \left((1,6\lambda)^2 - (0,8\lambda + 1) + 2\right)^2 = (0,8\lambda - 1)^2 + (2,56\lambda^2 - 0,8\lambda + 1)^2.\end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$  (см. (3.3), (3.4)), найдем значение параметра  $\lambda_1 \approx 0,280$ .

Шаг 2.4. Положим

$$\begin{aligned}x^2 &= x^1 + \lambda_1 d_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,280 \cdot \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0,8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,224 \end{pmatrix}, \\ f(x^2) &\approx (0,449 - 1,224)^2 + (0,449^2 - 1,224 + 2)^2 \approx 1,556, \\ \nabla f(x^2) &\approx \begin{pmatrix} 2 \cdot (0,449 - 1,224) + 4 \cdot 0,449 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \\ -2 \cdot (0,449 - 1,224) - 2 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Шаг 2.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 0,501 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^2)\| \approx 0,450 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 2.6. Вычисляем новое приближение обращенного гессиана:

$$\begin{aligned}\Delta x^1 &= x^2 - x^1 \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,224 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 0,224 \end{pmatrix}, \\ \Delta g^1 &= \nabla f(x^2) - \nabla f(x^1) \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}, \\ A_c^1 &= \frac{\Delta x^1 (\Delta x^1)^T}{(\Delta x^1)^T \Delta g^1} - \frac{A^1 \Delta g^1 (\Delta g^1)^T (A^1)^T}{(\Delta g^1)^T (A^1)^T \Delta g^1} \approx \frac{\begin{pmatrix} 0,449 \\ 0,224 \end{pmatrix} \cdot (0,449 \quad 0,224)}{(0,449 \quad 0,224) \cdot \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}} - \\ &- \frac{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix} \cdot (2,201 \quad -0,402) \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,45 \end{pmatrix}}{(2,201 \quad -0,402) \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}} \approx \begin{pmatrix} -0,566 & -0,233 \\ -0,233 & -0,095 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$A^2 = A^1 + A_c^1 \approx \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,566 & -0,233 \\ -0,233 & -0,095 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,234 & 0,167 \\ 0,167 & 0,355 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.12.

Таблица 3.12 – Решение задачи методом ДФП

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k),$<br>$\nabla f(x^k)$ | $A^k$                      | $d_k$                                            | $\lambda_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $     |
|-----|----------------|------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------|
| 0   | 0<br>0         | 4                            | 1    0<br>0    1           | 0<br>4                                           | 0,25        | 1<br>2                                           |
|     |                | 0                            |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | -4                           |                            |                                                  |             |                                                  |
| 1   | 0<br>1         | 2                            | 0,8   0,4<br>0,4   0,45    | 1,6<br>0,8                                       | 0,280       | 0,501<br>0,450                                   |
|     |                | -2                           |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | 0                            |                            |                                                  |             |                                                  |
| 2   | 0,449<br>1,224 | 1,556                        | 0,234 0,167<br>0,167 0,355 | 0,0200<br>0,109                                  | 1,176       | 0,131<br>0,121                                   |
|     |                | 0,201                        |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | -0,402                       |                            |                                                  |             |                                                  |
| 3   | 0,472<br>1,353 | 1,533                        | 0,246 0,241<br>0,241 0,485 | 0,0240<br>0,0181                                 | 1,154       | 0,0347<br>$4,756 \times 10^{-3}$                 |
|     |                | -0,119                       |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | 0,0218                       |                            |                                                  |             |                                                  |
| 4   | 0,500<br>1,374 | 1,531                        | 0,286 0,281<br>0,281 0,522 | $2,466 \times 10^{-4}$<br>$1,177 \times 10^{-3}$ | 1,023       | $1,230 \times 10^{-3}$<br>$5,784 \times 10^{-5}$ |
|     |                | $2,866 \times 10^{-3}$       |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | $-3,795 \times 10^{-3}$      |                            |                                                  |             |                                                  |
| 5   | 0,500<br>1,375 | 1,531                        |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | $-5,661 \times 10^{-5}$      |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | $1,190 \times 10^{-5}$       |                            |                                                  |             |                                                  |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^5 \approx (0,50; 1,38)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^5) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>.  
Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^5) - f(x^4)| \approx 1,923 \times 10^{-6}.$$

Проверим, насколько хорошо матрицы  $A^k$  аппроксимируют обращение гессиана  $H_f^{-1}(x^k)$ . Точное значение экстремума ЦФ –  $x^*(0,5; 1,375)^T$ , значение гессиана в этой точке мы уже находили ранее:

$$H_f(x^*) = \begin{pmatrix} 7,5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обратим его:

$$\begin{aligned} H_f^{-1}(x^*) &= \begin{pmatrix} 7,5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7,5 \cdot 4 - (-4) \cdot (-4)} \cdot \begin{pmatrix} 7,5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 7,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,286 & 0,286 \\ 0,286 & 0,536 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь по формуле (3.62, [1]) найдем матрицу  $A^5$  (в решении задачи ее вычисление уже не требовалось):

$$A^5 = A^4 + A_c^4 = \frac{\Delta x^4 (\Delta x^4)^T}{(\Delta x^4)^T \Delta g^4} - \frac{A^4 \Delta g^4 (\Delta g^4)^T (A^4)^T}{(\Delta g^4)^T (A^4)^T \Delta g^4} \approx \begin{pmatrix} 0,288 & 0,287 \\ 0,287 & 0,537 \end{pmatrix}.$$

Как видим, аппроксимация весьма точная. Норма невязки составляет

$$\|H_f^{-1}(x^*) - A^5\| \approx \left\| \begin{pmatrix} 0,286 & 0,286 \\ 0,286 & 0,536 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,288 & 0,287 \\ 0,287 & 0,537 \end{pmatrix} \right\| \approx 0,0150.$$

## 2. Метод Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шенно (МБФГШ)

Шаг 1.1. Зададим  $k = 0$ , вычислим  $f(x^0) = 4$ , положим

$$A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.2. Вычислим градиент в точке  $x^0$  и направление спуска:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 0) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 0 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0^2 - 0 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$d_0 = -A^0 \cdot \nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^0 + \lambda \cdot d_0) = f\left(\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 0 \\ 0 + \lambda \cdot 4 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda \end{pmatrix}\right) = \\ &= (0 - 4\lambda)^2 + (0^2 - 4\lambda + 2)^2 = 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$ , найдем значение параметра  $\lambda_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda) &= 16\lambda^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 32\lambda - 8(2 - 4\lambda) = 64\lambda - 16 \\ &\Rightarrow 64\lambda_0 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Шаг 1.4. Положим

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x^1) = (0 - 1)^2 + (0^2 - 1 + 2)^2 = 2,$$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 - 1) + 4 \cdot 0 \cdot (0^2 - 1 + 2) \\ -2 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0^2 - 1 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| = 1 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 2 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 1.6. Вычисляем новое приближение обращенного гессиана:

$$\delta_0 = x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \nabla f(x^1) - \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= E - \frac{\delta_0 \gamma_0^T}{\delta_0^T \gamma_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) & 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 4 \end{pmatrix}}{0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^1 &= \Gamma^0 A^0 (\Gamma^0)^T + \frac{\delta_0 \delta_0^T}{\delta_0^T \gamma_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}^T + \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix}}{0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0 \\ 0,5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 1.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычислим новое направление спуска:

$$d_1 = -A^1 \cdot \nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.3. Составляем функцию  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= f(x^1 + \lambda \cdot d_1) = f\left(\begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 2 \\ 1 + \lambda \cdot 1 \end{pmatrix}\right) = (2\lambda - (\lambda + 1))^2 + \\ &+ ((2\lambda)^2 - (\lambda + 1) + 2)^2 = (\lambda - 1)^2 + (4\lambda^2 - \lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Минимизируя данную функцию по параметру  $\lambda$  (см. (3.3), (3.4)), найдем значение параметра  $\lambda_1 \approx 0,224$ .

Шаг 2.4. Положим

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,224 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,224 \end{pmatrix},$$

$$f(x^2) \approx (0,449 - 1,224)^2 + (0,449^2 - 1,224 + 2)^2 \approx 1,556,$$

$$\nabla f(x^2) \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot (0,449 - 1,224) + 4 \cdot 0,449 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \\ -2 \cdot (0,449 - 1,224) - 2 \cdot (0,449^2 - 1,224 + 2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.5. Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 0,501 > \varepsilon_x, \quad \|\nabla f(x^2)\| \approx 0,450 > \varepsilon_y,$$

поэтому переходим на шаг 6.

Шаг 2.6. Вычисляем новое приближение обращенного гессиана:

$$\delta_1 = x^2 - x^1 \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,224 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 0,224 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = \nabla f(x^2) - \nabla f(x^1) \approx \begin{pmatrix} 0,201 \\ -0,402 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma^1 = E - \frac{\delta_1 \gamma_1^T}{\delta_1^T \gamma_1} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0,449 \\ 0,224 \end{pmatrix} \cdot (0,449 \quad 0,224)}{(0,449 \quad 0,224) \cdot \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}} \approx \begin{pmatrix} -0,101 & 0,201 \\ -0,550 & 1,101 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^2 = \Gamma^1 A^1 (\Gamma^1)^T + \frac{\delta_1 \delta_1^T}{\delta_1^T \gamma_1} &\approx \begin{pmatrix} -0,101 & 0,201 \\ -0,550 & 1,101 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,101 & 0,201 \\ -0,550 & 1,101 \end{pmatrix}^T + \\ &+ \frac{\begin{pmatrix} 0,449 \\ 0,224 \end{pmatrix} \cdot (0,449 \quad 0,224)}{(0,449 \quad 0,224) \cdot \begin{pmatrix} 2,201 \\ -0,402 \end{pmatrix}} \approx \begin{pmatrix} 0,234 & 0,167 \\ 0,167 & 0,359 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 2.7. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 2.

Следующие итерации решения сведем в таблицу 3.13.

Таблица 3.13 – Решение задачи методом БФГШ

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k),$<br>$\nabla f(x^k)$ | $A^k$                      | $d_k$                                            | $\lambda_k$ | $\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$\ \nabla f^{k+1}\ $     |
|-----|----------------|------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------|
| 0   | 0<br>0         | 4                            | 1    0<br>0    1           | 0<br>4                                           | 0,25        | 1<br>2                                           |
|     |                | 0                            |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | -4                           |                            |                                                  |             |                                                  |
| 1   | 0<br>1         | 2                            | 1    0,5<br>0,5    0,5     | 2<br>1                                           | 0,224       | 0,501<br>0,450                                   |
|     |                | -2                           |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | 0                            |                            |                                                  |             |                                                  |
| 2   | 0,449<br>1,224 | 1,556                        | 0,234 0,167<br>0,167 0,359 | 0,0202<br>0,111                                  | 1,162       | 0,131<br>0,121                                   |
|     |                | 0,201                        |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | -0,402                       |                            |                                                  |             |                                                  |
| 3   | 0,472<br>1,353 | 1,533                        | 0,261 0,252<br>0,252 0,494 | 0,0256<br>0,0193                                 | 1,083       | 0,0347<br>$4,756 \times 10^{-3}$                 |
|     |                | -0,119                       |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | 0,0218                       |                            |                                                  |             |                                                  |
| 4   | 0,500<br>1,374 | 1,531                        | 0,286 0,281<br>0,281 0,523 | $2,470 \times 10^{-4}$<br>$1,178 \times 10^{-3}$ | 1,022       | $1,230 \times 10^{-3}$<br>$5,784 \times 10^{-5}$ |
|     |                | $2,866 \times 10^{-3}$       |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | $-3,795 \times 10^{-3}$      |                            |                                                  |             |                                                  |
| 5   | 0,500<br>1,375 | 1,531                        |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | $-5,661 \times 10^{-5}$      |                            |                                                  |             |                                                  |
|     |                | $1,190 \times 10^{-5}$       |                            |                                                  |             |                                                  |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = 0,02$ , округляем значение аргумента до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^5 \approx (0,50; 1,38)^T$  км, а так как  $\varepsilon_y = 0,05$ , округляем значение функции до двух цифр после запятой:  $f^* = f(x^5) \approx 1,53$  км<sup>2</sup>. Оптимальная длина канала составит  $L^* = \sqrt{f^*} \approx 1,237$  км.

Проверим порядок величины  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$ :

$$|f(x^5) - f(x^4)| \approx 1,923 \times 10^{-6}.$$

Проверим, насколько хорошо матрицы  $A^k$  аппроксимируют обращение гессиана  $H_f^{-1}(x^k)$ . Точное значение экстремума ЦФ –  $x^*(0,5;1,375)^T$ , значение гессиана в этой точке мы уже находили ранее:

$$H_f(x^*) = \begin{pmatrix} 7,5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обратим его:

$$\begin{aligned} H_f^{-1}(x^*) &= \begin{pmatrix} 7,5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7,5 \cdot 4 - (-4) \cdot (-4)} \cdot \begin{pmatrix} 7,5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 7,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,286 & 0,286 \\ 0,286 & 0,536 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь по формуле (3.73, [1]) найдем матрицу  $A^5$  (в решении задачи ее вычисление уже не требовалось):

$$A^5 = \left[ E - \frac{\delta_4 \gamma_4^T}{\delta_4^T \gamma_4} \right] A^4 \left[ E - \frac{\delta_4 \gamma_4^T}{\delta_4^T \gamma_4} \right]^T + \frac{\delta_4 \delta_4^T}{\delta_4^T \gamma_4} \approx \begin{pmatrix} 0,288 & 0,287 \\ 0,287 & 0,537 \end{pmatrix}.$$

Как видим, аппроксимация весьма точная. Норма невязки составляет

$$\|H_f^{-1}(x^*) - A^5\| \approx \left\| \begin{pmatrix} 0,286 & 0,286 \\ 0,286 & 0,536 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,288 & 0,287 \\ 0,287 & 0,537 \end{pmatrix} \right\| \approx 0,0144.$$

## 4 ЗАДАЧА ТЕХНИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

### 4.1 Постановка задачи

Пусть в отделе технического контроля (ОТК) некоторой компании работают контролеры первого и второго разрядов. Норма выработки ОТК за восьмичасовой рабочий день составляет не менее 1 800 изделий. Контролер первого разряда проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер второго разряда проверяет 15 изделий в час, его точность – 95%.

Зарплата контролера первого разряда – 400 рублей в час, второго разряда – 300 рублей в час. При каждой ошибке контролера компания несет убыток в размере 200 рублей. Компания может привлечь к работе не более 8 контролеров первого разряда и не более 10 контролеров второго разряда. Необходимо определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Проведем анализ задачи. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  обозначают количество контролёров первого и второго разряда соответственно. Согласно условиям, число контролеров каждого разряда ограничено, т. е. имеются следующие ограничения:

$$x_1 \leq 8 \text{ человек} \quad (\text{разряд 1}),$$

$$x_2 \leq 10 \text{ человек} \quad (\text{разряд 2}).$$

Ежедневно компании необходимо проверять не менее 1800 изделий. Контролер первого разряда за восьмичасовой рабочий день, проверяя по 25 изделий в час, проверит  $8 \cdot 25 = 200$  изделий. Если количество контролеров первого разряда равно  $x_1$ , то всего за день они проверят  $200x_1$  изделий. Контролер второго разряда за восьмичасовой рабочий день, проверяя по 15 изделий в час, проверит  $8 \cdot 15 = 120$  изделий. Если количество

контролеров второго разряда равно  $x_2$ , то всего за день они проверят  $120x_2$  изделий. Таким образом, должно выполняться неравенство

$$200x_1 + 120x_2 \geq 1800 \text{ или } 5x_1 + 3x_2 \geq 45 \text{ изделий.}$$

Здесь используется тот факт, что смысл неравенства не меняется при делении обеих его частей положительную величину. При делении на отрицательную величину знак неравенства меняется на противоположный.

Также необходимо учесть, что количество контролеров не может быть отрицательным, т. е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ или } x_{1,2} \geq 0.$$

При построении целевой функции следует иметь в виду, что расходы компании, связанные с контролем, включают две составляющие:

- зарплату контролеров;
- убытки, вызванные ошибками контролеров.

Расходы на одного контролера первого разряда составляют:

$$400 + 200 \cdot 25 \cdot 0,02 = 500 \text{ рублей в час.}$$

Здесь 400 рублей – зарплата контролера,  $25 \cdot 0,02$  – количество бракованных изделий (2% от часовой выработки),  $200 \cdot 25 \cdot 0,02$  рублей – убыток от брака.

Расходы на одного контролера К2 равны:

$$300 + 200 \cdot 15 \cdot 0,05 = 450 \text{ рублей в час.}$$

Здесь 300 рублей – зарплата контролера,  $15 \cdot 0,05$  – количество бракованных изделий (5% от часовой выработки),  $200 \cdot 15 \cdot 0,05$  рублей – убыток от брака.

Следовательно, минимизируемая целевая функция, выражающая ежедневные расходы на контроль, имеет вид:

$$f(x) = 8 \cdot (500x_1 + 450x_2) = 4000x_1 + 3600x_2 \text{ рублей.}$$

Коэффициенты ЦФ также можно разделить на положительную величину, но тогда ее значение пропорционально уменьшится и после получения окончательного ответа результат нужно будет умножить на указанную величину. Например, можно использовать ЦФ

$$F(x) = 4x_1 + 3,6x_2,$$

но тогда ее результат выражается уже не в рублях, а тысячах рублей (т. к. коэффициенты были поделены на 1000). Поэтому после получения оптимального решения  $x^*$  для определения расходов на ОТК нужно либо результат подставить в исходную ЦФ –  $f(x^*)$ , либо умножить на 1000 результат модифицированной ЦФ –  $1000 \cdot F(x^*)$ .

Делить коэффициенты ЦФ на отрицательное число следует лишь в тех случаях, когда необходимо перейти от задачи минимизации к задаче максимизации и наоборот.

Таким образом, сформулировали следующую задачу:

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 10, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 45, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Анализируя полученную задачу, можно заметить, что и ЦФ, и ограничения в ее записи являются линейными. Соответственно, задача относится к классу задач линейного программирования (ЗЛП).

## 4.2 Стандартная форма записи ЗЛП

Преобразуем к СФ задачу технического контроля

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 8, \\x_2 &\leq 10, \\5x_1 + 3x_2 &\geq 45, \\x_{1,2} &\geq 0.\end{aligned}$$

В данном случае это сделать достаточно просто – необходимо ввести дополнительные переменные  $x_3$ ,  $x_4$  и  $x_5$  в ограничения задачи, преобразовав их в равенства. Добавим данные переменные в ЦФ с коэффициентом 0. Размерность задачи увеличивается до  $n = 5$ . Получим ЗЛП в СФ

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min \quad (4.1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 8, \\x_2 + x_4 &= 10, \\5x_1 + 3x_2 - x_5 &= 45, \\x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.\end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим более сложный случай – дана ЗЛП

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7, \\x_1 - x_2 + x_3 &\geq 2, \\3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5, \\x_1 &\geq 0, \quad x_2 \leq 0,\end{aligned}$$

на переменную  $x_3$  ограничения по знаку отсутствуют. Видно, что в данной задаче  $n = 3$ ,  $m = 3$ . Преобразуем эту задачу к СФ:

1. Перейдем от максимизации к минимизации, умножив ЦФ на  $(-1)$ .
2. Заменяем  $x_3$  в ЦФ и ограничениях на  $x_4 - x_5$ , где  $x_4, x_5 \geq 0$ . При этом размерность задачи увеличивается до  $n = 4$ .
3. Умножим обе части третьего ограничения на  $(-1)$ .

3. Введем дополнительные переменные  $x_6$  и  $x_7$  в первое и второе ограничения соответственно, преобразовав их в равенства. Добавим данные переменные в ЦФ с коэффициентом 0. Размерность задачи увеличивается до  $n = 6$ .

4. Заменяем  $x_2$  в ЦФ и ограничениях на  $-x_8$ , где  $x_8 \geq 0$ . При этом размерность задачи не изменится —  $n = 6$ .

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к следующей задаче линейного программирования в СФ:

$$F(x) = -x_1 - 2x_8 - 3x_4 + 3x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \min \quad (4.3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 - x_8 + x_4 - x_5 + x_6 &= 7, \\ x_1 + x_8 + x_4 - x_5 - x_7 &= 2, \\ -3x_1 - x_8 + 2x_4 - 2x_5 &= 5, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 4, \dots, 8. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Если  $X^*$  — оптимальное решение задачи (4.3)–(4.4), то оптимальным решением исходной задачи будет  $x^* = (X_1^*, -X_8^*, X_4^* - X_5^*)$ .

### 4.3 Поиск начального базиса

Найдем базисное решение для задачи технического контроля, записанной в СФ:

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 8, \\ x_2 + x_4 &= 10, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_5 &= 45, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

В данной задаче  $n = 5$ ,  $m = 3$ . Поэтому в базисе будет  $m = 3$  переменных, свободными останутся  $n - m = 2$  переменные.

### 4.3.1 Метод Жордана – Гаусса

Используем метод Жордана – Гаусса. Попробуем выделить базис по переменным  $x_3$ ,  $x_4$  и  $x_5$ . Переменные  $x_3$  и  $x_4$  уже являются базисными. Обе они входят только в одно ограничение с коэффициентом 1, а в остальных ограничениях отсутствуют. В третьем ограничении базисные переменные отсутствуют. Введем в базис переменную  $x_5$ . Для этого разделим или умножим третье ограничение на  $(-1)$ :

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 8, \\x_2 + x_4 &= 10, \\-5x_1 - 3x_2 + x_5 &= -45, \\x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.\end{aligned}$$

Таким образом, выделили базис по переменным  $x_3$ ,  $x_4$  и  $x_5$ . Но он является недопустимым, т. к.  $b_3 = -45 < 0$ . Следовательно, нужно выделить другой базис, например по переменным  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_5$ . Перепишем матрицу ограничений и вектор правых частей ограничений задачи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Выделим базис по указанным переменным с помощью эквивалентных преобразований:

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & -1 & 45 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -1 & -25 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 & 25 \end{array} \right).\end{aligned}$$

Полученный базис допустимый. Таким образом, получили

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_3 &= 8, \\
 x_2 + x_4 &= 10, \\
 x_5 + 5x_3 + 3x_4 &= 25.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Базисные переменные –  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_5$ , свободные –  $x_3$  и  $x_4$ . Начальное базисное решение  $x^0 = (8, 10, 0, 0, 25)^T$ .

Исключим базисные переменные из ЦФ:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4000x_1 + 3600x_2 = 4000(8 - x_3) + 3600(10 - x_4) = \\
 &= 68000 - 4000x_3 - 3600x_4.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Также найдем базисное решение следующей ЗЛП в СФ:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \rightarrow \min, \\
 x_1 + x_4 &= 20, \\
 x_2 + x_5 &= 50, \\
 x_3 + x_6 &= 30, \\
 x_4 + x_5 + x_6 &= 60; \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

В данной задаче  $n = 6$ ,  $m = 4$ . Поэтому в базисе будет  $m = 4$  переменных, свободными останутся  $n - m = 2$  переменные.

Используем метод Жордана – Гаусса. Выделим базис по переменным  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ , т. е. свободными останутся переменные  $x_1$  и  $x_3$ . Перепишем матрицу ограничений и вектор правых частей ограничений задачи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Столбцы с номерами 2, 4, 5, 6 матрицы  $A$  системы ограничений-равенств образуют базисный минор (проверить самостоятельно). С помощью эквивалентных преобразований приводим эту систему к виду (4.14, [1]), где базисными являются переменные  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ :

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 30 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 30 \end{array}\right) = \\
&= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 30 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

От перестановки ограничений местами условия задачи не изменятся, поэтому перепишем полученные коэффициенты в виде

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix},$$

либо

$$\begin{aligned}
x_2 + x_1 + x_3 &= 40, & x_2 &= 40 - x_1 - x_3, \\
x_4 + x_1 &= 20, & x_4 &= 20 - x_1, \\
x_5 - x_1 - x_3 &= 10, & x_5 &= 10 + x_1 + x_3, \\
x_6 + x_3 &= 30, & x_6 &= 30 - x_3.
\end{aligned} \quad \text{или} \quad (4.7)$$

Полагая в равенствах (4.7) свободные переменные  $x_1, x_3$  равными нулю ( $x_1 = 0, x_3 = 0$ ), находим  $x_2 = 40, x_4 = 20, x_5 = 10, x_6 = 30$ , то есть базисным решением является точка  $x^0 = (0, 40, 0, 20, 10, 30)^T$ .

Так как все базисные переменные в векторе  $x^0$  положительны, данное базисное решение является допустимым (т. е. угловой точкой) и невырожденным.

Исключив с помощью (4.7) базисные переменные в выражении для целевой функции, получим:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 = \\
 &= x_1 + 9(40 - x_1 - x_3) + 5x_3 + 3(20 - x_1) + 4(10 + x_1 + x_3) + 14(30 - x_3) = \\
 &= 880 - 7x_1 - 14x_3.
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

#### 4.3.2 Метод искусственного базиса

Используем метод искусственного базиса. Получим новую систему ограничений

$$\begin{aligned}
 x_6 + x_1 + x_3 &= 8, \\
 x_7 + x_2 + x_4 &= 10, \\
 x_8 + 5x_1 + 3x_2 - x_5 &= 45, \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 8.
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

и ЦФ  $F(x) = x_6 + x_7 + x_8 \rightarrow \min$ . Избавляемся в ЦФ от базисных переменных:

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \sum_{i=1}^3 b_i = 8 + 10 + 45 = 63, \\
 p_1 &= -\sum_{i=1}^3 a_{i1} = -(1 + 0 + 5) = -6, \quad p_2 = -\sum_{i=1}^3 a_{i2} = -(0 + 1 + 3) = -4, \\
 p_3 &= -\sum_{i=1}^3 a_{i3} = -(1 + 0 + 0) = -1, \quad p_4 = -\sum_{i=1}^3 a_{i4} = -(0 + 1 + 0) = -1, \\
 p_5 &= -\sum_{i=1}^3 a_{i5} = -(0 + 0 - 1) = 1,
 \end{aligned}$$

таким образом,

$$F(x) = 63 - 6x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min. \quad (4.10)$$

Начальным базисным решением измененной задачи будет точка  $x^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 8, 10, 45)^T$ . Решив ее одним из предложенных далее методов, получим опорный план исходной задачи.

Также найдем базисное решение следующей ЗЛП в СФ:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \rightarrow \min, \\
x_1 + x_4 &= 20, \\
x_2 + x_5 &= 50, \\
x_3 + x_6 &= 30, \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 60; \\
x_j &\geq 0, \quad j=1,2,\dots,6.
\end{aligned}$$

Используем метод искусственного базиса. Получим новую систему ограничений:

$$\begin{aligned}
x_7 + x_1 + x_4 &= 20, \\
x_8 + x_2 + x_5 &= 50, \\
x_9 + x_3 + x_6 &= 30, \\
x_{10} + x_4 + x_5 + x_6 &= 60; \\
x_j &\geq 0, \quad j=1,2,\dots,10.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

и ЦФ  $F(x) = x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \rightarrow \min$ . Избавляемся в ЦФ от базисных переменных:

$$p_0 = \sum_{i=1}^4 b_i = 20 + 50 + 30 + 60 = 160,$$

$$p_1 = -\sum_{i=1}^4 a_{i1} = -(1 + 0 + 0 + 0) = -1, \quad p_2 = -\sum_{i=1}^4 a_{i2} = -(0 + 1 + 0 + 0) = -1,$$

$$p_3 = -\sum_{i=1}^4 a_{i3} = -(0 + 0 + 1 + 0) = -1, \quad p_4 = -\sum_{i=1}^4 a_{i4} = -(1 + 0 + 0 + 1) = -2,$$

$$p_5 = -\sum_{i=1}^4 a_{i5} = -(0 + 1 + 0 + 1) = -2, \quad p_6 = -\sum_{i=1}^4 a_{i6} = -(0 + 0 + 1 + 1) = -2,$$

таким образом,

$$F(x) = 160 - x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 \rightarrow \min. \tag{4.12}$$

Начальным базисным решением измененной задачи будет точка  $x^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 20, 50, 30, 60)^T$ . Решив ее одним из предложенных далее методов, получим опорный план исходной задачи.

#### 4.4 Графическое решение ЗЛП

Решим графическим методом задачу технического контроля:

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 10, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 45, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

В этой задаче всего две переменные, поэтому ее можно решать графическим методом без преобразований. Таким образом,  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 2$ .

Строим координатную сетку, по осям откладываем переменные  $x_1$  и  $x_2$ . Для изображения области допустимых решений (ОДР) следует определить область действия всех ограничений. Все допустимые решения лежат в первом квадранте, так как  $x_{1,2} \geq 0$ .

В силу ограничения  $5x_1 + 3x_2 \geq 45$  все допустимые решения располагаются по одну сторону от прямой  $5x_1 + 3x_2 = 45$ . Нужную полуплоскость можно найти, проверив, например, удовлетворяет ли начало координат данному неравенству. Условие  $5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 45$  не выполняется, поэтому выбираем полуплоскость, не содержащую точку  $(0,0)$ . Нужная полуплоскость отмечается штриховкой. Аналогичным образом проверяем область действия ограничений  $x_1 \leq 8$ ,  $x_2 \leq 10$ . В итоге определяем, что ОДР  $S$  задачи является треугольник  $ABC$  (рис. 4.1), содержащий бесконечное число допустимых решений.

Построим линию уровня ЦФ, проходящую через ОДР, например, через точку  $C(3,10)$ . Значение ЦФ в этой точке  $f(3,10) = 4000 \cdot 3 + 3600 \cdot 10 = 48000$ , поэтому будем строить прямую

$$f(x) = 48000 \Rightarrow 4000x_1 + 3600x_2 = 48000 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x_1 + 9x_2 = 120.$$

Также укажем на рисунке направление антиградиента ЦФ

$$-\nabla f(x) = -\begin{pmatrix} 4000 \\ 3600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4000 \\ -3600 \end{pmatrix}.$$

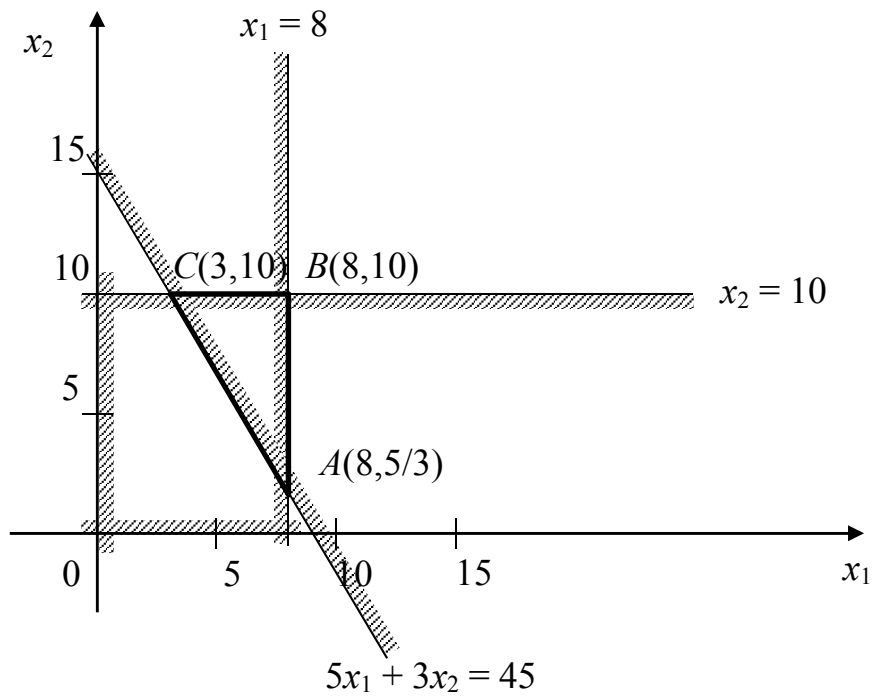


Рис. 4.1 – ОДР задачи технического контроля

Нам важно направление вектора, а не его абсолютная величина, поэтому при необходимости его компоненты можно умножать или делить на положительную константу. Поэтому можно использовать, например, направление  $(-10, -9)^T$ . Результат изображен на рисунке 4.2 (вектор антиградиента изображен не в масштабе, обозначено только его направление).

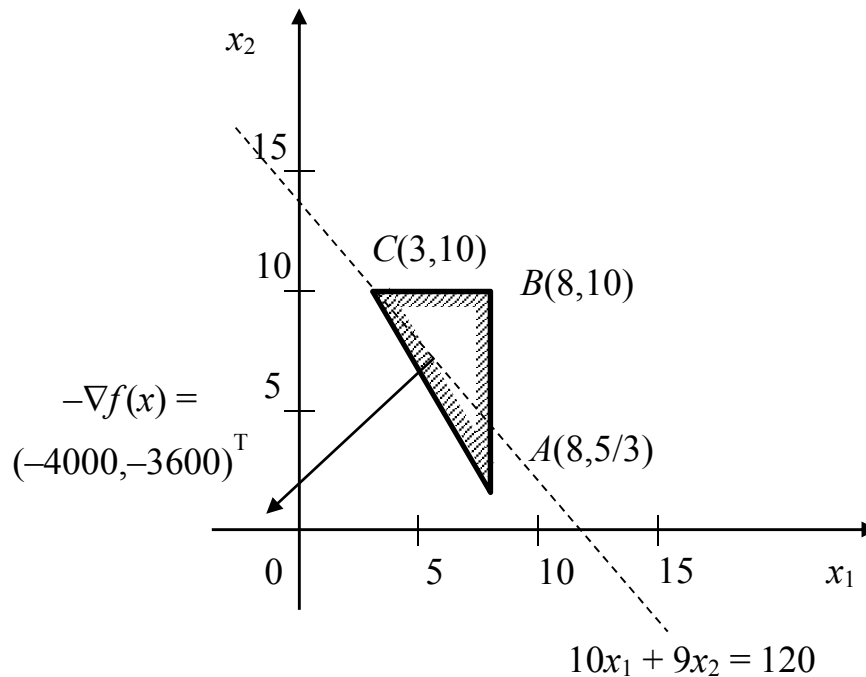


Рис. 4.2 – Линия уровня ЦФ и направление антиградиента

Видно, что при перемещении линии уровня в направлении антиградиента последней точкой касания с ОДР будет точка  $A(8, 5/3)$ . Следовательно,  $x^* = (8; 5/3)^T$  – оптимальное решение задачи (план). Значение ЦФ в этой точке  $f^* = f(8, 5/3) = 4000 \cdot 8 + 3600 \cdot 5/3 = 38000$ .

Таким образом, при оптимальном режиме работы ОТК необходимо использовать 8 контролеров первого разряда и  $5/3$  контролеров второго разряда. При этом расходы на контроль составят 38000 рублей. Дробное значение  $x_2 = 5/3$  соответствует использованию одного из двух контролеров второго разряда в течение неполного рабочего дня. При недопустимости неполной нагрузки контролеров используют методы целочисленного программирования.

Также решим графическим методом задачу

$$\begin{aligned}
f(x) &= x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \rightarrow \min, \\
x_1 + x_4 &= 20, \\
x_2 + x_5 &= 50, \\
x_3 + x_6 &= 30, \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 60; \\
x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, 6.
\end{aligned}$$

Количество переменных  $n = 6$ , количество ограничений  $m = 4$ . Независимых переменных  $n - m = 2$ , поэтому задачу можно решить графическим методом. Так как в исходной задаче количество переменных больше 2, нужно выделить базис.

Используем первый способ выделения базиса (по существующим переменным). Ранее мы уже решали такую задачу (см. (4.7), (4.8)):

$$\begin{aligned}
f(x) &= 880 - 7x_1 - 14x_3, \\
x_2 &= 40 - x_1 - x_3, \\
x_4 &= 20 - x_1, \\
x_5 &= 10 + x_1 + x_3, \\
x_6 &= 30 - x_3, \\
x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 6,
\end{aligned}$$

или, с учетом (4.25, [1]):

$$\begin{aligned}
x_1 + x_3 &\leq 40, \\
x_1 &\leq 20, \\
-x_1 - x_3 &\leq 10, \\
x_3 &\leq 30, \\
x_{1,3} &\geq 0.
\end{aligned}$$

В задаче остались только две независимые переменные, таким образом,  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 3$ . Строим координатную сетку, по осям откладываем переменные  $x_1$  и  $x_3$ . Для изображения ОДР следует определить область действия всех ограничений:

1. В силу ограничения  $x_1 + x_3 \leq 40$  все допустимые решения располагаются по одну сторону от прямой  $x_1 + x_3 = 40$ . Нужную полуплоскость можно найти, проверив, например, удовлетворяет ли начало координат данному неравенству. Условие  $0 + 0 \leq 40$  выполняется, поэтому выбираем полуплоскость, содержащую точку  $(0,0)$  и отмечаем ее штриховкой.

2. Аналогично отмечаем штриховкой полуплоскости действия ограничений  $x_1 \leq 20$ ,  $-x_1 - x_3 \leq 10$ ,  $x_3 \leq 30$ .

3. Все допустимые решения лежат в первом квадранте, так как  $x_{1,3} \geq 0$ . Отмечаем штриховкой границы первого квадранта.

В итоге определяем, что ОДР задачи является пятиугольником  $ABCDE$  (см. рис. 4.3).

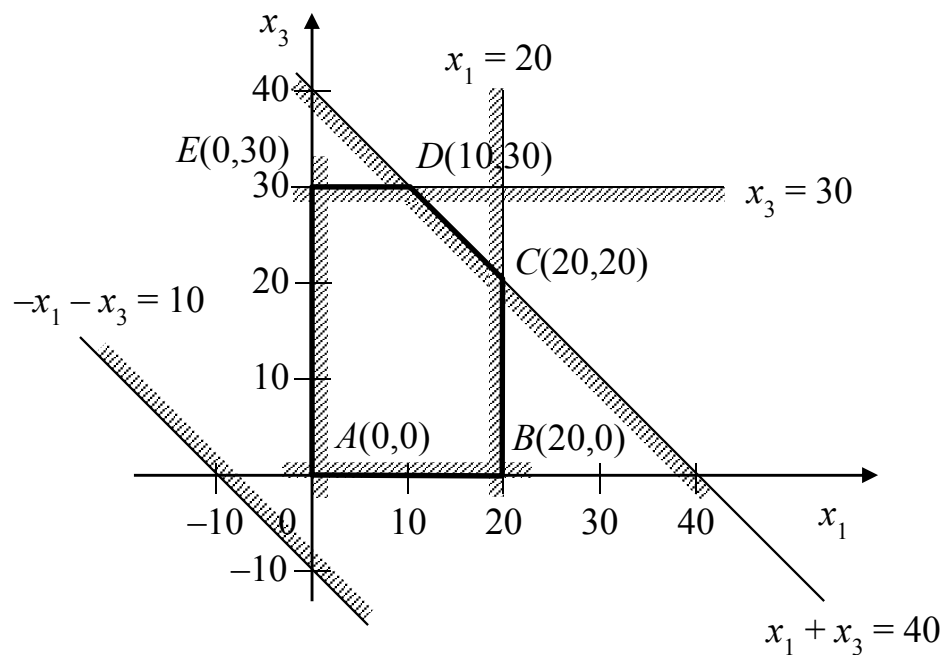


Рис. 4.3 – ОДР задачи

Построим линию уровня ЦФ, проходящую через ОДР, например, через точку  $B(20,0)$ . Значение ЦФ в этой точке  $f(20,0) = 880 - 7 \cdot 20 - 14 \cdot 0 = 640$ , поэтому будем строить прямую

$$\begin{aligned} f(x) = 640 &\Rightarrow 880 - 7x_1 - 14x_3 = 640 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7x_1 + 14x_3 = 140. \end{aligned}$$

Также укажем на рисунке направление антиградиента ЦФ

$$-\nabla f(x) = -\begin{pmatrix} -7 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Результат изображен на рисунке 4.4. Видно, что при перемещении линии уровня в направлении антиградиента последней точкой касания с ОДР будет точка  $D(10,30)$ . Это и есть оптимальное решение задачи. Значение ЦФ в этой точке  $f(10,30) = 880 - 7 \cdot 10 - 14 \cdot 30 = 390$ .

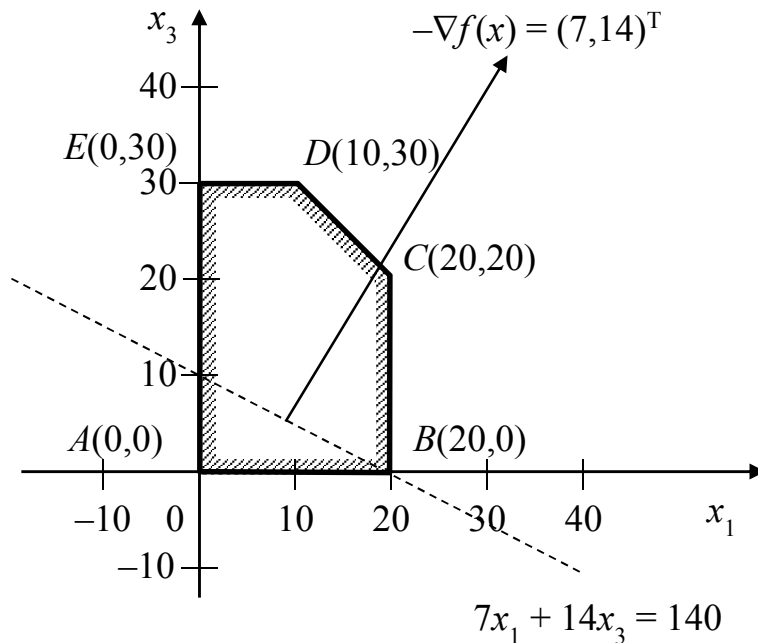


Рис. 4.4 – Линия уровня ЦФ и направление антиградиента

Найдем значения базисных переменных:

$$\begin{aligned} x_2 &= 40 - x_1 - x_3 = 40 - 10 - 30 = 0, \\ x_4 &= 20 - x_1 = 20 - 10 = 10, \\ x_5 &= 10 + x_1 + x_3 = 10 + 10 + 30 = 50, \\ x_6 &= 30 - x_3 = 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальным решением исходной задачи будет  $x^* = (10, 0, 30, 10, 50, 0)^T$ ,  $f^* = 390$ .

### 4.5 Решение ЗЛП симплекс-методом

Решим симплекс-методом задачу технического контроля:

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 10, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 45, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Шаг 1.1. Ранее мы уже выделяли базис этой задачи (см. (4.5), (4.6)):

$$f(x) = 68000 - 4000x_3 - 3600x_4,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 8, \\ x_2 + x_4 &= 10, \\ x_5 + 5x_3 + 3x_4 &= 25, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Таким образом, после выделения базиса  $n = 5$ ,  $m = 3$ .

Шаг 1.2. Полагаем  $k = 0$ . Формируем начальную симплекс-таблицу СТ-0:

| СТ-0      | $x_3$ | $x_4$ | $b$    |
|-----------|-------|-------|--------|
| (1) $x_1$ | 1     | 0     | 8      |
| (2) $x_2$ | 0     | 1     | 10     |
| (3) $x_5$ | 5     | 3     | 25     |
| $p$       | -4000 | -3600 | -68000 |

Шаг 1.3. Отрицательными являются коэффициенты ЦФ  $p_3^0$  и  $p_4^0$ , в соответствующих им столбцах есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^0$ ,

поэтому базисное решение  $x^0 = (8, 10, 0, 0, 25)^T$  не является оптимальным.

Значение ЦФ  $f(x^0) = 68000$ .

Шаг 1.4. Выберем любой из коэффициентов  $p_3^0$ ,  $p_4^0$ , например, с наименьшим значением  $p_3^0 = -4000$ . Таким образом, опорным будет 1-й столбец ( $l = 3$ ). Выбираем опорную строку:

$$\frac{b_1^0}{a_{13}^0} = \frac{8}{1} = 8, \quad \frac{b_3^0}{a_{33}^0} = \frac{25}{5} = 5 \Rightarrow z = 3, \quad t = 5,$$

т. к. в третьем ограничении базисной является переменная с индексом 5 ( $x_5$ ).

Шаг 1.4.1. Начинаем формирование СТ-1. Сначала меняем местами переменные  $x_3$  и  $x_5$ :

| СТ-1      | $x_5$ | $x_4$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |     |
| (2) $x_2$ |       |       |     |
| (3) $x_3$ |       |       |     |
| $p$       |       |       |     |

Шаг 1.4.2. По формуле (4.32, [1]) получаем:

$$a_{35}^1 = \frac{1}{a_{33}^0} = \frac{1}{5}.$$

| СТ-1      | $x_5$ | $x_4$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |     |
| (2) $x_2$ |       |       |     |
| (3) $x_3$ | $1/5$ |       |     |
| $p$       |       |       |     |

Шаг 1.4.3. По формулам (4.33, [1]) получаем:

$$a_{34}^1 = \frac{a_{34}^0}{a_{33}^0} = \frac{3}{5}, \quad b_3^1 = \frac{b_3^0}{a_{33}^0} = \frac{25}{5} = 5.$$

| СТ-1      | $x_5$ | $x_4$                                             | $b$                                             |
|-----------|-------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| (1) $x_1$ |       |                                                   |                                                 |
| (2) $x_2$ |       |                                                   |                                                 |
| (3) $x_3$ | 1/5   | <span style="border: 1px solid black;">3/5</span> | <span style="border: 1px solid black;">5</span> |
| $p$       |       |                                                   |                                                 |

Шаг 1.4.4. По формулам (4.34, [1]) получаем:

$$a_{15}^1 = -\frac{a_{13}^0}{a_{33}^0} = -\frac{1}{5}, \quad a_{25}^1 = -\frac{a_{23}^0}{a_{33}^0} = -\frac{0}{5} = 0, \quad p_5^1 = -\frac{p_3^0}{a_{33}^0} = -\frac{-4000}{5} = 800.$$

| СТ-1      | $x_5$                                              | $x_4$ | $b$ |
|-----------|----------------------------------------------------|-------|-----|
| (1) $x_1$ | <span style="border: 1px solid black;">-1/5</span> |       |     |
| (2) $x_2$ | <span style="border: 1px solid black;">0</span>    |       |     |
| (3) $x_3$ | 1/5                                                | 3/5   | 5   |
| $p$       | <span style="border: 1px solid black;">800</span>  |       |     |

Шаг 1.4.5. По формулам (4.35, [1]) получаем остальные элементы

СТ-1:

$$a_{14}^1 = a_{14}^0 - a_{13}^0 a_{34}^1 = 0 - 1 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}, \quad a_{24}^1 = a_{24}^0 - a_{23}^0 a_{34}^1 = 1 - 0 \cdot \frac{3}{5} = 1,$$

$$b_1^1 = b_1^0 - a_{13}^0 b_3^1 = 8 - 1 \cdot 5 = 3, \quad b_2^1 = b_2^0 - a_{23}^0 b_3^1 = 10 - 0 \cdot 5 = 10,$$

$$p_4^1 = p_4^0 - p_3^0 a_{34}^1 = -3600 - (-4000) \cdot \frac{3}{5} = -1200,$$

$$p_0^1 = p_0^0 + p_3^0 b_3^1 = 68000 + (-4000) \cdot 5 = 48000.$$

| СТ-1      | $x_5$  | $x_4$   | $b$      |
|-----------|--------|---------|----------|
| (1) $x_1$ | $-1/5$ | $-3/5$  | $3$      |
| (2) $x_2$ | $0$    | $1$     | $10$     |
| (3) $x_3$ | $1/5$  | $3/5$   | $5$      |
| $p$       | $800$  | $-1200$ | $-48000$ |

То есть задача была преобразована к виду

$$f(x) = 48000 - 1200x_4 + 800x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 = 3,$$

$$x_2 + x_4 = 10,$$

$$x_3 + \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 = 5,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Угловая точка  $x^1 = (3, 10, 5, 0, 0)^T$ , значение ЦФ  $f(x^1) = 48000$ .

Шаг 1.5. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 2.3. Отрицательным является коэффициент ЦФ  $p_4^1$ , в соответствующем ему столбце есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^1$ , поэтому базисное решение  $x^1 = (3, 10, 5, 0, 0)^T$  не является оптимальным.

Шаг 2.4. Таким образом, опорным будет 2-й столбец ( $l = 4$ ). Выбираем опорную строку:

$$\frac{b_2^1}{a_{24}^1} = \frac{10}{1} = 10, \quad \frac{b_3^1}{a_{34}^1} = \frac{5}{3/5} = \frac{25}{3} \Rightarrow z = 3, \quad t = 3,$$

т. к. в третьем ограничении базисной является переменная с индексом 3 ( $x_3$ ).

Шаг 2.4.1. Начинаем формирование СТ-2. Сначала меняем местами переменные  $x_4$  и  $x_3$ :

| СТ-2      | $x_5$ | $x_3$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |     |
| (2) $x_2$ |       |       |     |
| (3) $x_4$ |       |       |     |
| $p$       |       |       |     |

Шаг 2.4.2. По формуле (4.32, [1]) получаем:

$$a_{33}^2 = \frac{1}{a_{34}^1} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}.$$

| СТ-2      | $x_5$ | $x_3$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |     |
| (2) $x_2$ |       |       |     |
| (3) $x_4$ |       | $5/3$ |     |
| $p$       |       |       |     |

Шаг 2.4.3. По формулам (4.33, [1]) получаем:

$$a_{35}^2 = \frac{a_{35}^1}{a_{34}^1} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}, \quad b_3^2 = \frac{b_3^1}{a_{34}^1} = \frac{5}{3/5} = \frac{25}{3}.$$

| СТ-2      | $x_5$ | $x_3$ | $b$    |
|-----------|-------|-------|--------|
| (1) $x_1$ |       |       |        |
| (2) $x_2$ |       |       |        |
| (3) $x_4$ | $1/3$ | $5/3$ | $25/3$ |
| $p$       |       |       |        |

Шаг 2.4.4. По формулам (4.34, [1]) получаем:

$$a_{13}^2 = -\frac{a_{14}^1}{a_{34}^1} = -\frac{-3/5}{3/5} = 1, \quad a_{23}^2 = -\frac{a_{24}^1}{a_{34}^1} = -\frac{1}{3/5} = -\frac{5}{3}, \quad p_3^2 = -\frac{p_4^1}{a_{34}^1} = -\frac{-1200}{3/5} = 2000.$$

| СТ-2      | $x_5$ | $x_3$          | $b$    |
|-----------|-------|----------------|--------|
| (1) $x_1$ |       | $\boxed{1}$    |        |
| (2) $x_2$ |       | $\boxed{-5/3}$ |        |
| (3) $x_4$ | $1/3$ | $5/3$          | $25/3$ |
| $p$       |       | $\boxed{2000}$ |        |

Шаг 2.4.5. По формулам (4.35, [1]) получаем остальные элементы СТ-2:

$$a_{15}^2 = a_{15}^1 - a_{14}^1 a_{35}^2 = -\frac{1}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} = 0, \quad a_{25}^2 = a_{25}^1 - a_{24}^1 a_{35}^2 = 0 - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$b_1^2 = b_1^1 - a_{14}^1 b_3^2 = 3 - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{25}{3} = 8, \quad b_2^2 = b_2^1 - a_{24}^1 b_3^2 = 10 - 1 \cdot \frac{25}{3} = \frac{5}{3},$$

$$p_5^2 = p_5^1 - p_4^1 a_{35}^2 = 800 - (-1200) \cdot \frac{1}{3} = 1200,$$

$$p_0^2 = p_0^1 + p_4^1 b_3^2 = 48000 + (-1200) \cdot \frac{25}{3} = 38000.$$

| СТ-2      | $x_5$          | $x_3$  | $b$              |
|-----------|----------------|--------|------------------|
| (1) $x_1$ | $\boxed{0}$    | 1      | $\boxed{8}$      |
| (2) $x_2$ | $\boxed{-1/3}$ | $-5/3$ | $\boxed{5/3}$    |
| (3) $x_4$ | $1/3$          | $5/3$  | $25/3$           |
| $p$       | $\boxed{1200}$ | 2000   | $\boxed{-38000}$ |

То есть задача была преобразована к виду

$$f(x) = 38000 + 2000x_3 + 1200x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_3 = 8,$$

$$x_2 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{5}{3},$$

$$x_4 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{25}{3},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Угловая точка  $x^2 = (8,5/3, 0, 25/3, 0)^T$ , значение ЦФ  $f(x^2) = 38000$ .

Шаг 2.5. Полагаем  $k = 2$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 3.3. Среди коэффициентов  $p_j^2$  нет отрицательных, следовательно, оптимальное решение найдено.

Переменные  $x_3$ ,  $x_4$  и  $x_5$  являются вспомогательными. Их добавили в задачу, чтобы привести ЗЛП к СФ (преобразовать неравенства в равенства). В исходной задаче их не было. То есть в окончательный ответ пишем значения только тех переменных, которые присутствовали в исходной задаче. Таким образом,  $x^* = (8,5/3)^T$ ,  $f^* = 38000$ , что совпадает с решением, полученным графическим методом.

Ответ. При оптимальном режиме работы ОТК необходимо использовать 8 контролеров первого разряда и 5/3 контролеров второго разряда. При этом расходы на контроль составят 38000 рублей.

Как отмечалось выше, метод искусственного базиса требует решения вспомогательной ЗЛП для построения базиса исходной задачи. Например, для задачи технического контроля

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 10, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 45, \\ x_{1,2} &\geq 0 \end{aligned}$$

методом искусственного базиса была получена вспомогательная ЗЛП (4.9)–(4.10):

$$F(x) = 63 - 6x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned}
x_6 + x_1 + x_3 &= 8, \\
x_7 + x_2 + x_4 &= 10, \\
x_8 + 5x_1 + 3x_2 - x_5 &= 45, \\
x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 8.
\end{aligned}$$

Решим ее симплекс-методом:

Шаг 1.1. Базис выделять не требуется, т. к. в методе искусственного базиса он формируется из искусственных переменных. Таким образом, в данной вспомогательной задаче  $n = 8$ ,  $m = 3$ .

Шаг 1.2. Полагаем  $k = 0$ . Формируем начальную симплекс-таблицу СТ-0:

| СТ-0      | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_6$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 8   |
| (2) $x_7$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 10  |
| (3) $x_8$ | 5     | 3     | 0     | 0     | -1    | 45  |
| $p$       | -6    | -4    | -1    | -1    | 1     | -63 |

Шаг 1.3. Отрицательными являются коэффициенты ЦФ  $p_1^0$ ,  $p_2^0$ ,  $p_3^0$ ,  $p_4^0$ , в соответствующих им столбцах есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^0$ , поэтому базисное решение  $x^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 8, 10, 45)^T$  не является оптимальным. Значение ЦФ  $F(x^0) = 63$ .

Шаг 1.4. Выберем любой из коэффициентов  $p_1^0$ ,  $p_2^0$ ,  $p_3^0$ ,  $p_4^0$ , например с наименьшим значением  $p_1^0 = -6$ . Таким образом, опорным будет 1-й столбец ( $l = 1$ ). Выбираем опорную строку:

$$\frac{b_1^0}{a_{11}^0} = \frac{8}{1} = 8, \quad \frac{b_3^0}{a_{31}^0} = \frac{45}{5} = 9 \Rightarrow z = 1, \quad t = 6,$$

т. к. в первом ограничении базисной является переменная с индексом 6 ( $x_6$ ).

Шаг 1.4.1. Начинаем формирование СТ-1. Сначала меняем местами переменные  $x_1$  и  $x_6$ :

| СТ-1      | $x_6$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |       |       |       |     |
| (2) $x_7$ |       |       |       |       |       |     |
| (3) $x_8$ |       |       |       |       |       |     |
| $p$       |       |       |       |       |       |     |

Шаг 1.4.2. По формуле (4.32, [1]) получаем:

$$a_{16}^1 = \frac{1}{a_{11}^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

| СТ-1      | $x_6$       | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|-------------|-------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ | $\boxed{1}$ |       |       |       |       |     |
| (2) $x_7$ |             |       |       |       |       |     |
| (3) $x_8$ |             |       |       |       |       |     |
| $p$       |             |       |       |       |       |     |

Шаг 1.4.3. По формулам (4.33, [1]) получаем:

$$a_{12}^1 = \frac{a_{12}^0}{a_{11}^0} = \frac{0}{1} = 0, \quad a_{13}^1 = \frac{a_{13}^0}{a_{11}^0} = \frac{1}{1} = 1, \quad a_{14}^1 = \frac{a_{14}^0}{a_{11}^0} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$a_{15}^1 = \frac{a_{15}^0}{a_{11}^0} = \frac{0}{1} = 0, \quad b_1^1 = \frac{b_1^0}{a_{11}^0} = \frac{8}{1} = 8.$$

| СТ-1      | $x_6$ | $x_2$       | $x_3$       | $x_4$       | $x_5$       | $b$         |
|-----------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| (1) $x_1$ | 1     | $\boxed{0}$ | $\boxed{1}$ | $\boxed{0}$ | $\boxed{0}$ | $\boxed{8}$ |
| (2) $x_7$ |       |             |             |             |             |             |
| (3) $x_8$ |       |             |             |             |             |             |
| $p$       |       |             |             |             |             |             |

Шаг 1.4.4. По формулам (4.34, [1]) получаем:

$$a_{26}^1 = -\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0} = -\frac{0}{1} = 0, \quad a_{36}^1 = -\frac{a_{31}^0}{a_{11}^0} = -\frac{5}{1} = -5, \quad p_6^1 = -\frac{p_1^0}{a_{11}^0} = -\frac{-6}{1} = 6.$$

| СТ-1      | $x_6$                                                          | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|----------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ | 1                                                              | 0     | 1     | 0     | 0     | 8   |
| (2) $x_7$ | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>  |       |       |       |       |     |
| (3) $x_8$ | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-5</span> |       |       |       |       |     |
| $p$       | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>  |       |       |       |       |     |

Шаг 1.4.5. По формулам (4.35, [1]) получаем остальные элементы  
СТ-1:

$$\begin{aligned} a_{22}^1 &= a_{22}^0 - a_{21}^0 a_{12}^1 = 1 - 0 \cdot 0 = 1, \quad a_{23}^1 = a_{23}^0 - a_{21}^0 a_{13}^1 = 0 - 0 \cdot 1 = 0, \\ a_{24}^1 &= a_{24}^0 - a_{21}^0 a_{14}^1 = 1 - 0 \cdot 0 = 1, \quad a_{25}^1 = a_{25}^0 - a_{21}^0 a_{15}^1 = 0 - 0 \cdot 0 = 0, \\ a_{32}^1 &= a_{32}^0 - a_{31}^0 a_{12}^1 = 3 - 5 \cdot 0 = 3, \quad a_{33}^1 = a_{33}^0 - a_{31}^0 a_{13}^1 = 0 - 5 \cdot 1 = -5, \\ a_{34}^1 &= a_{34}^0 - a_{31}^0 a_{14}^1 = 0 - 5 \cdot 0 = 0, \quad a_{35}^1 = a_{35}^0 - a_{31}^0 a_{15}^1 = -1 - 5 \cdot 0 = -1, \\ b_2^1 &= b_2^0 - a_{21}^0 b_1^1 = 10 - 0 \cdot 8 = 10, \quad b_3^1 = b_3^0 - a_{31}^0 b_1^1 = 45 - 5 \cdot 8 = 5, \\ p_2^1 &= p_2^0 - p_1^0 a_{12}^1 = -4 - (-6) \cdot 0 = -4, \quad p_3^1 = p_3^0 - p_1^0 a_{13}^1 = -1 - (-6) \cdot 1 = 5, \\ p_4^1 &= p_4^0 - p_1^0 a_{14}^1 = -1 - (-6) \cdot 0 = -1, \quad p_5^1 = p_5^0 - p_1^0 a_{15}^1 = 1 - (-6) \cdot 0 = 1, \\ p_0^1 &= p_0^0 + p_1^0 b_1^1 = 63 + (-6) \cdot 8 = 15. \end{aligned}$$

| СТ-1      | $x_6$ | $x_2$                                                          | $x_3$                                                          | $x_4$                                                          | $x_5$                                                          | $b$                                                             |
|-----------|-------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| (1) $x_1$ | 1     | 0                                                              | 1                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 8                                                               |
| (2) $x_7$ | 0     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>  |
| (3) $x_8$ | -5    | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-5</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>   |
| $p$       | 6     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-4</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-15</span> |

Учитывая, что переменная  $x_6$  – искусственная, и она выведена из базиса, соответствующий ей столбец СТ-1 можно удалить, в дальнейшем решении он больше не нужен. В итоге получим следующую СТ-1:

| СТ-1      | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 8   |
| (2) $x_7$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 10  |
| (3) $x_8$ | 3     | -5    | 0     | -1    | 5   |
| $p$       | -4    | 5     | -1    | 1     | -15 |

То есть задача была преобразована к виду

$$F(x) = 15 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_3 = 8,$$

$$x_7 + x_2 + x_4 = 10,$$

$$x_8 + 3x_2 - 5x_3 - x_5 = 5,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, 7, 8.$$

Угловая точка  $x^1 = (8, 0, 0, 0, 0, 10, 5)^T$ , значение ЦФ  $F(x^1) = 15$ .

Шаг 1.5. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 2.3. Отрицательными являются коэффициенты ЦФ  $p_2^1$  и  $p_4^1$ , в соответствующих им столбцах есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^1$ , поэтому базисное решение  $x^1 = (8, 0, 0, 0, 0, 10, 5)^T$  не является оптимальным.

Шаг 2.4. Выберем любой из коэффициентов  $p_2^1$ ,  $p_4^1$ , например, с наименьшим значением  $p_2^1 = -4$ . Таким образом, опорным будет 1-й столбец ( $l = 2$ ). Выбираем опорную строку:

$$\frac{b_2^1}{a_{22}^1} = \frac{10}{1} = 10, \quad \frac{b_3^1}{a_{32}^1} = \frac{5}{3} \Rightarrow z = 3, \quad t = 8,$$

т. к. в третьем ограничении базисной является переменная с индексом 8 ( $x_8$ ).

Шаг 2.4.1. Начинаем формирование СТ-2. Сначала меняем местами переменные  $x_2$  и  $x_8$ :

| СТ-2      | $x_8$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |       |       |     |
| (2) $x_7$ |       |       |       |       |     |
| (3) $x_2$ |       |       |       |       |     |
| $p$       |       |       |       |       |     |

Шаг 2.4.2. По формуле (4.32, [1]) получаем:

$$a_{38}^2 = \frac{1}{a_{32}^1} = \frac{1}{3}.$$

| СТ-2      | $x_8$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |       |       |     |
| (2) $x_7$ |       |       |       |       |     |
| (3) $x_2$ | $1/3$ |       |       |       |     |
| $p$       |       |       |       |       |     |

Шаг 2.4.3. По формулам (4.33, [1]) получаем:

$$a_{33}^2 = \frac{a_{33}^1}{a_{32}^1} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}, \quad a_{34}^2 = \frac{a_{34}^1}{a_{32}^1} = \frac{0}{3} = 0, \quad a_{35}^2 = \frac{a_{35}^1}{a_{32}^1} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad b_3^2 = \frac{b_3^1}{a_{32}^1} = \frac{5}{3}.$$

| СТ-2      | $x_8$ | $x_3$  | $x_4$ | $x_5$  | $b$   |
|-----------|-------|--------|-------|--------|-------|
| (1) $x_1$ |       |        |       |        |       |
| (2) $x_7$ |       |        |       |        |       |
| (3) $x_2$ | $1/3$ | $-5/3$ | $0$   | $-1/3$ | $5/3$ |
| $p$       |       |        |       |        |       |

Шаг 2.4.4. По формулам (4.34, [1]) получаем:

$$a_{18}^2 = -\frac{a_{12}^1}{a_{32}^1} = -\frac{0}{3} = 0, \quad a_{28}^2 = -\frac{a_{22}^1}{a_{32}^1} = -\frac{1}{3}, \quad p_8^2 = -\frac{p_2^1}{a_{32}^1} = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}.$$

| CT-2      | $x_8$                                                            | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-----------|------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>    |       |       |       |     |
| (2) $x_7$ | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1/3</span> |       |       |       |     |
| (3) $x_2$ | 1/3                                                              | -5/3  | 0     | -1/3  | 5/3 |
| $p$       | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4/3</span>  |       |       |       |     |

Шаг 2.4.5. По формулам (4.35, [1]) получаем остальные элементы CT-2:

$$\begin{aligned} a_{13}^2 &= a_{13}^1 - a_{12}^1 a_{33}^2 = 1 - 0 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 1, \quad a_{14}^2 = a_{14}^1 - a_{12}^1 a_{34}^2 = 0 - 0 \cdot 0 = 0, \\ a_{15}^2 &= a_{15}^1 - a_{12}^1 a_{35}^2 = 0 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0, \quad a_{23}^2 = a_{23}^1 - a_{22}^1 a_{33}^2 = 0 - 1 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}, \\ a_{24}^2 &= a_{24}^1 - a_{22}^1 a_{34}^2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1, \quad a_{25}^2 = a_{25}^1 - a_{22}^1 a_{35}^2 = 0 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \\ b_1^2 &= b_1^1 - a_{12}^1 b_3^2 = 8 - 0 \cdot \frac{5}{3} = 8, \quad b_2^2 = b_2^1 - a_{22}^1 b_3^2 = 10 - 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3}, \\ p_3^2 &= p_3^1 - p_2^1 a_{33}^2 = 5 - (-4) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}, \quad p_4^2 = p_4^1 - p_2^1 a_{34}^2 = -1 - (-4) \cdot 0 = -1, \\ p_5^2 &= p_5^1 - p_2^1 a_{35}^2 = 1 - (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}, \quad p_0^2 = p_0^1 + p_2^1 b_3^2 = 15 + (-4) \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3}. \end{aligned}$$

| CT-2      | $x_8$ | $x_3$                                                            | $x_4$                                                          | $x_5$                                                            | $b$                                                               |
|-----------|-------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| (1) $x_1$ | 0     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>    | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>    | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>     |
| (2) $x_7$ | -1/3  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5/3</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1/3</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25/3</span>  |
| (3) $x_2$ | 1/3   | -5/3                                                             | 0                                                              | -1/3                                                             | 5/3                                                               |
| $p$       | 4/3   | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-5/3</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1/3</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-25/3</span> |

Учитывая, что переменная  $x_8$  – искусственная, и она выведена из базиса, соответствующий ей столбец СТ-2 можно удалить, в дальнейшем решении он больше не нужен. В итоге получим следующую СТ-2:

| СТ-2      | $x_3$  | $x_4$ | $x_5$  | $b$     |
|-----------|--------|-------|--------|---------|
| (1) $x_1$ | 1      | 0     | 0      | 8       |
| (2) $x_7$ | $5/3$  | 1     | $1/3$  | $25/3$  |
| (3) $x_2$ | $-5/3$ | 0     | $-1/3$ | $5/3$   |
| $p$       | $-5/3$ | -1    | $-1/3$ | $-25/3$ |

То есть задача была преобразована к виду

$$F(x) = \frac{25}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4 - \frac{1}{3}x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_3 = 8,$$

$$x_7 + \frac{5}{3}x_3 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{25}{3},$$

$$x_2 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{5}{3},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, 7.$$

Угловая точка  $x^2 = (8, 5/3, 0, 0, 0, 25/3)^T$ , значение ЦФ  $F(x^2) = 25/3$ .

Шаг 2.5. Полагаем  $k = 2$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 3.3. Отрицательными являются коэффициенты ЦФ  $p_3^2$ ,  $p_4^2$  и  $p_5^2$ , в соответствующих им столбцах есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^2$ , поэтому базисное решение  $x^2 = (8, 5/3, 0, 0, 0, 25/3)^T$  не является оптимальным.

Шаг 3.4. Мы можем выбрать любой из коэффициентов  $p_3^2$ ,  $p_4^2$ ,  $p_5^2$ . Но выберем  $p_5^2 = -1/3$ . Это сделано для того, чтобы выделить базис по переменным  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_5$ , как в рассмотренном ранее примере (4.5)–(4.6), и сравнить результат. Если выбрать  $p_3^2$  или  $p_4^2$ , то будет просто получен другой базис.

Таким образом, опорным будет 3-й столбец ( $l = 5$ ). В этом столбце только один положительный коэффициент  $a_{25}^2 = 1/3$ , поэтому  $z = 2$ ,  $t = 7$ .

Шаг 3.4.1. Начинаем формирование СТ-3. Сначала меняем местами переменные  $x_5$  и  $x_7$ .

| СТ-3      | $x_3$ | $x_4$ | $x_7$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |       |     |
| (2) $x_5$ |       |       |       |     |
| (3) $x_2$ |       |       |       |     |
| $p$       |       |       |       |     |

Шаг 3.4.2. По формуле (4.32, [1]) получаем:

$$a_{27}^3 = \frac{1}{a_{25}^2} = \frac{1}{1/3} = 3.$$

| СТ-3      | $x_3$ | $x_4$ | $x_7$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |       |     |
| (2) $x_5$ |       |       | 3     |     |
| (3) $x_2$ |       |       |       |     |
| $p$       |       |       |       |     |

Шаг 3.4.3. По формулам (4.33, [1]) получаем:

$$a_{23}^3 = \frac{a_{23}^2}{a_{25}^2} = \frac{5/3}{1/3} = 5, \quad a_{24}^3 = \frac{a_{24}^2}{a_{25}^2} = \frac{1}{1/3} = 3, \quad b_2^3 = \frac{b_2^2}{a_{25}^2} = \frac{25/3}{1/3} = 25.$$

| СТ-3      | $x_3$ | $x_4$ | $x_7$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       |       |     |
| (2) $x_5$ | 5     | 3     | 3     | 25  |
| (3) $x_2$ |       |       |       |     |
| $p$       |       |       |       |     |

Шаг 3.4.4. По формулам (4.34, [1]) получаем:

$$a_{17}^3 = -\frac{a_{15}^2}{a_{25}^2} = -\frac{0}{1/3} = 0, \quad a_{37}^3 = -\frac{a_{35}^2}{a_{25}^2} = -\frac{-1/3}{1/3} = 1, \quad p_7^3 = -\frac{p_5^2}{a_{25}^2} = -\frac{-1/3}{1/3} = 1.$$

| СТ-3      | $x_3$ | $x_4$ | $x_7$                                                         | $b$ |
|-----------|-------|-------|---------------------------------------------------------------|-----|
| (1) $x_1$ |       |       | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span> |     |
| (2) $x_5$ | 5     | 3     | 3                                                             | 25  |
| (3) $x_2$ |       |       | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> |     |
| $p$       |       |       | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> |     |

Шаг 3.4.5. По формулам (4.35, [1]) получаем остальные элементы  
СТ-3:

$$\begin{aligned} a_{13}^3 &= a_{13}^2 - a_{15}^2 a_{23}^3 = 1 - 0 \cdot 5 = 1, \quad a_{14}^3 = a_{14}^2 - a_{15}^2 a_{24}^3 = 0 - 0 \cdot 3 = 0, \\ a_{33}^3 &= a_{33}^2 - a_{35}^2 a_{23}^3 = -\frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 5 = 0, \quad a_{34}^3 = a_{34}^2 - a_{35}^2 a_{24}^3 = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 1, \\ b_1^3 &= b_1^2 - a_{15}^2 b_2^3 = 8 - 0 \cdot 25 = 8, \quad b_3^3 = b_3^2 - a_{35}^2 b_2^3 = \frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 25 = 10, \\ p_3^3 &= p_3^2 - p_5^2 a_{23}^3 = -\frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 5 = 0, \quad p_4^3 = p_4^2 - p_5^2 a_{24}^3 = -1 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 0, \\ p_0^3 &= p_0^2 + p_5^2 b_2^3 = \frac{25}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 25 = 0. \end{aligned}$$

| СТ-3      | $x_3$                                                         | $x_4$                                                         | $x_7$ | $b$                                                            |
|-----------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------|----------------------------------------------------------------|
| (1) $x_1$ | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span> | 0     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>  |
| (2) $x_5$ | 5                                                             | 3                                                             | 3     | 25                                                             |
| (3) $x_2$ | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | 1     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span> |
| $p$       | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span> | 1     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>  |

Учитывая, что переменная  $x_7$  – искусственная, и она выведена из базиса, соответствующий ей столбец СТ-3 можно удалить, в дальнейшем решении он больше не нужен. В итоге получим следующую СТ-3:

| СТ-3      | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|-----------|-------|-------|-----|
| (1) $x_1$ | 1     | 0     | 8   |
| (2) $x_5$ | 5     | 3     | 25  |
| (3) $x_2$ | 0     | 1     | 10  |
| $p$       | 0     | 0     | 0   |

Все искусственные переменные выведены из базиса, решение окончено. Таким образом, система ограничений исходной задачи была преобразована к виду

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 8, \\x_5 + 5x_3 + 3x_4 &= 25, \\x_2 + x_4 &= 10,\end{aligned}$$

что совпадает с полученным ранее решением (4.5). Соответственно, после исключения базисных переменных из ЦФ получим выражение, эквивалентное (4.6):

$$\begin{aligned}f(x) &= 4000x_1 + 3600x_2 = 4000(8 - x_3) + 3600(10 - x_4) = \\&= 68000 - 4000x_3 - 3600x_4.\end{aligned}$$

Начальное базисное решение исходной задачи  $x^0 = (8, 10, 0, 0, 25)^T$ , значение ЦФ  $f(x^0) = 68000$ .

Решим симплекс-методом еще одну ЗЛП:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x_1 + 9 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 14 \cdot x_6 \rightarrow \min, \\
x_1 + x_4 &= 20, \\
x_2 + x_5 &= 50, \\
x_3 + x_6 &= 30, \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 60; \\
x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, 6.
\end{aligned}$$

Шаг 1.1. Ранее мы уже выделяли базис этой задачи (см. (4.7), (4.8)):

$$\begin{aligned}
f(x) &= 880 - 7x_1 - 14x_3, \\
x_2 + x_1 + x_3 &= 40, \\
x_4 + x_1 &= 20, \\
x_5 - x_1 - x_3 &= 10, \\
x_6 + x_3 &= 30, \\
x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 6.
\end{aligned}$$

Таким образом, после выделения базиса размерность задачи не изменилась —  $n = 6$ ,  $m = 4$ . Имеем свободные переменные  $x_1$ ,  $x_3$  и базисные переменные  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ .

Базисным решением является точка  $x^0 = (0, 40, 0, 20, 10, 30)^T$ , значение ЦФ  $f(x^0) = 880$ . Так как все базисные переменные в векторе  $x^0$  положительны, данное базисное решение является допустимым (т. е. угловой точкой) и невырожденным.

Шаг 1.2. Полагаем  $k = 0$ . Формируем начальную симплекс-таблицу СТ-0:

| СТ-0      | $x_1$ | $x_3$ | $b$  |
|-----------|-------|-------|------|
| (1) $x_2$ | 1     | 1     | 40   |
| (2) $x_4$ | 1     | 0     | 20   |
| (3) $x_5$ | -1    | -1    | 10   |
| (4) $x_6$ | 0     | 1     | 30   |
| $p$       | -7    | -14   | -880 |

Шаг 1.3. Отрицательными являются коэффициенты ЦФ  $p_1^0$  и  $p_3^0$ , в соответствующих им столбцах есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^0$ , поэтому базисное решение  $x^0 = (0, 40, 0, 20, 10, 30)^T$  не является оптимальным.

Шаг 1.4. Выберем любой из коэффициентов  $p_1^0$ ,  $p_3^0$ , например, с наименьшим значением  $p_3^0 = -14$ . Таким образом, опорным будет 2-й столбец ( $l = 3$ ). Выбираем опорную строку:

$$\frac{b_1^0}{a_{13}^0} = \frac{40}{1} = 40, \quad \frac{b_4^0}{a_{43}^0} = \frac{30}{1} = 30 \Rightarrow z = 4, \quad t = 6,$$

т. к. в четвертом ограничении базисной является переменная  $x_6$ . Получаем новую симплекс-таблицу:

| СТ-1      | $x_1$ | $x_6$ | $b$  |
|-----------|-------|-------|------|
| (1) $x_2$ | 1     | -1    | 10   |
| (2) $x_4$ | 1     | 0     | 20   |
| (3) $x_5$ | -1    | 1     | 40   |
| (4) $x_3$ | 0     | 1     | 30   |
| $p$       | -7    | 14    | -460 |

То есть задача была преобразована к виду

$$f(x) = 460 - 7x_1 + 14x_6 \rightarrow \min,$$

$$x_2 + x_1 - x_6 = 10,$$

$$x_4 + x_1 = 20,$$

$$x_5 - x_1 + x_6 = 40,$$

$$x_3 + x_6 = 30,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Угловая точка  $x^1 = (0, 10, 30, 20, 40, 0)^T$ , значение ЦФ  $f(x^1) = 460$ .

Шаг 1.5. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 2.3. Отрицательным является коэффициент ЦФ  $p_1^1$ , в соответствующем ему столбце есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^1$ , поэтому базисное решение  $x^1 = (0, 10, 30, 20, 40, 0)^T$  не является оптимальным.

Шаг 2.4. Таким образом, опорным будет 1-й столбец ( $l = 1$ ). Выбираем опорную строку:

$$\frac{b_1^1}{a_{11}^1} = \frac{10}{1} = 10, \quad \frac{b_2^1}{a_{21}^1} = \frac{20}{1} = 20 \Rightarrow z = 1, \quad t = 2,$$

т. к. в первом ограничении базисной является переменная  $x_2$ . Получаем новую симплекс-таблицу:

| СТ-2      | $x_2$ | $x_6$ | $b$  |
|-----------|-------|-------|------|
| (1) $x_1$ | 1     | -1    | 10   |
| (2) $x_4$ | -1    | 1     | 10   |
| (3) $x_5$ | 1     | 0     | 50   |
| (4) $x_3$ | 0     | 1     | 30   |
| $p$       | 7     | 7     | -390 |

То есть задача была преобразована к виду

$$f(x) = 390 + 7x_2 + 7x_6 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 - x_6 = 10,$$

$$x_4 - x_2 + x_6 = 10,$$

$$x_5 + x_2 = 50,$$

$$x_3 + x_6 = 30,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Угловая точка  $x^2 = (10, 0, 30, 10, 50, 0)^T$ , значение ЦФ  $f(x^2) = 390$ .

Шаг 2.5. Полагаем  $k = 2$ , возвращаемся на шаг 3.

Шаг 3.3. Среди коэффициентов  $p_j^2$  нет отрицательных, следовательно, оптимальное решение найдено. Оно совпадает с решением, полученным ранее графическим методом.

Ответ. Оптимальное решение  $x^* = (10, 0, 30, 10, 50, 0)^T$ ,  $f^* = 390$ .

## 4.6 Целочисленное программирование

Решим ЗЦП – задачу технического контроля, дополненную условием целочисленности решения:

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 10, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 45, \\ x_{1,2} &\geq 0, \quad x_{1,2} \in Z. \end{aligned}$$

То есть положим, что если компания нанимает контролера, то только на полный рабочий день.

### 4.6.1 Графический метод решения ЗЦП

Используем графический метод. Ранее мы уже строили ОДР этой задачи (рис. 4.1), теперь необходимо построить область  $S_Z$  (рис. 4.5).

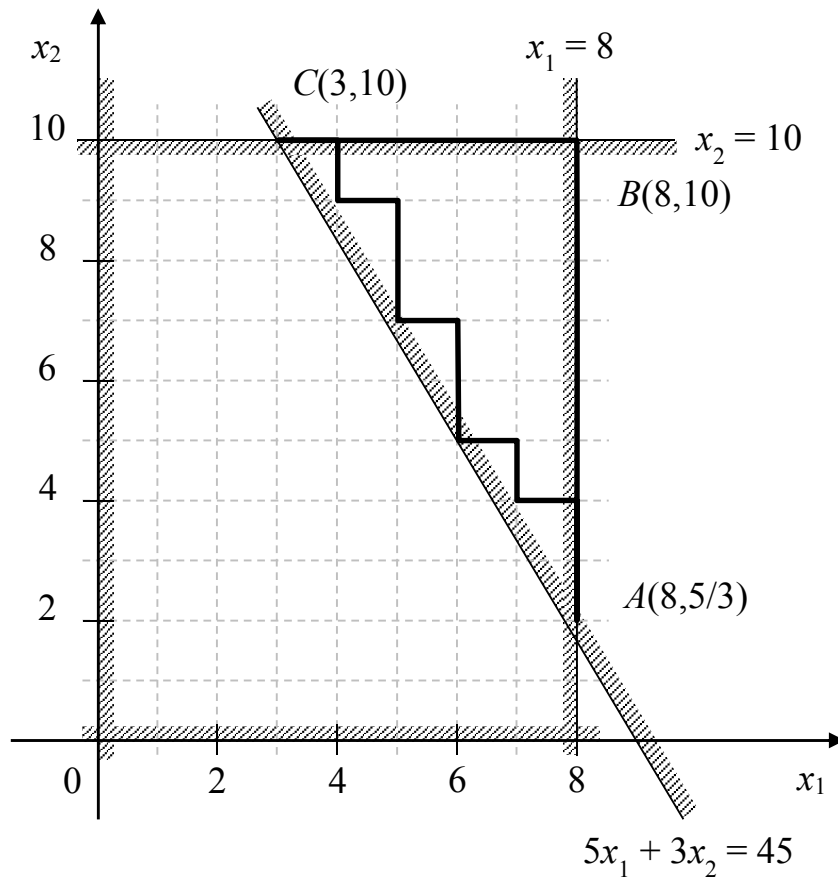


Рис. 4.5 – Область  $S_z$  задачи технического контроля

Аналогично предыдущему решению задачи построим линию уровня ЦФ, проходящую через точку  $C(3, 10)$ , принадлежащую области  $S_z$ :

$$10x_1 + 9x_2 = 120,$$

а также укажем на рисунке направление антиградиента ЦФ:

$$-\nabla f(x) = -\begin{pmatrix} 4000 \\ 3600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4000 \\ -3600 \end{pmatrix}.$$

Вектор градиента, как и в предыдущем случае, изобразим не в масштабе, обозначим только его направление (рис. 4.6).

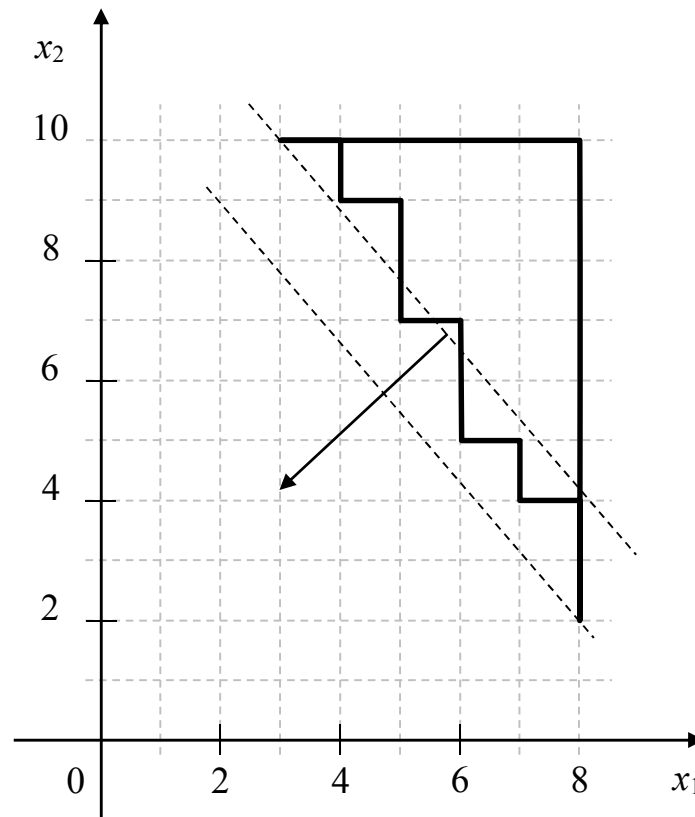


Рис. 4.6 – Линии уровня ЦФ и направление антиградиента

Видно, что при перемещении линии уровня в направлении антиградиента последней точкой касания с областью  $S_z$  будет точка  $(8, 2)$ . Следовательно,  $x^* = (8; 2)^T$  – оптимальный план ЗЦП. Значение ЦФ в этой точке  $f^* = f(8, 2) = 4000 \cdot 8 + 3600 \cdot 2 = 39200$ .

Ответ. При оптимальном режиме работы ОТК необходимо использовать 8 контролеров первого разряда и 2 контролера второго разряда. При этом расходы на контроль составят 39200 рублей.

*Замечание.* Может сложиться впечатление, что результат решения ЗЦП  $x^* = (8; 2)^T$  можно было получить, округлив результат решения ЗЛП без условия целочисленности решения  $x^* = (8; 5/3)^T$  до ближайшего целого результата, но, на самом деле, это не так. В общем случае, просто округляя решение ЗЛП, можно либо получить неоптимальное решение, либо, что

еще хуже – недопустимое решение, не удовлетворяющее условиям задачи (т. е. выходящее за пределы ОДР).

#### 4.6.2 Метод Гомори

Используем метод Гомори.

Шаг 1.1. Решение задачи симплекс-методом было получено ранее:

| СТ-2      | $x_5$  | $x_3$  | $b$    |
|-----------|--------|--------|--------|
| (1) $x_1$ | 0      | 1      | 8      |
| (2) $x_2$ | $-1/3$ | $-5/3$ | $5/3$  |
| (3) $x_4$ | $1/3$  | $5/3$  | $25/3$ |
| $p$       | 1200   | 2000   | -38000 |

Угловая точка  $x^2 = (8, 5/3, 0, 25/3, 0)^T$ , значение ЦФ  $f(x^2) = 38000$ .

Решение не удовлетворяет условию целочисленности, т. к.  $x_2 = 5/3$ ,  $x_4 = 25/3$ . При этом

$$\{b_1^2\} = 0, \{b_2^2\} = \frac{2}{3}, \{b_1^2\} = \frac{1}{3},$$

$$\text{т. к. } \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}, \frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3}.$$

Шаг 1.2. Из нецелых элементов  $b_i^2$  выбираем произвольный, например, с максимальной дробной частью –  $b_2^2$ , т. е.  $z = 2$ . По 2-й строке СТ-2 составляем дополнительное ограничение:

$$-\{a_{25}^2\}x_5 - \{a_{23}^2\}x_3 \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_3 \leq -\frac{2}{3},$$

$$\text{т. к. } -\frac{1}{3} = -1 + \frac{2}{3}, -\frac{5}{3} = -2 + \frac{1}{3}.$$

С помощью вспомогательной переменной  $x_6 \geq 0$  это ограничение представляется в виде равенства

$$x_6 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3},$$

и вводится в СТ-2 дополнительной строкой:

| СТ-2      | $x_5$  | $x_3$  | $b$    |
|-----------|--------|--------|--------|
| (1) $x_1$ | 0      | 1      | 8      |
| (2) $x_2$ | $-1/3$ | $-5/3$ | $5/3$  |
| (3) $x_4$ | $1/3$  | $5/3$  | $25/3$ |
| (4) $x_6$ | $-2/3$ | $-1/3$ | $-2/3$ |
| $p$       | 1200   | 2000   | -38000 |

Шаг 1.3. Выполним одну итерацию симплекс-метода, чтобы угловая точка стала допустимой. Опорной является 4-я строка, т. е.  $z=4$ ,  $t=6$ . Выбираем опорный столбец:

$$\frac{b_4^2}{|a_{45}^2|} = \frac{-2/3}{|-2/3|} = -1, \quad \frac{b_4^2}{|a_{43}^2|} = \frac{-2/3}{|-1/3|} = -2 \Rightarrow l=3.$$

Таким образом, опорный элемент –  $a_{43}^2$ . Меняем местами переменные  $x_3$  и  $x_6$ , и получаем СТ-3:

| СТ-3      | $x_5$ | $x_6$ | $b$    |
|-----------|-------|-------|--------|
| (1) $x_1$ | -2    | 3     | 6      |
| (2) $x_2$ | 3     | -5    | 5      |
| (3) $x_4$ | -3    | 5     | 5      |
| (4) $x_3$ | 2     | -3    | 2      |
| $p$       | -2800 | 6000  | -42000 |

В СТ-3 все элементы  $b_i^3 \geq 0$ , поэтому полученное базисное решение  $x^3 = (6, 5, 2, 5, 0, 0)^T$ ,  $f(x^3) = 42000$  является допустимым.

Шаг 1.4. Полученное решение удовлетворяет условию целочисленности, поэтому переходим на шаг 5.

Шаг 1.5. Критерий оптимальности решения ЗЛП не выполняется, т. к. в последней строке СТ-3 есть отрицательные элементы ( $p_5^3 = -2800$ ), поэтому возвращаемся на шаг 1.

Шаг 2.1. Снова необходимо с помощью симплекс-метода получить оптимальное решение задачи. Шаги 1–2 симплекс-метода выполнять уже не нужно, поэтому начинаем с шага 3,  $k = 3$ .

Шаг 2.1.3. Отрицательным является коэффициент ЦФ  $p_5^3$ , в соответствующем ему столбце есть положительные коэффициенты  $a_{ij}^1$ , поэтому базисное решение  $x^3 = (6, 5, 2, 5, 0, 0)^T$  не является оптимальным.

Шаг 2.1.4. Таким образом, опорным будет 1-й столбец ( $l = 5$ ). Выбираем опорную строку:

$$\frac{b_2^3}{a_{25}^3} = \frac{5}{3}, \quad \frac{b_4^3}{a_{45}^3} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow z = 4, \quad t = 3,$$

т. к. в четвертом ограничении базисной является переменная  $x_3$ . Получаем новую симплекс-таблицу:

| СТ-4      | $x_3$  | $x_6$  | $b$      |
|-----------|--------|--------|----------|
| (1) $x_1$ | 1      | 0      | 8        |
| (2) $x_2$ | $-3/2$ | $-1/2$ | 2        |
| (3) $x_4$ | $3/2$  | $1/2$  | 8        |
| (4) $x_5$ | $1/2$  | $-3/2$ | 1        |
| $p$       | 1400   | 1800   | $-39200$ |

Угловая точка  $x^4 = (8, 2, 0, 8, 1, 0)^T$ , значение ЦФ  $f(x^4) = 39200$ .

Шаг 2.1.5. Полагаем  $k = 4$ , возвращаемся на шаг 1.

Шаг 3.1. Среди коэффициентов  $p_j^4$  нет отрицательных, следовательно, оптимальное решение найдено.

Для угловой точки  $x^4$  условие целочисленности выполняется, поэтому решение окончено. Переменные  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  и  $x_6$  являются вспомогательными, поэтому решением исходной задачи будет  $x^* = (8, 2)^T$ ,  $f(x^*) = 39200$ .

Ответ. При оптимальном режиме работы ОТК необходимо использовать 8 контролеров первого разряда и 2 контролера второго разряда. При этом расходы на контроль составят 39200 рублей.

## 5 ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА ДОСТАВКИ МУКИ И ХЛЕБА

### 5.1 Постановка задачи

Пусть на четырех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190, 90 и 70 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 100, 60, 170 и 130 т. Тарифы на перевозку 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов, в зависимости от расстояний между ними, задаются матрицей (табл. 5.1).

Таблица 5.1 – Тарифы на перевозку муки

|                               | Хлебозавод<br>№ 1<br>100 т | Хлебозавод<br>№ 2<br>60 т | Хлебозавод<br>№ 3<br>170 т | Хлебозавод<br>№ 4<br>130 т |
|-------------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Хлебокомбинат<br>№ 1<br>110 т | 800 руб./т                 | 100 руб./т                | 900 руб./т                 | 300 руб./т                 |
| Хлебокомбинат<br>№ 2<br>190 т | 400 руб./т                 | 600 руб./т                | 200 руб./т                 | 1200 руб./т                |
| Хлебокомбинат<br>№ 3<br>90 т  | 700 руб./т                 | 500 руб./т                | 800 руб./т                 | 900 руб./т                 |
| Хлебокомбинат<br>№ 4<br>70 т  | 400 руб./т                 | 900 руб./т                | 0 руб./т                   | 500 руб./т                 |

Требуется составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Нулевую стоимость перевозки с 4-го хлебокомбината к 3-му хлебо-заводу можно трактовать таким образом, что территориально они находят-ся в одном и том же месте (в одном здании или соседних зданиях), поэтому затраты на перевозку отсутствуют.

Проведем анализ задачи. Пусть  $x_{ij}$  обозначает количество муки, пе-ревозимой с  $i$ -го хлебокомбината к  $j$ -му хлебозаводу ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ).

Общее количество производимой муки

$$110 + 190 + 90 + 70 = 460 \text{ т,}$$

общая потребность в муке

$$100 + 60 + 170 + 130 = 460 \text{ т.}$$

Это означает, что с каждого хлебокомбината должна быть вывезена вся мука, иначе хлебозаводам ее не хватит. Количество муки, вывезенной с  $i$ -го хлебокомбината, составляет  $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}$ , соответственно, полу-чаем четыре ограничения

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 110,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 190,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 70.$$

На каждый хлебозавод нужно привезти ровно столько муки, сколько составляют его потребности, иначе какому-то другому хлебозаводу муки не хватит. Количество муки, потребляемой  $j$ -м хлебозаводом, составляет  $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j}$ , соответственно, получаем еще четыре ограничения

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 60,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 170,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 130.$$

Также необходимо учесть, что количество перевозимой муки не мо-жет быть отрицательным, т. е.

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Целевая функция, выражающая общие расходы на перевозку, согласно таблице 5.1, будет иметь вид

$$\begin{aligned} f(x) = & 800x_{11} + 100x_{12} + 900x_{13} + 300x_{14} + \\ & + 400x_{21} + 600x_{22} + 200x_{23} + 1200x_{24} + \\ & + 700x_{31} + 500x_{32} + 800x_{33} + 900x_{34} + \\ & + 400x_{41} + 900x_{42} + 0x_{43} + 500x_{44} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Таким образом, сформулировали следующую задачу ЛП

$$\begin{aligned} f(x) = & 800x_{11} + 100x_{12} + 900x_{13} + 300x_{14} + 400x_{21} + 600x_{22} + 200x_{23} + 1200x_{24} + \\ & + 700x_{31} + 500x_{32} + 800x_{33} + 900x_{34} + 400x_{41} + 900x_{42} + 500x_{44} \rightarrow \min \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 110, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 190, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 70, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 60, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 170, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 130, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

Рассмотрим также упрощенную форму данной задачи. Очевидно, что для перевозки такого большого количества муки необходимо задействовать железнодорожные составы или колонны грузовых автомобилей. Уменьшим масштаб перевозок.

Пусть в четырех хлебопекарнях ежедневно производится некоторое количество хлеба. Этот хлеб поставляется в четыре розничных магазина. Но, независимо от количества перевозимого хлеба, для перевозки всегда действует ровно один грузовой автомобиль. То есть нет разницы – везти из пекарни в магазин 100 кг хлеба или 500 кг, все равно нужно организовывать один рейс перевозки. Тарифы на организацию рейса с хлебопекарни

к каждому из розничных магазинов, в зависимости от расстояний между ними, задаются матрицей (табл. 5.2).

Таблица 5.2 – Тарифы на перевозку хлеба

|                     | Розничный<br>магазин № 1 | Розничный<br>магазин № 2 | Розничный<br>магазин № 3 | Розничный<br>магазин № 4 |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Хлебопекарня<br>№ 1 | 600 руб.                 | 1400 руб.                | 1000 руб.                | 1600 руб.                |
| Хлебопекарня<br>№ 2 | 400 руб.                 | 800 руб.                 | 800 руб.                 | 1000 руб.                |
| Хлебопекарня<br>№ 3 | 1800 руб.                | 1400 руб.                | 600 руб.                 | 1600 руб.                |
| Хлебопекарня<br>№ 4 | 800 руб.                 | 1400 руб.                | 400 руб.                 | 1600 руб.                |

Требуется составить такой план доставки хлеба, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

В данном случае получается, что вопрос стоит не о том, *сколько* хлеба везти из пункта его производства к пункту продажи, а *нужно ли* его вообще перевозить между данными пунктами? То есть либо  $x_{ij} = 1$ , если рейс между  $i$ -й хлебопекарней и  $j$ -м розничным магазином нужно организовать, либо  $x_{ij} = 0$ , если нет.

Таким образом, получим задачу

$$\begin{aligned}
 f(x) = & 600x_{11} + 1400x_{12} + 1000x_{13} + 1600x_{14} + \\
 & + 400x_{21} + 800x_{22} + 800x_{23} + 1000x_{24} + \\
 & + 1800x_{31} + 1400x_{32} + 600x_{33} + 1600x_{34} + \\
 & + 800x_{41} + 1400x_{42} + 400x_{43} + 1600x_{44} \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1, \\ x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad x \in Z. \end{array} \right.$$

Последнее условие означает, что величина  $x_{ij}$  может принимать значения из диапазона  $[0,1]$ , причем только целые. То есть это либо 0, либо 1. А сама задача, очевидно, относится к классу ЗЦП.

## 5.2 Сбалансированные и несбалансированные модели

В качестве задачи со сбалансированной моделью рассмотрим задачу оптимизации плана доставки муки. Имеем:

$$f(x) = 800x_{11} + 100x_{12} + 900x_{13} + 300x_{14} + 400x_{21} + 600x_{22} + 200x_{23} + 1200x_{24} + \\ + 700x_{31} + 500x_{32} + 800x_{33} + 900x_{34} + 400x_{41} + 900x_{42} + 500x_{44} \rightarrow \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 110, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 190, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 70, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 60, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 170, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 130, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

То есть получили транспортную задачу (ТЗ), в которой:

$$n = 4, m = 4,$$

$$a = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 800 & 100 & 900 & 300 \\ 400 & 600 & 200 & 1200 \\ 700 & 500 & 800 & 900 \\ 400 & 900 & 0 & 500 \end{pmatrix}.$$

Представим транспортную модель (ТМ) в виде таблицы, называемой *транспортной таблицей* (ТТ) или *матрицей перевозок*:

| ТТ                                  |     | Пункты назначения<br>(хлебозаводы) |  |          |  |          |  |          |  | Объем<br>производства,<br>т |
|-------------------------------------|-----|------------------------------------|--|----------|--|----------|--|----------|--|-----------------------------|
|                                     |     | № 1                                |  | № 1      |  | № 3      |  | № 4      |  |                             |
| Исходные пункты<br>(хлебокомбинаты) | № 1 | 800                                |  | 100      |  | 900      |  | 300      |  | 110                         |
|                                     |     | $x_{11}$                           |  | $x_{12}$ |  | $x_{13}$ |  | $x_{14}$ |  |                             |
|                                     | № 2 | 400                                |  | 600      |  | 200      |  | 1200     |  | 190                         |
|                                     |     | $x_{21}$                           |  | $x_{22}$ |  | $x_{23}$ |  | $x_{24}$ |  |                             |
|                                     | № 3 | 700                                |  | 500      |  | 800      |  | 900      |  | 90                          |
|                                     |     | $x_{31}$                           |  | $x_{32}$ |  | $x_{33}$ |  | $x_{34}$ |  |                             |
|                                     | № 4 | 400                                |  | 900      |  | 0        |  | 500      |  | 70                          |
|                                     |     | $x_{41}$                           |  | $x_{42}$ |  | $x_{43}$ |  | $x_{44}$ |  |                             |
| Спрос, т                            |     | 100                                |  | 60       |  | 170      |  | 130      |  | $\Sigma = 460$              |

Изменим условия в примере 1. Предположим, что хлебозаводу № 2 требуется не 60, а 90 т муки. Это приведет к *дисбалансу*, поскольку суммарный объем потребления (490 т) не равен суммарному объему производства (460 т). Другими словами, дисбаланс означает, что спрос на хлебозаводах полностью удовлетворить не удастся. В этом случае необходимо изменить транспортную модель таким образом, чтобы недостаток муки ( $490 - 460 = 30$  т) оптимально распределился между всеми хлебозаводами.

Введем фиктивный исходный пункт (фиктивный хлебокомбинат) с производительностью 30 т муки в день. Стоимость перевозок с фиктивного хлебокомбината на все хлебозаводы естественно положить равной нулю (т. к. никакие перевозки на самом деле не осуществляются). Таким образом, сбалансированная модель имеет следующий вид (здесь хлебокомбинат № 5 – фиктивный):

| ТТ                                  |     | Пункты назначения<br>(хлебозаводы)                                  |                                                                     |                                                                     |                                                                      |     |                |     |  | Объем<br>производства,<br>т |
|-------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|-----|----------------|-----|--|-----------------------------|
|                                     |     | № 1                                                                 |                                                                     | № 1                                                                 |                                                                      | № 3 |                | № 4 |  |                             |
| Исходные пункты<br>(хлебокомбинаты) | № 1 | <div><div></div><div>800</div></div> <div><math>x_{11}</math></div> | <div><div></div><div>100</div></div> <div><math>x_{12}</math></div> | <div><div></div><div>900</div></div> <div><math>x_{13}</math></div> | <div><div></div><div>300</div></div> <div><math>x_{14}</math></div>  | 110 |                |     |  |                             |
|                                     | № 2 | <div><div></div><div>400</div></div> <div><math>x_{21}</math></div> | <div><div></div><div>600</div></div> <div><math>x_{22}</math></div> | <div><div></div><div>200</div></div> <div><math>x_{23}</math></div> | <div><div></div><div>1200</div></div> <div><math>x_{24}</math></div> |     | 190            |     |  |                             |
|                                     | № 3 | <div><div></div><div>700</div></div> <div><math>x_{31}</math></div> | <div><div></div><div>500</div></div> <div><math>x_{32}</math></div> | <div><div></div><div>800</div></div> <div><math>x_{33}</math></div> | <div><div></div><div>900</div></div> <div><math>x_{34}</math></div>  | 90  |                |     |  |                             |
|                                     | № 4 | <div><div></div><div>400</div></div> <div><math>x_{41}</math></div> | <div><div></div><div>900</div></div> <div><math>x_{42}</math></div> | <div><div></div><div>0</div></div> <div><math>x_{43}</math></div>   | <div><div></div><div>500</div></div> <div><math>x_{44}</math></div>  |     | 70             |     |  |                             |
|                                     | № 5 | <div><div></div><div>0</div></div> <div><math>x_{51}</math></div>   | <div><div></div><div>0</div></div> <div><math>x_{52}</math></div>   | <div><div></div><div>0</div></div> <div><math>x_{53}</math></div>   | <div><div></div><div>0</div></div> <div><math>x_{54}</math></div>    | 30  |                |     |  |                             |
| Спрос, т                            |     | 100                                                                 | 90                                                                  | 170                                                                 | 130                                                                  |     | $\Sigma = 490$ |     |  |                             |

Если, наоборот, объем производства превышает спрос, можно ввести дополнительные фиктивные пункты назначения.

Мука, поступающая с некоторого хлебокомбината на фиктивный хлебозавод, представляют собой избыток производства на этом комбинате. Соответствующая стоимость перевозки равна нулю. Однако можно назначить штраф за хранение муки на складе комбината, тогда стоимость перевозки 1 т не поставленной на хлебозавод муки будет равна штрафу за ее хранение.

Аналогично в модели с недопроизведенным количеством муки. Каждую недопоставленную на хлебозавод тонну муки можно обложить штрафом. Тогда транспортные расходы на тонну недопроизведенной муки равны штрафу за недополученную продукцию.

### 5.3 Первоначальное закрепление потребителей за поставщиками

Составим начальный базис задачи оптимизации плана доставки муки. Положим

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^0 = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, \quad b^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

| ТТ-0    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^0$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | 110            |
|         | 0     |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $A_2$   |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | 190            |
|         | 0     |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $A_3$   |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | 90             |
|         | 0     |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $A_4$   |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | 70             |
|         | 0     |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $b_j^0$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |

#### 1. Метод северо-западного угла (МСЗУ)

Шаг 1.1. Положим  $z = 1, l = 1, k = 0$ .

Шаг 1.2. Положим

$$X^1 = X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^1 = a^0 = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, b^1 = b^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Так как  $z = 1 \neq m$ ,  $l = 1 \neq n$ , то вычисляем

$$x_{11}^1 = \min(a_1^0, b_1^0) = \min(110, 100) = 100.$$

Шаг 1.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_1^1 = a_1^0 - x_{11}^1 = 110 - 100 = 10, \quad b_1^1 = b_1^0 - x_{11}^1 = 100 - 100 = 0.$$

Шаг 1.5. Так как  $b_1^1 = 0$ ,  $l = 1 < n$ , то вычеркиваем 1-й столбец и полагаем  $l = 2$ .

Шаг 1.6. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-1    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^1$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | 10             |
|         | 100   |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $A_2$   |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | 190            |
|         | ×     |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $A_3$   |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | 90             |
|         | ×     |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $A_4$   |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | 70             |
|         | ×     |     | 0     |     | 0     |     | 0     |      |                |
| $b_j^1$ |       | —   | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 360$ |

Шаг 2.2. Положим

$$X^2 = X^1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = a^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, b^2 = b^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.3. Так как  $z = 1 \neq m$ ,  $l = 2 \neq n$ , то вычисляем

$$x_{12}^2 = \min(a_1^1, b_2^1) = \min(10, 60) = 10.$$

Шаг 2.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_1^2 = a_1^1 - x_{12}^2 = 10 - 10 = 0, \quad b_2^2 = b_2^1 - x_{12}^2 = 60 - 10 = 50.$$

Шаг 2.5. Так как  $a_1^2 = 0$ ,  $z = 1 < m$ , то вычеркиваем 1-ю строку и полагаем  $z = 2$ .

Шаг 2.6. Полагаем  $k = 2$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-2    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^2$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 100   | 800 | 10    | 100 | ×     | 900 | ×     | 300  | —              |
| $A_2$   | ×     | 400 | 0     | 600 | 0     | 200 | 0     | 1200 | 190            |
| $A_3$   | ×     | 700 | 0     | 500 | 0     | 800 | 0     | 900  | 90             |
| $A_4$   | ×     | 400 | 0     | 900 | 0     | 0   | 0     | 500  | 70             |
| $b_j^2$ | —     |     | 50    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 350$ |

Шаг 3.2. Положим

$$X^3 = X^2 = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, \quad b^3 = b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.3. Так как  $z = 2 \neq m$ ,  $l = 2 \neq n$ , то вычисляем

$$x_{22}^3 = \min(a_2^2, b_2^2) = \min(190, 50) = 50.$$

Шаг 3.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_2^3 = a_2^2 - x_{22}^3 = 190 - 50 = 140, \quad b_2^3 = b_2^2 - x_{22}^3 = 50 - 50 = 0.$$

Шаг 3.5. Так как  $b_2^3 = 0$ ,  $l = 2 < n$ , то вычеркиваем 2-й столбец и полагаем  $l = 3$ .

Шаг 3.6. Полагаем  $k = 3$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-3    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^3$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 100   | 800 | 10    | 100 | ×     | 900 | ×     | 300  | —              |
| $A_2$   | ×     | 400 | 50    | 600 | 0     | 200 | 0     | 1200 | 140            |
| $A_3$   | ×     | 700 | ×     | 500 | 0     | 800 | 0     | 900  | 90             |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 0     | 0   | 0     | 500  | 70             |
| $b_j^3$ | —     |     | —     |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 300$ |

Шаг 4.2. Положим

$$X^4 = X^3 = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^4 = a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, \quad b^4 = b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4.3. Так как  $z = 2 \neq m$ ,  $l = 3 \neq n$ , то вычисляем

$$x_{23}^4 = \min(a_2^3, b_3^3) = \min(140, 170) = 140.$$

Шаг 4.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_2^4 = a_2^3 - x_{23}^4 = 140 - 140 = 0, \quad b_3^4 = b_3^3 - x_{23}^4 = 170 - 140 = 30.$$

Шаг 4.5. Так как  $a_2^4 = 0$ ,  $z = 2 < m$ , то вычеркиваем 2-ю строку и полагаем  $z = 3$ .

Шаг 4.6. Полагаем  $k = 4$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-4    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^4$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 100   | 800 | 10    | 100 | ×     | 900 | ×     | 300  | —              |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_2$   | ×     | 400 | 50    | 600 | 140   | 200 | ×     | 1200 | —              |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_3$   | ×     | 700 | ×     | 500 | 0     | 800 | 0     | 900  | 90             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 0     | 0   | 0     | 500  | 70             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $b_j^4$ | —     |     | —     |     | 30    |     | 130   |      | $\Sigma = 160$ |

Шаг 5.2. Положим

$$X^5 = X^4 = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^5 = a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, \quad b^5 = b^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 5.3. Так как  $z = 3 \neq m$ ,  $l = 3 \neq n$ , то вычисляем

$$x_{33}^5 = \min(a_3^4, b_3^4) = \min(90, 30) = 30.$$

Шаг 5.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_3^5 = a_3^4 - x_{33}^5 = 90 - 30 = 60, \quad b_3^5 = b_3^4 - x_{43}^5 = 30 - 30 = 0.$$

Шаг 5.5. Так как  $b_3^5 = 0$ ,  $l = 3 < m$ , то вычеркиваем 3-й столбец и полагаем  $l = 4$ .

Шаг 5.6. Полагаем  $k = 5$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-5    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^5$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 100   | 800 | 10    | 100 | ×     | 900 | ×     | 300  | —              |
| $A_2$   |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 |                |
| $A_3$   | ×     | 700 | ×     | 500 | 30    | 800 | 0     | 900  | 60             |
| $A_4$   |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  |                |
| $b_j^5$ | —     |     | —     |     | —     |     | 130   |      | $\Sigma = 130$ |

Шаг 6.2. Положим

$$X^6 = X^5 = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^6 = a^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}, b^6 = b^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 6.3. Так как  $l=4=n$ , то оставшиеся элементы 4-го столбца заполняем оставшимися значениями предложения:

$$x_{i4}^6 = a_i^5, \quad i=3, \dots, 4 \Rightarrow \\ x_{34}^6 = a_3^5 = 60, \quad x_{44}^6 = a_4^5 = 70.$$

Решение закончено:

| ТТ-6  | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      |   |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|---|
| $A_1$ |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | — |
|       | 100   |     | 10    |     | ×     |     | ×     |      |   |
| $A_2$ |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | — |
|       | ×     |     | 50    |     | 140   |     | ×     |      |   |
| $A_3$ |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | — |
|       | ×     |     | ×     |     | 30    |     | 60    |      |   |
| $A_4$ |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | — |
|       | ×     |     | ×     |     | ×     |     | 70    |      |   |
|       | —     |     | —     |     | —     |     | —     |      |   |

Таким образом, получим следующее базисное решение:

$$x_{11} = 100, x_{12} = 10, x_{22} = 50, x_{23} = 140, x_{33} = 30, x_{34} = 60, x_{44} = 70.$$

Остальные, небазисные, переменные равны 0. Суммарные затраты на доставку (значение ЦФ):

$$\begin{aligned} f(X) &= 800 \cdot 100 + 100 \cdot 10 + 600 \cdot 50 + 200 \cdot 140 + 800 \cdot 30 + 900 \cdot 60 + 500 \cdot 70 = \\ &= 252000 \text{ руб.} \end{aligned}$$

## 2. Метод наименьшей стоимости (МНС)

Шаг 1.1. Положим  $k = 0$ .

Шаг 1.2. Положим

$$X^1 = X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^1 = a^0 = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, b^1 = b^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Так как не вычеркнуто 4 строки и 4 столбца, то

$$\min_{i,j} c_{ij} = 0 = c_{43}, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow z = 4, l = 3,$$

$$x_{43}^1 = \min(a_4^0, b_3^0) = \min(70, 170) = 70.$$

Шаг 1.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_4^1 = a_4^0 - x_{43}^1 = 70 - 70 = 0, \quad b_3^1 = b_3^0 - x_{43}^1 = 170 - 70 = 100.$$

Шаг 1.5. Так как  $a_4^1 = 0$ , то вычеркиваем 4-ю строку.

Шаг 1.6. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-1    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^1$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 0     | 100 | 0     | 900 | 0     | 300  | 110            |
| $A_2$   | 0     | 400 | 0     | 600 | 0     | 200 | 0     | 1200 | 190            |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | 0     | 800 | 0     | 900  | 90             |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              |
| $b_j^1$ | 100   |     | 60    |     | 100   |     | 130   |      | $\Sigma = 390$ |

Шаг 2.2. Положим

$$X^2 = X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = a^1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^2 = b^1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 100 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.3. Так как не вычеркнуто 3 строки и 4 столбца, то

$$\min_{i,j} c_{ij} = 100 = c_{12}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow z = 1, \quad l = 2,$$

$$x_{12}^2 = \min(a_1^1, b_2^1) = \min(110, 60) = 60.$$

Шаг 2.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_1^2 = a_1^1 - x_{12}^2 = 110 - 60 = 50, \quad b_2^2 = b_2^1 - x_{12}^2 = 60 - 60 = 0.$$

Шаг 2.5. Так как  $b_2^2 = 0$ , то вычеркиваем 2-й столбец.

Шаг 2.6. Полагаем  $k = 2$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-2    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |   | $B_4$ |     | $a_i^2$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|---|-------|-----|----------------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 60    | 100 | 0     | 0 | 300   | 50  |                |
|         |       |     |       |     |       |   |       |     |                |
| $A_2$   | 0     | 400 | ×     | 600 | 0     | 0 | 1200  | 190 |                |
|         |       |     |       |     |       |   |       |     |                |
| $A_3$   | 0     | 700 | ×     | 500 | 0     | 0 | 900   | 90  |                |
|         |       |     |       |     |       |   |       |     |                |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | × | 500   | —   |                |
|         |       |     |       |     |       |   |       |     |                |
| $b_j^2$ | 100   |     | —     |     | 100   |   | 130   |     | $\Sigma = 330$ |

Шаг 3.2. Положим

$$X^3 = X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = a^2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 190 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^3 = b^2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 100 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.3. Так как не вычеркнуто 3 строки и 3 столбца, то

$$\min_{i,j} c_{ij} = 200 = c_{23}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 3, 4 \Rightarrow z = 2, \quad l = 3,$$

$$x_{23}^3 = \min(a_2^2, b_3^2) = \min(190, 100) = 100.$$

Шаг 3.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_2^3 = a_2^2 - x_{23}^3 = 190 - 100 = 90, \quad b_3^3 = b_3^2 - x_{23}^3 = 100 - 100 = 0.$$

Шаг 3.5. Так как  $b_3^3 = 0$ , то вычеркиваем 3-й столбец.

Шаг 3.6. Полагаем  $k = 3$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-3    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^3$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 60    | 100 | ×     | 900 | 0     | 300  | 50             |
| $A_2$   | 0     | 400 | ×     | 600 | 100   | 200 | 0     | 1200 | 90             |
| $A_3$   | 0     | 700 | ×     | 500 | ×     | 800 | 0     | 900  | 90             |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              |
| $b_j^3$ | 100   |     | —     |     | —     |     | 130   |      | $\Sigma = 230$ |

Шаг 4.2. Положим

$$X^4 = X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^4 = a^3 = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^4 = b^3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4.3. Так как не вычеркнуто 3 строки и 2 столбца, то

$$\min_{i,j} c_{ij} = 300 = c_{14}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 4 \Rightarrow z = 1, \quad l = 4,$$

$$x_{14}^4 = \min(a_1^3, b_4^3) = \min(50, 130) = 50.$$

Шаг 4.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_1^4 = a_1^3 - x_{14}^4 = 50 - 50 = 0, \quad b_4^4 = b_4^3 - x_{14}^4 = 130 - 50 = 80.$$

Шаг 4.5. Так как  $a_1^4 = 0$ , то вычеркиваем 1-ю строку.

Шаг 4.6. Полагаем  $k = 4$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-4    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^4$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | ×     | 800 | 60    | 100 | ×     | 900 | 50    | 300  | —              |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_2$   | 0     | 400 | ×     | 600 | 100   | 200 | 0     | 1200 | 90             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_3$   | 0     | 700 | ×     | 500 | ×     | 800 | 0     | 900  | 90             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $b_j^4$ |       | 100 |       | —   |       | —   |       | 80   | $\Sigma = 180$ |

Шаг 5.2. Положим

$$X^5 = X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^5 = a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^5 = b^4 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Шаг 5.3. Так как не вычеркнуто 2 строки и 2 столбца, то

$$\min_{i,j} c_{ij} = 400 = c_{21}, \quad i = 2, 3, \quad j = 1, 4 \Rightarrow z = 2, \quad l = 1,$$

$$x_{21}^5 = \min(a_2^4, b_1^4) = \min(90, 100) = 90.$$

Шаг 5.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_2^5 = a_2^4 - x_{21}^5 = 90 - 90 = 0, \quad b_1^5 = b_1^4 - x_{21}^5 = 100 - 90 = 10.$$

Шаг 5.5. Так как  $a_2^5 = 0$ , то вычеркиваем 2-ю строку.

Шаг 5.6. Полагаем  $k = 5$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-5    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^5$       |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|---------------|
| $A_1$   | ×     | 800 | 60    | 100 | ×     | 900 | 50    | 300  | —             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |               |
| $A_2$   | 90    | 400 | ×     | 600 | 100   | 200 | ×     | 1200 | □<br>—        |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |               |
| $A_3$   | 0     | 700 | ×     | 500 | ×     | 800 | 0     | 900  | 90            |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |               |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |               |
| $b_j^5$ |       | 10  |       | —   |       | —   |       | 80   | $\Sigma = 90$ |

Шаг 6.2. Положим

$$X^6 = X^5 = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 90 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^6 = a^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^6 = b^5 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Шаг 6.3. Так как не вычеркнутой осталась всего 1 строка с индексом  $z=3$ , то ее оставшиеся элементы заполняем оставшимися значениями спроса:

$$x_{3j}^6 = b_j^6, \quad j=1,4 \Rightarrow \\ x_{31}^6 = b_1^6 = 10, \quad x_{34}^6 = b_4^6 = 80.$$

Решение закончено:

| ТТ-6  | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      |   |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|---|
| $A_1$ |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | — |
|       | ×     |     | 60    |     | ×     |     | 50    |      |   |
| $A_2$ |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | — |
|       | 90    |     | ×     |     | 100   |     | ×     |      |   |
| $A_3$ |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | — |
|       | 10    |     | ×     |     | ×     |     | 80    |      |   |
| $A_4$ |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | — |
|       | ×     |     | ×     |     | 70    |     | ×     |      |   |
|       |       | —   |       | —   |       | —   |       | —    |   |

Таким образом, получим следующее базисное решение:

$$x_{12} = 60, x_{14} = 50, x_{21} = 90, x_{23} = 100, x_{31} = 10, x_{34} = 80, x_{43} = 70 \text{ т.}$$

Остальные, небазисные, переменные равны 0. Суммарные затраты на доставку (значение ЦФ):

$$f(X) = 100 \cdot 60 + 300 \cdot 50 + 400 \cdot 90 + 200 \cdot 100 + 700 \cdot 10 + 900 \cdot 80 + 0 \cdot 70 = \\ = 156000 \text{ руб.}$$

Для метода северо-западного угла значение целевой функции составило  $f(x) = 252000$  руб., т. е. результат был существенно хуже.

### 3. Метод Фогеля (МФ)

Шаг 1.1. Положим  $k = 0$ .

Шаг 1.2. Положим

$$X^1 = X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^1 = a^0 = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}, b^1 = b^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.3. Так как невычеркнутых строк (столбцов) с ненулевым объемом производства (спроса) более 1, то вычисляем штрафы:

$$p_1^0 = 300 - 100 = 200, \quad p_2^0 = 400 - 200 = 200,$$

$$p_3^0 = 700 - 500 = 200, \quad p_4^0 = 400 - 0 = 400,$$

$$r_1^0 = 400 - 400 = 0, \quad r_2^0 = 500 - 100 = 400,$$

$$r_3^0 = 200 - 0 = 200, \quad r_4^0 = 500 - 300 = 200.$$

$$pr_{\max}^0 = \max \left( \max_{i=1,2,3,4} p_i^0, \max_{j=1,2,3,4} r_j^0 \right) = 400.$$

| ТТ-0    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^0$        | $p_i^0$ |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|---------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 0     | 100 | 0     | 900 | 0     | 300  | 110            | 200     |
| $A_2$   | 0     | 400 | 0     | 600 | 0     | 200 | 0     | 1200 | 190            | 200     |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | 0     | 800 | 0     | 900  | 90             | 200     |
| $A_4$   | 0     | 400 | 0     | 900 | 0     | 0   | 0     | 500  | 70             | 400     |
| $b_j^0$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |         |
| $r_j^0$ | 0     |     | 400   |     | 200   |     | 200   |      |                |         |

Максимальный штраф соответствует 4-й строке и 2-му столбцу. Можно выбрать любой из них. Например, выберем 4-ю строку, тогда опорная строка  $z = 4$ , а опорный столбец

$$\min_{j=1,2,3,4} c_{4j} = 0 = c_{43} \Rightarrow l = 3.$$

Вычислим значение переменной  $x_{43}^1$ :

$$x_{43}^1 = \min(a_4^0, b_3^0) = \min(70, 170) = 70.$$

Шаг 1.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_4^1 = a_4^0 - x_{43}^1 = 70 - 70 = 0, \quad b_3^1 = b_3^0 - x_{43}^1 = 170 - 70 = 100.$$

Шаг 1.5. Так как  $a_4^1 = 0$ , то вычеркиваем 4-ю строку.

Шаг 1.6. Полагаем  $k = 1$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-1    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^1$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 0     | 100 | 0     | 900 | 0     | 300  | 110            |
| $A_2$   | 0     | 400 | 0     | 600 | 0     | 200 | 0     | 1200 | 190            |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | 0     | 800 | 0     | 900  | 90             |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              |
| $b_j^1$ | 100   |     | 60    |     | 100   |     | 130   |      | $\Sigma = 390$ |

Шаг 2.2. Положим

$$X^2 = X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = a^1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^2 = b^1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 100 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.3. Так как невычеркнутых строк (столбцов) с ненулевым объемом производства (спроса) более 1, то вычисляем штрафы:

$$p_1^1 = 300 - 100 = 200, \quad p_2^1 = 400 - 200 = 200, \quad p_3^1 = 700 - 500 = 200,$$

$$r_1^1 = 700 - 400 = 300, \quad r_2^1 = 500 - 100 = 400,$$

$$r_3^1 = 800 - 200 = 600, \quad r_4^1 = 900 - 300 = 600.$$

$$pr_{\max}^1 = \max \left( \max_{i=1,2,3} p_i^1, \max_{j=1,2,3,4} r_j^1 \right) = 600.$$

| ТТ-1    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^1$        | $p_i^1$ |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|---------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 0     | 100 | 0     | 900 | 0     | 300  | 110            | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_2$   | 0     | 400 | 0     | 600 | 0     | 200 | 0     | 1200 | 190            | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | 0     | 800 | 0     | 900  | 90             | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              | —       |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $b_j^1$ | 100   |     | 60    |     | 100   |     | 130   |      | $\Sigma = 390$ |         |
| $r_j^1$ | 300   |     | 400   |     | 600   |     | 600   |      |                |         |

Максимальный штраф соответствует 3-му и 4-му столбцу. Можно выбрать любой из них. Например, выберем 3-й столбец, тогда опорный столбец  $l = 3$ , а опорная строка

$$\min_{i=1,2,3} c_{i3} = 200 = c_{23} \Rightarrow z = 2.$$

Вычислим значение переменной  $x_{23}^2$ :

$$x_{23}^2 = \min(a_2^1, b_3^1) = \min(190, 100) = 100.$$

Шаг 2.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_2^2 = a_2^1 - x_{23}^2 = 190 - 100 = 90, \quad b_3^2 = b_3^1 - x_{23}^2 = 100 - 100 = 0.$$

Шаг 2.5. Так как  $b_3^2 = 0$ , то вычеркиваем 3-й столбец.

Шаг 2.6. Полагаем  $k = 2$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-2    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^2$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 0     | 100 | ×     | 900 | 0     | 300  | 110            |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_2$   | 0     | 400 | 0     | 600 | 100   | 200 | 0     | 1200 | 90             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | ×     | 800 | 0     | 900  | 90             |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $b_j^2$ | 100   |     | 60    |     | —     |     | 130   |      | $\Sigma = 290$ |

Шаг 3.2. Положим

$$X^3 = X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = a^2 = \begin{pmatrix} 110 \\ 90 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^3 = b^2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.3. Так как невычеркнутых строк (столбцов) с ненулевым объемом производства (спроса) более 1, то вычисляем штрафы:

$$p_1^2 = 300 - 100 = 200, \quad p_2^2 = 600 - 400 = 200, \quad p_3^2 = 700 - 500 = 200,$$

$$r_1^2 = 700 - 400 = 300, \quad r_2^2 = 500 - 100 = 400, \quad r_4^2 = 900 - 300 = 600.$$

$$pr_{\max}^2 = \max \left( \max_{i=1,2,3} p_i^2, \max_{j=1,2,4} r_j^2 \right) = 600.$$

| ТТ-2    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^2$        | $p_i^2$ |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|---------|
| $A_1$   | 0     | 800 | 0     | 100 | ×     | 900 | 0     | 300  | 110            | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_2$   | 0     | 400 | 0     | 600 | 100   | 200 | 0     | 1200 | 90             | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | ×     | 800 | 0     | 900  | 90             | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              | —       |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $b_j^2$ | 100   |     | 60    |     | —     |     | 130   |      | $\Sigma = 290$ |         |
| $r_j^2$ | 300   |     | 400   |     | —     |     | 600   |      |                |         |

Максимальный штраф соответствует 4-му столбцу, поэтому опорный столбец  $l = 4$ , а опорная строка

$$\min_{i=1,2,3} c_{i4} = 300 = c_{14} \Rightarrow z = 1.$$

Вычислим значение переменной  $x_{14}^3$ :

$$x_{14}^3 = \min(a_1^2, b_4^2) = \min(110, 130) = 110.$$

Шаг 3.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_1^3 = a_1^2 - x_{14}^3 = 110 - 110 = 0, \quad b_4^3 = b_4^2 - x_{14}^3 = 130 - 110 = 20.$$

Шаг 3.5. Так как  $a_1^3 = 0$ , то вычеркиваем 1-ю строку.

Шаг 3.6. Полагаем  $k = 3$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-3    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^3$        |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$   |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | —              |
|         | ×     |     | ×     |     | ×     |     | 110   |      |                |
| $A_2$   |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | 90             |
|         | 0     |     | 0     |     | 100   |     | 0     |      |                |
| $A_3$   |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | 90             |
|         | 0     |     | 0     |     | ×     |     | 0     |      |                |
| $A_4$   |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | —              |
|         | ×     |     | ×     |     | 70    |     | ×     |      |                |
| $b_j^3$ | 100   |     | 60    |     | —     |     | 20    |      | $\Sigma = 180$ |

Шаг 4.2. Положим

$$X^4 = X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^4 = a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^4 = b^3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4.3. Так как невычеркнутых строк (столбцов) с ненулевым объемом производства (спроса) более 1, то вычисляем штрафы:

$$p_2^3 = 600 - 400 = 200, \quad p_3^3 = 700 - 500 = 200,$$

$$r_1^3 = 700 - 400 = 300, \quad r_2^3 = 600 - 500 = 100, \quad r_4^3 = 1200 - 900 = 300.$$

$$pr_{\max}^3 = \max \left( \max_{i=2,3} p_i^3, \max_{j=1,2,4} r_j^3 \right) = 300.$$

| ТТ-3    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^3$        | $p_i^3$ |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|---------|
| $A_1$   | ×     | 800 | ×     | 100 | ×     | 900 | 110   | 300  | —              | —       |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_2$   | 0     | 400 | 0     | 600 | 100   | 200 | 0     | 1200 | 90             | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | ×     | 800 | 0     | 900  | 90             | 200     |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —              | —       |
|         |       |     |       |     |       |     |       |      |                |         |
| $b_j^3$ | 100   |     | 60    |     | —     |     | 20    |      | $\Sigma = 180$ |         |
| $r_j^3$ | 300   |     | 100   |     | —     |     | 300   |      |                |         |

Максимальный штраф соответствует 1-му и 4-му столбцу. Можно выбрать любой из них. Например, выберем 1-й столбец, тогда опорный столбец  $l = 1$ , а опорная строка

$$\min_{i=2,3} c_{i1} = 400 = c_{21} \Rightarrow z = 2.$$

Вычислим значение переменной  $x_{21}^4$ :

$$x_{21}^4 = \min(a_2^3, b_1^3) = \min(90, 100) = 90.$$

Шаг 4.4. Модифицируем спрос и предложение:

$$a_2^4 = a_2^3 - x_{21}^4 = 90 - 90 = 0, \quad b_1^4 = b_1^3 - x_{21}^4 = 100 - 90 = 10.$$

Шаг 4.5. Так как  $a_2^4 = 0$ , то вычеркиваем 2-ю строку.

Шаг 4.6. Полагаем  $k = 4$ , возвращаемся на шаг 2.

| ТТ-4    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^4$       |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|---------------|
| $A_1$   | ×     | 800 | ×     | 100 | ×     | 900 | 110   | 300  | —             |
| $A_2$   | 90    | 400 | 0     | 600 | 100   | 200 | 0     | 1200 | —             |
| $A_3$   | 0     | 700 | 0     | 500 | ×     | 800 | 0     | 900  | 90            |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —             |
| $b_j^4$ | 10    |     | 60    |     | —     |     | 20    |      | $\Sigma = 90$ |

Шаг 5.2. Положим

$$X^5 = X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 90 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^5 = a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^5 = b^4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Шаг 5.3. Осталась всего 1 невычеркнутая строка, оставшиеся элементы базисного решения находим с помощью МНС:

| ТТ-5    | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i^5$ |
|---------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|---------|
| $A_1$   | ×     | 800 | ×     | 100 | ×     | 900 | 110   | 300  | —       |
| $A_2$   | 90    | 400 | ×     | 600 | 100   | 200 | ×     | 1200 | —       |
| $A_3$   | 10    | 700 | 60    | 500 | ×     | 800 | 20    | 900  | —       |
| $A_4$   | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | —       |
| $b_j^5$ | —     |     | —     |     | —     |     | —     |      |         |

Решение закончено. Таким образом, получим следующее базисное решение:

$$x_{14} = 110, x_{21} = 90, x_{23} = 100, x_{31} = 10, x_{32} = 60, x_{34} = 20, x_{43} = 70 \text{ т.}$$

Остальные, небазисные, переменные равны 0. Суммарные затраты на доставку (значение ЦФ):

$$\begin{aligned} f(X) &= 300 \cdot 110 + 400 \cdot 90 + 200 \cdot 100 + 700 \cdot 10 + 500 \cdot 60 + 900 \cdot 20 + 0 \cdot 70 = \\ &= 144000 \text{ руб.} \end{aligned}$$

Как будет показано далее, это соответствует оптимальному решению. Данный метод не включает правила выбора штрафа из нескольких одинаковых. Например, если на первой итерации вместо 4-й строки выбрать 2-й столбец, то получится худшее решение.

*Задание.* Проверьте это утверждение на практике.

#### 5.4 Решение транспортной задачи симплекс-методом

Согласно выражениям (5.8), (5.9) и (5.10) из учебника [1], для задачи оптимизации плана доставки муки получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,1}, x_2 = x_{1,2}, x_3 = x_{1,3}, x_4 = x_{1,4}, \\ x_5 &= x_{2,1}, x_6 = x_{2,2}, x_7 = x_{2,3}, x_8 = x_{2,4}, \\ x_9 &= x_{3,1}, x_{10} = x_{3,2}, x_{11} = x_{3,3}, x_{12} = x_{3,4}, \\ x_{13} &= x_{4,1}, x_{14} = x_{4,2}, x_{15} = x_{4,3}, x_{16} = x_{4,4}, \\ c_1 &= c_{1,1}, c_2 = c_{1,2}, c_3 = c_{1,3}, c_4 = c_{1,4}, \\ c_5 &= c_{2,1}, c_6 = c_{2,2}, c_7 = c_{2,3}, c_8 = c_{2,4}, \\ c_9 &= c_{3,1}, c_{10} = c_{3,2}, c_{11} = c_{3,3}, c_{12} = c_{3,4}, \\ c_{13} &= c_{4,1}, c_{14} = c_{4,2}, c_{15} = c_{4,3}, c_{16} = c_{4,4}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{16} c_k x_k = \\ &= 800x_1 + 100x_2 + 900x_3 + 300x_4 + 400x_5 + 600x_6 + 200x_7 + 200x_8 + \\ &+ 700x_9 + 500x_{10} + 800x_{11} + 900x_{12} + 400x_{13} + 900x_{14} + 0x_{15} + 500x_{16} \rightarrow \min, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = 100, \\ x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} = 60, \\ x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} = 170, \\ x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} = 130, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 110, \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 190, \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 90, \\ x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 70, \\ x_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, 16 \end{cases}$$

или, в матричном виде,

$$f(x) = c^T x \rightarrow \min,$$

$$Ax = d,$$

$$x \geq 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 800 \\ 100 \\ 900 \\ 300 \\ 400 \\ 600 \\ 200 \\ 1200 \\ 700 \\ 500 \\ 800 \\ 900 \\ 400 \\ 900 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 170 \\ 130 \\ 110 \\ 190 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix},$$

т. е.  $d_i = b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $d_{n+j} = a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Таким образом, пришли к стандартной форме ЗЛП. Ее решение дает результат

$$x^* = (0, 0, 0, 110, 90, 0, 100, 0, 10, 60, 0, 20, 0, 0, 70, 0)^T, \quad f^* = 144000.$$

Можно заметить, что он совпадает с результатом, полученным методом Фогеля. То есть начальное базисное решение, полученное этим методом, уже оказалось оптимальным, хотя это наблюдается не всегда.

Таким образом, для минимизации затрат на перевозки нужно перевезти с хлебокомбината № 1 – 110 т муки к хлебозаводу № 4, с хлебокомбината № 2 – 90 т муки хлебозаводу № 1 и 100 т муки к хлебозаводу № 3, с хлебокомбината № 3 – 10 т муки к хлебозаводу № 1, 60 т муки к хлебозаводу № 2 и 20 т муки к хлебозаводу № 4, и, наконец, с хлебокомбината № 4 – 70 т муки к хлебозаводу № 3. Затраты на перевозку при этом составят 144 тыс. рублей.

*Задание.* Решите данную задачу симплекс-методом самостоятельно.

### 5.5 Решение транспортной задачи методом потенциалов

Решим методом потенциалов задачу оптимизации плана доставки муки для базисного начального распределения, полученного МСЗУ:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$ |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | 110            |
|       | 100   |     | 10    |     | ×     |     | ×     |      |                |
| $A_2$ |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | 190            |
|       | ×     |     | 50    |     | 140   |     | ×     |      |                |
| $A_3$ |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | 90             |
|       | ×     |     | ×     |     | 30    |     | 60    |      |                |
| $A_4$ |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | 70             |
|       | ×     |     | ×     |     | ×     |     | 70    |      |                |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |

Шаг 1.1. Используя формулу (5.11, [1]), получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) v_1 = u_1 + c_{11}, \\ (2) v_2 = u_1 + c_{12}, \\ (3) v_2 = u_2 + c_{22}, \\ (4) v_3 = u_2 + c_{23}, \\ (5) v_3 = u_3 + c_{33}, \\ (6) v_4 = u_3 + c_{34}, \\ (7) v_4 = u_4 + c_{44}. \end{array} \right.$$

Полагая  $u_1 = 0$ , найдем значения остальных неизвестных. Из (1) получаем  $v_1 = u_1 + c_{11} = 0 + 800 = 800$ , из (2)  $v_2 = u_1 + c_{12} = 0 + 100 = 100$ . Зная  $v_2$ , из (3) находим  $u_2 = v_2 - c_{22} = 100 - 600 = -500$ . Затем из (4)

$v_3 = u_2 + c_{23} = -500 + 200 = -300$ , из (5)  $u_3 = v_3 - c_{33} = -300 - 800 = -1100$ ,  
из (6)  $v_4 = u_3 + c_{34} = -1100 + 900 = -200$ . И, наконец, зная  $v_4$ , из (7) находим  
 $u_4 = v_4 - c_{44} = -200 - 500 = -700$ . Результаты представлены в таблице:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|-------|
| $A_1$ | 100   | 800 | 10    | 100 | ×     | 900 | ×     | 300  | 110            | 0     |
| $A_2$ | ×     | 400 | 50    | 600 | 140   | 200 | ×     | 1200 | 190            | -500  |
| $A_3$ | ×     | 700 | ×     | 500 | 30    | 800 | 60    | 900  | 90             | -1100 |
| $A_4$ | ×     | 400 | ×     | 900 | ×     | 0   | 70    | 500  | 70             | -700  |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ | 800   |     | 100   |     | -300  |     | -200  |      |                |       |

Шаг 1.2. Найдем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} (0+800)-800 & (0+100)-100 \\ (-500+400)-800 & (-500+600)-100 \\ (-1100+700)-800 & (-1100+500)-100 \dots \\ (-700+400)-800 & (-700+900)-100 \end{pmatrix}$$

$$\dots \begin{pmatrix} (0+900)+300 & (0+300)+200 \\ (-500+200)+300 & (-500+1200)+200 \\ (-1100+800)+300 & (-1100+900)+200 \\ (-700+0)+300 & (-700+500)+200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1200 & 500 \\ -900 & 0 & 0 & 900 \\ -1200 & -700 & 0 & 0 \\ -1100 & 100 & -400 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наличие большого числа отрицательных оценок свободных клеток свидетельствует о том, что данный план перевозок далек от оптимального.

Шаг 1.3. Наименьшая оценка  $d_{31} = -1200$ , поэтому опорным будет элемент ТТ (3,1).

Шаг 1.4. Строим контур, начиная с клетки (3,1):

|       | $B_1$    |             | $B_2$    |             | $B_3$    |             | $B_4$    |      | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|----------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|------|----------------|-------|
| $A_1$ |          | 800         |          | 100         |          | 900         |          | 300  | 110            | 0     |
|       | 100      | $\boxed{-}$ | 10       | $\boxed{+}$ | $\times$ |             | $\times$ |      |                |       |
| $A_2$ |          | 400         |          | 600         |          | 200         |          | 1200 | 190            | -500  |
|       | $\times$ |             | 50       | $\boxed{-}$ | 140      | $\boxed{+}$ | $\times$ |      |                |       |
| $A_3$ |          | 700         |          | 500         |          | 800         |          | 900  | 90             | -1100 |
|       | $\times$ | $\boxed{+}$ | $\times$ |             | 30       | $\boxed{-}$ | 60       |      |                |       |
| $A_4$ |          | 400         |          | 900         |          | 0           |          | 500  | 70             | -700  |
|       | $\times$ |             | $\times$ |             | $\times$ |             | 70       |      |                |       |
| $b_j$ | 100      |             | 60       |             | 170      |             | 130      |      | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ | 800      |             | 100      |             | -300     |             | -200     |      |                |       |

Контур проходит через клетки (3,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3). Во всех клетках контур образует прямой угол. По этой причине клетки (2,1) и (3,2) в контур не входят – в них линия контура не образует угла. Клетки (3,4) и (4,4) в контур включить не получится, т. к. тогда в одной из них прямой угол не получится. Расставляем в клетках, через которые проходит контур, знаки «+» и «-», начиная с «+».

Шаг 1.5. В нашем примере есть одна вершина со знаком «-», в которой наблюдается наименьшая поставка:  $x_{33} = 30$ , следовательно, вершина (3,3) освобождается (исключается из базиса). Величина поставки в вершинах со знаком «-», т. е. (1,1) и (2,2), уменьшается на 30. У вершин со знаком «+», т. е. (3,1), (1,2) и (2,3) к величине поставки прибавляем 30. При этом вершина (3,1) входит в базис:

|       | $B_1$     | $B_2$     | $B_3$      | $B_4$     | $a_i$          |
|-------|-----------|-----------|------------|-----------|----------------|
| $A_1$ | 800<br>70 | 100<br>40 | 900<br>×   | 300<br>×  | 110            |
| $A_2$ | 400<br>×  | 600<br>20 | 200<br>170 | 1200<br>× | 190            |
| $A_3$ | 700<br>30 | 500<br>×  | 800<br>×   | 900<br>60 | 90             |
| $A_4$ | 400<br>×  | 900<br>×  | 0<br>×     | 500<br>70 | 70             |
| $b_j$ | 100       | 60        | 170        | 130       | $\Sigma = 460$ |

Суммарные затраты на перевозки по этому плану составляют

$$f(X) = 800 \cdot 70 + 100 \cdot 40 + 600 \cdot 20 + 200 \cdot 170 + 700 \cdot 30 + 900 \cdot 60 + 500 \cdot 70 = \\ = 216000 \text{ рублей,}$$

что значительно меньше предыдущей суммы затрат, равной 252000 рублей. Хотя план перевозок еще не является оптимальным. Об этом свидетельствует наличие отрицательных значений в матрице оценок этого плана (см. следующую итерацию).

Шаг 2.1. Пересчитываем значения потенциалов (подробности расчетов приводить не будем, только конечный результат):

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -500 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 800 \\ 100 \\ -300 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.2. Пересчитываем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1200 & -700 \\ -900 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & 500 & 1200 & 0 \\ 100 & 1300 & 800 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что отрицательных оценок стало меньше.

Шаг 2.3. Наименьшая оценка  $d_{21} = -900$ , поэтому опорным будет элемент ТТ (2,1).

Шаг 2.4. Строим контур, начиная с клетки (2,1):

|       | $B_1$ | $B_2$                 | $B_3$    | $B_4$           | $a_i$          | $u_i$       |
|-------|-------|-----------------------|----------|-----------------|----------------|-------------|
| $A_1$ | 70    | 800<br>[-]<br>40<br>+ | 100<br>× | 900<br>×        | 300            | 110<br>0    |
| $A_2$ | ×     | 400<br>+              | 600<br>- | 200<br>170<br>× | 1200           | 190<br>-500 |
| $A_3$ | 30    | 700<br>×              | 500<br>× | 800<br>60       | 900            | 90<br>100   |
| $A_4$ | ×     | 400<br>×              | 900<br>× | 0<br>70         | 500            | 70<br>500   |
| $b_j$ | 100   | 60                    | 170      | 130             | $\Sigma = 460$ |             |
| $v_j$ | 800   | 100                   | -300     | 1000            |                |             |

Контур проходит через клетки (2,1), (1,1), (1,2), (2,2).

Шаг 2.5. В вершине (2,2) со знаком «-» наблюдается наименьшая поставка  $x_{22} = 20$ . Перераспределяем поставки:

|       | $B_1$             | $B_2$             | $B_3$              | $B_4$             | $a_i$          |
|-------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|----------------|
| $A_1$ | 50 <div>800</div> | 60 <div>100</div> | × <div>900</div>   | × <div>300</div>  | 110            |
| $A_2$ | 20 <div>400</div> | × <div>600</div>  | 170 <div>200</div> | × <div>1200</div> | 190            |
| $A_3$ | 30 <div>700</div> | × <div>500</div>  | × <div>800</div>   | 60 <div>900</div> | 90             |
| $A_4$ | × <div>400</div>  | × <div>900</div>  | × <div>0</div>     | 70 <div>500</div> | 70             |
| $b_j$ | 100               | 60                | 170                | 130               | $\Sigma = 460$ |

Здесь вершина (2,2) вышла из базиса, а (2,1) вошла в базис. К поставкам вершин (1,2) и (2,1) добавили 20, а от поставок вершин (1,1) и (2,2) отняли 20. Вычислим значение ЦФ:

$$f(X) = 800 \cdot 50 + 100 \cdot 60 + 400 \cdot 20 + 200 \cdot 170 + 700 \cdot 30 + 900 \cdot 60 + 500 \cdot 70 = \\ = 198000 \text{ рублей.}$$

Шаг 3.1. Пересчитываем значения потенциалов:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 800 \\ 100 \\ 600 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.2. Пересчитываем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 300 & -700 \\ 0 & 900 & 0 & 600 \\ 0 & 500 & 300 & 0 \\ 100 & 1300 & -100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отрицательных оценок стало еще меньше.

Шаг 3.3. Наименьшая оценка  $d_{14} = -700$ , поэтому опорным будет элемент ТТ (1,4).

Шаг 3.4. Строим контур, начиная с клетки (1,4):

|       | $B_1$ |              | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |              | $a_i$   | $u_i$ |
|-------|-------|--------------|-------|-----|-------|-----|-------|--------------|---------|-------|
| $A_1$ | 50    | 800          |       | 100 |       | 900 |       | 300          | 110     | 0     |
|       |       | <div>−</div> | 60    |     | ×     |     | ×     | <div>+</div> |         |       |
| $A_2$ | 20    | 400          |       | 600 |       | 200 |       | 1200         | 190     | 400   |
|       |       |              | ×     |     | 170   |     | ×     |              |         |       |
| $A_3$ | 30    | 700          |       | 500 |       | 800 |       | 900          | 90      | 100   |
|       |       | <div>+</div> | ×     |     | ×     |     | 60    | <div>−</div> |         |       |
| $A_4$ | ×     | 400          |       | 900 |       | 0   |       | 500          | 70      | 500   |
|       |       |              | ×     |     | ×     |     | 70    |              |         |       |
| $b_j$ | 100   |              | 60    |     | 170   |     | 130   |              | Σ = 460 |       |
| $v_j$ | 800   |              | 100   |     | 600   |     | 1000  |              |         |       |

Контур проходит через клетки (1,4), (3,4), (3,1), (1,1).

Шаг 3.5. В вершине (1,1) со знаком « $\leftarrow$ » наблюдается наименьшая поставка  $x_{11} = 50$ . Перераспределяем поставки:

|       | $B_1$    |     | $B_2$    |     | $B_3$    |     | $B_4$    |      | $a_i$          |
|-------|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|------|----------------|
| $A_1$ |          | 800 |          | 100 |          | 900 |          | 300  | 110            |
|       | $\times$ |     | 60       |     | $\times$ |     | 50       |      |                |
| $A_2$ |          | 400 |          | 600 |          | 200 |          | 1200 | 190            |
|       | 20       |     | $\times$ |     | 170      |     | $\times$ |      |                |
| $A_3$ |          | 700 |          | 500 |          | 800 |          | 900  | 90             |
|       | 80       |     | $\times$ |     | $\times$ |     | 10       |      |                |
| $A_4$ |          | 400 |          | 900 |          | 0   |          | 500  | 70             |
|       | $\times$ |     | $\times$ |     | $\times$ |     | 70       |      |                |
| $b_j$ | 100      |     | 60       |     | 170      |     | 130      |      | $\Sigma = 460$ |

Здесь вершина (1,1) вышла из базиса, а (1,4) вошла в базис. К поставкам вершин (1,4) и (3,1) добавили 50, а от поставок вершин (1,1) и (3,4) отняли 50. Вычислим значение ЦФ:

$$f(X) = 100 \cdot 60 + 300 \cdot 50 + 400 \cdot 20 + 200 \cdot 170 + 700 \cdot 80 + 900 \cdot 10 + 500 \cdot 70 = 163000 \text{ рублей.}$$

Шаг 4.1. Пересчитываем значения потенциалов:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -300 \\ -600 \\ -200 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ -100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4.2. Пересчитываем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} 700 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 600 \\ 0 & -200 & 300 & 0 \\ 100 & 600 & -100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4.3. Наименьшая оценка  $d_{32} = -200$ , поэтому опорным будет элемент ТТ (3,2).

Шаг 4.4. Строим контур, начиная с клетки (3,2):

|       | $B_1$     | $B_2$     | $B_3$      | $B_4$     | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|-----------|-----------|------------|-----------|----------------|-------|
| $A_1$ | 800<br>×  | 100<br>60 | 900<br>×   | 300<br>50 | 110            | 0     |
| $A_2$ | 400<br>20 | 600<br>×  | 200<br>170 | 1200<br>× | 190            | -300  |
| $A_3$ | 700<br>80 | 500<br>×  | 800<br>×   | 900<br>10 | 90             | -600  |
| $A_4$ | 400<br>×  | 900<br>×  | 0<br>×     | 500<br>70 | 70             | -200  |
| $b_j$ | 100       | 60        | 170        | 130       | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ | 100       | 100       | -100       | 300       |                |       |

Контур проходит через клетки (3,2), (1,2), (1,4), (3,4).

Шаг 4.5. В вершине (3,4) со знаком «-» наблюдается наименьшая поставка  $x_{34} = 10$ . Перераспределяем поставки:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$ | ×     | 800 | 50    | 100 | ×     | 900 | 60    | 300  | 110            |
| $A_2$ | 20    | 400 | ×     | 600 | 170   | 200 | ×     | 1200 | 190            |
| $A_3$ | 80    | 700 | 10    | 500 | ×     | 800 | ×     | 900  | 90             |
| $A_4$ | ×     | 400 | ×     | 900 | ×     | 0   | 70    | 500  | 70             |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |

Здесь вершина (3,4) вышла из базиса, а (3,2) вошла в базис. К поставкам вершин (1,4) и (3,2) добавили 10, а от поставок вершин (1,2) и (3,4) отняли 10. Вычислим значение ЦФ:

$$f(X) = 100 \cdot 60 + 300 \cdot 50 + 400 \cdot 20 + 200 \cdot 170 + 700 \cdot 80 + 900 \cdot 10 + 500 \cdot 70 = 161000 \text{ рублей.}$$

Шаг 5.1. Пересчитываем значения потенциалов:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ -400 \\ -200 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Шаг 5.2. Пересчитываем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 800 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 300 & 200 \\ -100 & 600 & -300 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 5.3. Наименьшая оценка  $d_{43} = -300$ , поэтому опорным будет элемент ТТ (4,3).

Шаг 5.4. Строим контур, начиная с клетки (4,3):

|       | $B_1$ |              | $B_2$ |              | $B_3$ |              | $B_4$ |              | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|-------|--------------|-------|--------------|-------|--------------|-------|--------------|----------------|-------|
| $A_1$ | ×     | 800          | 50    | 100          | ×     | 900          | 60    | 300          | 110            | 0     |
|       |       |              |       | <div>−</div> |       |              |       | <div>+</div> |                |       |
| $A_2$ | 20    | 400          |       | 600          |       | 200          | ×     | 1200         | 190            | −100  |
|       |       | <div>+</div> | ×     |              | 170   | <div>−</div> |       |              |                |       |
| $A_3$ | 80    | 700          |       | 500          | ×     | 800          | ×     | 900          | 90             | −400  |
|       |       | <div>−</div> | 10    | <div>+</div> |       |              |       |              |                |       |
| $A_4$ | ×     | 400          |       | 900          | ×     | 0            | 70    | 500          | 70             | −200  |
|       |       |              | ×     |              |       | <div>+</div> |       | <div>−</div> |                |       |
| $b_j$ |       | 100          |       | 60           |       | 170          |       | 130          | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ |       | 300          |       | 100          |       | 100          |       | 300          |                |       |

Контур проходит через клетки (4,3), (4,4), (1,4), (1,2), (3,2), (3,1), (2,1), (2,3). В клетке (2,2) линии контура пересекаются, поэтому в контур она не входит (кроме того, она не входит в базис, поэтому в любом случае не может входить в контур).

Шаг 5.5. В вершине (1,2) со знаком «-» наблюдается наименьшая поставка  $x_{12} = 50$ . Перераспределяем поставки:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$ |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | 110            |
|       | ×     |     | ×     |     | ×     |     | 110   |      |                |
| $A_2$ |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | 190            |
|       | 70    |     | ×     |     | 120   |     | ×     |      |                |
| $A_3$ |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | 90             |
|       | 30    |     | 60    |     | ×     |     | ×     |      |                |
| $A_4$ |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | 70             |
|       | ×     |     | ×     |     | 50    |     | 20    |      |                |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |

Здесь вершина (1,2) вышла из базиса, а (4,3) вошла в базис. К поставкам вершин (1,4), (2,1), (3,2) и (4,3) добавили 50, а от поставок вершин (1,2), (2,3), (3,1) и (4,4) отняли 50. Вычислим значение ЦФ:

$$f(X) = 300 \cdot 110 + 400 \cdot 70 + 200 \cdot 120 + 700 \cdot 30 + 500 \cdot 60 + 0 \cdot 50 + 500 \cdot 20 = 146000 \text{ рублей.}$$

Шаг 6.1. Пересчитываем значения потенциалов:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -400 \\ -700 \\ -200 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \\ -200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Шаг 6.2. Пересчитываем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} 800 & 300 & 1100 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 300 & -100 \\ 200 & 900 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отрицательная оценка осталась всего одна. Решение близко к оптимальному решению, но пока не оптимально.

Шаг 6.3. Наименьшая оценка  $d_{34} = -100$ , поэтому опорным будет элемент ТТ (3,4).

Шаг 6.4. Строим контур, начиная с клетки (3,4):

|       | $B_1$                        | $B_2$                        | $B_3$                         | $B_4$                         | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------|-------|
| $A_1$ | <div>800</div> <div>×</div>  | <div>100</div> <div>×</div>  | <div>900</div> <div>×</div>   | <div>300</div> <div>110</div> | 110            | 0     |
| $A_2$ | <div>400</div> <div>70</div> | <div>600</div> <div>×</div>  | <div>200</div> <div>120</div> | <div>1200</div> <div>×</div>  | 190            | -400  |
| $A_3$ | <div>700</div> <div>30</div> | <div>500</div> <div>60</div> | <div>800</div> <div>×</div>   | <div>900</div> <div>×</div>   | 90             | -700  |
| $A_4$ | <div>400</div> <div>×</div>  | <div>900</div> <div>×</div>  | <div>0</div> <div>50</div>    | <div>500</div> <div>20</div>  | 70             | -200  |
| $b_j$ | 100                          | 60                           | 170                           | 130                           | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ | 0                            | -200                         | -200                          | 300                           |                |       |

Контур проходит через клетки (3,4), (4,4), (4,3), (2,3), (2,1), (3,1).  
В клетке (3,3) линии контура просто пересекаются.

Шаг 6.5. В вершине (4,4) со знаком «←» наблюдается наименьшая поставка  $x_{44} = 20$ . Перераспределяем поставки:

|       | $B_1$                        | $B_2$                        | $B_3$                         | $B_4$                         | $a_i$          |
|-------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------|
| $A_1$ | <div>800</div> <div>×</div>  | <div>100</div> <div>×</div>  | <div>900</div> <div>×</div>   | <div>300</div> <div>110</div> | 110            |
| $A_2$ | <div>400</div> <div>90</div> | <div>600</div> <div>×</div>  | <div>200</div> <div>100</div> | <div>1200</div> <div>×</div>  | 190            |
| $A_3$ | <div>700</div> <div>10</div> | <div>500</div> <div>60</div> | <div>800</div> <div>×</div>   | <div>900</div> <div>20</div>  | 90             |
| $A_4$ | <div>400</div> <div>×</div>  | <div>900</div> <div>×</div>  | <div>0</div> <div>70</div>    | <div>500</div> <div>×</div>   | 70             |
| $b_j$ | 100                          | 60                           | 170                           | 130                           | $\Sigma = 460$ |

Здесь вершина (4,4) вышла из базиса, а (3,4) вошла в базис. К поставкам вершин (2,1), (3,4) и (4,3) добавили 20, а от поставок вершин (2,3), (3,1) и (4,4) отняли 20. Вычислим значение ЦФ:

$$f(X) = 300 \cdot 110 + 400 \cdot 90 + 200 \cdot 100 + 700 \cdot 10 + 500 \cdot 60 + 900 \cdot 20 + 0 \cdot 70 = 144000 \text{ руб.}$$

Это совпадает с оптимальным решением. Убедимся в этом на следующей итерации.

Шаг 7.1. Пересчитываем значения потенциалов:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -300 \\ -600 \\ -100 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ -100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Шаг 7.2. Пересчитываем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} 700 & 200 & 1000 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 300 & 0 \\ 200 & 900 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Все оценки положительны, следовательно, решение оптимально. Оно совпало с оптимальным решением, полученным методом Фогеля.

Ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 90 & 0 & 100 & 0 \\ 10 & 60 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix} \text{ т,} \quad f^* = 144000 \text{ рублей.}$$

Решим методом потенциалов задачу оптимизации плана доставки муки для базисного начального распределения, полученного МНС:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$ | ×     | 800 | 60    | 100 | ×     | 900 | 50    | 300  | 110            |
| $A_2$ | 90    | 400 | ×     | 600 | 100   | 200 | ×     | 1200 | 190            |
| $A_3$ | 10    | 700 | ×     | 500 | ×     | 800 | 80    | 900  | 90             |
| $A_4$ | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | 70             |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |

Шаг 1.1. Используя формулу (5.11, [1]), получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) v_2 = u_1 + c_{12}, \\ (2) v_4 = u_1 + c_{14}, \\ (3) v_1 = u_2 + c_{21}, \\ (4) v_3 = u_2 + c_{23}, \\ (5) v_1 = u_3 + c_{31}, \\ (6) v_4 = u_3 + c_{34}, \\ (7) v_3 = u_4 + c_{43}. \end{array} \right.$$

Полагая  $u_1 = 0$ , найдем значения остальных неизвестных. Из (1) получаем  $v_2 = u_1 + c_{12} = 0 + 100 = 100$ , из (2)  $v_4 = u_1 + c_{14} = 0 + 300 = 300$ . Зная  $v_4$ , из (6) находим  $u_3 = v_4 - c_{34} = 300 - 900 = -600$ . Затем из (5)  $v_1 = u_3 + c_{31} = -600 + 700 = 100$ , из (3)  $u_2 = v_1 - c_{21} = 100 - 400 = -300$ , из (4)  $v_3 = u_2 + c_{23} = -300 + 200 = -100$ . И, наконец, зная  $v_3$ , из (7) находим  $u_4 = v_3 - c_{43} = -100 - 0 = -100$ . Результаты представлены в таблице:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|-------|
| $A_1$ | ×     | 800 | 60    | 100 | ×     | 900 | 50    | 300  | 110            | 0     |
| $A_2$ | 90    | 400 | ×     | 600 | 100   | 200 | ×     | 1200 | 190            | -300  |
| $A_3$ | 10    | 700 | ×     | 500 | ×     | 800 | 80    | 900  | 90             | -600  |
| $A_4$ | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | 70             | -100  |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ | 100   |     | 100   |     | -100  |     | 300   |      |                |       |

Шаг 1.2. Найдем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} (0+800)-100 & (0+100)-100 \\ (-300+400)-100 & (-300+600)-100 \\ (-600+700)-100 & (-600+500)-100 & \dots \\ (-100+400)-100 & (-100+900)-100 \end{pmatrix}$$

$$\dots \begin{pmatrix} (0+900)+100 & (0+300)-300 \\ (-300+200)+100 & (-300+1200)-300 \\ (-600+800)+100 & (-600+900)-300 \\ (-100+0)+100 & (-100+500)-300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 600 \\ 0 & -200 & 300 & 0 \\ 200 & 700 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Здесь отрицательная оценка всего одна. Значит, данный план близок к оптимальному, но все же не оптимален.

Шаг 1.3. Наименьшая оценка  $d_{32} = -200$ , поэтому опорным будет элемент ТТ (3,2).

Шаг 1.4. Строим контур, начиная с клетки (3,2):

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |              | $B_3$ |    | $B_4$        |     | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|-------|-----|-------|--------------|-------|----|--------------|-----|----------------|-------|
| $A_1$ | ×     | 800 | 60    | <div>−</div> | ×     | 50 | <div>+</div> | 110 | 0              |       |
|       |       |     |       |              |       |    |              |     |                |       |
| $A_2$ | 90    | 400 | ×     | 600          | 100   | ×  | 1200         | 190 | −300           |       |
|       |       |     |       |              |       |    |              |     |                |       |
| $A_3$ | 10    | 700 | ×     | 500          | ×     | 80 | 900          | 90  | −600           |       |
|       |       |     |       | <div>+</div> |       |    | <div>−</div> |     |                |       |
| $A_4$ | ×     | 400 | ×     | 900          | 70    | ×  | 500          | 70  | −100           |       |
|       |       |     |       |              |       |    |              |     |                |       |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |              | 170   |    | 130          |     | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ | 100   |     | 100   |              | −100  |    | 300          |     |                |       |

Контур проходит через клетки (3,2), (1,2), (1,4), (3,4).

Шаг 1.5. В вершине (1,2) со знаком «−» наблюдается наименьшая поставка  $x_{12} = 60$ . Перераспределяем поставки:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$ | ×     | 800 | ×     | 100 | ×     | 900 | 110   | 300  | 110            |
|       |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_2$ | 90    | 400 | ×     | 600 | 100   | 200 | ×     | 1200 | 190            |
|       |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_3$ | 10    | 700 | 60    | 500 | ×     | 800 | 20    | 900  | 90             |
|       |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $A_4$ | ×     | 400 | ×     | 900 | 70    | 0   | ×     | 500  | 70             |
|       |       |     |       |     |       |     |       |      |                |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |

Здесь вершина (1,2) вышла из базиса, а (3,2) вошла в базис. К поставкам вершин (1,4) и (3,2) добавили 60, а от поставок вершин (1,2) и (3,4) отняли 60. Вычислим значение ЦФ:

$$f(X) = 300 \cdot 110 + 400 \cdot 90 + 200 \cdot 100 + 700 \cdot 10 + 500 \cdot 60 + 900 \cdot 20 + 0 \cdot 70 = 144000 \text{ руб.}$$

Это совпадает с оптимальным решением. Убедимся в этом на следующей итерации.

Шаг 2.1. Пересчитываем значения потенциалов:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -300 \\ -600 \\ -100 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ -100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.2. Пересчитываем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} 700 & 200 & 1000 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 300 & 0 \\ 200 & 900 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Все оценки положительны, следовательно, решение оптимально. Оно также совпало с оптимальным решением, полученным методом Фогеля.

Ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 90 & 0 & 100 & 0 \\ 10 & 60 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}_T, \quad f^* = 144000 \text{ рублей.}$$

Решим методом потенциалов задачу оптимизации плана доставки муки, для базисного начального распределения, полученного МФ:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|
| $A_1$ |       | 800 |       | 100 |       | 900 |       | 300  | 110            |
|       | ×     |     | ×     |     | ×     |     | 110   |      |                |
| $A_2$ |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 | 190            |
|       | 90    |     | ×     |     | 100   |     | ×     |      |                |
| $A_3$ |       | 700 |       | 500 |       | 800 |       | 900  | 90             |
|       | 10    |     | 60    |     | ×     |     | 20    |      |                |
| $A_4$ |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  | 70             |
|       | ×     |     | ×     |     | 70    |     | ×     |      |                |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |

Шаг 1.1. Используя формулу (5.11, [1]), получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) v_4 = u_1 + c_{14}, \\ (2) v_1 = u_2 + c_{21}, \\ (3) v_3 = u_2 + c_{23}, \\ (4) v_1 = u_3 + c_{31}, \\ (5) v_2 = u_3 + c_{32}, \\ (6) v_4 = u_3 + c_{34}, \\ (7) v_3 = u_4 + c_{43}. \end{array} \right.$$

Полагая  $u_1 = 0$ , найдем значения остальных неизвестных. Из (1) получаем  $v_4 = u_1 + c_{14} = 0 + 300 = 300$ . Зная  $v_4$ , из (6) находим  $u_3 = v_4 - c_{34} = 300 - 900 = -600$ . Затем из (4)  $v_1 = u_3 + c_{31} = -600 + 700 = 100$ , из (5)  $v_2 = u_3 + c_{32} = -600 + 500 = -100$ , из (2)  $u_2 = v_1 - c_{21} = 100 - 400 = -300$ , из (3)  $v_3 = u_2 + c_{23} = -300 + 200 = -100$ . И, наконец, зная  $v_3$ , из (7) находим  $u_4 = v_3 - c_{43} = -100 - 0 = -100$ . Результаты представлены в таблице:

|       | $B_1$ |     | $B_2$ |     | $B_3$ |     | $B_4$ |      | $a_i$          | $u_i$ |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|------|----------------|-------|
| $A_1$ | ×     | 800 | ×     | 100 | ×     | 900 | 110   | 300  | 110            | 0     |
| $A_2$ |       | 400 |       | 600 |       | 200 |       | 1200 |                |       |
| $A_3$ | 10    | 700 | 60    | 500 | ×     | 800 | 20    | 900  | 90             | -600  |
| $A_4$ |       | 400 |       | 900 |       | 0   |       | 500  |                |       |
|       | ×     |     | ×     |     | 70    |     | ×     |      | 70             | -100  |
| $b_j$ | 100   |     | 60    |     | 170   |     | 130   |      | $\Sigma = 460$ |       |
| $v_j$ | 100   |     | -100  |     | -100  |     | 300   |      |                |       |

Шаг 1.2. Найдем матрицу оценок:

$$D = \begin{pmatrix} (0+800)-100 & (0+100)+100 \\ (-300+400)-100 & (-300+600)+100 \\ (-600+700)-100 & (-600+500)+100 & \dots \\ (-100+400)-100 & (-100+900)+100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (0+900)+100 & (0+300)-300 \\ (-300+200)+100 & (-300+1200)-300 \\ \dots & (-600+800)+100 & (-600+900)-300 \\ (-100+0)+100 & (-100+500)-300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 & 200 & 1000 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 300 & 0 \\ 200 & 900 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Так как все оценки неотрицательны, то не имеется возможности улучшить данный план перевозок, т. е. он оптимален. Кроме того, следует отметить, что в данном случае оценки всех свободных клеток строго больше нуля, соответственно, оптимальное решение является единственным.

Ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 90 & 0 & 100 & 0 \\ 10 & 60 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}_T, \quad f^* = 144000 \text{ рублей.}$$

### 5.6 Задача о назначениях

При решении задачи о доставке хлеба получим следующую ЗЛП:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{16} c_k x_k =$$

$$600x_1 + 1400x_2 + 1000x_3 + 1600x_4 + 400x_5 + 800x_6 + 800x_7 + 1000x_8 +$$

$$+ 1800x_9 + 1400x_{10} + 600x_{11} + 1600x_{12} + 800x_{13} + 1400x_{14} + 400x_{15} + 1600x_{16} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = 1, \\ x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} = 1, \\ x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} = 1, \\ x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1, \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1, \\ x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1, \\ x_k \geq 0, \quad x_k \leq 1, \quad x_k \in Z, \quad k = 1, \dots, 16. \end{cases}$$

или, в матричном виде,

$$f(x) = c^T x \rightarrow \min,$$

$$Ax = d,$$

$$x \geq 0, \quad x \leq b, \quad x \in Z,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 600 \\ 1400 \\ 1000 \\ 1600 \\ 400 \\ 800 \\ 800 \\ 1000 \\ 1800 \\ 1400 \\ 600 \\ 1600 \\ 800 \\ 1400 \\ 400 \\ 1600 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ее решение симплекс-методом даст два оптимальных результата

$$x^* = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \text{ или } (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)^T, \\ f^* = 3400.$$

Решение целочисленное, поэтому применение метода Гомори не требуется. Таким образом, для минимизации затрат на перевозки нужно организовать рейс с хлебопекарни № 1 к магазину № 1, с хлебопекарни № 2 к магазину № 4, с хлебопекарни № 3 к магазину № 2, и, наконец, с хлебопекарни № 4 к магазину № 3. Или второй вариант: с хлебопекарни № 1 к магазину № 1, с хлебопекарни № 2 к магазину № 2, с хлебопекарни № 3 к магазину № 4 и, наконец, с хлебопекарни № 4 к магазину № 3. Затраты на перевозку в обоих случаях составят 3400 рублей.

*Задание.* Решите данную задачу симплекс-методом самостоятельно.

Задача о доставке хлеба при записи в виде ТТ будет иметь следующий вид:

| ТТ                                |     | Пункты назначения<br>(розничные магазины)                            |                                                                      |                                                                      |                                                                      |              |  |     |  | Предложение,<br>грузовиков |
|-----------------------------------|-----|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|--------------|--|-----|--|----------------------------|
|                                   |     | № 1                                                                  |                                                                      | № 1                                                                  |                                                                      | № 3          |  | № 4 |  |                            |
| Исходные пункты<br>(хлебопекарни) | № 1 | <div><div></div><div>600</div></div> <div><math>x_{11}</math></div>  | <div><div></div><div>1400</div></div> <div><math>x_{12}</math></div> | <div><div></div><div>1000</div></div> <div><math>x_{13}</math></div> | <div><div></div><div>1600</div></div> <div><math>x_{14}</math></div> | 1            |  |     |  |                            |
|                                   | № 2 | <div><div></div><div>400</div></div> <div><math>x_{21}</math></div>  | <div><div></div><div>800</div></div> <div><math>x_{22}</math></div>  | <div><div></div><div>800</div></div> <div><math>x_{23}</math></div>  | <div><div></div><div>1000</div></div> <div><math>x_{24}</math></div> | 1            |  |     |  |                            |
|                                   | № 3 | <div><div></div><div>1800</div></div> <div><math>x_{31}</math></div> | <div><div></div><div>1400</div></div> <div><math>x_{32}</math></div> | <div><div></div><div>600</div></div> <div><math>x_{33}</math></div>  | <div><div></div><div>1600</div></div> <div><math>x_{34}</math></div> | 1            |  |     |  |                            |
|                                   | № 4 | <div><div></div><div>800</div></div> <div><math>x_{41}</math></div>  | <div><div></div><div>1400</div></div> <div><math>x_{42}</math></div> | <div><div></div><div>400</div></div> <div><math>x_{43}</math></div>  | <div><div></div><div>1600</div></div> <div><math>x_{44}</math></div> | 1            |  |     |  |                            |
| Спрос, грузо-<br>виков            |     | 1                                                                    | 1                                                                    | 1                                                                    | 1                                                                    | $\Sigma = 4$ |  |     |  |                            |

Ее решение методом потенциалов даст два оптимальных результата

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ грузовиков, } f^* = 3400 \text{ рублей.}$$

**Задание.** Решите данную задачу методом потенциалов самостоятельно. Начальный базисный план получите тремя разными методами – МСЗУ, МСН и МФ.

## 5.7 Венгерский метод решения задачи о назначениях

Решим задачу оптимизации плана доставки хлеба венгерским методом.

|       | $B_1$    |      | $B_2$    |      | $B_3$    |      | $B_4$    |      |
|-------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|
| $A_1$ | $x_{11}$ | 600  | $x_{12}$ | 1400 | $x_{13}$ | 1000 | $x_{14}$ | 1600 |
|       |          |      |          |      |          |      |          |      |
| $A_2$ | $x_{21}$ | 400  | $x_{22}$ | 800  | $x_{23}$ | 800  | $x_{24}$ | 1000 |
|       |          |      |          |      |          |      |          |      |
| $A_3$ | $x_{31}$ | 1800 | $x_{32}$ | 1400 | $x_{33}$ | 600  | $x_{34}$ | 1600 |
|       |          |      |          |      |          |      |          |      |
| $A_4$ | $x_{41}$ | 800  | $x_{42}$ | 1400 | $x_{43}$ | 400  | $x_{44}$ | 1600 |
|       |          |      |          |      |          |      |          |      |

Шаг 1.1. Получение нулей в каждой строке.

Шаг 1.1.1. Находим наименьшую стоимость в каждой строке:

$$d_1 = \min(c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}) = \min(600, 1400, 1000, 1600) = 600,$$

$$d_2 = \min(c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}) = \min(400, 800, 800, 1000) = 400,$$

$$d_3 = \min(c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}) = \min(1800, 1400, 600, 1600) = 600,$$

$$d_4 = \min(c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}) = \min(800, 1400, 400, 1600) = 400.$$

Вычитаем из каждого столбца соответствующий элемент  $d_i$ :

| Номер хлебо-<br>пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса<br>до розничного магазина ( $j$ ) |      |     |      | $d_i$ |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------|-----|------|-------|
|                                 | 1                                                                           | 2    | 3   | 4    |       |
| 1                               | 0                                                                           | 800  | 400 | 1000 | 600   |
| 2                               | 0                                                                           | 400  | 400 | 600  | 400   |
| 3                               | 1200                                                                        | 800  | 0   | 1000 | 600   |
| 4                               | 400                                                                         | 1000 | 0   | 1200 | 400   |

Шаг 1.1.2. Находим наименьшую стоимость в каждом столбце:

$$d_1 = \min(c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}) = \min(0, 0, 1200, 400) = 0,$$

$$d_2 = \min(c_{12}, c_{22}, c_{32}, c_{42}) = \min(800, 400, 800, 1000) = 400,$$

$$d_3 = \min(c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{43}) = \min(400, 400, 0, 0) = 0,$$

$$d_4 = \min(c_{14}, c_{24}, c_{34}, c_{44}) = \min(1000, 600, 1000, 1200) = 600.$$

Вычитаем из каждой строки соответствующий элемент  $d_i$ :

| Номер хлебо-<br>пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса<br>до розничного магазина ( $j$ ) |     |     |     |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
|                                 | 1                                                                           | 2   | 3   | 4   |
| 1                               | 0                                                                           | 400 | 400 | 400 |
| 2                               | 0                                                                           | 0   | 400 | 0   |
| 3                               | 1200                                                                        | 400 | 0   | 400 |
| 4                               | 400                                                                         | 600 | 0   | 600 |
| $d_i$                           | 0                                                                           | 400 | 0   | 600 |

Шаг 1.2. Пробуем найти оптимальное решение.

В полученной ТТ минимальное число нулей – в 1-й, 3-й и 4-й строке. Выберем, например, 1-ю строку, отметим в ней любой нулевой элемент (он здесь только один,  $c_{11} = 0$ ). Также зачеркиваем все остальные нули в 1-й строке (их больше нет) и в 1-м столбце ( $c_{12} = 0$ ):

| Номер хлебо-<br>пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса<br>до розничного магазина ( $j$ ) |     |     |     |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
|                                 | 1                                                                           | 2   | 3   | 4   |
| 1                               | <span style="border: 1px solid black;">0</span>                             | 400 | 400 | 400 |
| 2                               | <del>0</del>                                                                | 0   | 400 | 0   |
| 3                               | 1200                                                                        | 400 | 0   | 400 |
| 4                               | 400                                                                         | 600 | 0   | 600 |

После этого минимальное число нулей в 3-й и 4-й строке. Выбираем, например, 4-ю строку, отметим в ней любой нулевой элемент (он здесь только один,  $c_{43} = 0$ ). Также зачеркиваем все остальные нули в 4-й строке (их больше нет) и в 3-м столбце ( $c_{33} = 0$ ):

| Номер хлебо-пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса до розничного магазина ( $j$ ) |     |                                                 |     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------|-----|
|                             | 1                                                                        | 2   | 3                                               | 4   |
| 1                           | <span style="border: 1px solid black;">0</span>                          | 400 | 400                                             | 400 |
| 2                           | <del>0</del>                                                             | 0   | 400                                             | 0   |
| 3                           | 1200                                                                     | 400 | <del>0</del>                                    | 400 |
| 4                           | 400                                                                      | 600 | <span style="border: 1px solid black;">0</span> | 600 |

Минимальное число нулей становится во 2-й строке. Отметим в ней любой нулевой элемент (например,  $c_{24} = 0$ ). Также зачеркиваем все остальные нули во 2-й строке ( $c_{22} = 0$ ) и в 4-м столбце (их больше нет):

| Номер хлебо-пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса до розничного магазина ( $j$ ) |              |                                                 |                                                 |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                             | 1                                                                        | 2            | 3                                               | 4                                               |
| 1                           | <span style="border: 1px solid black;">0</span>                          | 400          | 400                                             | 400                                             |
| 2                           | <del>0</del>                                                             | <del>0</del> | 400                                             | <span style="border: 1px solid black;">0</span> |
| 3                           | 1200                                                                     | 400          | <del>0</del>                                    | 400                                             |
| 4                           | 400                                                                      | 600          | <span style="border: 1px solid black;">0</span> | 600                                             |

Так как количество отмеченных в таблице нулей  $3 < n$ , то решение не оптимальное (и в целом недопустимое, т. к. не удовлетворяет ограничениям задачи).

Шаг 1.3. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули.

Отметим все строки, в которых нет ни одного отмеченного нуля (это 3-я строка). Затем в этой строке отметим все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль (3-й столбец). Наконец, отметим все строки, содержащие отмеченные нули в 3-м столбце (4-я строка):

| Номер хлебо-<br>пекарни ( $i$ )                 | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса<br>до розничного магазина ( $j$ ) |              |                                                 |                                                 |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                 | 1                                                                           | 2            | <span style="border: 1px solid black;">3</span> | 4                                               |
| 1                                               | <span style="border: 1px solid black;">0</span>                             | 400          | 400                                             | 400                                             |
| 2                                               | <del>0</del>                                                                | <del>0</del> | 400                                             | <span style="border: 1px solid black;">0</span> |
| <span style="border: 1px solid black;">3</span> | 1200                                                                        | 400          | <del>0</del>                                    | 400                                             |
| <span style="border: 1px solid black;">4</span> | 400                                                                         | 600          | <span style="border: 1px solid black;">0</span> | 600                                             |

Далее в 4-й строке ищем столбцы, содержащие перечеркнутый нуль. Таких столбцов больше нет.

После этого зачеркиваем каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец (строки 1, 2 и столбец 3) с целью провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих по крайней мере один раз все нули:

| Номер хлебо-<br>пекарни ( $i$ )                 | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса<br>до розничного магазина ( $j$ ) |              |                                                 |                                                 |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                 | 1                                                                           | 2            | <span style="border: 1px solid black;">3</span> | 4                                               |
| 1                                               | <span style="border: 1px solid black;">0</span>                             | 400          | 400                                             | 400                                             |
| 2                                               | <del>0</del>                                                                | <del>0</del> | 400                                             | <span style="border: 1px solid black;">0</span> |
| <span style="border: 1px solid black;">3</span> | 1200                                                                        | 400          | <del>0</del>                                    | 400                                             |
| <span style="border: 1px solid black;">4</span> | 400                                                                         | 600          | <span style="border: 1px solid black;">0</span> | 600                                             |

Шаг 1.4. Перестановка некоторых нулей.

Определяем наименьшее число из тех клеток, через которые не проведены прямые (не зачеркнуты), например,  $c_{32} = 400$ .

Это число вычитаем из каждого числа невычеркнутых столбцов и прибавляем к каждому числу вычеркнутых строк в вычеркнутых столбцах. То есть вычитаем 400 из клеток (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3) и (4,4) и прибавляем 400 к клеткам (1,3) и (2,3):

| Номер хлебо-пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса до розничного магазина ( $j$ ) |     |     |     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
|                             | 1                                                                        | 2   | 3   | 4   |
| 1                           | 0                                                                        | 400 | 800 | 400 |
| 2                           | 0                                                                        | 0   | 800 | 0   |
| 3                           | 800                                                                      | 0   | 0   | 0   |
| 4                           | 0                                                                        | 200 | 0   | 200 |

Возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Пробуем найти оптимальное решение.

В полученной ТТ минимальное число нулей – в 1-й строке. Отметим в ней любой нулевой элемент (он здесь только один,  $c_{11} = 0$ ). Также зачеркиваем все остальные нули в 1-й строке (их больше нет) и в 1-м столбце ( $c_{12} = 0$  и  $c_{14} = 0$ ):

| Номер хлебо-пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса до розничного магазина ( $j$ ) |     |     |     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
|                             | 1                                                                        | 2   | 3   | 4   |
| 1                           | <span style="border: 1px solid black;">0</span>                          | 400 | 800 | 400 |
| 2                           | <del>0</del>                                                             | 0   | 800 | 0   |
| 3                           | 800                                                                      | 0   | 0   | 0   |
| 4                           | <del>0</del>                                                             | 200 | 0   | 200 |

Теперь минимальное число нулей в 4-й строке. Отметим в ней любой нулевой элемент (он здесь только один,  $c_{43} = 0$ ). Также зачеркиваем все остальные нули в 4-й строке (их больше нет) и в 3-м столбце ( $c_{33} = 0$ ):

| Номер хлебо-пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса до розничного магазина ( $j$ ) |     |              |     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----|--------------|-----|
|                             | 1                                                                        | 2   | 3            | 4   |
| 1                           | <u>0</u>                                                                 | 400 | 800          | 400 |
| 2                           | <del>0</del>                                                             | 0   | 800          | 0   |
| 3                           | 800                                                                      | 0   | <del>0</del> | 0   |
| 4                           | <del>0</del>                                                             | 200 | <u>0</u>     | 200 |

Теперь минимальное число нулей во 2-й и 3-й строке. Выберем, например, 2-ю строку, и отметим в ней любой нулевой элемент, например,  $c_{22} = 0$ . Также зачеркиваем все остальные нули во 2-й строке ( $c_{24} = 0$ ) и во 2-м столбце ( $c_{32} = 0$ ):

| Номер хлебо-пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса до розничного магазина ( $j$ ) |              |              |              |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|
|                             | 1                                                                        | 2            | 3            | 4            |
| 1                           | <u>0</u>                                                                 | 400          | 800          | 400          |
| 2                           | <del>0</del>                                                             | <u>0</u>     | 800          | <del>0</del> |
| 3                           | 800                                                                      | <del>0</del> | <del>0</del> | 0            |
| 4                           | <del>0</del>                                                             | 200          | <u>0</u>     | 200          |

Теперь минимальное число нулей в 3-й строке. Отметим в ней любой нулевой элемент (он здесь только один,  $c_{34} = 0$ ). Также зачеркиваем все остальные нули в 3-й строке (их больше нет) и в 4-м столбце (их тоже нет):

| Номер хлебо-<br>пекарни ( $i$ ) | Затраты ( $c_{ij}$ ) на организацию рейса<br>до розничного магазина ( $j$ ) |     |     |     |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
|                                 | 1                                                                           | 2   | 3   | 4   |
| 1                               | 0                                                                           | 400 | 800 | 400 |
| 2                               | ∅                                                                           | 0   | 800 | ∅   |
| 3                               | 800                                                                         | ∅   | ∅   | 0   |
| 4                               | ∅                                                                           | 200 | 0   | 200 |

Количество отмеченных в таблице нулей  $4 = n$ . Значит, назначение является полным, а решение оптимальным, то есть

$$x_{11}^* = x_{22}^* = x_{34}^* = x_{43}^* = 1 \text{ грузовик,}$$

$$f^* = c_{11} + c_{22} + c_{34} + c_{43} = 600 + 800 + 1600 + 400 = 3400 \text{ рублей.}$$

В данной задаче можно построить еще один оптимальный план, если на шаге 2.2 выбрать во второй строке элемент  $c_{24}$ , а не  $c_{22}$ . Тогда получили бы решение

$$x_{11}^* = x_{24}^* = x_{32}^* = x_{43}^* = 1 \text{ грузовик,}$$

$$f^* = c_{11} + c_{24} + c_{32} + c_{43} = 600 + 1000 + 1400 + 400 = 3400 \text{ рублей.}$$

Ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ грузовиков, } f^* = 3400 \text{ рублей.}$$

## 6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИЛУЧШЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ПРИЕМНОЙ АНТЕННЫ

### 6.1 Постановка задачи

Пусть в южной оконечности озера, форма которого напоминает параболу  $y = x^2$  (как в рассмотренной ранее задаче проектирования канала наименьшей длины), т. е. в точке  $O$ , находится населенный пункт. В точке  $A$ , расположенной на 6 км восточнее и 8 км севернее, расположена телевизионная вышка мощностью 1 кВт (см. рис. 6.1).

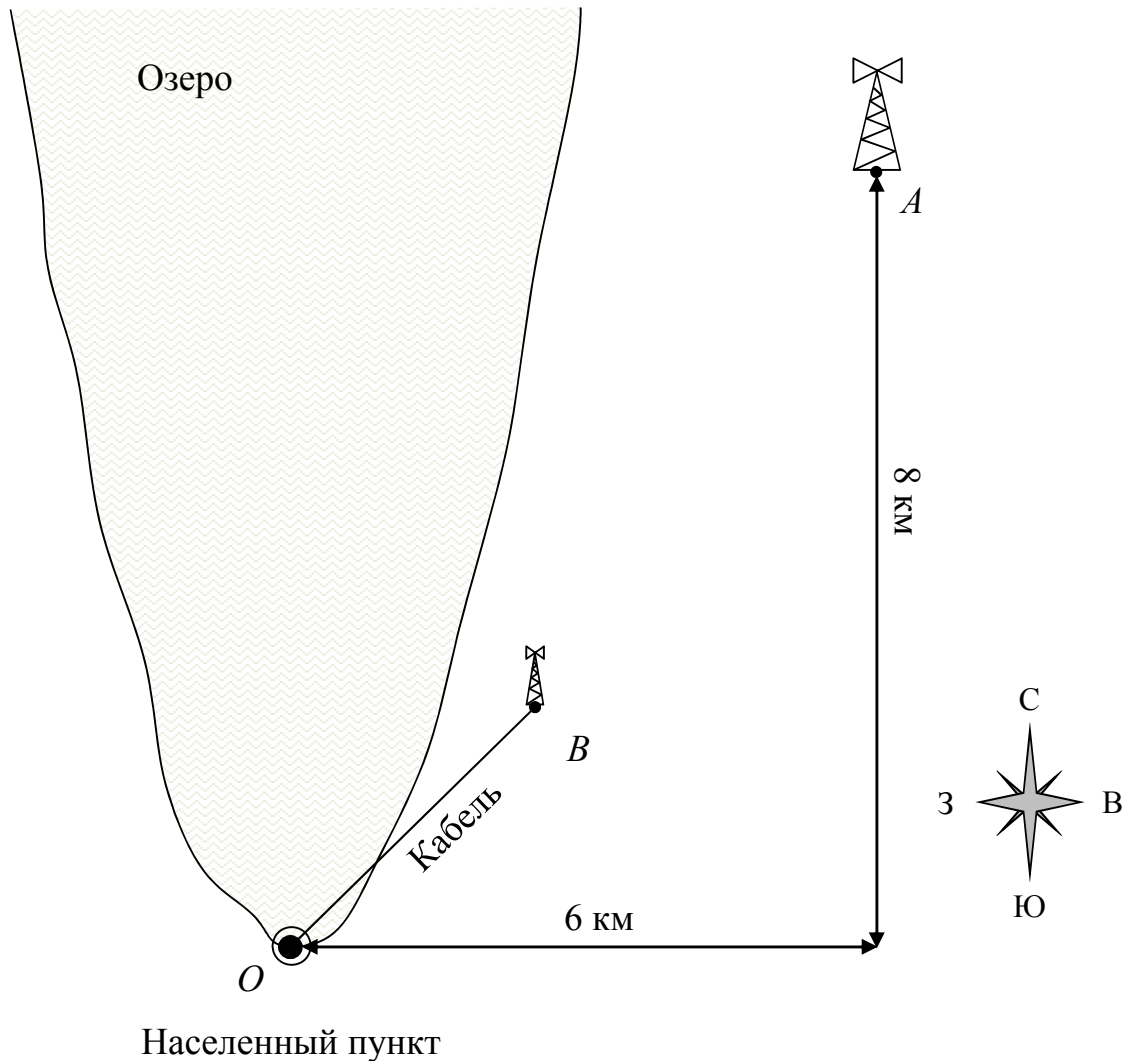


Рис. 6.1 – Графическое пояснение к задаче

Интенсивность излучения вышки уменьшается пропорционально квадрату расстояния по закону

$$E(x, y) = \frac{E_0}{1 + (x - a)^2 + (y - b)^2},$$

где  $E_0 = 1000$  Вт – начальная мощность сигнала,  $(x, y)$  – координаты точки приема сигнала,  $(a, b)$  – координаты вышки ( $a = 6$  км,  $b = 8$  км).

Таким образом, в населенном пункте интенсивность приходящего от вышки излучения составляет всего

$$E(0, 0) = \frac{1000}{1 + 6^2 + 8^2} \approx 9,9 \text{ Вт/м}^2,$$

этого слишком мало для устойчивого приема телевизионного сигнала.

Поэтому было решено установить ближе к вышке (в некоторой точке  $B$ ) приемную антенну и передавать от нее телевизионный сигнал по кабелю. Очевидно, что антенна может быть установлена только на суше, а сам кабель можно протянуть как по суше, так и по дну озера. Имеющиеся запасы кабеля составляют  $L = 2$  км. В каком месте следует расположить приемную антенну для получения сигнала максимальной интенсивности?

Выполним анализ задачи. Очевидно, что целевой функцией будет зависимость  $E(B)$ , определяющая интенсивность сигнала в точке  $B$ :

$$E(B) \rightarrow \max.$$

Чтобы перейти от максимизации к минимизации, необходимо изменить знак ЦФ:

$$E(B) = -\frac{E_0}{1 + (B_x - a)^2 + (B_y - b)^2} \rightarrow \min.$$

Также очевидно, что точка  $B$  будет располагаться в первом квадранте, между вышкой и населенным пунктом, поэтому добавлять в задачу ограничения  $B_x \geq 0$  и  $B_y \geq 0$  нет необходимости. Чем она ближе к вышке,

тем лучше, но мы ограничены длиной кабеля. Отсюда вытекает первое ограничение задачи – расстояние между населенным пунктом и приемной антенной не может превышать  $L$ , т. е.

$$\sqrt{(O_x - B_x)^2 + (O_y - B_y)^2} \leq L.$$

Получается, что точка  $B$  должна лежать в пределах окружности с центром в точке  $O$  и радиусом 2 км.

Второе ограничение задачи вытекает из того факта, что вышка может располагаться только на суше. Береговая линия озера описывается функциональной зависимостью  $y = (x - O_x)^2 + O_y$ , поэтому

$$B_y \leq (B_x - O_x)^2 + O_y.$$

Если принять местоположение населенного пункта за начало координат, эти соотношения можно переписать в виде

$$B_x^2 + B_y^2 \leq L^2,$$

$$B_y \leq B_x^2.$$

В качестве неизвестных задачи удобно принять координаты точки  $B$ :  $x_1 = B_x$ ,  $x_2 = B_y$ .

Область допустимых решений (ОДР) задачи изображена на рисунке 6.2 (отмечена штриховкой).

Окончательно получаем следующую ЗНП: минимизировать ЦФ

$$f(x) = -\frac{1000}{1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2}$$

при ограничениях

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4,$$

$$x_2 \leq x_1^2.$$

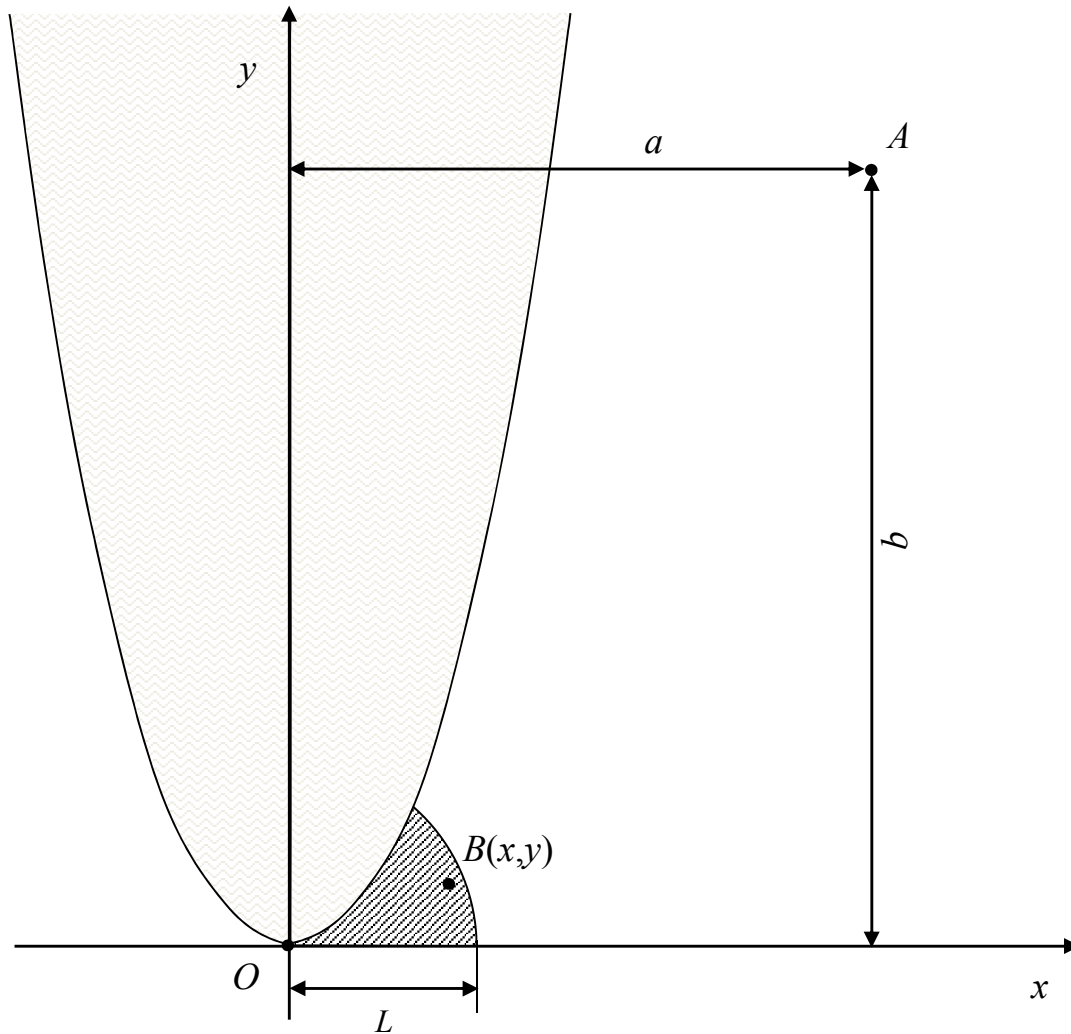


Рис. 6.2 – Область допустимых решений задачи

В данной задаче можно не максимизировать интенсивность принимаемого излучения, а минимизировать расстояние от приемной антенны до вышки, т. е. принять

$$f(x) = \sqrt{1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2} \rightarrow \min.$$

Или, как уже было показано выше, минимизировать не само расстояние, а его квадрат, что упростит ЦФ:

$$f(x) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min. \quad (6.1)$$

Обычно ограничения-неравенства принято записывать в виде  $g(x) \geq 0$ , таким образом

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \quad (6.2)$$

$$g_2(x) = x_1^2 - x_2 \geq 0. \quad (6.3)$$

Не все методы решения ЗНП предназначены для решения задач с ограничениями такого вида. Поэтому ниже будут предложены другие варианты ограничений.

Сразу определим вектор-градиенты ЦФ и ограничений:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 12 \\ 2x_2 - 16 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотренная задача относится к ЗНП с ограничениями-неравенствами. Найти проекцию точки на ОДР сложной формы – нетривиальная задача. Поэтому в методах, подразумевающих поиск таких проекций, будем использовать только одно ограничение вида (6.2), как если бы озера не было. Найти проекцию точки на окружность достаточно просто.

Как будет показано далее, решение задачи (6.1)–(6.3) не изменится, если ее ограничения заменить равенствами. Поэтому в методах, рассчитанных на решение ЗНП с ограничениями-равенствами будем использовать ограничение

$$h_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad (6.4)$$

и/или

$$h_2(x) = x_1^2 - x_2 = 0. \quad (6.5)$$

В задачах, рассчитанных на линейные ограничения, будем использовать ограничение

$$g(x) = 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \quad (6.6)$$

а если в методе требуются условия неотрицательности переменных, то дополнительно еще ограничения

$$x_1 \geq 0, \quad (6.7)$$

$$x_2 \geq 0, \quad (6.8)$$

т. е. из задачи убираем озеро, а приемная антенна будет располагаться не в радиусе 2 км от населенного пункта, а в пределах треугольной области (рис. 6.3). Например, можно положить, что это берег реки или канала и техническая возможность перенести антенну на другой берег отсутствует.

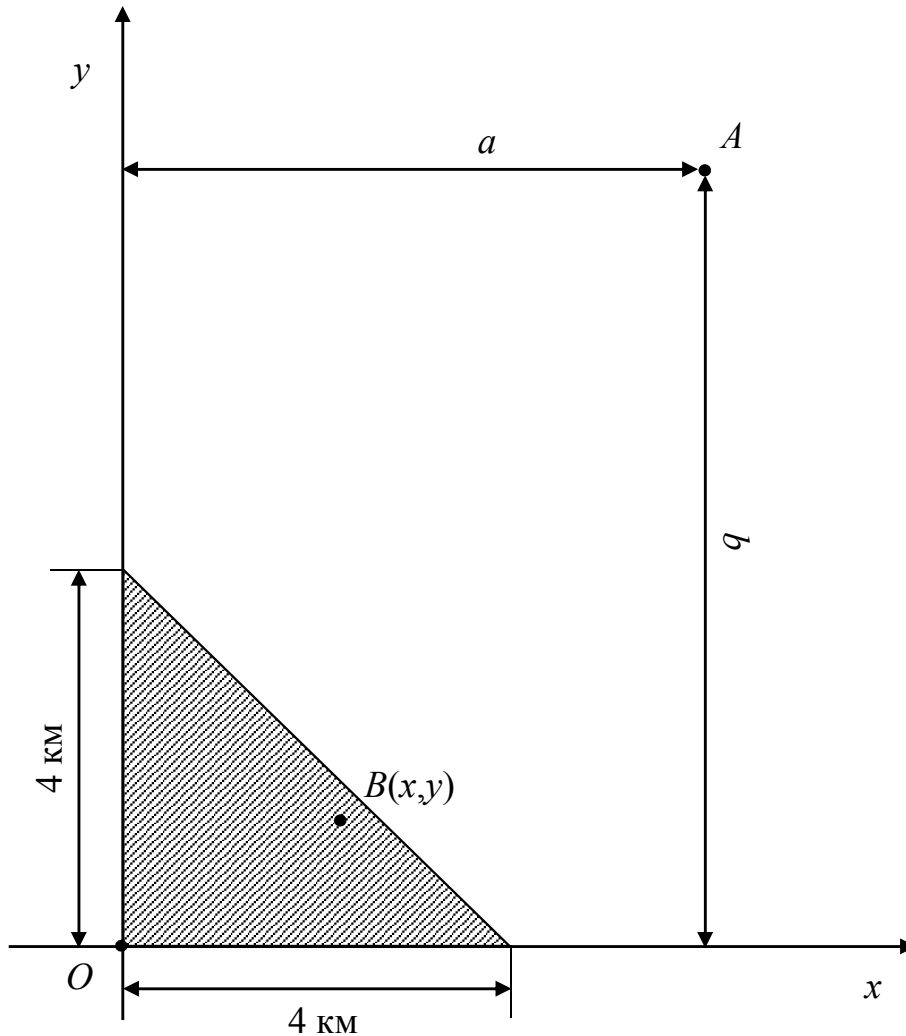


Рис. 6.3 – ОДР задачи с линейными ограничениями

Для задач, где ОДР представляет собой прямоугольник, зададим ограничения вида (рис. 6.4):

$$0 \leq x_1 \leq 10, \quad 0 \leq x_2 \leq 2. \quad (6.9)$$

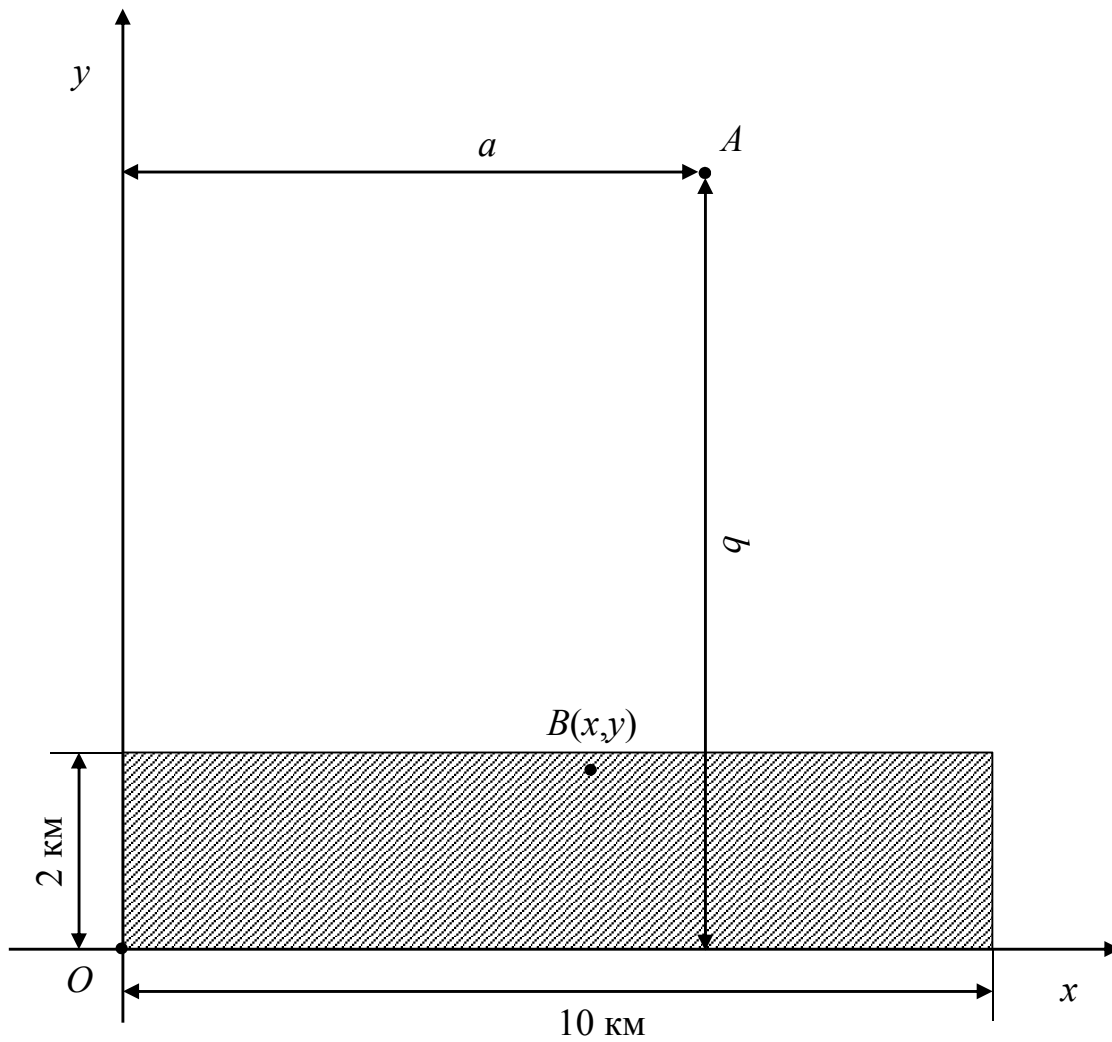


Рис. 6.4 – Задача с ОДР в форме прямоугольника

Данные ограничения также можно трактовать как невозможность перенести антенну через водоем, железную дорогу и т. п.

## 6.2 Задачи с ограничениями в виде равенств

### 6.2.1 Метод замены переменных

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с ограничениями-равенствами:

$$f(x) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min,$$

$$h_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

$$h_2(x) = x_1^2 - x_2 = 0.$$

Шаг 1. Так как в данном случае  $n = m = 2$ , то вектор  $y = x$ , а вектор  $u$  остается пустым.

Шаг 2. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4 - y_1^2 - y_2^2 = 0, \\ y_1^2 - y_2 = 0, \end{cases}$$

и решаем ее. Из второго уравнения  $y_1^2 = y_2$  подставляем в первое уравнение:

$$4 - y_2 - y_2^2 = 0 \Rightarrow y_2^{(1)} \approx 1,562, \quad y_2^{(2)} \approx 2,562.$$

Тогда  $y_1^{(1)} \approx \pm 1,25$ ,  $y_1^{(2)} \approx \pm 1,6$ . Таким образом, получили четыре решения системы:

$$y^{(1)} \approx \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,562 \end{pmatrix}, \quad y^{(2)} \approx \begin{pmatrix} -1,25 \\ 1,562 \end{pmatrix}, \quad y^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 1,6 \\ 2,562 \end{pmatrix}, \quad y^{(4)} \approx \begin{pmatrix} -1,6 \\ 2,562 \end{pmatrix}.$$

Так как  $n = m$ , переходим на шаг 4.

Шаг 4. Очевидно, что точки  $y^{(2)}$  и  $y^{(4)}$  не могут быть оптимальными, т. к. выходят за пределы первого квадранта. Но это необходимо показать математически. Необходимые и достаточные условия оптимальности решения ЗНП будут изучены ниже, а пока можно проверить, какие из точек не удовлетворяют ограничениям – они точно не будут являться решением задачи:

$$\begin{aligned} h_1(y^{(1)}) &= 0, \quad h_2(y^{(1)}) = 0, \\ h_1(y^{(2)}) &= 0, \quad h_2(y^{(2)}) = 0, \\ h_1(y^{(3)}) &= 0, \quad h_2(y^{(3)}) \approx -5,123 \neq 0, \\ h_1(y^{(4)}) &= 0, \quad h_2(y^{(4)}) \approx -5,123 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, точки  $y^{(3)}$  и  $y^{(4)}$  не являются решениями задачи.

Вычислим значение ЦФ в двух оставшихся точках:

$$f(y^{(1)}) \approx 65,02, \quad f(y^{(2)}) \approx 95,011.$$

Минимальный квадрат расстояния до вышки в точке  $y^{(1)}$ , таким образом,

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,562 \end{pmatrix}, f^* \approx 65,02.$$

Данный критерий не является надежным, т. к. в точке локального максимума или в седловой точке значение ЦФ может оказаться меньше, чем в точке локального минимума. Поэтому на практике следует использовать специальные критерии оптимальности, которые мы рассмотрим далее.

Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 8,063$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,38 \text{ Вт/м}^2.$$

Также решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с одним ограничением:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

1. В данном случае  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $y = x_1$ ,  $u = x_2$ ,  $x = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$ .

2. В системе будет только одно уравнение:

$$4 - y^2 - u^2 = 0.$$

Решаем ее относительно независимой переменной  $u$ :

$$y = \Psi(u) = \pm \sqrt{4 - u^2}, \quad u \in [-2, 2].$$

3. Получили две задачи безусловной оптимизации:

$$F_1(u) = 1 + \left( \sqrt{4 - u^2} - 6 \right)^2 + (u - 8)^2 \rightarrow \min,$$

$$F_2(u) = 1 + \left( -\sqrt{4 - u^2} - 6 \right)^2 + (u - 8)^2 \rightarrow \min.$$

Минимизируем только функцию  $F_1(x)$ , т. к. выше было установлено, что точки с отрицательными координатами не являются решением задачи:

$$\begin{aligned}\frac{dF_1(u)}{du} &= -\frac{2u(\sqrt{4-u^2}-6)}{\sqrt{4-u^2}} + 2(u-8) = \frac{-2u(\sqrt{4-u^2}-6) + 2(u-8)\sqrt{4-u^2}}{\sqrt{4-u^2}} = \\ &= \frac{12u - 16\sqrt{4-u^2}}{\sqrt{4-u^2}} = 0, \quad u \in [-2, 2].\end{aligned}$$

Соответственно,  $\sqrt{4-u^2} \neq 0 \Rightarrow u \neq \pm 2 \Rightarrow u \in (-2, 2)$ , и далее в уравнении можно оставить только числитель:

$$12u - 16\sqrt{4-u^2} = 0 \Rightarrow 12u = 16\sqrt{4-u^2}, \quad u \in (-2, 2).$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, при этом получим дополнительное ограничение  $u \geq 0$ , т. к. корень не может быть отрицательным:

$$\begin{aligned}144u^2 &= 256(4-u^2), \quad u \in [0, 2) \Rightarrow \\ 400u^2 &= 1024 \Rightarrow u^2 = 2,56.\end{aligned}$$

В диапазоне  $u \in [0, 2)$  существует только одно решение  $u = 1,6$ . Так как  $y = \sqrt{4-u^2}$ , то получаем  $y = 1,2$ .

4. Была получена только одна точка, поэтому ее и принимаем за оптимальную:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}, \quad f^* = 65.$$

Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 8,062$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,39 \text{ Вт/м}^2.$$

### 6.2.2 Метод множителей Лагранжа

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с одним ограничением:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Шаг 1. Соответствующая задача оптимизации без ограничений записывается в следующем виде:

$$L(x, \lambda) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + \lambda \cdot (4 - x_1^2 - x_2^2) \rightarrow \min.$$

Шаг 2. Находим частные производные и составляем расширенную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 6) - 2\lambda x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 8) - 2\lambda x_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Шаг 3. Решаем полученную систему. Из первого уравнения получаем

$$2x_1 - 2\lambda x_1 - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{12}{2 - 2\lambda} = \frac{6}{1 - \lambda},$$

из второго уравнения

$$2x_2 - 2\lambda x_2 - 16 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{16}{2 - 2\lambda} = \frac{8}{1 - \lambda}.$$

Подставляем в третье уравнение и решаем его относительно  $\lambda$ :

$$4 - \left(\frac{6}{1 - \lambda}\right)^2 - \left(\frac{8}{1 - \lambda}\right)^2 = \frac{4(1 - \lambda)^2 - 36 - 64}{(1 - \lambda)^2} = 0.$$

Следовательно,  $\lambda \neq 1$ , и далее знаменатель отбрасываем:

$$4(1 - \lambda)^2 - 36 - 64 = 0 \Rightarrow 4(1 - \lambda)^2 = 100 \Rightarrow \lambda^{(1)} = -4, \lambda^{(2)} = 6.$$

Соответственно,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{6}{1-\lambda^{(1)}} \\ \frac{8}{1-\lambda^{(1)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{6}{1-\lambda^{(2)}} \\ \frac{8}{1-\lambda^{(2)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ -1,6 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Для того чтобы проверить, соответствует ли стационарная точка  $x^*$  минимуму, вычислим матрицу Гессе функции  $L(x, \lambda)$ , рассматриваемой как функции только от аргумента  $x$ :

$$H_L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{pmatrix}.$$

В точке  $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$  имеем

$$H_L(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

т. е. гессиан положительно определен. Это означает, что в окрестности точки  $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$  функция Лагранжа  $L(x, \lambda)$  является выпуклой. Следовательно, координаты  $x^* = (1, 2; 1, 6)^T$  определяют точку минимума.

В точке  $(x^{(2)}, \lambda^{(2)})$  имеем

$$H_L(x^{(2)}, \lambda^{(2)}) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

т. е. гессиан отрицательно определен. Это означает, что в окрестности точки  $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$  функция Лагранжа  $L(x, \lambda)$  является вогнутой. Следовательно, координаты  $x^* = (-1, 2; -1, 6)^T$  определяют точку максимума.

Таким образом, глобальный минимум достигается в точке  $x^*$  с координатами  $x_1^* = 1, 2$  и  $x_2^* = 1, 6$ . Значение ЦФ  $f^* = 65$ . Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,39 \text{ Вт/м}^2.$$

### 6.3 Необходимые и достаточные условия оптимальности

Рассмотрим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с ограничениями-неравенствами:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g_1(x) &= 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ g_2(x) &= x_1^2 - x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Находя точки, в которых выполняются необходимые условия (НУ) и достаточные условия (ДУ) оптимальности, можно найти решение задачи.

#### 6.3.1 Необходимые и достаточные условия оптимальности задач с ограничениями общего вида

Проверим выполнение условий Куна – Таккера. Вычислим матрицы вторых производных целевой функции и функций ограничений.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 12 \\ 2x_2 - 16 \end{pmatrix}, \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица Гессе  $H_f$  положительно определена при всех значениях  $x$ , следовательно  $f(x)$  – выпуклая функция.

Матрица Гессе для функции  $g_1(x)$  имеет вид:

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}, \quad H_{g_1}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $H_{g_1}$  отрицательно определена, следовательно, функция  $g_1(x)$  является вогнутой.

Матрица Гессе для функции  $g_2(x)$  имеет вид:

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $H_{g_2}$  положительно полуопределена, следовательно, функция  $g_2(x)$  является выпуклой.

Ограничений-равенств в задаче нет. Так как условия (б) теоремы не выполнены, следовательно, необходимые и достаточные условия оптимальности для данной задачи не выполняются.

Тем не менее, попробуем найти точку оптимума  $x^*$ . Уравнение (6.28, [1]) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} - \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2.$$

При  $j = 1$  и  $j = 2$ , соответственно, можно получить следующие выражения:

$$j = 1: \quad 2x_1 - 12 + 2x_1\mu_1 - 2x_1\mu_2 = 0;$$

$$j = 2: \quad 2x_2 - 16 + 2x_2\mu_1 + \mu_2 = 0.$$

Таким образом, условия Куна – Таккера (6.28–6.30, [1]) для нашего примера имеют следующий вид:

$$2x_1 - 12 + 2x_1\mu_1 - 2x_1\mu_2 = 0,$$

$$2x_2 - 16 + 2x_2\mu_1 + \mu_2 = 0,$$

$$\mu_1(4 - x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

$$\mu_2(x_1^2 - x_2) = 0,$$

$$\mu_{1,2} \geq 0.$$

Из четвертого уравнения находим:  $\mu_2 = 0$  (т. е. второе ограничение не является активным) или  $x_1^2 - x_2 = 0$  (является активным). Рассмотрим оба случая.

1. Пусть  $\mu_2 = 0$ . Тогда

$$2x_1(1 + \mu_1) - 12 = 0,$$

$$2x_2(1 + \mu_1) - 16 = 0,$$

$$\mu_1(4 - x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

$$\mu_1 \geq 0.$$

Из первых двух уравнений находим

$$x_1 = \frac{6}{1 + \mu_1}, \quad x_2 = \frac{8}{1 + \mu_1},$$

подставляем в третье уравнение:

$$\mu_1 \left( 4 - \left( \frac{6}{1 + \mu_1} \right)^2 - \left( \frac{8}{1 + \mu_1} \right)^2 \right) = 0,$$

получаем еще два варианта решения:

1.1. Полагаем  $\mu_1 = 0$  (т. е. первое ограничение также не является активным). В этом случае мы решаем задачу так, как будто у нее нет ограничений. Очевидно, что решением будет точка, в которой расположена вышка, т. к. в ней уровень сигнала максимальный. Проверим это:

$$\mu_1^{(1)} = 0, \quad \mu_2^{(1)} = 0, \quad x_1^{(1)} = \frac{6}{1 + 0} = 6, \quad x_2^{(1)} = \frac{8}{1 + 0} = 8.$$

Также очевидно, что эта точка не является решением, т. к. не удовлетворяет ограничениям задачи.

$$1.2. \text{ Полагаем } 4 - \left( \frac{6}{1 + \mu_1} \right)^2 - \left( \frac{8}{1 + \mu_1} \right)^2 = 0, \text{ откуда } \frac{4(1 + \mu_1)^2 - 36 - 48}{(1 + \mu_1)^2} = 0.$$

Так как по условию  $\mu_1 \geq 0$ , знаменатель не может быть равен нулю и его можно сократить:

$$4(1 + \mu_1)^2 - 36 - 48 = 0 \Rightarrow 1 + \mu_1 = \pm 5.$$

Так как  $\mu_1 \geq 0$ , выбираем решение  $\mu_1 = 4$ , тогда

$$\mu_1^{(2)} = 4, \quad \mu_2^{(2)} = 0, \quad x_1^{(2)} = \frac{6}{1 + 4} = 1,2, \quad x_2^{(2)} = \frac{8}{1 + 4} = 1,6.$$

Данная точка также не удовлетворяет ограничениям задачи. Отсюда можно сделать вывод, что второе ограничение в точке оптимума должно быть активным.

2. Пусть  $x_1^2 - x_2 = 0$ . Тогда  $x_2 = x_1^2$ , получаем систему уравнений

$$2x_1 - 12 + 2x_1\mu_1 - 2x_1\mu_2 = 0,$$

$$2x_1^2 - 16 + 2x_1^2\mu_1 + \mu_2 = 0,$$

$$\mu_1(4 - x_1^2 - x_1^4) = 0,$$

$$\mu_{1,2} \geq 0.$$

Из третьего уравнения следует два варианта решения – либо  $\mu_1 = 0$  (т. е. первое ограничение не является активным, но при этом, в отличие от предыдущего случая, второе ограничение активно), либо  $4 - x_1^2 - x_1^4 = 0$ .

2.1. Полагаем  $\mu_1 = 0$ , тогда

$$2x_1(1 - \mu_2) - 12 = 0,$$

$$2x_1^2 - 16 + \mu_2 = 0,$$

$$\mu_2 \geq 0.$$

Из второго уравнения  $\mu_2 = -2x_1^2 + 16$ , подставляем в первое уравнение:  $2x_1(1 + 2x_1^2 - 16) - 12 = 4x_1^3 - 30x_1 - 12 = 0$ . Решая данное уравнение численно, находим лишь один положительный корень  $x_1^{(3)} \approx 2,92$ . Тогда  $x_2^{(3)} \approx 2,92^2 \approx 8,53$ . При этом  $\mu_2^{(3)} \approx -2 \cdot 8,53 + 16 \approx -1,05$ . Полученное решение

$$\mu_1^{(3)} = 0, \mu_2^{(3)} \approx -1,05, x_1^{(3)} \approx 2,92, x_2^{(3)} \approx 8,53.$$

является недопустимым, т. к.  $\mu_2 < 0$ . Отсюда можно сделать вывод, что первое ограничение в точке оптимума также должно быть активным.

2.2. Полагаем  $4 - x_1^2 - x_1^4 = 0$ , т. е. получили биквадратное уравнение  $4 - z - z^2 = 0$ , где  $z = x_1^2$ . Соответственно,  $z \geq 0$ . У данного уравнения только один положительный корень, мы его находили ранее –  $z \approx 1,562$ . Соответственно,  $x_1^{(4)} = \sqrt{z} \approx 1,25$ ,  $x_2^{(4)} = z \approx 1,562$ . Найдем  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1,25 - 12 + 2\mu_1 \cdot 1,25 - 2\mu_2 \cdot 1,25 &= 0, \\ 2 \cdot 1,562 - 16 + 2\mu_1 \cdot 1,562 + \mu_2 &= 0, \\ \mu_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Решением данной СЛАУ является  $\mu_1^{(4)} \approx 4,045$ ,  $\mu_2^{(4)} \approx 0,244$ . Так как оба параметра положительны, а точка  $x^{(4)}$  удовлетворяет ограничениям задачи, то решение  $(x^{(4)}, \mu^{(4)})$  потенциально является оптимальным. Но т. к. условия оптимальности не выполняются, утверждать это пока нельзя – следует использовать критерий оптимальности второго порядка.

### 6.3.2 Необходимые и достаточные условия оптимальности второго порядка

Выше из условий Куна – Таккера была получена подозрительная на экстремум точка  $\bar{x}_1 \approx 1,25$ ,  $\bar{x}_2 \approx 1,562$ ,  $\bar{\mu}_1 \approx 4,045$ ,  $\bar{\mu}_2 \approx 0,244$ .

Оба ограничения являются активными, т. е.  $g_1(\bar{x}) = 0$  и  $g_2(\bar{x}) = 0$ , поэтому  $I = \{1, 2\}$ . Найдем градиенты ограничений в точке  $\bar{x}$ :

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2\bar{x}_1 \\ -2\bar{x}_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2,499 \\ -3,123 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_1 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,499 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ограничений-равенств в задаче нет, поэтому проверять линейную независимость векторов  $\nabla g_i(\bar{x})$  и  $\nabla h_l(\bar{x})$  не требуется. Равенство  $\nabla g_1(\bar{x})^T y = 0$  будет выполняться для любого вектора

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ -\frac{2,499}{3,123} y_1 \end{pmatrix},$$

а равенство  $\nabla g_2(\bar{x})^T y = 0$  – для любого вектора

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2,499 y_1 \end{pmatrix}.$$

Запишем функцию  $L(x, \mu)$  (параметр  $\lambda$  не требуется, т. к. ограничения-равенства отсутствуют) и ее гессиан:

$$L(x, \mu) = f(x) - \mu_1 g_1(x) - \mu_2 g_2(x) =$$

$$1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 - \mu_1 (4 - x_1^2 - x_2^2) - \mu_2 (x_1^2 - x_2),$$

$$H_L(x, \mu) = \begin{pmatrix} 2 + 2\mu_1 - 2\mu_2 & 0 \\ 0 & 2 + 2\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Найдем гессиан в точке  $(\bar{x}, \bar{\mu})$ :

$$H_L(\bar{x}, \bar{\mu}) \approx \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot 4,045 - 2 \cdot 0,244 & 0 \\ 0 & 2 + 2 \cdot 4,045 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 9,603 & 0 \\ 0 & 10,09 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $H_L$  положительно определена в любой точке  $(\bar{x}, \bar{\mu})$ , поэтому для любого вектора  $y \neq 0$  имеем  $y^T H_L y > 0$ , в том числе и для найденных выше векторов. Таким образом, точка  $(x^*, \mu^*) = (1,25; 1,562; 4,045; 0,244)^T$  является точкой строгого локального минимума.

Ответ:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,562 \end{pmatrix}, \quad f^* \approx 65,02.$$

Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 8,063$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,38 \text{ Вт/м}^2.$$

Еще раз обратим внимание, что в точке  $x^*$  оба ограничения являются активными. Это означает, что точка оптимума лежит на поверхности обоих ограничений, т. е. находится на пересечении береговой линии озера и на линии окружности радиусом  $L = 2$  км с центром в населенном пункте. Следовательно, если в данной задаче ограничения заменить равенствами, ее решение не изменится. Но это не означает, что решение любой задачи

с ограничениями-равенствами будет эквивалентно ее решению с ограничениями-неравенствами. Например, если переместить телевизионную вышку в точку  $(6, 0)$ , то решение задачи с ограничениями-равенствами не изменится, т. к. оптимальная точка обязана будет находиться на пересечении ограничений. А в задаче с ограничениями-неравенствами оптимальной станет точка  $x^* = (2, 0)^T$ , т. к. именно она в ОДР будет ближе всего к вышке.

## 6.4 Методы штрафов

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с одним ограничением (6.6):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 4 - x_1 - x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

### 6.4.1 Квадратичный штраф

Преобразуем ограничение (6.6) в равенство:

$$h(x) = 4 - x_1 - x_2 = 0.$$

Используем квадратичный штраф. Введем штрафную функцию (ШФ) вида

$$P(x, R) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + R \cdot (4 - x_1 - x_2)^2.$$

Запишем уравнения, определяющие стационарную точку функции  $P(x, R)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 6) - 2R(4 - x_1 - x_2) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 8) - 2R(4 - x_1 - x_2) = 0. \end{aligned}$$

Выразим из первого уравнения

$$2R(4 - x_1 - x_2) = 2(x_1 - 6)$$

и подставим во второе уравнение:

$$2(x_2 - 8) - 2(x_1 - 6) = 2x_2 - 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 + 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2R(4 - x_1 - (x_1 + 2)) &= 2(x_1 - 6) \Rightarrow R(2 - 2x_1) = x_1 - 6 \Rightarrow \\ 2Rx_1 + x_1 - 2R - 6 &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2R + 6}{2R + 1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим

$$x_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2R + 6}{2R + 1} = 1.$$

Соответственно,  $x_2 = x_1 + 2 = 3$ . Таким образом, метод сходится к точке  $x^* = (1; 3)^T$  и  $f^* = 51$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 7,141$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 19,61 \text{ Вт/м}^2.$$

Мы нашли решение задачи аналитически, как и во всех предыдущих случаях. Однако методы штрафов позволяют решать ЗНП численно. Рассмотрим, как это происходит. В таблице 6.1 приведены координаты стационарных точек ШФ  $P(x, R)$  для различных значений параметра  $R$ .

Таблица 6.1 – Стационарные точки квадратичного штрафа

| $R$      | $x_1^*; x_2^*$ | $P(x, R)$ | $f(x)$ | $h(x)$ |
|----------|----------------|-----------|--------|--------|
| 0        | 6; 8           | 1         | 1      | -10    |
| 0,1      | 5,167; 7,167   | 9,333     | 2,389  | -8,333 |
| 1        | 2,667; 4,667   | 34,33     | 23,22  | -3,333 |
| 10       | 1,238; 3,238   | 48,62     | 46,35  | -0,476 |
| 100      | 1,025; 3,025   | 50,75     | 50,50  | -0,050 |
| $\infty$ | 1; 3           | 51        | 51     | 0      |

На рисунке 6.5 изображена ЦФ и ограничение задачи. В точке  $x'$  находится безусловный минимум задачи (без учета ограничения), в точке  $x^*$  – минимум ШФ и оптимальное решение задачи.

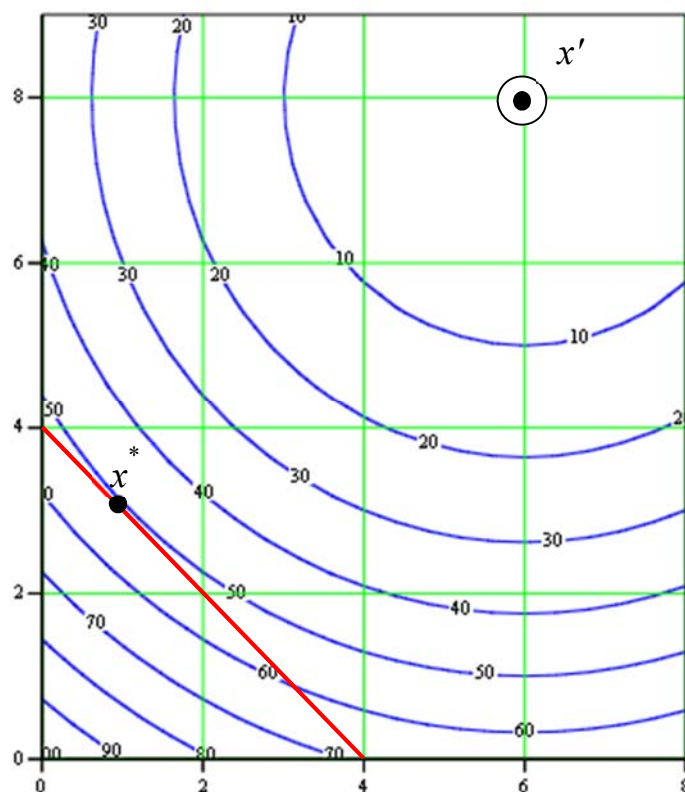


Рис. 6.5 – Линии уровня ЦФ

Линии уровня функции  $P(x, R)$  при  $R \rightarrow 0$  сближаются с линиями уровня функции  $f(x)$ , а при  $R = 0$  совпадают с ними. При  $R = 1$  штрафная функция имеет вид (рис. 6.6)

$$P(x, R) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + (4 - x_1 - x_2)^2.$$

Минимум ШФ находится в точке  $(2,667; 4,667)^T$ .

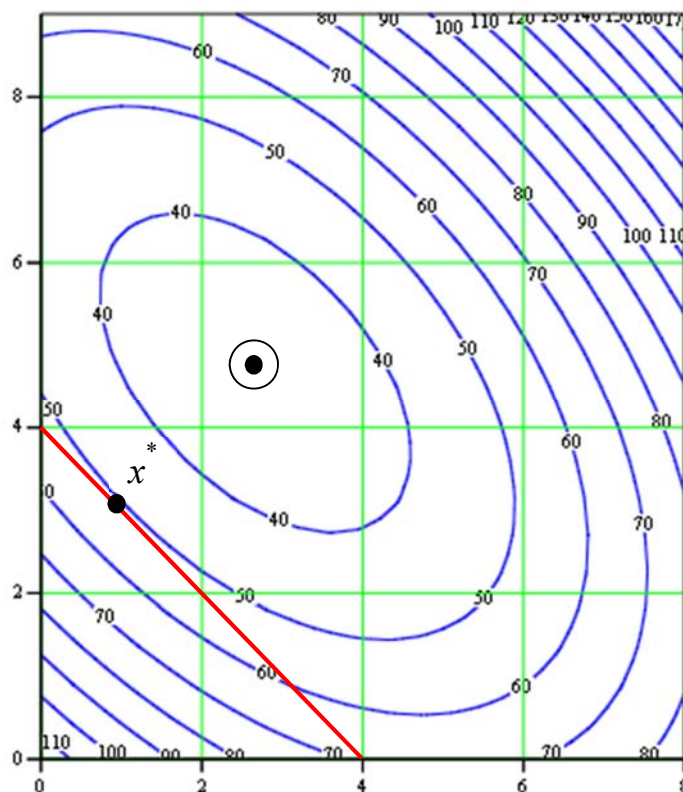


Рис. 6.6 – Линии уровня ШФ для  $R = 1$

При  $R = 10$  штрафная функция имеет вид (рис. 6.7):

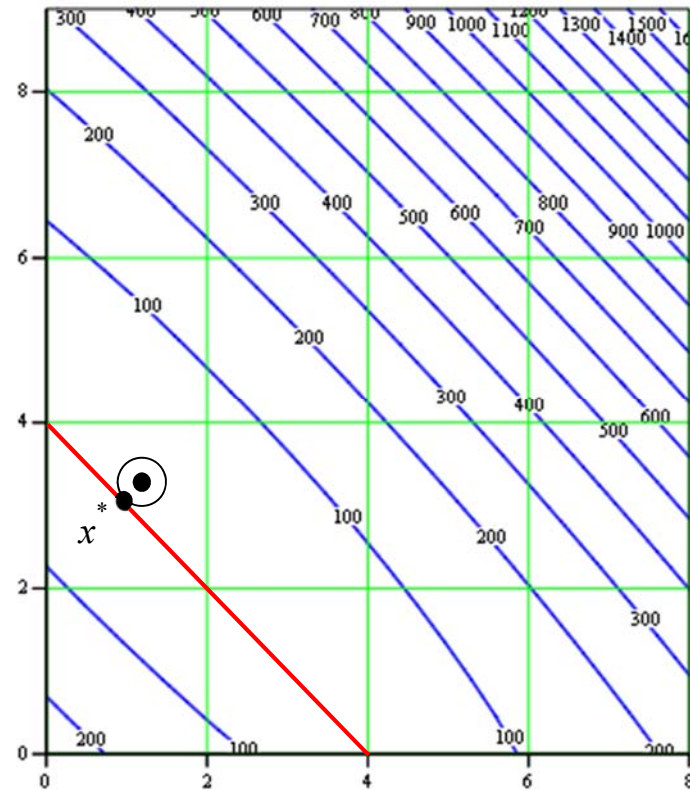
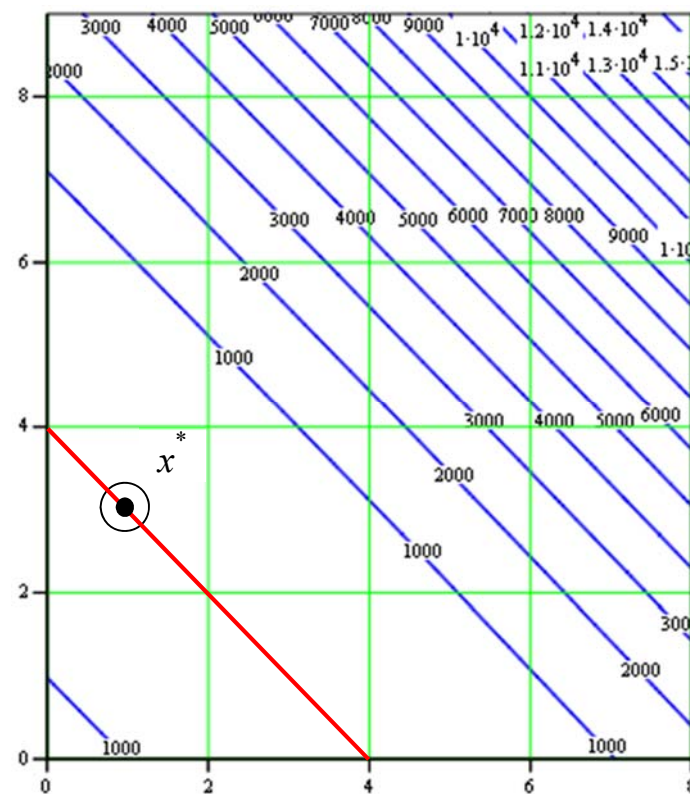
$$P(x, R) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + 10(4 - x_1 - x_2)^2.$$

Минимум ШФ находится в точке  $(1,238; 3,238)^T$ .

При  $R = 100$  штрафная функция имеет вид (рис. 6.8):

$$P(x, R) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + 100(4 - x_1 - x_2)^2.$$

Минимум ШФ находится в точке  $(1,025; 3,025)^T$ , что уже очень близко к оптимальному значению  $x^* = (1; 3)^T$ .

Рис. 6.7 – Линии уровня ШФ для  $R = 10$ Рис. 6.8 – Линии уровня ШФ для  $R = 100$

Обсудим данный пример подробнее. Рассмотрим стационарную точку функции  $P(x, 10)$ . Эта точка уже довольно близка к  $x^*$ . Во многих прикладных задачах такое приближенное решение может считаться вполне удовлетворительным, однако в общем случае величина невязки  $h(x)$ , как правило, неудовлетворительна. Возникает вопрос, как изменить ШФ, чтобы ее стационарная точка приблизилась к  $x^*$ .

Заметим, что в точно вычисленной стационарной точке функции  $P(x, 10)$  значение ЦФ  $f(x^t) < P(x^t, 10)$  (оптимального) из-за нарушения условия  $h(x^t) = 0$ . При этом соотношение между значениями  $f(x)$  и  $P(x, R)$  связано с величиной  $R$ , в данном случае  $R = 10$ . По существу,  $R$  играет роль весового коэффициента, определяющего относительную значимость ограничения и ЦФ. Ясно, что при увеличении  $R$  стационарная точка функции  $P(x, R)$  будет смещаться в сторону более точного выполнения ограничения  $h(x) = 0$  и тем самым приближаться к  $x^*$ .

#### 6.4.2 Логарифмический штраф

По сравнению с предыдущим примером, ограничение-равенство заменяется неравенством. При этом решение  $x^*$  задачи должно остаться прежним, т. к. оптимальное решение лежит на границе ОДР. В данном случае:

$$P(x, R) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 - R \cdot \ln(4 - x_1 - x_2).$$

Условия стационарности:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x_1} = 2(x_1 - 6) + R \cdot \left[ \frac{1}{4 - x_1 - x_2} \right] = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} = 2(x_2 - 8) + R \cdot \left[ \frac{1}{4 - x_1 - x_2} \right] = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$R \cdot \left[ \frac{1}{4 - x_1 - x_2} \right] = -2(x_1 - 6)$$

и подставим во второе уравнение:

$$2(x_2 - 8) - 2(x_1 - 6) = 2x_2 - 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 + 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R \cdot \left[ \frac{1}{4 - x_1 - (x_1 + 2)} \right] &= -2(x_1 - 6) \Rightarrow \frac{R}{2 - 2x_1} = -2(x_1 - 6) \Rightarrow \\ R &= -2(x_1 - 6)(2 - 2x_1) \Rightarrow \frac{R}{4} = (x_1 - 6)(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow \\ x_1^2 - 7x_1 + 6 - \frac{R}{4} &= 0 \Rightarrow x_1^{(1,2)} = \frac{7 \pm \sqrt{25 + R}}{2}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим

$$x_1^{(1,2)} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{7 \pm \sqrt{25 + R}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1^{(1)} = 1, \quad x_1^{(2)} = 6.$$

Соответственно,  $x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + 2 = 3$ ,  $x_2^{(2)} = x_1^{(2)} + 2 = 8$ . В точке  $x^{(2)}$  ограничение задачи нарушается, поэтому оптимальной является точка  $x^{(1)}$ . Таким образом, метод сходится к точке  $x^* = (1; 3)^T$  и  $f^* = 51$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 7,141$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 19,61 \text{ Вт/м}^2.$$

Метод оказывается сходящимся в предположении, что безусловная минимизация проводится точно.

Таблица 6.2 – Стационарные точки логарифмического штрафа

| $R$   | $x_1^*; x_2^*$ | $P(x, R)$ | $f(x)$ | $g(x)$                 |
|-------|----------------|-----------|--------|------------------------|
| 100   | -2,090; -0,090 | -50,24    | 131,9  | 6,180                  |
| 10    | 0,542; 2,542   | 61,46     | 60,58  | 0,916                  |
| 1     | 0,950; 2,950   | 54,31     | 52,00  | 0,099                  |
| 0,1   | 0,995; 2,995   | 51,56     | 51,10  | $9,990 \times 10^{-3}$ |
| 0,01  | 0,9995; 2,9995 | 51,08     | 51,01  | $9,999 \times 10^{-4}$ |
| 0,001 | 1,000; 3,000   | 51,01     | 51,001 | $9,999 \times 10^{-5}$ |
| 0     | 1; 3           | –         | 51     | 0                      |

#### 6.4.3 Штраф типа обратной функции

Для нашей задачи имеем

$$P(x, R) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + \frac{R}{4 - x_1 - x_2}.$$

Условия стационарности:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x_1} = 2 \cdot (x_1 - 6) + \frac{R}{(4 - x_1 - x_2)^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} = 2 \cdot (x_2 - 8) + \frac{R}{(4 - x_1 - x_2)^2}. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$\frac{R}{(4 - x_1 - x_2)^2} = -2(x_1 - 6)$$

и подставим во второе уравнение:

$$2(x_2 - 8) - 2(x_1 - 6) = 2x_2 - 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 + 2.$$

Тогда

$$\frac{R}{(4 - x_1 - (x_1 + 2))^2} = -2(x_1 - 6) \Rightarrow R = -2(x_1 - 6)(2 - 2x_1)^2 \Rightarrow$$

$$x_1^3 - 8x_1^2 + 13x_1 - 6 + \frac{R}{8} = 0.$$

Получили кубическое уравнение. Аналитически его решать затруднительно, особенно при наличии неизвестного параметра  $R$ , поэтому приведем только численное решение задачи.

Исследуем стационарные точки функции  $P(x, R)$  при различных  $R$  (табл. 6.3). Кубическое уравнение имеет три корня, будем выбирать один из них, принадлежащий ОДР.

Таблица 6.3 – Стационарные точки штрафа типа обратной функции

| $R$   | $x_1^*; x_2^*$ | $P(x, R)$ | $f(x)$ | $g(x)$                 |
|-------|----------------|-----------|--------|------------------------|
| 100   | -0,398; 1,602  | 118,6     | 82,86  | 2,796                  |
| 10    | 0,522; 2,522   | 165,7     | 61,01  | 0,955                  |
| 1     | 0,844; 2,844   | 375,3     | 54,16  | 0,311                  |
| 0,1   | 0,950; 2,950   | 1057      | 52,00  | 0,100                  |
| 0,01  | 0,984; 2,984   | 3127      | 51,32  | 0,032                  |
| 0,001 | 0,995; 2,995   | 10055     | 51,10  | $9,996 \times 10^{-3}$ |
| 0     | 1; 3           | $\infty$  | 51     | 0                      |

Таким образом, метод сходится к точке  $x^* = (1; 3)^T$  и  $f^* = 51$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 7,141$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 19,61 \text{ Вт/м}^2.$$

#### 6.4.4 Штраф типа квадрата срезки

Для нашего случая:

$$P(x, R) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + R \cdot \langle 4 - x_1 - x_2 \rangle^2.$$

Уравнения, определяющие стационарную точку функции, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x_1} = 2(x_1 - 6) - 2R \cdot \langle 4 - x_1 - x_2 \rangle = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} = 2(x_2 - 8) - 2R \cdot \langle 4 - x_1 - x_2 \rangle = 0, \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$2R \cdot \langle 4 - x_1 - x_2 \rangle = 2(x_1 - 6)$$

и подставим во второе уравнение:

$$2(x_2 - 8) - 2(x_1 - 6) = 2x_2 - 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 + 2.$$

С учетом этого получим:

$$(x_1 - 6) - R \cdot \underbrace{\langle 2 - 2x_1 \rangle}_{\alpha} = 0.$$

Проанализируем результаты, когда аргумент оператора срезки  $\alpha \leq 0$  и  $\alpha > 0$ . Пусть  $\alpha > 0$ , т. е.  $\langle g(x) \rangle = 0$ . То есть мы рассматриваем случай, когда ограничение не является активным, а оптимальная точка находится внутри ОДР (безусловный минимум). Тогда имеем

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 8.$$

Однако данное решение не удовлетворяет ограничению задачи, т. е. является недопустимым ( $x \notin S$ ). Пусть  $\alpha \leq 0$ , т. е.  $\langle g(x) \rangle = 2 - 2x_1$ .

Следовательно, ограничение полагается активным (лежит на границе ОДР). Тогда штраф становится эквивалентен квадратичному штрафу:

$$\begin{aligned}(x_1 - 4) - R \cdot (2 - 2x_1) &= 0 \Rightarrow \\ 2Rx_1 + x_1 - 2R - 6 &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2R + 6}{2R + 1}.\end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим

$$x_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2R + 6}{2R + 1} = 1.$$

Соответственно,  $x_2 = x_1 + 2 = 3$ . Таким образом,  $x^* = (1; 3)^T$ ,  $f^* = 51$ .

Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 7,141$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 19,61 \text{ Вт/м}^2.$$

Получается, что если в оптимальной точке все ограничения задачи активны, то штраф типа квадрата срезки (ШКС) аналогичен квадратичному штрафу (КШ). Но, в отличие от КШ, ШКС работает с ограничениями-неравенствами, поэтому может находить оптимальные точки не только на границе ОДР, но и внутри ОДР. В общем случае, если задача имеет  $m$  ограничений, при решении необходимо рассмотреть  $2^m$  различных вариантов, когда оптимальная точка лежит или не лежит на поверхности каждого из ограничений. То есть при  $m = 1$  получим два варианта решения (как в данном случае), при  $m = 2$  уже четыре, и т. д. Обратите внимание на пример решения задачи с помощью условий оптимальности Куна – Таккера – там как раз получены четыре варианта решения для задачи с двумя ограничениями, в каждом из которых набор активных ограничений меняется при помощи параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

В таблице 6.4 исследованы стационарные точки функции  $P(x, R)$  для различных значений параметра  $R$ .

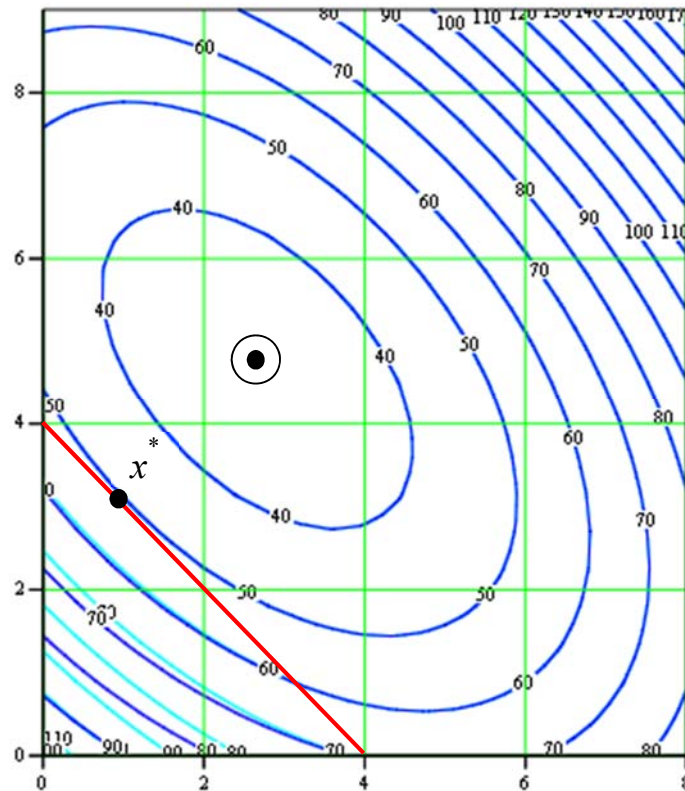
Таблица 6.4 – Стационарные точки штрафа типа квадрата срезки

| $R$      | $x_1^*; x_2^*$ | $P(x, R)$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|----------|----------------|-----------|--------|--------|
| 0        | 6; 8           | 1         | 1      | -10    |
| 0,1      | 5,167; 7,167   | 9,333     | 2,389  | -8,333 |
| 1        | 2,667; 4,667   | 34,33     | 23,22  | -3,333 |
| 10       | 1,238; 3,238   | 48,62     | 46,35  | -0,476 |
| 100      | 1,025; 3,025   | 50,75     | 50,50  | -0,050 |
| $\infty$ | 1; 3           | 51        | 51     | 0      |

То есть получили результаты, аналогичные КШ. Сравним вид ШФ для этих двух видов штрафов. При  $R=1$  штрафная функция имеет вид

$$P(x, 1) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + \langle 4 - x_1 - x_2 \rangle^2.$$

На рисунке 6.9 изображены линии уровня штрафной функции для ШКС (синие линии) и КШ (голубые линии). Видим, что за пределами ОДР линии уровня для обоих типов штрафов совпадают, и только в пределах ОДР наблюдаются различия. Они связаны с тем, что КШ считает эти точки недопустимыми (ограничение-равенство описывает только точки, лежащие на границе ОДР, отмеченной красной линией), а ШКС – допустимыми.

Рис. 6.9 – Линии уровня ШФ для  $R=1$ 

При  $R=10$  штрафная функция имеет вид:

$$P(x,10) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + 10 \langle 4 - x_1 - x_2 \rangle^2.$$

На рисунке 6.10 также изображены линии уровня штрафной функции для ШКС (синие линии) и КШ (голубые линии). Видим, что за пределами ОДР эти штрафы вновь совпадают, но внутри ОДР штрафная функция для ШКС имеет гораздо меньшее значение, чем для КШ. Поэтому мы видим линии уровня только для КШ, а линии уровня ШКС переместились глубже в ОДР. Чем больше величина параметра  $R$ , тем большую «овражность» приобретают линии уровня ШФ за пределами ОДР, но внутри ОДР сохраняют свой начальный вид, как бы «заталкивая» решение в пределы ОДР (рис. 6.11).

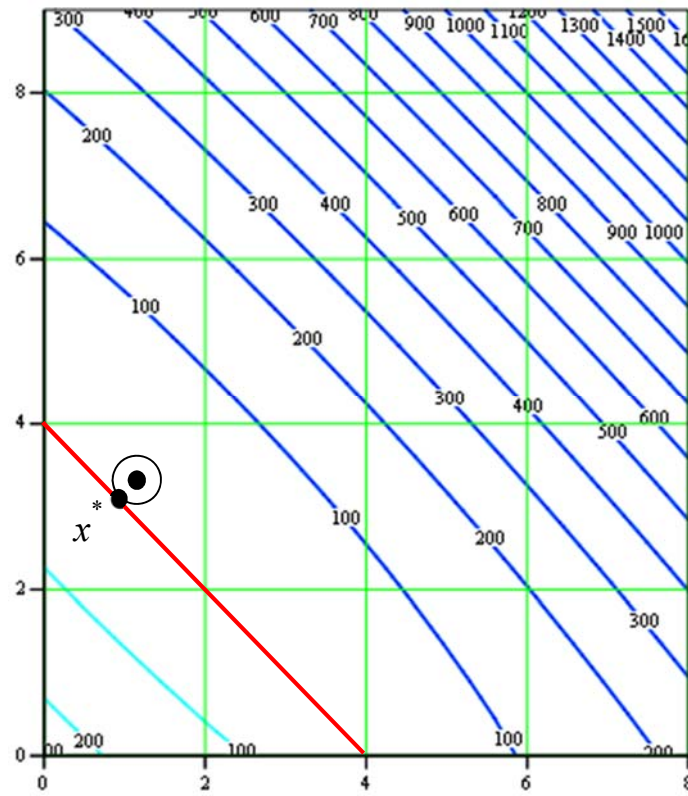


Рис. 6.10 – Линии уровня ШФ для  $R = 10$

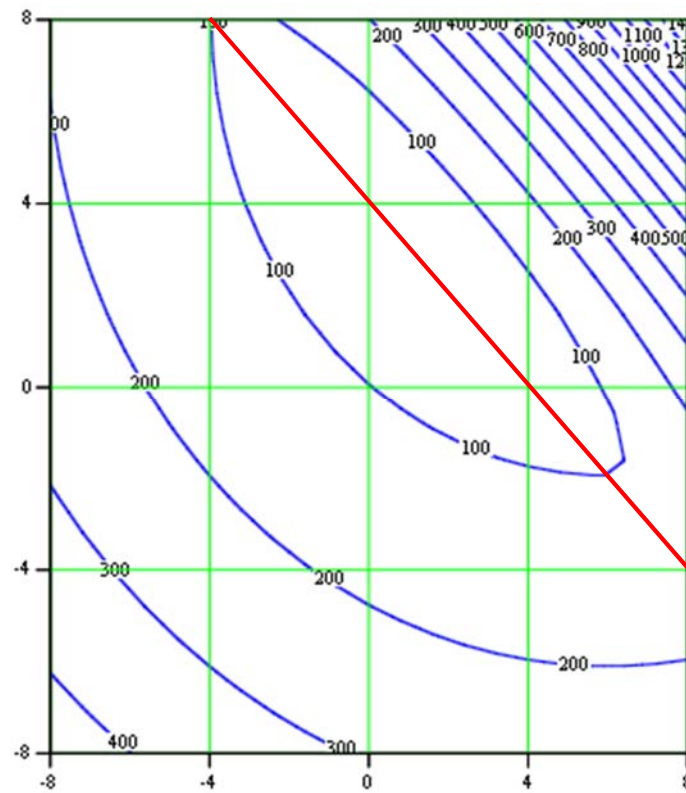


Рис. 6.11 – Деформация линии уровня ШФ для  $R = 10$

Таким образом, стационарная точка функции  $P(x, 0)$  есть точка  $x = (6; 8)^T$ . При изменении  $R$  от 0 до  $\infty$  стационарная точка функции  $P(x, R)$  перемещается вдоль прямой, соединяющей точку  $(6; 8)^T$  – безусловный минимум  $f(x)$ , с точкой  $(1; 3)^T$  ее условного минимума. При любом (конечном)  $R$  соответствующая стационарная точка недопустима, т. е. мы имеем дело с методом внешней точки.

## 6.5 Методы, основанные на линеаризации

### 6.5.1 Базовый метод линеаризации

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны. Так как метод линеаризации позволяет решать задачи со смешанными ограничениями, используем это и заменим одно из условий задачи на равенство:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= x_1^2 - x_2 \geq 0, \\ h(x) &= 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Как мы уже убедились ранее, в оптимальной точке оба ограничения являются активными, поэтому это не должно повлиять на результат решения.

Так как приемная антенна расположена между населенным пунктом и телевизионной вышкой, в качестве ограничений вида  $a_j \leq x_j \leq b_j$  примем следующие ограничения:

$$0 \leq x_1 \leq 6, \quad 0 \leq x_2 \leq 8.$$

Построим допустимую область  $S$  (см. рис. 6.12). Допустимая область  $S$  состоит из точек кривой  $h(x) = 0$ , лежащих между точкой  $(2; 0)$ , определяемой ограничением  $x_2 \geq 0$ , и точкой  $(1,25; 1,562)$ , определяемой ограничением  $g(x) \geq 0$ .

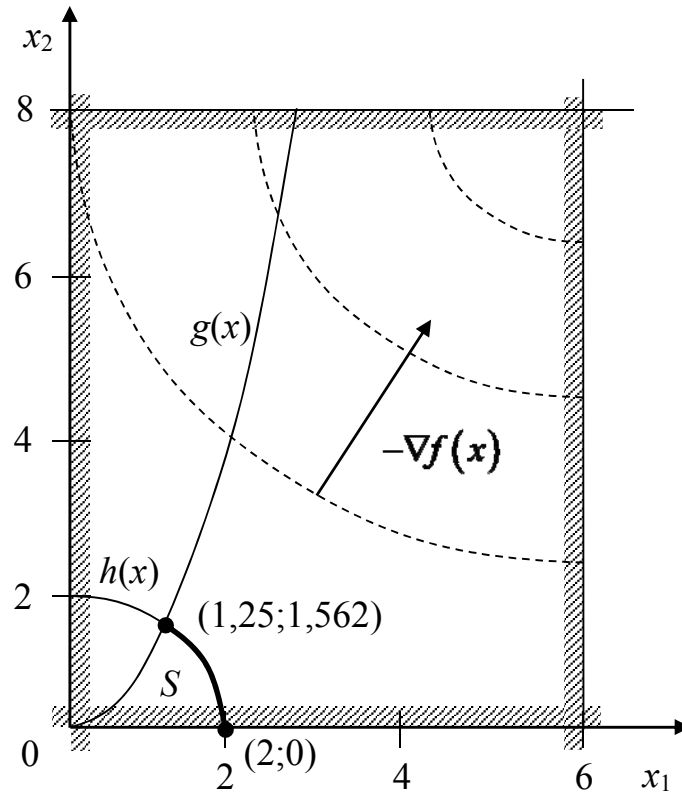


Рис. 6.12 – ОДР ЗЛП и линии уровня ЦФ

Зададим  $x^0 = (2; 0)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.03$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ .

Шаг 1.2. Вычисляем  $f(x^0) = 81$ ,  $g(x^0) = 4$ ,  $h(x^0) = 0$ ,

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 12 \\ 2 \cdot 0 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 17,889 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.3. Составим ЗЛП:

$$\bar{f}(x, x^0) = 81 - 8 \cdot (x_1 - 2) - 16 \cdot (x_2 - 0) \rightarrow \min,$$

$$\bar{g}(x, x^0) = 4 + 4 \cdot (x_1 - 2) - 1 \cdot (x_2 - 0) \geq 0,$$

$$\bar{h}(x, x^0) = 0 - 4 \cdot (x_1 - 2) - 0 \cdot (x_2 - 0) = 0,$$

$$0 \leq x_1 \leq 6, \quad 0 \leq x_2 \leq 8.$$

Здесь  $\bar{S}$  представляет собой отрезок прямой  $\bar{h}(x) = 0$  ( $-4x_1 + 8 = 0$ ), ограниченный точками  $(2;0)$  и  $(2;4)$  – точкой пересечения с прямой  $\bar{g}(x) = 0$  ( $4x_1 - x_2 - 4 = 0$ ). Линии уровня линеаризованной целевой функции  $\bar{f}(x)$  представляют собой прямые  $97 - 8x_1 - 16x_2 = \text{const}$ , тогда как линии уровня исходной целевой функции – окружности с центром в точке  $(6;8)$ .

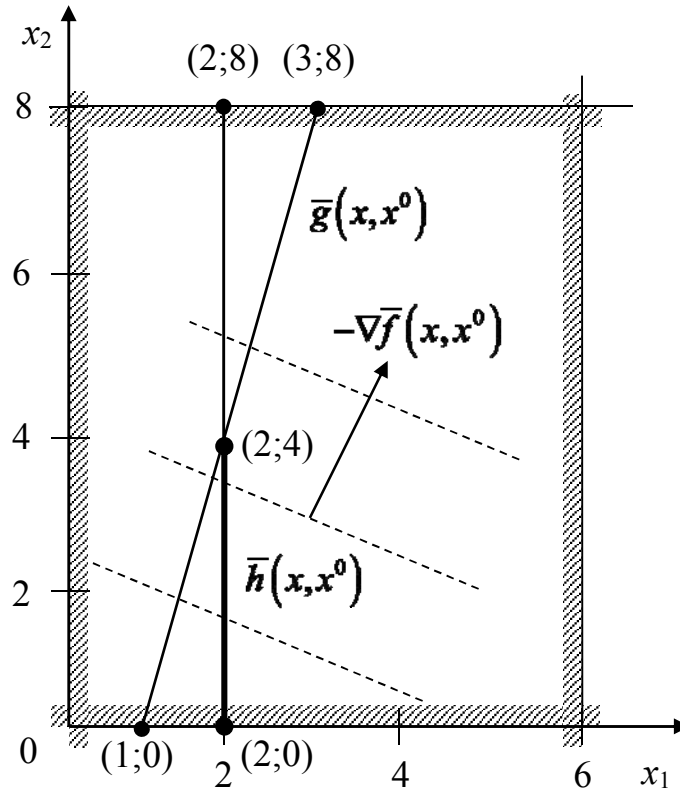


Рис. 6.13 – Линии уровня ЦФ

Шаг 1.4. Ясно, что решением линеаризованной задачи является точка  $x^1 = (2;4)^T$ . В этой точке имеем:

$$\begin{aligned} g(x^1) &= 0, \\ h(x^1) &= -16 \neq 0, \end{aligned}$$

так что ограничение-равенство нарушается. Возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычисляем  $f(x^1) = 33$ ,  $g(x^1) = 0$ ,  $h(x^1) = -16$ ,

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 12 \\ 2 \cdot 4 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^1)\| \approx 11,314 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 2.3. Составим ЗЛП:

$$\bar{f}(x, x^1) = 33 - 8 \cdot (x_1 - 2) - 8 \cdot (x_2 - 4) \rightarrow \min,$$

$$\bar{g}(x, x^1) = 0 + 4 \cdot (x_1 - 2) - 1 \cdot (x_2 - 4) \geq 0,$$

$$\bar{h}(x, x^1) = -16 - 4 \cdot (x_1 - 2) - 8 \cdot (x_2 - 4) = 0,$$

$$0 \leq x_1 \leq 6, \quad 0 \leq x_2 \leq 8.$$

Остальные итерации решения сведены в таблицу 6.5.

Таблица 6.5 – Решение задачи методом линеаризации

| $k$ | $x^k$ | $f(x^k),$<br>$g(x^k),$<br>$h(x^k)$ | $\nabla f(x^k),$<br>$\nabla g(x^k),$<br>$\nabla h(x^k)$ |    |     | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1}-x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1})-f(x^k) $ |
|-----|-------|------------------------------------|---------------------------------------------------------|----|-----|---------------------------------------------------------------------|
| 0   | 2     | 81                                 | -8                                                      | 4  | -4  | 17,89                                                               |
|     | 0     | 4                                  |                                                         |    |     | 4                                                                   |
|     | 0     | -16                                |                                                         |    |     | -1                                                                  |
| 1   | 2     | 33                                 | -8                                                      | 4  | -4  | 11,31                                                               |
|     | 4     | 0                                  |                                                         |    |     | 5,657                                                               |
|     | -16   | -8                                 |                                                         |    |     | -1                                                                  |
| 2   | 6     | 65                                 | 0                                                       | 12 | -12 | 16                                                                  |
|     | 0     | 36                                 |                                                         |    |     | 4,807                                                               |
|     | -32   | -16                                |                                                         |    |     | -1                                                                  |

Окончание табл. 6.5

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k),$<br>$g(x^k),$<br>$h(x^k)$                         | $\nabla f(x^k),$<br>$\nabla g(x^k),$<br>$\nabla h(x^k)$ |             |                  | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1}) - f(x^k) $ |
|-----|----------------|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------|------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 3   | 3,333<br>4     | 24,11<br>7,111<br>-23,11                                   | -5,333<br>-8                                            | 6,667<br>-1 | -6,667<br>-8     | 9,615<br>2,222<br>26,27                                                 |
| 4   | 2<br>2,222     | 50,38<br>1,778<br>-4,938                                   | -8<br>-11,56                                            | 4<br>-1     | -4<br>-4,444     | 14,06<br>0,827<br>12,11                                                 |
| 5   | 1,410<br>1,642 | 62,49<br>0,348<br>-0,685                                   | -9,179<br>-12,72                                        | 2,821<br>-1 | -2,821<br>-3,283 | 15,68<br>0,170<br>2,416                                                 |
| 6   | 1,259<br>1,563 | 64,91<br>0,0228<br>-0,0290                                 | -9,481<br>-12,87                                        | 2,519<br>-1 | -2,519<br>-3,126 | 15,99<br>$9,777 \times 10^{-3}$<br>0,111                                |
| 7   | 1,250<br>1,562 | 65,02<br>$9,022 \times 10^{-5}$<br>$-1,053 \times 10^{-4}$ | -9,501<br>-12,88                                        | 2,499<br>-1 | -2,499<br>-3,121 | 16,00<br>$3,123 \times 10^{-6}$<br>$4,022 \times 10^{-5}$               |
| 8   | 1,250<br>1,562 | 65,02<br>$8,709 \times 10^{-5}$<br>$-1,151 \times 10^{-4}$ | -9,501<br>-12,88                                        | 2,499<br>-1 | -2,499<br>-3,121 | 16,00                                                                   |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,03$ , округляем значения аргумента и функции до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^8 \approx (1,25; 1,56)^T$ ,

$f^* = f(x^8) \approx 65,02$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 8,063$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,38 \text{ Вт/м}^2.$$

### 6.5.2 Алгоритм Франка – Вульфа

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны. Так как метод Франка – Вульфа предназначен для решения задач с линейными ограничениями, используем ограничения (6.6), (6.7), (6.8):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Приведем ограничение задачи к виду (6.42, [1]):

$$x_1 + x_2 \leq 4,$$

таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = 4.$$

Зададим  $x^0 = (1; 1)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.03$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ . Вычисляем  $f(x^0) = 75$ .

Шаг 1.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 1 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 17,205 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.2. Составим ЗЛП:

$$\begin{aligned} -10y_1 - 14y_2 &\rightarrow \min, \\ y_1 + y_2 &\leq 4, \\ y_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Данную задачу можно решить графически либо симплекс-методом. Но очевидно, что минимум достигается при наибольшем возможном значении переменной  $y_2$ , поэтому решением будет  $y^0 = (0; 4)^T$ .

Шаг 1.4. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= f\left(x^0 + \alpha(y^0 - x^0)\right) \rightarrow \min_{\alpha}, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1+3\alpha \end{pmatrix}\right) = 1 + (1-\alpha-6)^2 + (1+3\alpha-8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ \Phi(\alpha) &= 1 + (-\alpha-5)^2 + (3\alpha-7)^2 \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= -2(-\alpha-5) + 6(3\alpha-7) = 0, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 20\alpha = 32 \Rightarrow \alpha^0 = 1.\end{aligned}$$

Шаг 1.5. Находим новое приближение оптимума:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0(y^0 - x^0) = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1+3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.6. Вычисляем  $f(x^1) = 53$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 3,162 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| = 22 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 12 \\ 2 \cdot 4 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^1)\| \approx 14,422 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 2.3. Составим ЗЛП:

$$\begin{aligned}-12y_1 - 8y_2 &\rightarrow \min, \\ y_1 + y_2 &\leq 4, \\ y_{1,2} &\geq 0.\end{aligned}$$

В данном случае минимум достигается при наибольшем возможном значении переменной  $y_1$ , поэтому решением будет  $y^1 = (4; 0)^T$ .

Шаг 2.4. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= f\left(x^1 + \alpha(y^1 - x^1)\right) \rightarrow \min_{\alpha}, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 4\alpha \\ 4 - 4\alpha \end{pmatrix}\right) = 1 + (4\alpha - 6)^2 + (4 - 4\alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ \Phi(\alpha) &= 1 + (4\alpha - 6)^2 + (-4\alpha - 4)^2 \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= 8(4\alpha - 6) - 8(-4\alpha - 4) = 0, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 64\alpha - 16 = 0 \Rightarrow \alpha^1 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Шаг 2.5. Находим новое приближение оптимума:

$$x^2 = x^1 + \alpha^1(y^1 - x^1) = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 4 - 4\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.6. Вычисляем  $f(x^2) = 51$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 1,414 > \varepsilon_x, \quad |f(x^2) - f(x^1)| = 2 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 3.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 3 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^2)\| \approx 14,142 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 3.3. Составим ЗЛП:

$$\begin{aligned}-10y_1 - 10y_2 &\rightarrow \min, \\ y_1 + y_2 &\leq 4, \\ y_{1,2} &\geq 0.\end{aligned}$$

В данном случае углы наклона линий уровня ЦФ и границы ОДР, соответствующей ограничению, совпадают. Поэтому задача имеет множество решений на отрезке  $y_1 + y_2 = 4$ ,  $y_{1,2} \geq 0$ . Выберем любое из них, например,  $y^2 = (2; 2)^T$ .

Шаг 3.4. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= f\left(x^2 + \alpha(y^2 - x^2)\right) \rightarrow \min_{\alpha}, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ f\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right)\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 3-\alpha \end{pmatrix}\right) = 1 + (1+\alpha-6)^2 + (3-\alpha-8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ \Phi(\alpha) &= 1 + (\alpha-5)^2 + (-\alpha-5)^2 \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= 2(\alpha-5) - 2(-\alpha-5) = 0, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 0.\end{aligned}$$

Шаг 3.5. Находим новое приближение оптимума:

$$x^3 = x^2 + \alpha^2(y^2 - x^2) = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 3-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.6. Вычисляем  $f(x^3) = 51$ . Условия останова итерационного процесса выполняются:

$$\|x^3 - x^2\| = 0 < \varepsilon_x, \quad |f(x^3) - f(x^2)| = 0 < \varepsilon_y,$$

поэтому решение окончено.

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,03$ , округляем значения аргумента и функции до двух цифр после запятой:  $x^* = x^3 = (1,00; 3,00)^T$ ,  $f^* = f(x^3) = 51$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 7,141$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 19,61 \text{ Вт/м}^2.$$

*Замечание.* В принципе, решение можно было заканчивать на шаге 4.3. Так как была получена нулевая длина шага  $\alpha^2$ , то понятно, что точка  $x^2$  уже является оптимальной, и следующая точка  $x^3$  совпадет с ней.

Дадим графическую интерпретацию решения (рис. 6.14). Штриховка показывают допустимую область. В случае оптимума, лежащего внутри допустимой области, алгоритм Франка – Вульфа весьма похож на градиентный метод оптимизации без ограничений (зигзагообразная траектория).

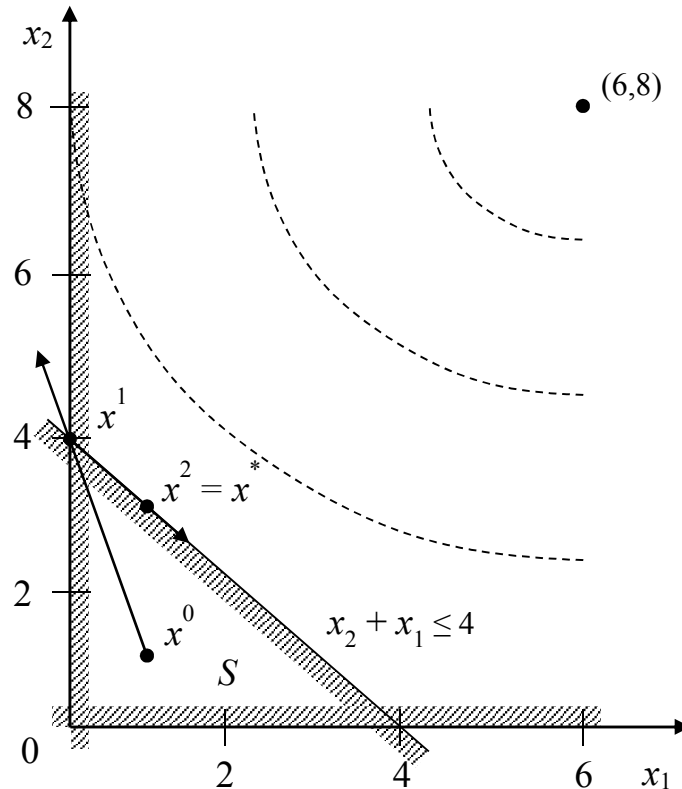


Рис. 6.14 – Линии уровня ЦФ, ОДР и траектория спуска алгоритма Франка – Вульфа

### 6.5.3 Метод допустимых направлений Зойтендейка

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны:

$$f(x) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0,$$

$$g_2(x) = x_1^2 - x_2 \geq 0.$$

Зададим  $x^0 = (1, 5; 1)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.03$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ . Вычисляем  $f(x^0) = 70,25$ .

Шаг 1.2. Вычисляем  $g_1(x^0) = 0,75$ ,  $g_2(x^0) = 1,25$ ,

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1,5 - 12 \\ 2 \cdot 1 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -14 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1,5 \\ -2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 16,643 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.3. Так как  $g_1(x^0) \neq 0$  и  $g_2(x^0) \neq 0$ , множество активных ограничений пусто, т. е.  $I^0 = \emptyset$ .

Шаг 1.4. Составим ЗЛП. Так как  $I^0 = \emptyset$ , в ЗЛП будет только одно ограничение, составленное из коэффициентов градиента ЦФ задачи:

$$\begin{aligned} -\theta &\rightarrow \min, \\ -9d_1 - 14d_2 &\leq -\theta, \\ -1 &\leq d_{1,2} \leq 1. \end{aligned}$$

Данную задачу можно решить графически либо симплекс-методом. Но в данном случае можно упростить ее решение. На рисунке 6.15 штриховкой помечена допустимая область, задаваемая ограничениями-неравенствами. При построении области  $S$  переменная  $\theta$  рассматривается как константа. При увеличении значения  $\theta$  (мы минимизируем  $-\theta$ , следовательно, максимизируем  $\theta$ ) линия ограничения  $-9d_1 - 14d_2 \leq -\theta$  будет перемещаться в направлении, указанном стрелкой. Точка  $A(1;1)$  является граничной точкой совместности ограничений. То есть при максимальном значении  $\theta$  ОДР задачи будет состоять только из одной точки  $A$ .

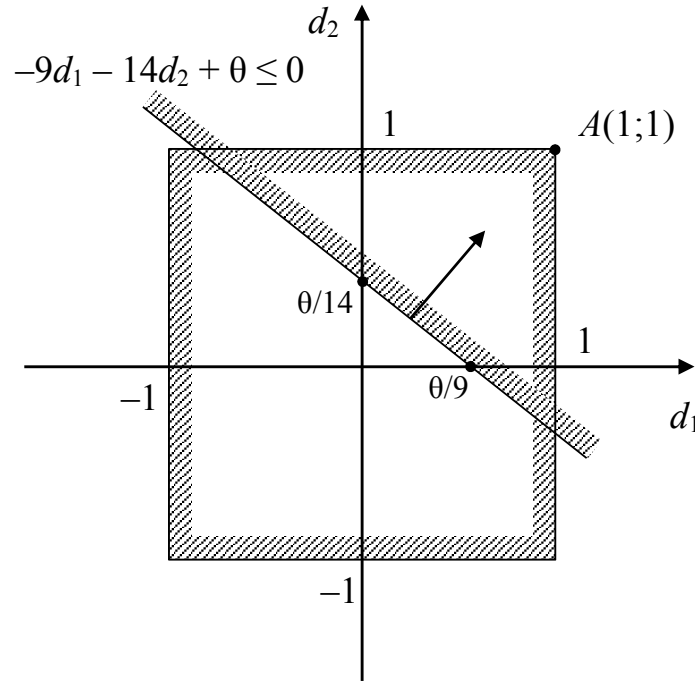


Рис. 6.15 – ОДР задачи оптимизации

Таким образом, решением задачи будет  $d^0 = (1,1)^T$ , при этом  $\theta^0 = 23$ .

Параметр  $\theta^0 > 0$ , следовательно, возможно дальнейшее улучшение решения.

Шаг 1.5. Теперь на луче  $x^1 = x^0 + \alpha d^0$ , т. е.

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 + \alpha \\ 1 + \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

требуется найти точку, в которой он пересекает границу области  $S$ . Проверяем первое ограничение:

$$g_1(\alpha) = 4 - (1,5 + \alpha)^2 - (1 + \alpha)^2 = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 - 5\alpha + 0,75 = 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Решение данного квадратного уравнения дает один положительный корень

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{31}}{-4} \approx 0,142$$

и один отрицательный, его мы сразу отбрасываем. То есть при движении вдоль луча  $x^1 = x^0 + \alpha d^0$  при значении  $\bar{\alpha}_1 \approx 0,142$  мы достигнем границы ОДР, определяемой ограничением  $g_1(x) \geq 0$ . Проверяем второе ограничение:

$$g_2(\alpha) = (1,5 + \alpha)^2 - (1 + \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1,25 = 0, \alpha \geq 0.$$

Получаем  $g_2(\alpha) \geq 0$  для любого  $\alpha \geq 0$ . То есть при движении вдоль луча  $x^1 = x^0 + \alpha d^0$  мы не можем достичь границы ОДР, определяемой ограничением  $g_2(x) \geq 0$ . Следовательно,  $\bar{\alpha}_2 = \infty$ . Определяем  $\bar{\alpha}$ :

$$\bar{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\} \approx 0,142.$$

Шаг 1.6. Исследуем отрезок  $0 \leq \alpha \leq 0,142$  для определения экстремальной точки функции

$$\Phi(\alpha) = 1 + (1,5 + \alpha - 6)^2 + (1 + \alpha - 8)^2 = 1 + (\alpha - 4,5)^2 + (\alpha - 7)^2.$$

Дифференцируем:

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = 2(\alpha - 4,5) + 2(\alpha - 7) = 0 \Rightarrow 4\alpha = 23.$$

Получим  $\alpha = 5,75$ . Так как  $\alpha > 0,142$ , выбирается значение  $\alpha^0 \approx 0,142$ .

Шаг 1.7. Находим новое приближение оптимума:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0 d^0 \approx \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,142 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,642 \\ 1,142 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.8. Вычисляем  $f(x^1) \approx 67,026$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 0,201 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| \approx 3,224 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычисляем  $g_1(x^1) = 0$ ,  $g_2(x^1) \approx 1,554$ ,

$$\nabla f(x^1) \approx \begin{pmatrix} -8,716 \\ -13,716 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x^1) \approx \begin{pmatrix} -3,284 \\ -2,284 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x^0) \approx \begin{pmatrix} 3,284 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^1)\| \approx 16,251 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 2.3. Так как  $g_1(x^1) = 0$  и  $g_2(x^1) \neq 0$ , первое ограничение является активным, т. е.  $I^1 = \{1\}$ .

Шаг 2.4. Составим ЗЛП. Так как  $I^1 = \{1\}$ , в ЗЛП будет два ограничения, составленных из коэффициентов градиента ЦФ и градиента ограничения  $g_1(x)$ :

$$\begin{aligned} -\theta &\rightarrow \min, \\ -8,716d_1 - 13,716d_2 &\leq -\theta, \\ -3,284d_1 - 2,284d_2 &\geq \theta, \\ -1 &\leq d_{1,2} \leq 1. \end{aligned}$$

На рисунке 6.16 показаны оба ограничения, направление их действия, а также координаты точек их пересечения с границами квадрата  $-1 \leq d_{1,2} \leq 1$ . Стрелками показано направление сдвига ограничений при увеличении значения параметра  $\theta$ . ОДР представляет собой треугольник, заключенный между точкой  $A$  (граничной точкой совместности ограничений) и точками пересечения ограничений с границами квадрата  $-1 \leq d_{1,2} \leq 1$  во втором квадранте. Точка  $A$  имеет координаты  $(-0,637 \cdot \theta; 0,477 \cdot \theta)$  – их можно найти, решая СЛАУ, составленную из ограничений ЗЛП, считая параметр  $\theta$  константой:

$$\begin{cases} -8,716d_1 - 13,716d_2 = -\theta, \\ -3,284d_1 - 2,284d_2 = \theta. \end{cases}$$

При увеличении значения параметра  $\theta$  и перемещении ограничений в направлении стрелок мы достигнем момента, когда ОДР будет состоять только из одной точки  $A$ . Так как координата  $A_x$  имеет большее (по модулю) значение, чем координата  $A_y$ , она достигнет границ квадрата  $-1 \leq d_{1,2} \leq 1$  раньше, поэтому

$$\theta^1 \approx \frac{-1}{-0,637} \approx 1,571 \Rightarrow d^1 \approx \begin{pmatrix} -0,637 \cdot 1,571 \\ 0,477 \cdot 1,571 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 0,75 \end{pmatrix}.$$

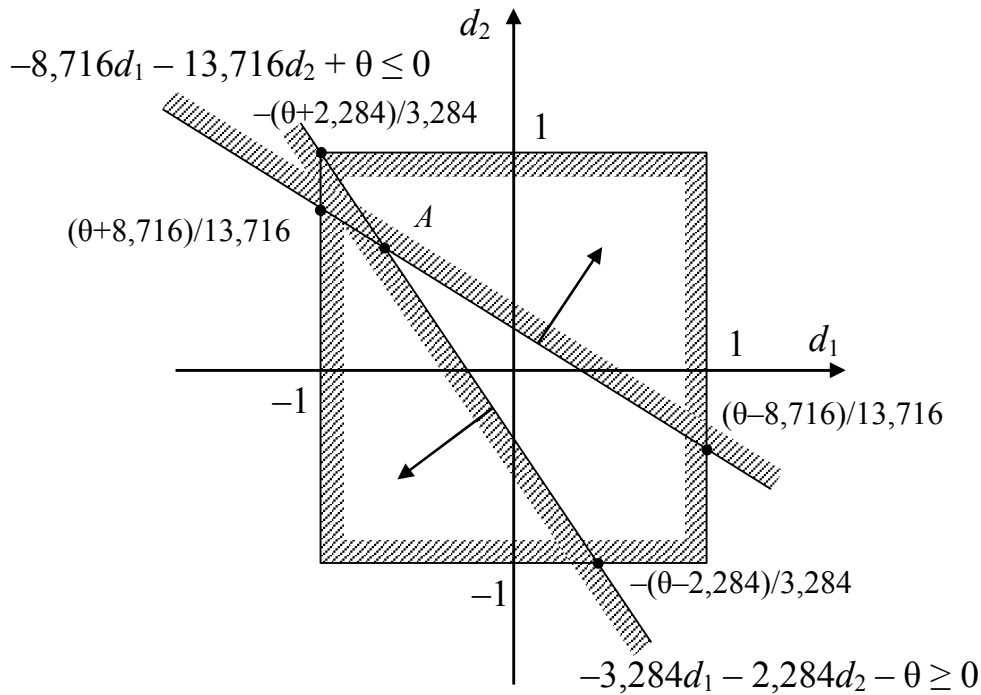


Рис. 6.16 – ОДР задачи оптимизации

Параметр  $\theta^1 > 0$ , следовательно, возможно дальнейшее улучшение решения.

Шаг 2.5. Теперь на луче  $x^2 = x^1 + \alpha d^1$ , т. е.

$$x^2 \approx \begin{pmatrix} 1,642 \\ 1,142 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,75 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,642 - \alpha \\ 1,142 + 0,75\alpha \end{pmatrix}, \alpha > 0$$

требуется найти точку, в которой он пересекает границу области  $S$ . Проверим первое ограничение:

$$g_1(\alpha) \approx 4 - (1,642 - \alpha)^2 - (1,142 + 0,75\alpha)^2 = 0 \Rightarrow \\ -1,563\alpha^2 - 1,571\alpha - 0,000328 = 0, \alpha \geq 0.$$

Решение данного квадратного уравнения дает один положительный корень  $\bar{\alpha}_1 \approx 1,005$ . Проверим второе ограничение:

$$g_2(\alpha) \approx (1,642 - \alpha)^2 - (1,142 + 0,75\alpha) = 0 \Rightarrow \\ \alpha^2 - 4,034\alpha + 1,554 = 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Решение данного квадратного уравнения дает один положительный корень  $\bar{\alpha}_2 \approx 0,431$ . Определяем  $\bar{\alpha}$ :

$$\bar{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\} \approx 0,431.$$

Шаг 2.6. Исследуем отрезок  $0 \leq \alpha \leq 0,431$  для определения экстремальной точки функции

$$\Phi(\alpha) \approx 1 + (1,642 - \alpha - 6)^2 + (1,142 + 0,75\alpha - 8)^2 \approx \\ \approx 1 + (-\alpha - 4,358)^2 + (0,75\alpha - 6,858)^2.$$

Дифференцируем:

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} \approx -2(-\alpha - 4,358) + 1,5(0,75\alpha - 6,858) = 0 \Rightarrow -3,125\alpha = -1,571.$$

Получим  $\alpha = 0,503$ . Так как  $\alpha > 0,431$ , выбирается значение  $\alpha^0 \approx 0,431$ .

Шаг 2.7. Находим новое приближение оптимума:

$$x^2 = x^1 + \alpha^1 d^1 \approx \begin{pmatrix} 1,642 \\ 1,142 \end{pmatrix} + 0,431 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,75 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,211 \\ 1,465 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.8. Вычисляем  $f(x^2) \approx 66,639$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 0,539 > \varepsilon_x, \quad |f(x^2) - f(x^1)| \approx 0,387 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Остальные итерации решения сведены в таблицу 6.6.

Таблица 6.6 – Решение задачи методом допустимых направлений

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k),$<br>$g_1(x^k),$<br>$g_2(x^k)$ | $I^k,$<br>$d^k,$<br>$\theta^k$ | $\bar{\alpha}_1,$<br>$\bar{\alpha}_2,$<br>$\alpha,$<br>$\bar{\alpha}$ | $\nabla f(x^k),$<br>$\nabla g_1(x^k),$<br>$\nabla g_2(x^k)$ |                          |             | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1}) - f(x^k) $ |
|-----|----------------|----------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 1,5<br>1       | 70,25<br>0,75<br>1,25                  | $\emptyset$                    | 0,142                                                                 | -9<br>-14                                                   | -3<br>-2                 | 3<br>-1     | 16,64<br>0,201<br>3,224                                                 |
|     |                |                                        | 1                              | $\infty$                                                              |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 1                              | 5,750                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 23                             | 0,142                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
| 1   | 1,642<br>1,142 | 67,03<br>0<br>1,554                    | {1}                            | 1,005                                                                 | -<br>8,716<br>-<br>13,72                                    | -<br>3,284<br>-<br>2,284 | 3,284<br>-1 | 16,25<br>0,539<br>0,387                                                 |
|     |                |                                        | -1                             | 0,431                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 0,75                           | 0,503                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 1,571                          | 0,431                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
| 2   | 1,211<br>1,465 | 66,64<br>0,387<br>0                    | {2}                            | 0,297                                                                 | -<br>9,579<br>-<br>13,07                                    | -<br>2,421<br>-<br>2,931 | 2,421<br>-1 | 16,20<br>0,333<br>0,759                                                 |
|     |                |                                        | 1                              | $\infty$                                                              |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | -                              | 1,164                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 0,509                          | 0,297                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
| 3   | 1,507<br>1,314 | 65,88<br>0<br>0,958                    | {1}                            | 0,668                                                                 | -<br>8,985<br>-<br>13,37                                    | -<br>3,015<br>-<br>2,629 | 3,015<br>-1 | 16,11<br>0,343<br>0,169                                                 |
|     |                |                                        | -1                             | 0,274                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 0,75                           | 0,334                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 1,043                          | 0,274                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
| 4   | 1,233<br>1,520 | 65,71<br>0,169<br>0                    | {2}                            | 0,151                                                                 | -<br>9,534<br>-<br>12,96                                    | -<br>2,466<br>-<br>3,041 | 2,466<br>-1 | 16,09<br>0,169<br>0,420                                                 |
|     |                |                                        | 1                              | $\infty$                                                              |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | -                              | 1,183                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 0,506                          | 0,151                                                                 |                                                             |                          |             |                                                                         |
|     |                |                                        | 2,972                          |                                                                       |                                                             |                          |             |                                                                         |

Окончание табл. 6.6

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k),$<br>$g_1(x^k)$<br>,<br>$g_2(x^k)$ | $I^k,$<br>$d^k,$<br>$\theta^k$ | $\bar{\alpha}_1,$<br>$\bar{\alpha}_2,$<br>$\alpha,$<br>$\bar{\alpha}$ | $\nabla f(x^k),$<br>$\nabla g_1(x^k),$<br>$\nabla g_2(x^k)$ |       |       | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1}) - f(x^k) $ |
|-----|----------------|--------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------|-------|-------------------------------------------------------------------------|
| 5   | 1,384<br>1,444 | 65,29<br>0<br>0,472                        | {1}                            | 0,385                                                                 | —                                                           | —     |       | 16,04<br>0,175<br>0,0536                                                |
|     |                |                                            | —1                             | 0,140                                                                 | 9,232                                                       | 2,768 | 2,768 |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,75                           | 0,193                                                                 | —                                                           | —     | —1    |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,602                          | 0,140                                                                 | 13,11                                                       | 2,888 |       |                                                                         |
| 6   | 1,244<br>1,549 | 65,24<br>0,0536<br>0                       | {2}                            | 0,0540                                                                | —                                                           | —     |       | 16,03<br>0,0606<br>0,158                                                |
|     |                |                                            | 1                              | $\infty$                                                              | 9,511                                                       | 2,489 | 2,489 |                                                                         |
|     |                |                                            | —                              | 1,193                                                                 | —                                                           | —     | —1    |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,505                          | 0,0540                                                                | 12,90                                                       | 3,097 |       |                                                                         |
| 7   | 1,289<br>1,521 | 65,08<br>0<br>0,165                        | {1}                            | 0,202                                                                 | —                                                           | —     |       | 16,01<br>0,0625<br>0,0118                                               |
|     |                |                                            | —1                             | 0,0500                                                                | 9,403                                                       | 2,597 | 2,597 |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,75                           | 0,101                                                                 | —                                                           | —     | —1    |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,315                          | 0,0500                                                                | 12,96                                                       | 3,043 |       |                                                                         |
| 8   | 1,248<br>1,559 | 65,07<br>0,0118<br>0                       | {2}                            | 0,0126                                                                | —                                                           | —     |       | 16,01<br>0,0141<br>0,0376                                               |
|     |                |                                            | 1                              | $\infty$                                                              | 9,503                                                       | 2,497 | 2,497 |                                                                         |
|     |                |                                            | —                              | 1,196                                                                 | —                                                           | —     | —1    |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,505                          | 0,0126                                                                | 12,88                                                       | 3,117 |       |                                                                         |
| 9   | 1,261<br>1,552 | 65,03<br>0<br>0,0380                       | {1}                            | 0,125                                                                 | —                                                           | —     |       | 16,00<br>0,0146<br>0,00204                                              |
|     |                |                                            | —1                             | 0,0117                                                                | 9,478                                                       | 2,522 | 2,522 |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,75                           | 0,0620                                                                | —                                                           | —     | —1    |                                                                         |
|     |                |                                            | 0,194                          | 0,125                                                                 | 12,90                                                       | 3,105 |       |                                                                         |
| 10  | 1,249<br>1,561 | 65,03<br>0,002<br>0                        |                                |                                                                       |                                                             |       |       |                                                                         |
|     |                |                                            |                                |                                                                       |                                                             |       |       |                                                                         |
|     |                |                                            |                                |                                                                       |                                                             |       |       |                                                                         |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,03$ , округляем значения аргумента и функции до двух цифр после запятой:  $x^* \approx x^{10} \approx (1,25; 1,56)^T$ ,  $f^* \approx f(x^{10}) \approx 65,03$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 8,064$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,38 \text{ Вт/м}^2.$$

Итеративный процесс можно продолжить подобным образом вплоть до достижения точки минимума  $x^* \approx (1,25; 1,562)^T$ . Итерации показаны на рисунке 6.17.

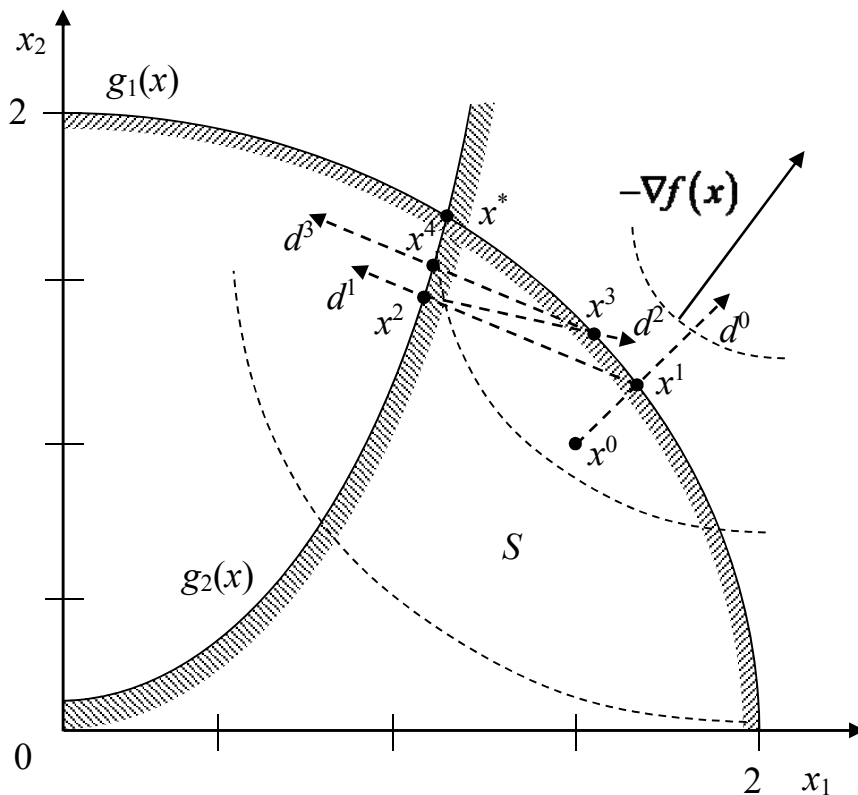


Рис. 6.17 – Область допустимых решений

#### 6.5.4 Метод условного градиента

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с ограничениями в виде прямоугольной области (6.9):

$$f(x) = 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min,$$

$$0 \leq x_1 \leq 10, \quad 0 \leq x_2 \leq 2.$$

Зададим  $x^0 = (1; 1)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.1$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ . Вычисляем  $f(x^0) = 75$ .

Шаг 1.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 1 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 17,205 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.3. Составим вспомогательную задачу:

$$-10(x_1 - 1) - 14(x_2 - 1) \rightarrow \min,$$

$$0 \leq x_1 \leq 10, \quad 0 \leq x_2 \leq 2.$$

Данную задачу можно решить графически либо симплекс-методом. Но, как было показано выше, проще воспользоваться соотношением (6.62, [1]):

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix} \Rightarrow y^0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.4. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\Phi(\alpha) = f(x^0 + \alpha(y^0 - x^0)) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 + 9\alpha \\ 1 + \alpha \end{pmatrix}\right) = 1 + (1 + 9\alpha - 6)^2 + (1 + \alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow$$

$$\Phi(\alpha) = 1 + (9\alpha - 5)^2 + (\alpha - 7)^2 \rightarrow \min.$$

Дифференцируем:

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = 18(9\alpha - 5) + 2(\alpha - 7) = 0, \quad \alpha \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 164\alpha = 104 \Rightarrow \alpha^0 \approx 0,634.$$

Шаг 1.5. Находим новое приближение оптимума:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0(y^0 - x^0) = \begin{pmatrix} 1 + 9\alpha \\ 1 + \alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6,707 \\ 1,634 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.6. Вычисляем  $f(x^1) \approx 42,02$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 5,742 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| \approx 32,98 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^1) \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot 6,707 - 12 \\ 2 \cdot 1,634 - 16 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,415 \\ -12,73 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^1)\| \approx 12,81 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 2.3. Составим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} 1,415(x_1 - 6,707) - 12,73(x_2 - 1,634) &\rightarrow \min, \\ 0 \leq x_1 \leq 10, \quad 0 \leq x_2 \leq 2. \end{aligned}$$

Решаем ее:

$$\nabla f(x^1) \approx \begin{pmatrix} 1,415 \\ -12,73 \end{pmatrix} \Rightarrow y^0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.4. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= f\left(x^1 + \alpha(y^0 - x^1)\right) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad \alpha \in [0,1] \Rightarrow \\ f\left(\begin{pmatrix} 6,707 \\ 1,634 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6,707 \\ 1,634 \end{pmatrix}\right)\right) &\approx f\left(\begin{pmatrix} 6,707 - 6,707\alpha \\ 1,634 + 0,366\alpha \end{pmatrix}\right) \approx \\ &\approx 1 + (6,707 - 6,707\alpha - 6)^2 + (1,634 + 0,366\alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ \Phi(\alpha) &\approx 1 + (-6,707\alpha + 0,707)^2 + (0,366\alpha - 6,366)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &\approx -13,414(-6,707\alpha + 0,707) + 0,732(0,366\alpha - 6,366) = 0, \quad \alpha \in [0,1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 90,24\alpha = 14,14 \Rightarrow \alpha^1 \approx 0,157. \end{aligned}$$

Шаг 2.5. Находим новое приближение оптимума:

$$x^2 = x^1 + \alpha^1(y^1 - x^1) \approx \begin{pmatrix} 6,707 - 6,707\alpha \\ 1,634 + 0,366\alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5,656 \\ 1,691 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.6. Вычисляем  $f(x^2) \approx 40,92$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 1,053 > \varepsilon_x, \quad |f(x^2) - f(x^1)| \approx 1,109 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 2$  и возвращаемся на шаг 2.

Результаты вычислений на следующих итерациях приведены в таблице 6.7.

Таблица 6.7 – Решение задачи методом условного градиента, случай 1

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$  | $y^k$   | $\alpha^k$ | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1}) - f(x^k) $ |
|-----|----------------|----------|------------------|---------|------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 1<br>1         | 75       | -10<br>-14       | 10<br>2 | 0,634      | 17,21<br>5,742<br>32,98                                                 |
| 1   | 6,707<br>1,634 | 42,02    | 1,415<br>-12,73  | 0<br>2  | 0,157      | 12,81<br>1,053<br>1,109                                                 |
| 2   | 5,656<br>1,691 | 40,92    | -0,688<br>-12,62 | 10<br>2 | 0,181      | 12,64<br>0,790<br>0,624                                                 |
| 3   | 6,444<br>1,747 | 40,29    | 0,888<br>-12,51  | 0<br>2  | 0,107      | 12,54<br>0,689<br>0,474                                                 |
| 4   | 5,756<br>1,774 | 39,82    | -0,488<br>-12,45 | 10<br>2 | 0,135      | 12,46<br>0,574<br>0,330                                                 |
| ... | ...            | ...      | ...              | ...     | ...        | ...                                                                     |

Окончание табл. 6.7

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$ | $y^k$  | $\alpha^k$ | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1}) - f(x^k) $ |
|-----|----------------|----------|-----------------|--------|------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 43  | 6,060<br>1,961 | 37,47    | 0,119<br>-12,08 | 0<br>2 | 0,0163     | 12,08<br>0,0985<br>0,0097                                               |
| 44  | 5,961<br>1,962 | 37,46    |                 |        |            |                                                                         |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,1$ , округляем значения аргумента и функции до одной цифры после запятой:  $x^* \approx x^{44} \approx (6,0; 2,0)^T$ ,  $f^* \approx f(x^{44}) \approx 37,5$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 6,124$  км.

Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 26,67 \text{ Вт/м}^2.$$

Как видно, метод сходится весьма медленно к точке оптимального решения  $x^* = (6; 2)^T$ . Хотя для других начальных точек, например  $x^0 = (2; 2)^T$ , точное решение находится всего за одну итерацию.

Также решим данную задачу с ограничениями (6.6)–(6.8):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Зададим  $x^0 = (1; 1)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.1$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ . Вычисляем  $f(x^0) = 75$ .

Шаг 1.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 1 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 17,205 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.3. Составим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} -10(x_1 - 1) - 14(x_2 - 1) &\rightarrow \min, \\ g(x) = 4 - x_1 - x_2 &\geq 0, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Это ЗЛП, которую можно решить графически или симплекс-методом. Но (как и ранее в решении данной задачи методом Франка – Вульфа), очевидно, что оптимальным будет решение с максимально возможным значением компонента  $x_2$ , поэтому  $y^0 = (0; 4)^T$ .

Шаг 1.4. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= f(x^0 + \alpha(y^0 - x^0)) \rightarrow \min_{\alpha}, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ 1 + 3\alpha \end{pmatrix}\right) = 1 + (1 - \alpha - 6)^2 + (1 + 3\alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ \Phi(\alpha) &= 1 + (-\alpha - 5)^2 + (3\alpha - 7)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Получим результат, аналогичный МФВ:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= -2(-\alpha - 5) + 6(3\alpha - 7) = 0, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 20\alpha = 32 \Rightarrow \alpha^0 = 1. \end{aligned}$$

Шаг 1.5. Находим новое приближение оптимума:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0(y^0 - x^0) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ 1 + 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.6. Вычисляем  $f(x^1) = 53$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 3,162 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| = 22 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Дальнейшие итерации решения также практически аналогичны результатам, полученным МФВ, сведем их в таблицу 6.8.

Таблица 6.8 – Решение задачи методом условного градиента, случай 2

| $k$ | $x^k$  | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$ | $y^k$  | $\alpha^k$ | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1}) - f(x^k) $ |
|-----|--------|----------|-----------------|--------|------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 1<br>1 | 75       | -10<br>-14      | 0<br>4 | 1          | 17,21<br>5,742<br>32,98                                                 |
| 1   | 0<br>4 | 53       | -12<br>-8       | 4<br>0 | 0,25       | 14,422<br>1,444<br>2                                                    |
| 2   | 1<br>3 | 51       | -10<br>-10      | 1<br>3 | 1          | 14,142<br>0<br>0                                                        |
| 3   | 1<br>3 | 51       |                 |        |            |                                                                         |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,1$ , округляем значения аргумента и функции до одной цифры после запятой:  $x^* = x^3 = (1,0; 3,0)^T$ ,  $f^* = f(x^3) = 51$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 7,141$  км.

Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 19,61 \text{ Вт/м}^2.$$

И, наконец, решим задачу с ограничением (6.2):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Зададим  $x^0 = (1; 1)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.1$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ . Вычисляем  $f(x^0) = 75$ .

Шаг 1.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 1 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 17,205 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.3. Составим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} 4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 &\rightarrow \min, \\ g(x) &= 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Данная задача является нелинейной. Но, учитывая, что ограничение имеет вид (6.63, [1]), где  $R_0 = 2$ ,  $a = (0; 0)^T$ , она легко решается:

$$y^0 = a - R_0 \frac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|} = -2 \frac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|} \approx \frac{-2}{17,205} \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,162 \\ 1,627 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.4. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= f(x^0 + \alpha(y^0 - x^0)) \rightarrow \min_{\alpha}, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ &f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \left(\begin{pmatrix} 1,162 \\ 1,627 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \approx f\left(\begin{pmatrix} 1 + 0,162\alpha \\ 1 + 0,627\alpha \end{pmatrix}\right) \approx \\ &\approx 1 + (1 + 0,162\alpha - 6)^2 + (1 + 0,627\alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ &\Phi(\alpha) \approx 1 + (0,162\alpha - 5)^2 + (0,627\alpha - 7)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &\approx 0,324(0,162\alpha - 5) + 1,254(0,627\alpha - 7) = 0, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0,839\alpha = 10,40 \Rightarrow \alpha^0 = 1. \end{aligned}$$

Шаг 1.5. Находим новое приближение оптимума:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0 (y^0 - x^0) \approx \begin{pmatrix} 1 + 0,162\alpha \\ 1 + 0,627\alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,162 \\ 1,627 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.6. Вычисляем  $f(x^1) \approx 65,01$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 0,648 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| \approx 9,989 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Остальные итерации решения сведем в таблицу 6.9.

Таблица 6.9 – Решение задачи методом условного градиента, случай 3

| $k$ | $x^k$          | $f(x^k)$ | $\nabla f(x^k)$  | $y^k$          | $\alpha^k$ | $\ \nabla f(x^k)\ ,$<br>$\ x^{k+1} - x^k\ ,$<br>$ f(x^{k+1}) - f(x^k) $ |
|-----|----------------|----------|------------------|----------------|------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 1<br>1         | 75       | -10<br>-14       | 1,162<br>1,627 | 1          | 17,21<br>0,648<br>9,989                                                 |
| 1   | 1,162<br>1,627 | 65,01    | -9,675<br>-12,75 | 1,209<br>1,593 | 1          | 16,00<br>0,0581<br>0,0101                                               |
| 2   | 1,209<br>1,593 | 65,00    |                  |                |            |                                                                         |

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,1$ , округляем значения аргумента и функции до одной цифры после запятой:  $x^* \approx x^2 \approx (1,2; 1,6)^T$ ,  $f^* \approx f(x^2) \approx 65,0$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 8,062$  км.

Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,39 \text{ Вт/м}^2.$$

## 6.6 Метод проекции градиента

### 6.6.1 Случай линейных ограничений

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с ограничениями (6.6)–(6.8):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g_1(x) &= 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ g_2(x) &= x_1 \geq 0, \\ g_3(x) &= x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $a_1 = (-1 \ -1)$ ,  $a_2 = (1 \ 0)$ ,  $a_3 = (0 \ 1)$ ,  $b_1 = -4$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 0$ . Зададим  $x^0 = (1; 0)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.03$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ . Вычисляем  $f(x^0) = 90$ .

Шаг 1.2. Вычисляем  $g_1(x^0) = 3$ ,  $g_2(x^0) = 1$ ,  $g_3(x^0) = 0$ ,

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 0 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 18,868 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.3. Составляем матрицу  $A$ . Активным является ограничение  $g_3(x^0) = 0$ , поэтому

$$A = a_3 = (0 \ 1).$$

Шаг 1.4. Находим проекционный оператор и вектор проекции:

$$\begin{aligned}
P &= I - A^T (AA^T)^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( (0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot (0 \ 1) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
S^0 &= -P \cdot \nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Шаг 1.5. Так как  $\|S^0\| = 10 > \varepsilon_x$ , переходим на шаг 6.

Шаг 1.6. Определяем максимальную длину шага:

$$a_1 S^0 = (-1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = -10, \quad b_1 - a_1 x^0 = -4 - (-1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3,$$

$$a_2 S^0 = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 10, \quad b_2 - a_2 x^0 = 0 - (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

$$a_3 S^0 = (0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad b_3 - a_3 x^0 = 0 - (0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3}{-10} \text{ для } g_1 \\ \infty \text{ для } g_2, \text{ т.к. } \frac{-1}{10} < 0 \\ \infty \text{ для } g_3, \text{ т.к. } a_3 S^0 = 0 \end{array} \right\} = 0,3.$$

Шаг 1.7. Решаем задачу одномерного поиска:

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= f(x^0 + \alpha S^0) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 0,3 \Rightarrow \\
f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 1+10\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + (1+10\alpha-6)^2 + 8^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\
\Phi(\alpha) &= 65 + (10\alpha-5)^2 \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= 20(10\alpha-5) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 0,3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 200\alpha = 100 \Rightarrow \alpha^0 = 0,3.
\end{aligned}$$

Шаг 1.8. Находим новое приближение оптимума:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0 S^0 = \begin{pmatrix} 1 + 10\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.9. Вычисляем  $f(x^1) = 53$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| = 3 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| = 21 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычисляем  $g_1(x^1) = 0$ ,  $g_2(x^1) = 4$ ,  $g_3(x^1) = 0$ ,

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 12 \\ 2 \cdot 0 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^1)\| \approx 16,492 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 2.3. Составляем матрицу  $A$ . Активными являются ограничения  $g_1(x^1) = 0$  и  $g_3(x^1) = 0$ , поэтому

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.4. Находим проекционный оператор и вектор проекции:

$$\begin{aligned} P &= I - A^T (AA^T)^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S^1 &= -P \cdot \nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 2.5. Так как  $\|S^1\| = 0 < \varepsilon_x$ , вычисляем множители Лагранжа  $\lambda$ :

$$\lambda = (AA^T)^{-1} \cdot A \cdot \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Наибольший по модулю множитель Лагранжа соответствует ограничению  $g_3(x)$ , исключаем его из множества активных ограничений:

$$A = a_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Возвращаемся на шаг 4.

Шаг 2.4'. Находим проекционный оператор и вектор проекции:

$$\begin{aligned} P &= I - A^T (AA^T)^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$S^1 = -P \cdot \nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.5'. Так как  $\|S^1\| \approx 8,485 > \varepsilon_x$ , переходим на шаг 6.

Шаг 2.6. Определяем максимальную длину шага:

$$a_1 S^1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0, \quad b_1 - a_1 x^1 = -4 - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$a_2 S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -6, \quad b_2 - a_2 x^1 = 0 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -4,$$

$$a_3 S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6, \quad b_3 - a_3 x^1 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \min \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ для } g_1, \text{ т.к. } a_1 S^1 = 0 \\ \frac{-4}{-6} \text{ для } g_2 \\ \infty \text{ для } g_3, \text{ т.к. } \frac{b_3 - a_3 x^1}{a_3 S^1} = 0 \end{array} \right\} = \frac{2}{3}.$$

Шаг 2.7. Решаем задачу одномерного поиска:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= f(x^1 + \alpha S^1) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \\ f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 4 - 6\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix}\right) = 1 + (4 - 6\alpha - 6)^2 + (6\alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ \Phi(\alpha) &= 1 + (-6\alpha - 2)^2 + (6\alpha - 8)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= -12(-6\alpha - 2) + 12(6\alpha - 8) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 144\alpha = -72 \Rightarrow \alpha^0 = 0,5. \end{aligned}$$

Шаг 2.8. Находим новое приближение оптимума:

$$x^2 = x^1 + \alpha^1 S^1 = \begin{pmatrix} 4 - 6\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.9. Вычисляем  $f(x^2) = 51$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| \approx 4,243 > \varepsilon_x, \quad |f(x^2) - f(x^1)| = 18 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 3.2. Вычисляем  $g_1(x^2) = 0$ ,  $g_2(x^2) = 1$ ,  $g_3(x^2) = 3$ ,

$$\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 3 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^2)\| \approx 14,142 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 3.3. Составляем матрицу  $A$ . Активным является ограничение  $g_1(x^2) = 0$ , поэтому

$$A = a_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.4. Проекционный оператор для данного активного ограничения мы уже находили выше:

$$\begin{aligned} P &= I - A^T (AA^T)^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left( (-1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot (-1 \ -1) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1 \ -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

находим вектор проекции:

$$S^2 = -P \cdot \nabla f(x^2) = - \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.5. Так как  $\|S^2\| = 0 < \varepsilon_x$ , вычисляем множители Лагранжа  $\lambda$ :

$$\lambda = (AA^T)^{-1} \cdot A \cdot \nabla f(x^2) = \frac{1}{2} \cdot (-1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} = 10.$$

Все  $\lambda_i \geq 0$ , таким образом, точка  $x^2$  удовлетворяет условиям Куна – Таккера. Полагаем  $x^* = x^2$  и заканчиваем решение.

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,03$ , округляем значения аргумента и функции до двух цифр после запятой:  $x^* = x^3 = (1,00; 3,00)^T$ ,  $f^* = f(x^3) = 51$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 7,141$  км. Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 19,61 \text{ Вт/м}^2.$$

### 6.6.2 Случай нелинейных ограничений

Решим задачу определения наилучшего положения приемной антенны с ограничением (6.2):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Зададим  $x^0 = (1; 1)^T \in S$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.1$ . Определим константу Липшица:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\|}{\|x' - x''\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2x'_1 - 12 \\ 2x'_2 - 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x''_1 - 12 \\ 2x''_2 - 16 \end{pmatrix} \right\|}{\|x' - x''\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2x'_1 - 2x''_1 \\ 2x'_2 - 2x''_2 \end{pmatrix} \right\|}{\|x' - x''\|} = \\ &= 2 \frac{\|x' - x''\|}{\|x' - x''\|} = 2. \end{aligned}$$

Если ограничение задачи переписать в виде  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4$ , то очевидно, что оно является кругом в пространстве  $R^2$  с центром в точке  $(0; 0)$  и радиусом  $R_0 = 2$ .

Шаг 1.1. Выполняем присваивание  $k = 0$ . Вычисляем  $f(x^0) = 75$ .

Шаг 1.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 12 \\ 2 \cdot 1 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^0)\| \approx 17,205 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 1.3. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= f(x^0 - \alpha \nabla f(x^0)) \rightarrow \min_{\alpha} \Rightarrow \\ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 + 10\alpha \\ 1 + 14\alpha \end{pmatrix}\right) = 1 + (1 + 10\alpha - 6)^2 + (1 + 14\alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\ \Phi(\alpha) &= 1 + (10\alpha - 5)^2 + (14\alpha - 7)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= 20(10\alpha - 5) + 28(14\alpha - 7) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 592\alpha = 296 \Rightarrow \alpha^0 = 0,5.\end{aligned}$$

Отметим, что если воспользоваться вторым способом определения длины шага, получится аналогичное значение:

$$\alpha^0 = \frac{1}{\Lambda} = 0,5.$$

Шаг 1.4. Находим новое приближение оптимума:

$$x^1 = P_S \left[ x^0 - \alpha^0 \nabla f(x^0) \right] = P_S(1 + 10\alpha; 1 + 14\alpha) = P_S(6; 8).$$

Так как точка  $z = (6; 8)^T \notin S$  (ограничение в этой точке  $g(z) = -96 < 0$ ), находим ее проекцию на ОДР:

$$x^1 = \frac{z}{\sqrt{\sum_{j=1}^n z_j^2}} R_0 = \frac{(6; 8)^T}{\sqrt{100}} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.5. Вычисляем  $f(x^1) = 65$ . Условия останова итерационного процесса не выполняются:

$$\|x^1 - x^0\| \approx 0,632 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1) - f(x^0)| = 10 > \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $k = 1$  и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2.2. Вычисляем

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1,2 - 12 \\ 2 \cdot 1,6 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9,6 \\ -12,8 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\nabla f(x^1)\| = 16 > \varepsilon_y$ , продолжаем вычисления.

Шаг 2.3. Выполним одномерный поиск вдоль прямой:

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= f\left(x^1 - \alpha \nabla f(x^1)\right) \rightarrow \min_{\alpha} \Rightarrow \\
f\left(\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} -9,6 \\ -12,8 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 1,2 + 9,6\alpha \\ 1,6 + 12,8\alpha \end{pmatrix}\right) = \\
&= 1 + (1,2 + 9,6\alpha - 6)^2 + (1,6 + 12,8\alpha - 8)^2 \rightarrow \min \Rightarrow \\
\Phi(\alpha) &= 1 + (9,6\alpha - 4,8)^2 + (12,8\alpha - 6,4)^2 \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} &= 19,2(9,6\alpha - 4,8) + 25,6(12,8\alpha - 6,4) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 512\alpha = 256 \Rightarrow \alpha^1 = 0,5.
\end{aligned}$$

Шаг 2.4. Находим новое приближение оптимума:

$$x^2 = P_S \left[ x^1 - \alpha^1 \nabla f(x^1) \right] = P_S(1,2 + 9,6\alpha; 1,6 + 12,8\alpha) = P_S(6;8).$$

Так как точка  $z = (6;8)^T \notin S$  (ограничение в этой точке  $g(z) = -96 < 0$ ), находим ее проекцию на ОДР:

$$x^2 = \frac{z}{\sqrt{\sum_{j=1}^n z_j^2}} R_0 = \frac{(6;8)^T}{\sqrt{100}} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.5. Вычисляем  $f(x^2) = 65$ . Условия останова итерационного процесса выполняются:

$$\|x^2 - x^1\| = 0 < \varepsilon_x, \quad |f(x^2) - f(x^1)| = 0 < \varepsilon_y,$$

поэтому полагаем  $x^* = x^2$  и заканчиваем решение.

С учетом того, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,03$ , округляем значения аргумента и функции до двух цифр после запятой:  $x^* = x^2 = (1,20; 1,60)^T$ ,  $f^* = f(x^2) = 65$ . Расстояние от антенны до вышки составит  $\sqrt{f^*} \approx 8,062$  км.

Интенсивность принимаемого сигнала

$$E^* = \frac{1000}{1 + (x_1^* - 6)^2 + (x_2^* - 8)^2} \approx 15,39 \text{ Вт/м}^2.$$

## 7 КРАТКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

В данной справочной главе кратко рассмотрены некоторые математические сведения из школьного курса алгебры и математики, а также вузовского курса высшей математики, необходимые для успешного понимания теоретических разделов методов оптимизации и решения практических оптимизационных задач.

### 7.1 Приближенные числа

**Точные и приближенные числа.** Числа, встречающиеся на практике, бывают *точными* и *приближенными*. Точное число  $A$  дает истинное значение величины, приближенное число  $a$  – только приблизительное значение. При выполнении различных действий над числами записать точное число иногда не представляется возможным (например, когда результат вычислений является периодической дробью или иррациональным числом). В этом случае удобно пользоваться приближенными числами.

**Округление.** Одним из способов получения приближенных чисел является *округление*. Округлять можно как точные, так и приближенные числа.

*Округлением* данного числа до некоторого разряда  $n$  называют замену его новым числом, которое получается из данного путем отбрасывания всех его цифр, записанных правее цифры этого разряда, или путем замены их нулями. При округлении учитывают следующее:

- если первая (слева) из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю оставленную цифру не изменяют (округление с *недостатком*);
- если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на 1 (округление с *избытком*).

*Примеры:*

1. Округлим до десятых число  $A = 12,34$ . Ответ:  $a \approx 12,3$ .
2. Округлим до сотых число  $A = 3,2465$ . Ответ:  $a \approx 3,25$ .

3. Округлим до тысячных число  $A = 3,4335$ . Ответ:  $a \approx 3,434$ .

4. Округлим до тысяч число  $A = 12347$ . Ответ:  $a \approx 12000$ .

**Абсолютная и относительная погрешности.** Разность между точным числом и его приближенным значением называется *абсолютной погрешностью* (АП) приближенного числа:

$$\Delta = |A - a|. \quad (7.1)$$

Например, если точное число  $A = 1,214$  округлить до десятых, получим приближенное число  $a = 1,2$ . В данном случае абсолютная погрешность приближенного числа равна  $|1,214 - 1,2| = 0,014$ . Но в большинстве случаев известно только приближенное значение рассматриваемой величины. Тогда абсолютную погрешность определить невозможно. В этих случаях указывают границу, которую она не превышает. Это число называют *граничной абсолютной погрешностью* (ГАП). ГАП приближенного числа  $a$  обозначают символом  $\Delta a$  ( $\Delta a \geq 0$ ). Говорят, что точное значение числа равно его приближенному значению с погрешностью меньшей, чем ГАП:

$$A \approx a \pm \Delta a. \quad (7.2)$$

То есть точное значение величины  $A$  находится в промежутке между числами  $a - \Delta a$  и  $a + \Delta a$ , которые называют, соответственно, *нижней и верхней границами* числа  $A$ .

Если АП приближенного числа  $a$  не превышает единицы разряда, выражаемого  $n$ -й значащей цифрой в десятичной записи этого числа, то  $a$  называется числом, имеющим  $n$  *верных знаков в широком смысле*. Если же АП не превышает половины единицы разряда, выражаемого  $n$ -й значащей цифрой, то приближенное число  $a$  называется числом, имеющим  $n$  *верных знаков в узком смысле*.

*Пример:* Точная запись величины

$$A = \sqrt{5} = 2,236067978...$$

является иррациональным числом. Пусть  $a_1 = 2,236$  – приближенное значение числа  $A$ . Тогда в узком смысле число  $a_1$  имеет четыре верных знака:

$$A = a_1 \pm 0,0005.$$

Пусть  $a_2 = 2,24$ , тогда в широком смысле число  $a_2$  имеет три верных знака:

$$A = a_2 \pm 0,01.$$

АП или ГАП не характеризует качество выполненного измерения. Например, если найдено приближенное значение  $a = 11,999$  точного числа  $A = 12$ , то в данном случае АП  $\Delta = |12 - 11,999| = 0,001$  имеет достаточно малый порядок. Но если с такой же погрешностью найдено приближенное значение  $a = 0,002$  точного числа  $A = 0,003$ , то очевидно, что в этом случае погрешность слишком велика. В худшем случае величина погрешности может превышать значение измеряемой величины. Поэтому чаще всего целесообразно использовать относительную оценку погрешности.

*Относительной погрешностью* (ОП) приближенного числа называется отношение АП к величине приближенного числа:

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} = \left| \frac{A - a}{a} \right|. \quad (7.3)$$

Отношение ГАП к приближенному числу называют *границей относительной погрешностью* (ГОП):

$$\delta = \frac{\Delta a}{|a|}. \quad (7.4)$$

ОП и ГОП чаще всего выражают в процентах. Для этого величину ОП или ГОП необходимо умножить на 100%. Например, если  $A = 12$ ,  $a = 11,999$ , то  $\delta = 0,008\%$ , а для  $A = 0,003$ ,  $a = 0,002$  получим  $\delta = 50\%$ . Хотя, как было показано выше, АП этих измерений совпадают.

*Пример.* Пусть  $a_1 = 2,236$  – приближенное значение числа  $A = \sqrt{5}$ . Тогда ОП

$$\delta = \left| \frac{A-a}{a} \right| = \left| \frac{2,236067978... - 2,236}{2,236} \right| \cdot 100\% \approx 0,003\%.$$

Для ГАП в узком смысле ГОП составит

$$\delta = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{0,0005}{2,236} \cdot 100\% \approx 0,022\%.$$

Найдем ОП для  $a_2 = 2,24$ :

$$\delta = \left| \frac{A-a}{a} \right| = \left| \frac{2,236067978... - 2,24}{2,24} \right| \cdot 100\% \approx 0,176\%.$$

Для ГАП в широком смысле ГОП составит

$$\delta = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{0,01}{2,24} \cdot 100\% \approx 0,446\%.$$

Для относительной погрешности справедливы следующие неравенства. В узком смысле

$$\delta \leq \left( \frac{1}{\alpha_m} \right) \cdot 10^{-n+1}, \quad (7.5)$$

где  $\alpha_m$  – первая значащая цифра числа  $a$ ,  $n$  – количество верных знаков.

В широком смысле

$$\delta \leq \left( \frac{2}{\alpha_m} \right) \cdot 10^{-n+1}. \quad (7.6)$$

Для решения обратной задачи – определения количества верных знаков  $n$  числа  $a$ , если известна его относительная погрешность  $\delta$ , можно воспользоваться формулой (7.5) в форме

$$N = 1 - \lg(\alpha_m \cdot \delta), \quad (7.7)$$

и в качестве  $n$  взять ближайшее к  $N$  целое число.

## 7.2 Уравнения и неравенства

### 7.2.1 Решение уравнений

Два выражения, соединенные знаком « $\Rightarrow$ », образуют *равенство*. В математике равенства употребляются в двух случаях:

– когда утверждают, что данные выражения равны. В этом случае равенство называется *тождеством*. Если тождество выполняется при любых значениях переменных, входящих в выражения, либо выражения не содержат переменных, равенство можно заменить знаком тождественного равенства « $\equiv$ »;

– когда ставят вопрос – при каких условиях эти выражения равны? В этом случае имеем *уравнение*. Переменные, значения которых нужно определить, решая уравнение, называются *неизвестными*. Переменные, не являющиеся неизвестными, называются *параметрами*. Числа, входящие в уравнение, называются *константами*.

**Понятие решения уравнения.** Значения неизвестных, при которых уравнение обращается в тождество, называется *решением* уравнения. Если в уравнении одно неизвестное, то решение также называется *корнем* уравнения.

*Пример.*

1. Если в уравнение  $3x + 7 = 13$  вместо неизвестного  $x$  подставить значение 2, то получим тождество  $3 \cdot 2 + 7 = 13$ . Следовательно,  $x = 2$  – решение (корень) данного уравнения.

2. Уравнение  $2x + c = 3$ , где  $x$  – неизвестное, а  $c$  – параметр, имеет решение  $x = 0,5(3 - c)$ , т. к.  $2 \cdot 0,5 \cdot (3 - c) + c = 3$  – тождество.

3. Уравнение  $x^2 + 2y = 7$  с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  имеет множество решений. Пара значений  $x = 1$  и  $y = 3$  удовлетворяет этому уравнению, т. к.  $1^2 + 2 \cdot 3 = 7$ . То есть эта пара является одним из решений данного

уравнения. Существуют и другие решения, например,  $x = -1$ ,  $y = 3$ ;  $x = 3$ ,  $y = -1$  и т. д.

4. Уравнение  $x + 8 = x + 5$  не имеет решений (корней), т. к. при любых значениях неизвестного  $x$  левая часть больше правой части.

5. Уравнение  $5(x - 3) + 2 = 3(x - 4) + 2x - 1$  является тождеством при любом значении неизвестного  $x$ . Следовательно, его решением является любое рациональное значение  $x$ .

**Решение уравнений.** Способы решения различных уравнений приведены в [18]. Рассмотрим некоторые из них.

1. Решение (корень) линейного уравнения  $ax + b = 0$  есть

$$x = -\frac{b}{a}. \quad (7.8)$$

2. Квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет решения (корни)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad (7.9)$$

где  $D = b^2 - 4ac$  – так называемый *дискриминант*. Таким образом, если  $D > 0$ , уравнение имеет два решения, если  $D = 0$  – решение одно, если  $D < 0$  – уравнение не имеет рациональных решений.

3. Кубическое уравнение, а также уравнения с полиномами более высоких степеней в правой части, т. е. уравнения вида

$$f(x) = 0, \quad (7.10)$$

где  $f(x)$  – полином степени  $n$ :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad a_n \neq 0,$$

в общем случае не имеют аналитического решения.

Разделим обе части уравнения (7.10) на  $a_n$ :

$$\frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_2}{a_n}x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + x^n = 0$$

или

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0, \quad (7.11)$$

где  $b_i = a_i/a_n$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Пусть уравнение (7.11) имеет решения (корни)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тогда (7.10) можно переписать в виде

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0. \quad (7.12)$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} x^n - \left( \sum_i x_i \right) x^{n-1} + \left( \sum_{i \neq j} x_i x_j \right) x^{n-2} - \left( \sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k \right) x^{n-3} + \\ + \dots + (-1)^{n-1} \left( \sum_i \prod_{i \neq j} x_j \right) x + (-1)^n \left( \prod_i x_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Например:

$$(x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq,$$

$$(x - p)(x - q)(x - r) = x^3 - (p + q + r)x^2 + (pq + pr + qr)x - pqr,$$

и т. д. В таком случае, приравнявая коэффициенты (7.11) и (7.13) при одинаковых степенях неизвестного  $x^i$ , получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_i x_i &= -b_{n-1}, \\ \sum_{i \neq j} x_i x_j &= +b_{n-2}, \\ \sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k &= -b_{n-3}, \\ &\dots \\ \sum_i \prod_{i \neq j} x_j &= (-1)^{n-1} b_1, \\ \prod_i x_i &= (-1)^n b_0. \end{aligned} \right. \quad (7.14)$$

Корни уравнения (7.10) являются решениями системы (7.14) (подробнее о решении систем уравнений – далее). Однако решить ее аналитически при  $n > 2$ , в общем случае, не получится, т. к. это снова приведет к решению уравнения степени  $n$ .

*Пример.* Решить уравнение

$$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0.$$

Сначала приведем его к виду (7.11), разделив на  $a_n = a_3 = -1$ :

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Корни данного уравнения можно получить из решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5, \\ x_1x_2x_3 = 3. \end{cases}$$

В общем виде эта система не решается. Если решить исходное уравнение численно (используя методы вычислительной математики), получим два корня:  $x = -1$  и  $x = 3$ . Если численно решить полученную систему уравнений, получим решение  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 3$ . Это только одно из решений системы, т. к. от перестановки компонентов решения системы местами они не перестают быть корнями исходного уравнения.

Заметим, что численное решение исходного уравнения дает два корня, а численное решение системы уравнений – три. Причина в том, что корень  $x = -1$  является *кратным*. Понятие кратности вводилось ранее в курсе «Вычислительная математика» или «Численные методы». В общем случае, если корень  $x_i$  уравнения (7.10) имеет кратность  $k$ , то это означает, что в уравнении (7.12) множитель  $(x - x_i)$  встречается  $k$  раз.

*Пример.* Так,

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x + 1)(x - 3) = (x + 1)^2(x - 3).$$

Чтобы разложить на множители полином в исходном уравнении, необходимо полином в уравнении (7.12) умножить на  $a_n$ :

$$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = -(x + 1)^2(x - 3).$$

В данном случае корень  $x = -1$  имеет кратность  $k = 2$ , а корень  $x = 3$  – кратность  $k = 1$ .

Рассмотрим частные случаи, когда уравнение (7.10) можно решить аналитически. Его еще называют *алгебраическим* уравнением. Линейные и квадратные уравнения – частные случаи алгебраических уравнений.

3.1. Если в кубическом уравнении  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  коэффициент  $d = 0$ , то

$$ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c) = 0.$$

То есть имеем одно решение  $x = 0$ , а остальные решения получаем из квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ . То есть всего исходное уравнение может иметь от одного до трех корней.

3.2. Если в уравнении четвертой степени  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  коэффициенты  $b = 0$  и  $d = 0$ , т. е. имеем *биквадратное* уравнение

$$ax^4 + cx^2 + e = 0,$$

то, введя обозначение  $y = x^2$ , получим

$$ay^2 + cy + e = 0.$$

Таким образом, получили квадратное уравнение. Решая его, получим значения  $y$  (от нуля до двух корней). Если данное уравнение имеет хотя бы один действительный корень, то находим значения неизвестных  $x$ :

$$x = \pm\sqrt{y}.$$

Это частный случай решения квадратного уравнения. Действительно, если уравнение  $y = x^2$  переписать в виде  $x^2 + 0x - y = 0$ , где  $y$  – параметр, то его решением будет

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot (-y)}}{2} = \pm\sqrt{y}.$$

Таким образом, исходное уравнение  $ax^4 + cx^2 + e = 0$  может иметь от нуля до четырех решений (корней).

3.3. Если в уравнении (7.10) каким-то способом было найдено одно решение  $x = x'$ , то остальные решения можно найти из уравнения

$$\frac{f(x)}{x-x'}=0. \quad (7.15)$$

Для деления полинома  $f(x)$  на полином 1-й степени  $x-x'$  целесообразно воспользоваться алгоритмом Эвклида.

*Пример.* Найти решения уравнения

$$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0.$$

Ранее было показано, что произведение корней данного уравнения равно 3. Следовательно, если корни целые, то это могут быть только числа  $\pm 1$  и  $\pm 3$ . Пусть методом подбора одно решение найдено, это  $x = -1$ . Согласно (7.15), разделим левую часть уравнения на полином  $(x+1)$ , используя алгоритм Эвклида:

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 + 5x + 3 \quad |x+1 \\ -x^3 - x^2 \qquad \qquad -x^2 + 2x + 3 \\ \hline 2x^2 + 5x \\ 2x^2 + 2x \\ \hline +3x + 3 \\ +3x + 3 \\ \hline +0 \end{array}$$

Таким образом,

$$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = (x+1)(-x^2 + 2x + 3).$$

Решая далее квадратное уравнение  $-x^2 + 2x + 3$ , получим еще два решения исходного уравнения  $x = -1$  и  $x = 3$ . Следовательно,

$$(x+1)(-x^2 + 2x + 3) = -(x+1)^2(x-3),$$

что соответствует полученному ранее результату.

4. Решение иррациональных и трансцендентных уравнений. *Иррациональными* называются уравнения, в которых хотя бы один член содержит иррациональную операцию (например, квадратный или кубический корень). *Трансцендентными* называются уравнения, в которых хотя бы один

член содержит трансцендентную операцию (например, логарифм, синус, тангенс и т. д.).

В общем случае такие уравнения не имеют аналитического решения. Однако в некоторых частных случаях аналитическое решение существует.

4.1. Например, если иррациональный член в уравнении всего один, т. е. уравнение можно переписать в виде

$$f_1(x) = f_2(x), \quad (7.16)$$

где выражение  $f_1(x)$  содержит единственный иррациональный член, а выражение  $f_2(x)$  иррациональных и трансцендентных членов не имеет. Тогда можно попытаться избавиться от иррациональности в левой части уравнения.

*Пример.* Решить уравнение

$$\sqrt{x-7} - x + 13 = 0.$$

Так как под квадратным корнем находится выражение  $x-7$ , то любой корень данного уравнения должен быть  $x \geq 7$ . Перепишем уравнение в виде (7.16):

$$\sqrt{x-7} = x-13.$$

Так как результат вычисления корня не может быть отрицательным, то получаем еще одно ограничение для решений этой системы:

$$x-13 \geq 0 \Rightarrow x \geq 13.$$

После этого возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x-7 = x^2 - 26x + 169.$$

Таким образом, корни исходного уравнения находятся из решения задачи

$$x^2 - 27x + 176 = 0, \quad x \geq 7, \quad x \geq 13.$$

Так как условие  $x \geq 13$  более жесткое, чем  $x \geq 7$ , можно оставить только его. Решение квадратного уравнения  $x^2 - 27x + 176 = 0$  дает два

корня:  $x = 11$  и  $x = 16$ . Первый из них отбрасываем, т. к. он не удовлетворяет условию  $x \geq 13$ . Следовательно, решением исходного уравнения будет  $x = 16$ .

4.2. Если в левой части уравнения находится только один трансцендентный член, а правая часть уравнения является константой, т. е. уравнение имеет вид

$$f(x) = \text{const}, \quad (7.17)$$

где выражение  $f(x)$  содержит единственный трансцендентный член, то такие уравнения имеют известные аналитические решения:

1. Уравнение  $\ln g(x) = \text{const}$  имеет решение  $g(x) = e^{\text{const}}$ .
2. Уравнение  $\sin g(x) = \text{const}$  при условии  $|\text{const}| \leq 1$  имеет решение  $g(x) = \arcsin \text{const} + 2\pi k$ , где  $k \in Z$ .
3. Уравнение  $n^{g(x)} = \text{const}$ ,  $\text{const} > 0$ , где  $n$  – константа или параметр, имеет решение  $g(x) = \log_n \text{const}$  и т. д.

*Пример.* Решить уравнение

$$\ln(x+1) - 2 = 0.$$

Приведем его к виду (7.17):

$$\ln(x+1) = 2.$$

Тогда

$$x+1 = e^2 \Rightarrow x = e^2 - 1.$$

4.3. Если заменой иррациональных или трансцендентных членов уравнения его удастся преобразовать к алгебраическому уравнению, то оно решается одним из рассмотренных ранее способов.

*Пример 1.* Решить уравнение

$$\ln^2 x + \ln x^2 = 3.$$

Приведем уравнение к виду

$$\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0.$$

Сделаем замену  $y = \ln x$ :

$$y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения дает  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -3$ . Найдем решение исходного уравнения:

$$\ln x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = e,$$

$$\ln x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = e^{-3}.$$

*Пример 2.* Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Из тригонометрии известно, что  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , поэтому получим

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} &= 1 \Rightarrow \\ \sqrt{1 - \sin^2 x} &= 1 - \sin x. \end{aligned}$$

Это частный случай (7.16). Избавимся от корня, возведя обе части уравнения в квадрат (т. к. выражение  $1 - \sin x \geq 0$  является тождеством, дополнительные ограничения в решении не появляются):

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 x &= (1 - \sin x)^2 \Rightarrow \\ 1 - \sin^2 x &= 1 - 2\sin x + \sin^2 x. \end{aligned}$$

Далее делаем замену  $y = \sin x$ , находим  $y$ , затем  $x$  по известной схеме.

5. Уравнения, содержащие неизвестные в знаменателе. Если уравнение имеет вид

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0, \tag{7.18}$$

то его решение совпадает с решением уравнения  $f(x) = 0$ , за исключением того, что отбрасываются корни, являющиеся решениями уравнения  $g(x) = 0$ .

*Пример.* Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{x^2} = 0.$$

Решение уравнения  $\sin 2x = 0$  дает корни

$$\begin{aligned} 2x &= \arcsin 0 + 2\pi k = 2\pi k \Rightarrow \\ x &= \pi k, \quad k \in Z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

То есть уравнение имеет множество решений  $x = 0$ ,  $x = \pm\pi$ ,  $x = \pm 2\pi$  и т. д. Однако решение  $x = 0$  является также решением уравнения  $x^2 = 0$ , поэтому его отбрасываем. Окончательно имеем  $x = \pi k$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Аналогичным образом поступаем, когда дробей в уравнении несколько:

$$\sum_{i=1}^n \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = 0, \quad (7.19)$$

где выражения  $f_i(x)$  и  $g_i(x)$  могут содержать константы, параметры и неизвестные. Сначала выражение нужно свести к одной дроби:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \cdot \frac{\prod_{j \neq i} g_j(x)}{\prod_{j \neq i} g_j(x)} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \left[ f_i(x) \cdot \prod_{j \neq i} g_j(x) \right]}{\prod_{i=1}^n g_i(x)} = 0. \quad (7.20)$$

Или сначала привести их к наименьшему общему знаменателю и сложить, если это возможно. Тогда корни уравнения (7.19) будут являться решениями задачи

$$\sum_{i=1}^n \left[ f_i(x) \cdot \prod_{j \neq i} g_j(x) \right] = 0, \quad g_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.21)$$

*Пример.* Решить уравнение

$$\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+2} = \frac{13}{x^2 + x - 2}.$$

Приведем его к виду (7.19):

$$\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+2} - \frac{13}{x^2+x-2} = 0.$$

Согласно (7.20),

$$\frac{2(x+2)(x^2+x-2) + 5(x-1)(x^2+x-2) - 13(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x^2+x-2)} = 0,$$

и решения исходного уравнения можно найти из условия

$$\begin{aligned} 2(x+2)(x^2+x-2) + 5(x-1)(x^2+x-2) - 13(x-1)(x+2) &= 0, \\ x-1 \neq 0, \quad x+2 \neq 0, \quad x^2+x-2 \neq 0. \end{aligned}$$

Однако если учесть, что  $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$ , то можно сначала уравнение привести к общему знаменателю:

$$\frac{2(x+2) + 5(x-1) - 13}{x^2+x-2} = 0.$$

Получим более простую задачу

$$2(x+2) + 5(x-1) - 13 = 0, \quad x^2+x-2 \neq 0.$$

Решение данного линейного уравнения  $x = 2$  удовлетворяет условию  $x^2+x-2 \neq 0$ , поэтому является решением исходного уравнения.

### 7.2.2 Решение систем уравнений

Если находят общее решение двух и более уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют *систему*. Чтобы показать, что данные уравнения образуют систему, обычно их записывают одно под другим и объединяют фигурной скобкой:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

или, кратко,

$$F(x) = 0. \quad (7.23)$$

Если в уравнения  $f_i(x)$  входит константа, то иногда их записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x) = \text{const}_1, \\ f_2(x) = \text{const}_2, \\ \dots \\ f_n(x) = \text{const}_n. \end{cases}$$

Каждый набор неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , который одновременно удовлетворяет всем уравнениям системы, называется *решением системы*. В общем случае система имеет решения, если количество неизвестных в ней равно количеству уравнений ( $n = m$ ). Если уравнений меньше, чем неизвестных ( $n < m$ ), то такая система называется *недоопределенной* и обычно имеет бесконечное множество решений. Если уравнений больше, чем неизвестных ( $n > m$ ), то система называется *переопределенной*, и часто решений не имеет. Система, не имеющая решений, называется *несовместимой*.

При решении переопределенной системы любые  $n$  ее неизвестных (переменных) можно считать *базисными* (или зависимые). Тогда остальные  $m - n$  неизвестных (переменных) являются *независимыми*. Независимым неизвестным можно присваивать любые значения (не противоречащие уравнениям системы), а значения базисных неизвестных можно находить, решая систему.

*Пример 1.* Система уравнений

$$\begin{cases} xy = -5, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

является несовместимой, т. к. второе уравнение требует, чтобы выполнялись условия  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Но в таком случае произведение неизвестных не может быть отрицательным, как этого требует уравнение 1.

*Пример 2. Система уравнений*

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

переопределена, т. к. в ней  $n = 2$  уравнения и  $m = 1$  неизвестное. В итоге она не имеет решений, т. к. синус и косинус не могут быть равны 1 для одного и того же значения неизвестного  $x$ .

*Пример 3. Система уравнений*

$$\begin{cases} xyz = -5, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

недоопределена, т. к. в ней  $n = 2$  уравнения и  $m = 3$  неизвестных. Примем за базисные переменные  $x$  и  $y$ , а  $z$  – свободная переменная. Очевидно, что ей можно присваивать любые значения в диапазоне  $(-\infty, 0)$ , тогда система будет иметь решения. Например, если принять  $z = -5$ , система

$$\begin{cases} -5xy = -5, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

будет иметь решение  $x = 1$ ,  $y = 1$ . Следовательно, значения неизвестных  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = -5$  являются одним из решений исходной системы. В целом она, как отмечалось выше, имеет бесконечное множество решений.

При решении систем уравнений используют разные подходы, среди которых:

1. *Способ алгебраического сложения.* Учитывая, что умножение любого уравнения системы (7.22) на произвольную константу  $k \neq 0$  не влияет на решение системы, можно сформулировать правило: если в двух уравнениях системы есть два члена, которые совпадают с точностью до коэффициента пропорциональности  $k$ , например

$$\begin{cases} f_i(x) = f'_i(x) + a \cdot g(x) = 0, \\ f_j(x) = f'_j(x) + b \cdot g(x) = 0, \end{cases}$$

то, складывая эти два уравнения с умножением одного из них на константу  $-k$ , от этого члена можно избавиться. В данном случае либо первое уравнение умножаем на  $k = -b/a$ , тогда

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} \cdot f'_i(x) - b \cdot g(x) = 0, \\ f'_j(x) + b \cdot g(x) = 0, \end{cases} \Rightarrow -\frac{b}{a} \cdot f'_i(x) + f'_j(x) = 0,$$

либо второе уравнение умножаем на  $k = -a/b$ , тогда

$$\begin{cases} f'_i(x) + a \cdot g(x) = 0, \\ -\frac{a}{b} \cdot f'_j(x) - a \cdot g(x) = 0, \end{cases} \Rightarrow f'_i(x) - \frac{a}{b} \cdot f'_j(x) = 0.$$

**2. Способ подстановки.** Способ заключается в том, чтобы из одного уравнения системы выразить какое-нибудь неизвестное (или член, встречающийся в других уравнениях) и подставить полученное выражение в остальные уравнения.

Данные способы используются, чтобы избавиться от иррациональных или трансцендентных членов уравнений либо чтобы уменьшить в некоторых уравнениях количество неизвестных. Также для избавления от иррациональных и трансцендентных членов можно использовать описанные ранее приемы.

**Решение систем линейных уравнений.** Если все функции  $f_i(x)$  в (7.22) имеют линейный вид, т. е.

$$f_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_i,$$

то такая система уравнений называется *линейной*. Для решения систем линейных уравнений используются либо специальные численные методы (Гаусса, декомпозиции и т. п.), либо методы линейной алгебры. Эти курсы

уже были изучены ранее, поэтому не будем повторять алгоритмы работы данных методов.

*Пример 1.* Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$$

Используем способ алгебраического сложения. К уравнению (2) добавим уравнение (1), умноженное на коэффициент 3:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 3(x + y) &= 7 + 3 \cdot 1 \Rightarrow \\ 5x &= 10 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Ну а далее способом подстановки из первого уравнения находим

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x = 1 - 2 = -1.$$

*Пример 2.* Решим эту же систему,

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - 3y = 7, \end{cases}$$

сразу применив способ подстановки. Из первого уравнения выразим  $x = 1 - y$  и подставим во второе уравнение:

$$2(1 - y) - 3y = 7 \Rightarrow -5y = 5 \Rightarrow y = -1.$$

Затем из уравнения  $x = 1 - y$  находим значение неизвестного  $x$ :

$$x = 1 - y = 1 + 1 = 2.$$

*Пример 3.* Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Используем метод Гаусса. Сначала первое уравнение разделим на 2, а затем прибавим его ко второму уравнению, умножив на  $-1$ , и к третьему уравнению, умножив на  $-5$ :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3\right) = 6 - 8, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3\right) = 16 - 5 \cdot 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 = 8, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = -2, \\ -\frac{11}{2}x_2 + \frac{37}{2}x_3 = -24. \end{cases}$$

Затем второе уравнение разделим на  $-1/2$  и прибавим его к третьему уравнению, умножив на  $11/2$ :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 = 8, \\ x_2 - 3x_3 = 4, \\ -\frac{11}{2}x_2 + \frac{37}{2}x_3 + \frac{11}{2}(x_2 - 3x_3) = -24 + \frac{11}{2} \cdot 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 = 8, \\ x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Теперь последовательно получим

$$2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1,$$

$$x_2 - 3x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = 4 + 3x_3 = 1,$$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 = 8 \Rightarrow x_1 = 8 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 8 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = 3.$$

**Решение систем нелинейных уравнений.** Если хотя бы одна функция  $f_i(x)$  в (7.22) имеет нелинейный вид, то такую систему уравнений называют *нелинейной*. Для решения систем нелинейных уравнений используются либо специальные численные методы (Ньютона, итераций и т. д.), либо рассмотренные выше способы. Следует отметить, что в отличие от систем линейных уравнений, численные методы решения систем нелинейных уравнений дают не точное решение, а приближенное.

*Пример 1.* Решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^2 + \sin y - 0,5 = 0, \\ 4x - 2\sin y - 5 = 0. \end{cases}$$

Используем способ алгебраического сложения. К уравнению (2) добавим уравнение (1), умноженное на коэффициент 2:

$$4x - 2\sin y - 5 + 2 \cdot (x^2 + \sin y - 0,5) = 0 \Rightarrow \\ 2x^2 + 4x - 6 = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения дает  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$ . Далее из первого уравнения найдем значение неизвестного  $y$ :

$$x_1^2 + \sin y_1 - 0,5 = 0 \Rightarrow \sin y_1 = 0,5 - x_1^2 = -0,5 \\ \Rightarrow y_1 = \arcsin(-0,5) + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x_2^2 + \sin y_2 - 0,5 = 0 \Rightarrow \sin y_2 = 0,5 - x_2^2 = 3,5 \\ \Rightarrow \text{решений нет.}$$

Система имеет множество решений  $x = 1$ ,  $y = -\pi/6 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Пример 2.* Решим эту же систему,

$$\begin{cases} x^2 + \sin y - 0,5 = 0, \\ 4x - 2\sin y - 5 = 0, \end{cases}$$

сразу применив способ подстановки. Из второго уравнения выразим

$$x = \frac{1}{4}(5 + 2\sin y)$$

и подставим в первое уравнение:

$$\frac{1}{16}(5 + 2\sin y)^2 + \sin y - 0,5 = 0,$$

дальнейшее решение очевидно.

### 7.2.3 Доказательство неравенств

Два выражения, соединенные знаками «>», «<», «≥» или «≤», образуют *неравенство*. Причем знаки «>» и «<» образуют *строгое неравенство*,

а знаки « $\geq$ » и « $\leq$ » – *нестрогое неравенство*. Знаки « $>$ » и « $<$ » называются *противоположными*. Знаки « $\geq$ » и « $\leq$ » также противоположны. Если два неравенства имеют противоположные знаки, то они называются *неравенствами противоположного смысла*.

Также неравенство образуют два выражения, соединенные знаком « $\neq$ ». Далее о таких неравенствах говорить не будем, т. к. решением неравенства

$$f(x) \neq 0 \quad (7.24)$$

являются все значения неизвестного  $x$ , за исключением решений уравнения  $f(x) = 0$ .

Всякое неравенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него неизвестных, называется *тождественным неравенством*.

Свойства тождественных неравенств:

1) если  $a \square b$  и  $b \square c$ , то  $a \square c$ , где « $\square$ » – любой знак неравенства из « $>$ », « $<$ », « $\geq$ » или « $\leq$ »;

2) если  $a \square b$ , то  $a + c \square b + c$ , и наоборот;

3) из  $a + b \square c$  следует, что  $a \square c - b$ ,  $a + b - c \square 0$  и т. д.;

4) из  $a \square b$  и  $c \square d$  следует  $a + c \square b + d$ ;

5) из  $a \square b$  и  $c \otimes d$  следует  $a - c \square b - d$ , где « $\otimes$ » – неравенство противоположного смысла;

6) если  $a \square b$  и  $c > 0$ , то  $ac \square bc$  и  $a/c \square b/c$ ;

7) если  $a \square b$  и  $c < 0$ , то  $ac \otimes bc$  и  $a/c \otimes b/c$ ;

8) если  $a \square b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то  $a^n \square b^n$ , и т. д.

Убеждаются в тождественности неравенств с помощью *доказательств*. Доказательство заключается в том, чтобы показать, что неравенство выполняется при любых значениях входящих в него неизвестных. Способы доказательства неравенств:

1. Доказательство неравенства, содержащего только одно неизвестное, можно свести к решению уравнения. Пусть имеется неравенство с одним неизвестным:

$$f_1(x) \leq f_2(x). \quad (7.25)$$

Преобразуем его к виду

$$f_1(x) - f_2(x) \leq 0$$

или

$$f(x) \leq 0, \quad (7.26)$$

где  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ . Тогда, решив уравнение  $f(x) = 0$ , мы найдем значения  $x$ , в которых тождественность неравенства может меняться. Для проверки необходимо подставить значение, лежащее слева или справа от значения  $x$  (но не далее, чем соседнее решение уравнения  $f(x) = 0$ , если решений несколько).

*Пример 1.* Доказать неравенство

$$\sqrt{x} \leq x, \quad \forall x \geq 1.$$

Приведем неравенство к виду (7.26). Так как левая и правая части неравенства не могут быть отрицательными, их можно возвести в квадрат:

$$x \leq x^2 \Rightarrow x^2 - x \geq 0.$$

Решим уравнение  $x^2 - x = 0$ . Его корнями являются  $x = 0$  и  $x = 1$ . Исследуем тождественность неравенства  $x^2 - x \geq 0$  на образованных корнями интервалах:

| $(-\infty, 0]$                              | $[0, 1]$                                        | $[1, +\infty)$                          |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $(-1)^2 - (-1) = 2 \geq 0$ –<br>выполняется | $(0,5)^2 - 0,5 = -0,25 < 0$ –<br>не выполняется | $2^2 - 2 = 2 \geq 0$ – выпол-<br>няется |

Таким образом, для любого значения  $x \geq 1$  неравенство тождественно.

*Пример 2.* Доказать неравенство

$$\sqrt{x} \leq x+1, \quad \forall x \geq 0.$$

Приведем неравенство к виду (7.26). Так как левая и правая части неравенства не могут быть отрицательными, их можно возвести в квадрат:

$$x \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0.$$

Уравнение  $x^2 + x + 1 = 0$  действительных решений не имеет. Следовательно, неравенство  $x^2 + x + 1 \geq 0$  либо выполняется для любого значения  $x$ , либо не выполняется. Проверим:

$$x=1 \Rightarrow 1^2 + 1 + 1 = 3 \geq 0.$$

Следовательно, неравенство тождественно  $\forall x$ , а исходное неравенство тождественно  $\forall x \geq 0$  (т. к. имеется квадратный корень).

*Пример 3.* Доказать неравенство

$$\sqrt{x^2 + 1} \leq x^2 + 1.$$

Приведем неравенство к виду (7.26). Так как левая и правая части неравенства не могут быть отрицательными, их можно возвести в квадрат:

$$x^2 + 1 \leq (x^2 + 1)^2 \Rightarrow x^4 + x^2 \geq 0.$$

Уравнение  $x^4 + x^2 = 0$  имеет единственное решение  $x = 0$ . Проверяем тождественность неравенства  $x^4 + x^2 \geq 0$ :

| $(-\infty, 0]$                             | $[0, +\infty)$                           |
|--------------------------------------------|------------------------------------------|
| $(-1)^4 + (-1)^2 = 2 \geq 0$ – выполняется | $(1)^4 + (1)^2 = 2 \geq 0$ – выполняется |

Следовательно, исходное неравенство тождественно  $\forall x$ .

2. Неравенство можно доказать, сведя его к неравенству, тождественность которого очевидна, или к серии таких неравенств.

*Пример 1.* Доказать неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \forall a > 0, b > 0.$$

Приведем неравенство к виду (7.26). Так как левая и правая части неравенства не могут быть отрицательными, их можно возвести в квадрат:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq (\sqrt{ab})^2 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 \geq ab \Rightarrow \\ \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 &\geq 0 \Rightarrow \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Квадрат любого выражения не может быть отрицательным, следовательно, тождественность исходного неравенства доказана.

*Пример 2.* Доказать неравенство

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3.$$

Заменяем под знаком последнего корня число 6 числом 9, тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}} &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}} = \\ &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{9}}} = \dots = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Но  $\sqrt{6} < \sqrt{9}$ , следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} &< \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}} \Rightarrow \\ \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} &< 3. \end{aligned}$$

При доказательстве тождественности неравенств используют *замечательные неравенства*. Приведем некоторые из них:

- 1)  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|;$
- 2)  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0;$
- 3)  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0;$

- 4)  $a_1b_2 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$ ;
- 5)  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ ;
- 6)  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$ ;
- 7)  $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$ ;
- 8)  $(a_1b_2 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ ;
- 9)  $(1+a)^n > 1+na \quad \forall a \geq 0, n > 1$  и т. д.

### 7.3 Векторы и матрицы

Матрица – это прямоугольная таблица чисел. Матрицы обычно обозначаются заглавными буквами ( $A$ ,  $B$  и т. д.), а их элементы – соответствующими строчными буквами с индексами, т. е.  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  (или  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ) и т. д. Первый индекс означает номер строки, а второй – столбца. Поэтому матрицу  $A$  можно записать как

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

или  $A = \{a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$ . Здесь пара чисел  $n$  и  $m$  называется размерностью матрицы ( $n$  – количество строк матрицы,  $m$  – количество столбцов) и обозначается как  $n \times m$ .

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$A = 0.$$

Матрица называется *квадратной*, если количество ее строк равно количеству столбцов, т. е.  $A = \{a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n\}$  или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Число  $n$  называется *порядком* квадратной матрицы. Элементы квадратной матрицы, у которых индексы строки и столбца совпадают ( $a_{ii}$ ), называются элементами главной диагонали матрицы (или ее диагональными элементами):

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной (верхней треугольной)*, если ее элементы, лежащие ниже диагональных, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *нижней треугольной*, если ее элементы, лежащие выше диагональных, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Треугольная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, кроме диагональных, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если ввести обозначение  $d_i = a_{ii}$ , то диагональную матрицу можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

или

$$A = \text{diag } d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Диагональная матрица называется *единичной*, если все ее элементы равны 1. Для единичной матрицы вводятся специальные обозначения –  $E$  или  $I$  (от англ. *identity*). Таким образом,  $I = E = \text{diag } 1$ , или

$$I = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

*Вектор* – это частный случай матрицы, состоящей из одного столбца. Чтобы это подчеркнуть, иногда говорят «*вектор-столбец*».

Векторы обычно обозначаются строчными буквами ( $x$ ,  $y$  и т. д.), а их элементы – буквами с индексами, т. е.  $x_i$ ,  $y_i$  и т. д. Поэтому вектор  $x$  можно записать как

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Здесь  $n$  – размер вектора. Если вектор необходимо записать в виде строки, то нужно обязательно использовать знак транспонирования:

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T.$$

Иногда при строчной записи компоненты вектора отделяют друг от друга запятой или точкой с запятой.

В некоторых случаях приходится иметь дело с векторами, которые представляют собой строку. Такие векторы называют *векторами-строками*. Но по умолчанию любой вектор является столбцом. Если вектор – строка, то это нужно специально оговаривать.

Вектор называется *нулевым*, если все его элементы равны нулю:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$x = 0.$$

Вектор называется *единичным*, если он является столбцом единичной матрицы. Такой вектор обозначается как  $e_j$ , где  $j$  – номер столбца единичной матрицы:

$$e_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

### 7.3.1 Основные операции с матрицами

**Умножение и деление матрицы на скаляр.** При умножении или делении матрицы  $A = \{a_{ij}\}$  размера  $n \times m$  на скаляр  $k$  все ее элементы соответственно умножаются или делятся на эту константу, т. е. результатом будет матрица  $B = \{b_{ij} = a_{ij} \cdot k\}$  или  $B = \{b_{ij} = a_{ij} / k\}$  размера  $n \times m$ :

$$B = A \cdot k = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k & a_{12} \cdot k & \dots & a_{1m} \cdot k \\ a_{21} \cdot k & a_{22} \cdot k & \dots & a_{2m} \cdot k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \cdot k & a_{n2} \cdot k & \dots & a_{nm} \cdot k \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

$$B = A / k = \begin{pmatrix} a_{11} / k & a_{12} / k & \dots & a_{1m} / k \\ a_{21} / k & a_{22} / k & \dots & a_{2m} / k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} / k & a_{n2} / k & \dots & a_{nm} / k \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Некоторые леммы без доказательств:

1. Операция умножения коммутативна, т. е.  $A \cdot k = k \cdot A$ .
2.  $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$ .
3.  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ .
4.  $A / 1 = A$ .

**Сложение и вычитание матриц.** При сложении и вычитании матриц  $A = \{a_{ij}\}$  и  $B = \{b_{ij}\}$  одинакового размера  $n \times m$  все их элементы складываются или вычитаются попарно, т. е. результатом будет матрица  $C = \{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}\}$  размера  $n \times m$ :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}, \quad (7.30)$$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2m} - b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \dots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Некоторые леммы без доказательств:

1. Операция сложения коммутативна, т. е.  $A + B = B + A$ .
2.  $A + 0 = 0 + A = A$ , где  $0$  – нулевая матрица.
3.  $A - 0 = A$ , где  $0$  – нулевая матрица.
4.  $0 - A = -A = (-1) \cdot A$ , где  $0$  – нулевая матрица.
5.  $A - A = 0$ , где  $0$  – нулевая матрица.
6.  $k_1 A \pm k_2 A = (k_1 \pm k_2) A$ , где  $k_1, k_2$  – скаляры.

**Умножение матриц.** При умножении матрицы  $A = \{a_{ik}\}$  размера  $n \times p$  на матрицу  $B = \{b_{kj}\}$  размера  $p \times m$  результатом будет матрица  $C = \{c_{ij}\}$  размера  $n \times m$ , каждый элемент  $c_{ij}$  которой является суммой произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  и  $j$ -го столбца матрицы  $B$ :

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{km} \\ \sum_{k=1}^p a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{2k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^p a_{2k} b_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^p a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{nk} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^p a_{nk} b_{km} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

ИЛИ

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

**Пример:** Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размер матрицы  $A - 2 \times 4$ , матрицы  $B - 4 \times 3$ , т. е.  $n = 2$ ,  $m = 3$ ,  $p = 4$ . Значит, можно найти их произведение  $C = AB$ . Матрица  $C$  будет иметь размер  $2 \times 3$ :

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 = 2 + 2 - 10 + 4 = -2;$$

$$c_{12} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) = 4 - 6 + 0 - 8 = -10;$$

$$c_{13} = 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 0 = -4 - 6 + 16 + 0 = 6;$$

$$c_{21} = -3 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 = -6 - 7 + 5 - 1 = -9;$$

$$c_{22} = -3 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = -12 + 21 + 0 + 2 = 11;$$

$$c_{23} = -3 \cdot (-4) + 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 8 + (-1) \cdot 0 = 12 + 21 - 8 + 0 = 25.$$

Следовательно,

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ -9 & 11 & 25 \end{pmatrix}.$$

Некоторые леммы без доказательств:

1.  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ , где  $0$  – нулевая матрица.
2.  $A \cdot I = I \cdot A = A$ , где  $I$  – единичная матрица.

**Важно.** Данная операция не коммутативна, т. е.  $AB \neq BA$ . Исключение составляют случаи, когда одна из матриц является единичной или нулевой.

**Транспонирование матрицы.** При транспонировании матрицы  $A = \{a_{ij}\}$  размера  $n \times m$  результатом будет матрица  $B = \{b_{ji}\}$  размера  $m \times n$ , каждый элемент  $b_{ji}$  которой равен элементу  $a_{ij}$  исходной матрицы:

$$B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Пример.* Транспонируем матрицу

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ -9 & 11 & 25 \end{pmatrix}$$

из предыдущего примера:

$$C^T = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -10 & 11 \\ 6 & 25 \end{pmatrix}.$$

Некоторые леммы без доказательств:

1.  $I^T = I$ , где  $I$  – единичная матрица.
2.  $(A^T)^T = A$ .
3.  $(\text{diag } d_i)^T = \text{diag } d_i$ .

**Определение ранга матрицы.** Рангом матрицы  $A = \{a_{ik}\}$  размера  $n \times m$  называется максимальное число *линейно независимых* строк (столбцов) этой матрицы. Обозначение:

$$\text{rang } A \text{ или } \text{rang } A.$$

Несколько строк (столбцов) являются линейно независимыми, если ни одна (один) из них не выражается линейной комбинацией других строк (столбцов).

Причем неважно, что именно проверять – строки или столбцы, т. к.

$$\text{rang } A^T = \text{rang } A.$$

Очевидно, что ранг матрицы не может быть больше, чем количество ее строк или столбцов. Так, для матрицы размера  $n \times m$

$$\text{rang } A \leq \min(n, m).$$

Это является следствием того, что если количество векторов в наборе больше, чем их размерность, то они обязательно линейно зависимы. Поэтому в матрице размера  $n \times m$  строка с номером  $n+1$  обязательно будет линейно зависеть от остальных  $n$  строк. Аналогично, столбец с номером  $m+1$  обязательно будет линейно зависеть от остальных  $m$  столбцов.

*Пример.* Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ранг не может быть больше, чем  $\min(3, 4) = 3$ . Однако из трех строк матрицы только две являются линейно независимыми, т. к.

$$a_1 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_2,$$

$$a_2 = 2a_1 - a_3,$$

$$a_3 = 2a_1 - a_2,$$

где  $a_1, a_2, a_3$  — соответствующие строки матрицы.

Следовательно,  $\text{rang } A = 2$ .

Для определения ранга матрицы можно использовать метод Гаусса. Известно, что при преобразовании матрицы методом Гаусса ее ранг не меняется. Ранг матрицы будет равен полученному количеству базисных переменных (т. е. количеству ненулевых строк).

*Пример 1.* Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Используем метод Гаусса:

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix} &= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & -5 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили две базисные переменные и  $\text{rang } A = 2$ .

*Пример 2.* Найти ранг транспонированной матрицы из предыдущего примера:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Используем метод Гаусса:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как и ожидалось, после транспонирования ранг матрицы не изменился.

**Норма матрицы.** *Норма* – это некоторая скалярная характеристика матрицы. Норма матрицы  $A$  обозначается как  $\|A\|$ .

Существует несколько способов вычисления нормы матрицы. Например, *евклидова норма* вычисляется следующим образом:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}. \quad (7.33)$$

### 7.3.2 Операции с квадратными матрицами

**Определитель.** *Определитель* (или *детерминант*) – это многочлен, комбинирующий элементы квадратной матрицы таким образом, что его значение сохраняется при транспонировании и линейных комбинациях строк или столбцов.

Для обозначения определителя используется символ  $\Delta$ . Если вычисляются определители разных матриц, то в обозначение определителя добавляется обозначение матрицы. Например, определитель матрицы  $A$  обозначается как

$$\Delta_A = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для квадратной матрицы размера  $n \times n$  определитель вычисляется следующим образом:

$$\Delta = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1, 1} a_{i_2, 2} \dots a_{i_n, n}, \quad (7.34)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_n$  – перестановка чисел от 1 до  $n$ ,  $N(i_1, i_2, \dots, i_n)$  – число инверсий в такой перестановке. Общее количество перестановок равно  $n!$ , т. е. в сумме будет  $n!$  слагаемых.

Рассмотрим частные случаи. При  $n = 1$  получим

$$\Delta = |a_{11}| = (-1)^{N(1)} a_{11} = a_{11},$$

т. к. здесь нет инверсий и  $N(1) = 0$ . При  $n = 2$  получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{N(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Здесь в первом слагаемом нет инверсий,  $N(1,2)=0$ , а во втором слагаемом одна инверсия,  $N(2,1)=1$  (т. е. нужно совершить одну инверсию, чтобы из перестановки 2,1 получить 1,2). При  $n=3$  получим

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{N(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{N(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + \\ &+ (-1)^{N(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{N(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + \\ &+ (-1)^{N(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{N(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.\end{aligned}$$

Однако с увеличением  $n$  формула (7.34) становится менее эффективной. Так, при  $n=4$  получим  $4!=24$  перестановки, при  $n=5$  — уже  $5!=120$ , и т. д.

Некоторые леммы без доказательств:

1. При перестановке двух строк или столбцов матрицы местами определитель меняет знак.

2. При добавлении к любой строке или столбцу матрицы линейной комбинации других строк или столбцов определитель не меняется.

3. Если какая-либо строка или столбец матрицы являются линейной комбинацией других строк или столбцов, то определитель матрицы равен нулю. Соответственно, более простые случаи — если в матрице есть совпадающие строки или столбцы, или нулевая строка или столбец, то ее определитель также равен нулю. Другими словами, если  $\text{rang } A < n$ , то  $\det A = 0$ .

4. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

5.  $\det(A \cdot k) = k \cdot \det A$ .

6.  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ .

$$7. \det(\text{diag } d_i) = \prod d_i.$$

$$8. \det A^T = \det A.$$

$$9. \det I = 1, \text{ где } I - \text{единичная матрица.}$$

$$10. \det A = \prod \lambda_i, \text{ где } \lambda_i - \text{собственные числа матрицы.}$$

**Миноры.** Предложим другой способ вычисления определителя.

*Минором*  $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  порядка  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , квадратной матрицы  $A$  размера  $n \times n$  называется определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении строк с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцов с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$  в исходной матрице  $A$ :

$$M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \dots & a_{i_1, j_k} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \dots & a_{i_2, j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k, j_1} & a_{i_k, j_2} & \dots & a_{i_k, j_k} \end{vmatrix}. \quad (7.35)$$

Минор старшего порядка  $k = n$  равен определителю всей матрицы:

$$M_{1, 2, \dots, n}^{1, 2, \dots, n} = |A|.$$

Учитывая, что общее количество сочетаний  $k$  элементов из  $n$  определяется по комбинаторной формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (7.36)$$

общее количество миноров порядка  $k$  будет равно  $(C_n^k)^2$ .

*Пример.* Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из нее можно получить девять миноров порядка  $k = 1$ , девять миноров порядка  $k = 2$  и один минор порядка  $k = 3$ . Например,

$$M_1^1 = |1|,$$

$$M_2^1 = |-2|,$$

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix},$$

$$M_{2,3}^{1,2} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

и т. д.

Если номера отмеченных строк совпадают с номерами отмеченных столбцов, то минор называется *главным*.

Очевидно, что количество таких миноров будет определяться формулой (7.36), т. е. будет равно  $C_n^k$ .

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

главными минорами первого порядка будут

$$M_1^1 = |1|, \quad M_2^2 = |-3|, \quad M_3^3 = |-1|.$$

Главными минорами второго порядка будут

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, \quad M_{1,3}^{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_{2,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

И единственным главным минором третьего порядка будет определитель всей матрицы:

$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Если в главном миноре отмечены только  $k$  первых строк и столбцов, то он называется *угловым* или *ведущим главным* минором. Для углового минора  $M_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k}$  вводится обозначение  $\Delta_k$ :

$$\Delta_k = M_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}. \quad (7.37)$$

Очевидно, что для любой матрицы существует только один угловой минор порядка  $k$ , а всего таких миноров  $n$ . Так, в примере выше угловыми минорами являются  $\Delta_1 = M_1^1$ ,  $\Delta_2 = M_{1,2}^{1,2}$  и  $\Delta_3 = M_{1,2,3}^{1,2,3}$ .

*Дополнительный* минор  $\bar{M}_{ij}$  элемента квадратной матрицы  $a_{ij}$  размера  $n \times n$  есть определитель порядка  $n-1$  для матрицы, полученной путем вычеркивания из матрицы  $A$  строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$ :

$$\bar{M}_{ij} = M_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n; 1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,n}^{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \quad (7.38)$$

Очевидно, что количество дополнительных миноров будет равно количеству элементов матрицы —  $n^2$ .

*Пример.* Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

дополнительными минорами будут

$$\bar{M}_{11} = M_{2,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{M}_{12} = M_{1,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

и т. д.

Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  к элементу матрицы  $a_{ij}$  называется дополнительный минор  $\bar{M}_{ij}$ , взятый с обратным знаком, если сумма индексов  $i + j$  нечетная:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}_{ij}. \quad (7.39)$$

С помощью алгебраических дополнений определитель можно вычислить следующим образом – разложить его по произвольной строке  $i$ :

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_{ij}. \quad (7.40)$$

То же самое можно сделать и по столбцу. Обычно определитель расписывают по первой строке ( $i=1$ ). Например, для матрицы порядка  $n=3$  и  $i=1$  получим

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем рекурсивную формулу вычисления определителя – определитель порядка  $n$  вычисляется с помощью миноров порядка  $n-1$ , которые сами, в свою очередь, являются определителями, но уже меньшего порядка.

*Пример.* Найдем определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Распишем его по строке  $i=2$ :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -4 \cdot (2 + 2) - 3 \cdot (-1 + 2) - 7 \cdot (-1 - 2) = -16 - 3 + 21 = 2.\end{aligned}$$

*Базисным минором* матрицы называется любой ее ненулевой минор максимального порядка. Для того чтобы минор был базисным, необходимо и достаточно, чтобы все окаймляющие его миноры (то есть содержащие его миноры на единицу большего порядка) были равны нулю.

Соответственно, порядок базисного минора будет являться рангом квадратной матрицы.

**Обратные матрицы.** Квадратная матрица  $A$  называется *невырожденной*, если она имеет единственную *обратную* матрицу  $A^{-1}$ , определяемую из условия

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Обратная матрица существует не для всех матриц. Необходимым и достаточным условием невырожденности является  $\det A \neq 0$  или  $\text{rang } A = n$ .

Обратная матрица определяется следующим соотношением:

$$a_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\det A} \bar{A}^T, \quad (7.41)$$

или

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & -\bar{M}_{12} & \dots & (-1)^{1+n} \bar{M}_{1n} \\ -\bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \dots & (-1)^{2+n} \bar{M}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} \bar{M}_{n1} & (-1)^{n+2} \bar{M}_{n2} & \dots & \bar{M}_{nn} \end{pmatrix}^T,\end{aligned}$$

где  $\bar{A}^T$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Так, для квадратной матрицы порядка  $n = 2$  можно получить частную формулу

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & -\bar{M}_{12} \\ -\bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для матрицы порядка  $n = 3$  получим

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & -\bar{M}_{12} & \bar{M}_{13} \\ -\bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & -\bar{M}_{23} \\ \bar{M}_{31} & -\bar{M}_{32} & \bar{M}_{33} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и т. д.

Некоторые леммы без доказательств:

1.  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
2.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
3.  $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ , где  $k$  – скаляр.

$$4. \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$$5. I^{-1} = I.$$

*Пример.* Обратить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель мы уже нашли ранее:  $\det A = 2$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & +7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} +4 & +7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} +4 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & +2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} +1 & +2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} +1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & +2 \\ -3 & +7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} +1 & +2 \\ +4 & +7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} +1 & -2 \\ +4 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -3 & -7 \\ -4 & 1 & 3 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5,0 & -2,0 & -4,0 \\ -1,5 & 0,5 & 0,5 \\ -3,5 & 1,5 & 2,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если использовать полученную выше готовую формулу, результат будет аналогичным.

### 7.3.3 Операции с векторами

Большинство операций над векторами аналогичны операциям над матрицами и выполняются по тем же правилам – умножение и деление вектора на скаляр, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на матрицу или матрицы на вектор, вычисление нормы вектора.

Матричное умножение вектора на вектор обычно лишено смысла, потому что согласно правилам матричного произведения найти произведение  $x \cdot y$ , где  $x$  и  $y$  – вектор-столбцы, можно только в том случае, если оба этих вектора имеют размер  $n = 1$ , т. е., по сути, являются скалярами.

Вместо этого для векторов вводят другие операции – *векторное произведение* и *скалярное произведение*. В рамках данного учебного пособия мы будем рассматривать только операцию скалярного произведения.

Скалярное произведение – это операция над двумя векторами, результатом которой является число (скаляр), не зависящее от системы координат и являющееся характеристикой этих векторов.

Скалярное произведение двух векторов  $x$  и  $y$ , имеющих одинаковый размер  $n$ , обозначается как  $(x, y)$  и вычисляется следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (7.42)$$

Через матричное произведение данную операцию можно записать как  $x^T y$ :

$$x^T y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

*Пример 1.* Вычислить произведение  $xAx$ , где

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: данное произведение вычислить невозможно, т. к. в произведении  $xA$  первый компонент имеет матричный размер  $2 \times 1$ , а второй –  $2 \times 2$ , и  $1 \neq 2$ .

*Пример 2.* Вычислить произведение  $x^T Ax$ , где

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем по правилам матричного произведения:

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \quad 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= (7 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 7. \end{aligned}$$

Если вектор  $x$  размера  $n$  задает направление в пространстве  $R^n$ , то он имеет *длину*. То есть если начало вектора расположено в точке  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , а конец – в точке  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , то

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \dots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Тогда длина отрезка  $AB$  и будет длиной (или *модулем*) вектора:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (7.43)$$

Очевидно, что одну и ту же координату вектора  $x_i$  можно представить в виде разности множеством способов, поэтому разным точкам  $A$  и  $B$  может соответствовать один и тот же вектор.

*Нормировка вектора* – это операция деления вектора на его длину:

$$y = \frac{x}{|x|}, \quad |x| \neq 0. \quad (7.44)$$

После этого вектор  $y$  называется *нормированным*. Длина нормированного вектора равна 1:

$$|y| = 1.$$

*Пример.* Выполнить нормировку вектора

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем длину вектора  $x$ :

$$|x| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Следовательно,

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$|y| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1.$$

Результат скалярного произведения вектора самого на себя соотносится с длиной вектора:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (7.45)$$

Если исходить из введенного ранее определения нормы матрицы (7.33), то длина (модуль) и евклидова норма вектора совпадают:

$$|x| = \|x\|.$$

Но не следует забывать, что это лишь одно из определений нормы, существуют и другие, не гарантирующие выполнение данного равенства.

## 7.4 Дифференцирование функций

Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой, то говорят, что между ними существует *функциональная зависимость*. При этом переменная, которая может принимать произвольные допустимые значения, называется *независимой переменной*, или *аргументом*. Другая величина, значения которой зависят от значений аргумента, называется *зависимой переменной*, или *функцией*. Для обозначения функции, аргумента и функциональной зависимости можно использовать любые символы, например:

$$y = f(x), \quad (7.46)$$

где  $x$  – значение аргумента,  $y$  – значение функции,  $f$  – обозначение функциональной зависимости.

Функция может иметь несколько аргументов, например,

$$z = f(x, y).$$

Это можно трактовать следующим образом: аргумент функции может быть как скалярной величиной ( $x \in R^1$ ), так и векторной ( $x \in R^n$ ). В этом случае

$$y = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T. \quad (7.47)$$

В противовес функциональной существует *параметрическая зависимость* переменных величин, когда одному значению одной из них может соответствовать множество значений другой:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const} \text{ или } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Например, зависимость

$$x^2 + y^2 = R^2$$

описывает точки, лежащие на окружности радиуса  $R$ . При этом каждому значению переменной  $x$  соответствует два значения переменной  $y$  и наоборот:

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Такую функциональную зависимость можно записать в виде

$$f(x, y) = \text{const},$$

где  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\text{const} = R^2$ , или

$$f(x, y) = 0,$$

где  $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ .

#### 7.4.1 Производная функции скалярного аргумента

Производной функции  $f(x)$  скалярного аргумента  $x$  в точке  $x_0$  называется число, к которому стремится отношение приращения функции  $\Delta f(x)$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при стремлении  $\Delta x$  к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции – это тоже функция. Производную функции скалярного аргумента  $f(x)$  записывают следующим образом:

$$\frac{df}{dx} \text{ или } f'(x).$$

В произвольной точке  $x$  имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (7.48)$$

В таблице 7.1 даны производные некоторых элементарных функций.

Таблица 7.1 – Производные некоторых элементарных функций

| Функция                         | Производная                                                                                                                 |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| const                           | 0                                                                                                                           |
| $x$                             | 1                                                                                                                           |
| $x^n$                           | $nx^{n-1}$                                                                                                                  |
| $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$        | $-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$                                                                                           |
| $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ | $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |
| $a^x$                           | $\ln a \cdot a^x$                                                                                                           |
| $\log_n x$                      | $\frac{1}{x \ln n}$                                                                                                         |
| $\sin x$                        | $\cos x$                                                                                                                    |
| $\cos x$                        | $-\sin x$                                                                                                                   |

Для определения производной сложной функции используются соотношения из таблицы 7.2. Здесь  $u(x)$  и  $v(x)$  – произвольные функции,  $n$  – константа.

Таблица 7.2 – Производные сложных функций

| №  | Функция             | Производная                                                                       |
|----|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | $n \cdot u(x)$      | $n \cdot u'(x)$                                                                   |
| 2  | $u(x) + v(x)$       | $u'(x) + v'(x)$                                                                   |
| 3  | $u(x) - v(x)$       | $u'(x) - v'(x)$                                                                   |
| 4  | $u(x) \cdot v(x)$   | $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$                                             |
| 5  | $\frac{u(x)}{v(x)}$ | $\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$                              |
| 6  | $u^n(x)$            | $n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$                                                  |
| 7  | $n^{u(x)}$          | $\ln n \cdot n^{u(x)} \cdot u'(x)$                                                |
| 8  | $\log_n u(x)$       | $\frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln n}$                                                  |
| 9  | $\sin u(x)$         | $u(x) \cdot \cos u(x)$                                                            |
| 10 | $\cos u(x)$         | $-u(x) \cdot \sin u(x)$                                                           |
| 11 | $u(x)^{v(x)}$       | $u(x)^{v(x)} \left( u'(x) \cdot \frac{v(x)}{u(x)} + v'(x) \cdot \ln u(x) \right)$ |
| 12 | $u(v(x))$           | $u'(v) \cdot v'(x)$                                                               |

Здесь некоторые формулы являются частными случаями других. Все формулы таблицы 7.1 можно получить из таблицы 7.2, если учесть, что  $x' = 1$ , а  $\text{const}' = 0$ .

*Пример.* Найдем производную функции

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Если представить эту функцию в виде  $f(x) = u(x)^{v(x)}$ , где  $u(x) = x$ ,  $v(x) = 1/2$ , то, согласно пункту 11 таблицы 7.2, получим

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \left( x' \cdot \frac{1/2}{x} + (1/2)' \cdot \ln x \right).$$

С учетом того, что  $x' = 1$ ,  $(1/2)' = 0$ ,

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{1/2}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Конечно, проще эту формулу можно получить согласно пункту 6, если принять  $u(x) = x$ ,  $n = 1/2$ :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot x' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Согласно пункту 12 таблицы 7.2, чтобы найти производную сложной функции  $u(v(x))$ , необходимо сначала вычислить производную функции  $u(v)$  так, как будто это функция аргумента  $v$ , а затем результат умножить на производную функции  $v(x)$ .

*Пример 1.* Найти производную сложной функции

$$f(x) = \sin \ln x.$$

Сначала представим функцию в виде  $f(y) = \sin y$ , где  $y(x) = \ln x$ .

Тогда

$$\begin{aligned} f'(y) &= \cos y, \quad y'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \cos y(x) = \frac{\cos \ln x}{x}. \end{aligned}$$

*Пример 2.* Найти производную сложной функции

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}.$$

Сначала представим функцию в виде  $f(y) = \ln y$ , где  $y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

Тогда

$$f'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow f'(x) = \frac{y'(x)}{y}.$$

В свою очередь,  $y(x)$  – это тоже сложная функция, т. е.  $y(z) = \sqrt{z}$ , где  $z(x) = x^2 + 1$ . Тогда

$$y'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \Rightarrow y'(x) = \frac{z'(x)}{2\sqrt{z}}.$$

Согласно пункту 2 таблицы 7.2

$$z'(x) = (x^2 + 1)' = (x^2)' + (1)' = 2x.$$

Окончательно имеем

$$f'(x) = \frac{y'(x)}{y} = \frac{z'(x)}{y(x) \cdot 2\sqrt{z(x)}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Физический смысл производной – это скорость изменения функции. Так, например, если функция  $S(t)$  описывает длину пути, пройденного телом за время  $t$ , то производная этой функции  $v(t) = S'(t)$  будет соответствовать скорости тела в любой момент времени  $t$ . Скорость изменения скорости в физике – это ускорение, поэтому  $a(t) = v'(t)$ . То есть ускорение – это производная от производной функции  $S(t)$ , или *вторая производная*.

Таким образом, производную любого порядка  $n$  можно получить как производную от производной более низкого порядка  $n - 1$ :

$$f^{(n)}(x) = \left( f^{(n-1)}(x) \right)', \quad n > 1. \quad (7.49)$$

Для второй и третьей производной обычно используют обозначения  $f''(x)$  и  $f'''(x)$ . Для производных более высокого порядка используют обозначение  $f^{(n)}(x)$ , где  $n$  – порядок производной.

Геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  равно тангенсу угла касательной к функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  (рис. 7.1):

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Геометрический смысл второй производной – направление выпуклости функции, см. рис. 1.3 в п. 1.1 [1].

Как отмечается в указанном разделе учебника, критическая точка – это точка, в которой функция  $f(x)$  непрерывна, а производная равна нулю или терпит разрыв. Соответственно, для поиска критических точек функции  $f(x)$  необходимо решить уравнение

$$f'(x) = 0, \quad (7.50)$$

а также найти точки разрыва  $f'(x)$ .

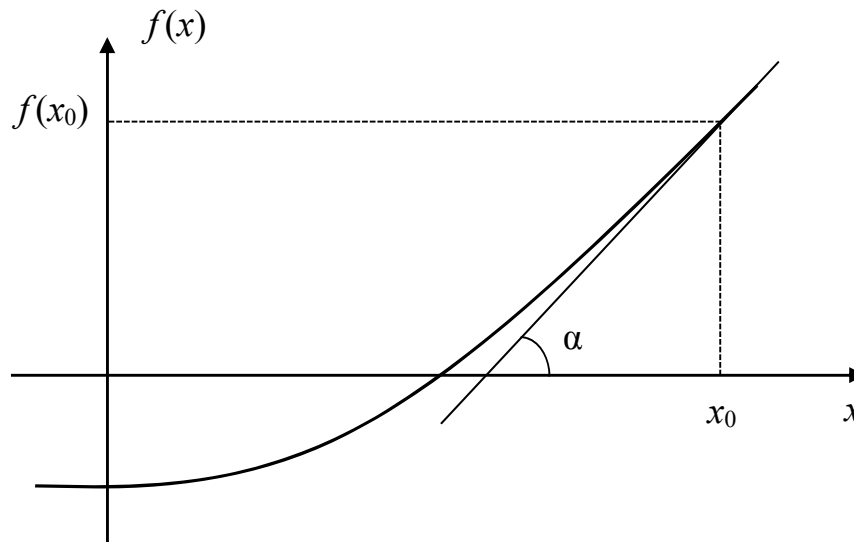


Рис. 7.1 – Геометрический смысл производной

Для методов оптимизации важно, что если производная положительна, то функция растет, а если отрицательна – убывает. Это используется при поиске экстремумов для определения направления поиска.

Если слева от критической точки производная положительна, а справа – отрицательна, имеем точку *максимума*. Если наоборот – точку *минимума*. Если производная существует и не меняет свой знак – в точке наблюдается *перегиб* функции. Более формальный критерий классификации критических точек приведен в разделе 1.3 [1].

Для поиска точек перегиба необходимо решить уравнение

$$f''(x) = 0. \quad (7.51)$$

Если слева и справа от какого-либо корня уравнения (7.51) знаки второй производной различаются, имеем точку перегиба.

*Пример 1.* Найти и классифицировать точки экстремума функции, а также ее точки перегиба:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x.$$

Разрывов функция не имеет. Решим уравнение (7.50):

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Его решениями являются точки  $x = 1$  и  $x = -2$ . Исследуем их характер:

| Интервал     | $(-\infty, -2]$ | $[-2, 1]$ | $[1, +\infty)$ |
|--------------|-----------------|-----------|----------------|
| Знак $f'(x)$ | +               | –         | +              |

Следовательно, в точке  $x = -2$  функция имеет максимум, а в точке  $x = 1$  – минимум. Используем необходимое и достаточное условие из раздела 1.3 [1]. Для этого найдем вторую производную:

$$f''(x) = 12x + 6.$$

В точке  $x = -2$  имеем  $f''(-2) = 18 < 0$ , следовательно, это точка максимума. В точке  $x = 1$  имеем  $f''(1) = 6 > 0$ , следовательно, это точка минимума. Получили аналогичные результаты.

Для поиска точек перегиба решим уравнение (7.51):

$$f''(x) = 12x + 6 = 0.$$

Его решением является точка  $x = -1/2$ . Исследуем ее характер:

|               |                   |                   |
|---------------|-------------------|-------------------|
| Интервал      | $(-\infty, -1/2]$ | $[-1/2, +\infty)$ |
| Знак $f''(x)$ | –                 | +                 |

Знаки  $f''(x)$  отличаются, следовательно,  $x = -1/2$  – точка перегиба.

*Пример 2.* Найти и классифицировать точки экстремума функции, а также ее точки перегиба:

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Уравнение (7.50)

$$f'(x) = \frac{\text{sign } x}{2\sqrt{|x|}} = 0, \text{ или } \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = 0, & x < 0, \end{cases}$$

не имеет решений, однако в точке  $x = 0$  функция имеет разрыв. То есть точка  $x = 0$  является критической. Проверим, экстремум ли это:

|              |                |        |                |
|--------------|----------------|--------|----------------|
| Интервал     | $(-\infty, 0)$ | 0      | $(0, +\infty)$ |
| Знак $f'(x)$ | –              | разрыв | +              |

Следовательно,  $x = 0$  – точка минимума. Для поиска точек перегиба решим уравнение (7.51):

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} = 0, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{4\sqrt{-x^3}} = 0, & x < 0. \end{cases}$$

Данное уравнение корней не имеет, следовательно, у функции нет точек перегиба.

Также решение уравнений вида (7.50) используется для одномерной оптимизации при поиске длины шага в методах безусловной (МСН, МК, ММН, МСГ и его модификации, КМ) и условной (МФВ, МДНЗ, МУГ, МПГ) оптимизации функции векторного аргумента. Примеры были рассмотрены ранее, в соответствующих разделах учебного пособия.

Неравенства с производными используются также для анализа выпуклости и вогнутости функций скалярного аргумента. Согласно материалу раздела 1.1 [1], функция выпукла на отрезке  $[a, b]$ , если на этом отрезке:

1) выполняется неравенство Йенссена, т. е.

$$f[\mu x_1 + (1 - \mu)x_2] \leq \mu f(x_1) + (1 - \mu)f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad \forall \mu \in [0, 1];$$

2) первая производная функции не убывает, т. е.

$$f'(x_1) \leq f'(x_2), \quad \forall x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 \in [a, b];$$

3) вторая производная функции положительна, т. е.

$$f''(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Если отрезок не ограничен, доказывать неравенство нужно для  $\forall x \in R^1$ . Первый критерий является необходимым и достаточным, второй и третий критерии – достаточными.

*Пример.* Доказать выпуклость функции

$$f(x) = x^2 + 1$$

тремя описанными выше способами.

1. Используем неравенство Йенссена:

$$(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2)^2 + 1 \leq \mu(x_1^2 + 1) + (1 - \mu)(x_2^2 + 1) \Rightarrow$$

$$\mu^2 x_1^2 + 2\mu(1 - \mu)x_1 x_2 + (1 - \mu)^2 x_2^2 + 1 \leq \mu x_1^2 + \mu + (1 - \mu)x_2^2 + 1 - \mu \Rightarrow$$

$$(\mu^2 - \mu)x_1^2 + 2\mu(1 - \mu)x_1 x_2 + [(1 - \mu)^2 - (1 - \mu)]x_2^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$-\mu(1 - \mu)x_1^2 + 2\mu(1 - \mu)x_1 x_2 + (1 - 2\mu + \mu^2 - 1 + \mu)x_2^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\mu(1-\mu)x_1^2 - 2\mu(1-\mu)x_1x_2 + \mu(1-\mu)x_2^2 &\geq 0 \Rightarrow \\ \mu(1-\mu)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) &\geq 0 \Rightarrow \mu(1-\mu)(x_1 - x_2)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Так как при любом  $\mu \in [0, 1]$  первые два множителя не будут отрицательными, а третий множитель – в квадрате, т. е. тоже не может быть отрицательным, неравенство доказано.

2. Используем критерий с первой производной:

$$f'(x) = 2x,$$

$$2x_1 \leq 2x_2 \Rightarrow 2(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Для любого  $x_2 > x_1$  выполнение этого неравенства очевидно.

3. Используем критерий со второй производной:

$$f''(x) = 2.$$

Очевидно, что  $f''(x) > 0$  для любого значения  $x$ .

Использование критерия Иенссена выглядит более трудоемким, но это следствие его универсальности. Критерии, использующие производные, нельзя применить, если производные функции не существуют или имеют разрывы на интервале  $[a, b]$ .

#### 7.4.2 Частные производные

Если функция имеет несколько аргументов, а производная берется только по одному из них, то вводится понятие *частной производной*. Например, если имеется функция двух аргументов  $f(x, y)$ , то ее частная производная по аргументу  $x$  обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \text{ или } f'_x(x, y) \text{ либо } \nabla_x f(x, y).$$

Соответственно, для частной производной по аргументу  $y$  имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \text{ или } f'_y(x, y) \text{ либо } \nabla_y f(x, y).$$

При взятии частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы функции считаются константами.

*Пример.* Найти частные производные функции

$$f(x, y) = x^2 - xy^3.$$

При взятии производной по аргументу  $x$  считаем аргумент  $y$  константой:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y^3.$$

При взятии производной по аргументу  $y$  считаем константой аргумент  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3xy^2.$$

**Градиент.** Для функции векторного аргумента (7.47) существует  $n$  частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Вектор-столбец, составленный из таких частных производных, называется *градиентом* и обозначается

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T. \quad (7.52)$$

*Пример.* Найти градиент функции

$$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

По правилам взятия производной сложных функций получаем:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{\partial(x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Градиент используется во всех методах безусловной оптимизации 1-го и 2-го порядков функции векторного аргумента, для проверки НУ и ДУ оптимальности, а также при решении ЗНП. При решении ЗНП используется не только градиент ЦФ, но и градиенты ограничений задачи.

Также градиент используется для аналитического поиска критических точек функций векторного аргумента. Согласно определению, в критической точке непрерывной функции  $f(x)$  ее градиент равен нулю или не существует (это необходимое условие экстремума). Соответственно, для определения критических точек необходимо решить систему уравнений

$$\nabla f(x) = 0, \quad (7.53)$$

а также найти все точки разрыва градиента  $\nabla f(x)$ . Данную систему можно решать как численно, так и аналитически.

*Пример.* Найти аналитически критические точки функции Розенброка

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Найдем градиент ЦФ:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 100 \cdot 2 \cdot \frac{\partial(x_2 - x_1^2)}{\partial x_1} (x_2 - x_1^2) + 2 \cdot \frac{\partial(1 - x_1)}{\partial x_1} (1 - x_1) \\ 100 \cdot 2 \cdot \frac{\partial(x_2 - x_1^2)}{\partial x_2} (x_2 - x_1^2) + 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2 \cdot (1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Разрывов градиент не имеет. Решим систему уравнений (7.53):

$$\begin{cases} -400x_1(x_2 - x_1^2) + 2 \cdot (1 - x_1) = 0, \\ 200(x_2 - x_1^2) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим  $x_2 = x_1^2$ . Подставим в первое уравнение:

$$\begin{aligned} -400x_1(x_1^2 - x_1^2) - 2 \cdot (1 - x_1) = 0 &\Rightarrow 2 \cdot (1 - x_1) = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = 1, \\ x_2 = x_1^2 &\Rightarrow \bar{x}_2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\bar{x} = (1; 1)^T$ ,  $\bar{f} = 0$ . Далее будет выполнена классификация данной критической точки.

**Матрица Якоби.** Пусть имеется система уравнений (7.23). Тогда для каждой функции  $f_i(x)$ , входящей в систему, можно вычислить частную производную по каждому неизвестному  $x_j$ :

$$w_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Матрица  $W(x)$ , составленная из элементов  $w_{ij}$ , называется *матрицей Якоби*, или *якобианом*:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

Матрица Якоби используется, в частности, при численном решении систем нелинейных уравнений. Например, системы (7.53) и др.

*Пример.* Найти матрицу Якоби системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} xy = -5, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y) = xy + 5 = 0, \\ f_2(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$W(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

**Матрица Гессе.** Как градиент функции векторного аргумента является аналогом первой производной функции скалярного аргумента, так *матрица Гессе* (или *гессиан*) функции векторного аргумента является аналогом второй производной функции скалярного аргумента.

Чтобы найти матрицу Гессе  $H_f(x)$  функции  $f(x)$ , необходимо взять частную производную каждого компонента вектора градиента  $\partial f / \partial x_i$  по каждому неизвестному  $x_j$ :

$$\begin{aligned} H_f(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \end{pmatrix} \Rightarrow \\ H_f(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Эта матрица симметричная, т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

**Важно!** Понятие производных определено только для функции скалярного аргумента. Для функции векторного аргумента вместо этого используются понятия градиента и гессиана.

*Пример.* Найти матрицу Гессе функции

$$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Ранее мы уже находили градиент данной функции

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} H_f(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 \cdot 2x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 \cdot 2x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_2 \cdot 2x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2 \cdot 2x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} & -\frac{x_1 x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \\ -\frac{x_1 x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} & \frac{x_1^2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \end{pmatrix}.$$

Матрица Гессе используется в методах безусловной оптимизации 2-го порядка функции векторного аргумента, для проверки НУ и ДУ оптимальности второго порядка, а также при классификации экстремальных точек функции векторного аргумента.

Так, если найдена критическая точка  $\bar{x}$  функции  $f(x)$ , т. е. точка, в которой градиент  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  или имеет разрыв, то это может быть как точка минимума или максимума, так и седловая точка. Чтобы показать, что  $\bar{x}$  является точкой локального минимума, нужно доказать, что в некоторой ее окрестности ЦФ  $f(x)$  является выпуклой. Это можно сделать следующими способами:

1. Доказать, что в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{x}$  выполняется неравенство Йенссена:

$$f[\mu x^1 + (1 - \mu)x^2] \leq \mu f(x^1) + (1 - \mu)f(x^2), \\ \forall \|\bar{x} - x^1\| \leq \varepsilon, \forall \|\bar{x} - x^2\| \leq \varepsilon, \forall \mu \in [0, 1].$$

2. Доказать, что в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{x}$  минимальное значение ЦФ принимает в точке  $\bar{x}$ :

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall \|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

3. Показать, что в точке  $\bar{x}$  гессиан ЦФ  $H_f(\bar{x})$  положительно определен. Если гессиан лишь положительно полуопределен, то нужны дополнительные проверки – например, (1) или (2).

Чтобы показать, что  $\bar{x}$  является точкой локального максимума, нужно доказать, что в некоторой ее окрестности ЦФ  $f(x)$  является вогнутой.

Для этого можно использовать описанные выше способы, но для функции  $-f(x)$ , или:

1. Доказать, что в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{x}$  выполняется неравенство Йенссена противоположного смысла:

$$f[\mu x^1 + (1-\mu)x^2] \geq \mu f(x^1) + (1-\mu)f(x^2), \\ \forall \|\bar{x} - x^1\| \leq \varepsilon, \forall \|\bar{x} - x^2\| \leq \varepsilon, \forall \mu \in [0,1].$$

2. Доказать, что в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{x}$  максимальное значение ЦФ принимает в точке  $\bar{x}$ :

$$f(\bar{x}) \geq f(x), \forall \|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

3. Показать, что в точке  $\bar{x}$  гессиан ЦФ  $H_f(\bar{x})$  отрицательно определен. Если гессиан лишь отрицательно полуопределен, то нужны дополнительные проверки – например (1) или (2).

В противном случае имеем седловую точку. Если  $\bar{x}$  – не седловая, т. е. это локальный минимум (максимум), то он одновременно будет глобальным минимумом (максимумом), если

1) функция  $f(x)$  выпукла (вогнута) на всей области определения  $x \in D$ . То есть нужно либо показать, что неравенство Йенссена выполняется  $\forall x^1, x^2 \in D$ , либо  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  ( $f(\bar{x}) \geq f(x)$ ) в любой точке  $x \in D$ , либо гессиан  $H_f(x)$  положительно (отрицательно) определен  $\forall x \in D$ . Это достаточный критерий;

2) значение  $f(\bar{x})$  совпадает с точной нижней (верхней) границей значений функции  $f(x)$  на множестве аргументов  $x \in D$ :

$$f(\bar{x}) = \inf_{x \in D} (\sup) f(x).$$

Это необходимый и достаточный критерий. При поиске нижней и верхней границ значений функции проверяются ее точки разрывов, критические точки, а также предельные значения аргументов.

*Пример.* Выполним классификацию критической точки  $\bar{x} = (1; 1)^T$  функции Розенброка

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Ранее уже был найден ее градиент:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2 \cdot (1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix},$$

теперь найдем гессиан

$$\begin{aligned} H_f(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(-400x_1(x_2 - x_1^2) - 2 \cdot (1 - x_1)) & \frac{\partial}{\partial x_2}(-400x_1(x_2 - x_1^2) - 2 \cdot (1 - x_1)) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(200(x_2 - x_1^2)) & \frac{\partial}{\partial x_2}(200(x_2 - x_1^2)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -400(x_2 - x_1^2) + 800x_1^2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вычислим значение гессиана в точке  $\bar{x}$ :

$$H_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1200 - 400 + 2 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}.$$

Найдем угловые миноры:

$$\Delta_1 = 802 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{vmatrix} = 400 > 0.$$

Гессиан положительно определен, следовательно,  $\bar{x} = (1; 1)^T$  – точка локального минимума. Установим, является ли он глобальным минимумом. Для этого нужно показать, что в любой точке  $x$  гессиан

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

положительно определен. Находим угловые миноры:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1200x_1^2 - 400x_2 + 2, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{vmatrix} = 200(1200x_1^2 - 400x_2 + 2) - 400^2 x_1^2 = \\ &= 80000x_1^2 - 80000x_2 + 400. \end{aligned}$$

Видно, что оба угловых минора не являются знакопостоянными, т. е. гессиан является неопределенным. Достаточный критерий не выполняется. Используем второй, необходимый и достаточный, критерий. Функция непрерывна, следовательно, своих экстремальных значений она может достичь в критической точке, а также при  $x_i \rightarrow \pm\infty$ . Имеем:

$$f(\bar{x}) = 0,$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 = +\infty,$$

следовательно,

$$\inf f(x) = 0, \quad \sup f(x) = +\infty.$$

Так как  $f(\bar{x}) = \inf f(x)$ , то  $\bar{x} = (1; 1)^T$  — точка глобального минимума.

## 8 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа заключается в решении 10 задач и выполняется письменно.

### 8.1 Задание на контрольную работу

#### 8.1.1 Анализ экстремальных задач

##### *Задание № 1 (23 варианта)*

1. Привести классификацию задач оптимизации по виду ЦФ и ограничений.

*Найти множество  $U$  точек глобальных минимумов функции  $f(x)$  на указанном интервале:*

2.  $f(x) = \sin^2 \pi x, x \in R^1.$

3.  $f(x) = |x - x^2|, x \in [-1; 2].$

4.  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}, x \in (0; 1].$

5.  $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| > 1, \\ 1, & |x| \leq 1, \end{cases} x \in R^1.$

6.  $f(x) = x^3 - 12x + 3, x \in [-4; 4].$

*Убедиться, что множество  $U$  точек глобальных минимумов функции  $f(x)$  пусто, и найти  $\inf f(x)$  на указанном интервале:*

7.  $f(x) = \ln x, x \in (0; 1].$

8.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in R^1.$

9.  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5, x \in (-\infty; 5).$

10.  $f(x) = x \sin x, x \in R^1.$

11.  $f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in (-\infty; -1].$

12.  $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in [-2; 2].$

$$13. f(x) = \frac{1}{\ln x}, x \in (0; 1).$$

$$14. f(x) = \frac{1}{\ln x}, x \in (1; +\infty).$$

Убедиться в унимодальности функции  $f(x)$  на указанном отрезке  $[a, b]$ , т. е. доказать, что  $f(x) \in Q[a, b]$ :

$$15. f(x) = x^2 - 3x + x \ln x, x \in [1; 2].$$

$$16. f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x, x \in [0; \pi/4].$$

$$17. f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12, x \in [0; 2].$$

$$18. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x, x \in [0; 1].$$

Другие задания на унимодальность:

19. Показать, что если  $f(x) \in Q[a, b]$  и  $a \leq c \leq d \leq b$ , то  $f(x) \in Q[c, d]$ .

20. На какие 3 части следует разбить отрезок  $[-1; 2]$ , чтобы на каждой из них функция  $f(x) = \|x(x-1)\| - 1$  была унимодальной?

21. Найти максимальное значение  $b$ , при котором функция  $f(x) = -x^2 + 5x - 6$  будет унимодальной на отрезке  $[-5; b]$ .

22. Найти максимальное значение  $b$ , при котором функция  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  будет унимодальной на отрезке  $[-5; b]$ .

23. Рассматривается функция одной переменной  $f(x)$ . Решается задача безусловной оптимизации. Пользуясь нижеприведенной таблицей, где указаны знаки производных с первой по четвертую в точке  $x_i$  («н. д.» означает «нет данных»), идентифицировать каждую из точек (минимум, максимум, перегиб). Указать случаи, когда нельзя сделать определенных выводов.

| № п/п | $x_i$    | $f'(x_i)$ | $f''(x_i)$ | $f'''(x_i)$ | $f^{(4)}(x_i)$ |
|-------|----------|-----------|------------|-------------|----------------|
| 1     | $x_1$    | 0         | +          | н. д.       | н. д.          |
| 2     | $x_2$    | 0         | 0          | +           | н. д.          |
| 3     | $x_3$    | 0         | —          | н. д.       | н. д.          |
| 4     | $x_4$    | —         | —          | н. д.       | н. д.          |
| 5     | $x_5$    | +         | 0          | —           | н. д.          |
| 6     | $x_6$    | 0         | 0          | —           | н. д.          |
| 7     | $x_7$    | 0         | 0          | 0           | +              |
| 8     | $x_8$    | 0         | —          | +           | —              |
| 9     | $x_9$    | 0         | 0          | 0           | 0              |
| 10    | $x_{10}$ | —         | 0          | н. д.       | н. д.          |

### **Задание № 2 (30 вариантов)**

Установить, какие из функций  $f(x)$  являются выпуклыми или вогнутыми:

1.  $f(x) = e^x$ .
2.  $f(x) = e^{-x}$ .
3.  $f(x) = 1/x^2$ .
4.  $f(x) = x + \ln x$ ,  $x > 0$ .
5.  $f(x) = |x|$ .
6.  $f(x) = e^{2k}$ , где  $k$  — целое число.
7.  $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$ ,  $x \in [3; 5]$ .

Другие задания на выпуклость:

8. Пусть в точке  $\bar{x}$  градиент функции  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ . Что можно сказать о точке  $\bar{x}$ , если:

- функция  $f(x)$  выпуклая?
- функция  $f(x)$  вогнутая?
- матрица Гессе  $H_f(\bar{x})$  является неопределенной матрицей?
- матрица Гессе  $H_f(\bar{x})$  положительно (отрицательно) определена?

9. Найти и классифицировать стационарные точки функции

$$f(x) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2.$$

10. Доказать, используя критерии определенности квадратичных форм, что если функция  $f(x)$  является выпуклой, то функция  $-f(x)$  является вогнутой.

11. Дана функция  $f(x) = (x_1 - a_1^2 \cdot x_2^2) \cdot (x_1 - a_2^2 \cdot x_2^2)$ , где  $a_1$  и  $a_2$  – константы. Охарактеризовать точку  $x = [0; 0]^T$ .

Для заданной функции  $f(x)$  найти и обосновать:

- интервалы возрастания и убывания функции;
- точки перегиба (если они имеются);
- интервалы, на которых функция выпукла;
- локальные и глобальные минимумы и/или максимумы (если таковые имеются).

12.  $f(x) = x^5 + x^4 - x^3/3 + 2.$

13.  $f(x) = (2x + 1)^2 \cdot (x - 4).$

*Является ли выпуклой функция на пространстве  $R^2$ ?*

14.  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right).$

15.  $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2).$

16.  $f(x) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}.$

17.  $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - x_2 - 2.$

$$18. f(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2.$$

$$19. f(x) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

$$20. f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

$$21. f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

$$22. f(x) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - x_2.$$

$$23. f(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 10x_2^2 + 5x_1 - 3x_2.$$

$$24. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1 + x_3.$$

*Указать множества, на которых функция выпукла:*

$$25. f(x) = \frac{x_1^2}{x_2}.$$

$$26. f(x) = \sin(x_1 + x_2).$$

$$27. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - \sin(x_1 - x_2).$$

$$28. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1 + x_2}.$$

*При каких значениях коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  функция является выпуклой?*

$$29. f(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

$$30. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_2.$$

### 8.1.2 Одномерный поиск

#### **Задание № 3 (14 вариантов)**

Задачи на аналитическое решение:

1. Среди всех прямоугольников со сторонами  $a$  и  $b$  с известной заданной площадью  $S$  определить прямоугольник, имеющий наименьший периметр  $L$ .

2. Среди всех прямоугольников со сторонами  $a$  и  $b$  с известным заданным периметром  $L$  определить прямоугольник, имеющий наибольшую площадь  $S$ .

3. Из круглого бревна вырезают брус с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найти размеры сечения бруса, если радиус сечения бревна равен 20 см.

4. Задача о «наилучшей» консервной банке. Определить оптимальные значения радиуса  $R$  и высоты  $H$  консервной банки при заданном фиксированном ее объеме  $V = \text{const}$  с целью минимизации материала на изготовление банки  $S$ .

5. Задача о «наилучшей» консервной банке. Определить оптимальные значения радиуса  $R$  и высоты  $H$  консервной банки при заданном фиксированном ее объеме  $V = \text{const}$  с целью минимизации работы (длина швов пайки банки  $L$ ) по изготовлению банки.

6. Задача о «наилучшей» консервной банке. Определить оптимальные значения радиуса  $R$  и высоты  $H$  консервной банки при заданном фиксированном количестве материала, который пошел на ее создание ( $S = \text{const}$ ), с целью максимизации ее объема  $V$ .

7. Задача о «наилучшей» консервной банке. Определить оптимальные значения радиуса  $R$  и высоты  $H$  консервной банки при заданной фиксированной длине ее швов ( $L = \text{const}$ ) с целью максимизации объема банки  $V$ .

8. Пусть  $x_1, x_2$  — точки золотого сечения отрезка  $[a, b]$ . Показать, что  $x_1$  является второй точкой золотого сечения отрезка  $[a, x_2]$ , а  $x_2$  является первой точкой золотого сечения отрезка  $[x_1, b]$ .

9. Показать, что каждая из точек  $x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot (b - a)$  и  $x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot (b - a)$  осуществляет золотое сечение отрезка  $[a, b]$ .

10. Пусть  $x_1, x_2$  – точки золотого сечения отрезка  $[a, b]$ . Доказать, что справедливо равенство  $x_1 = a + b - x_2$ .

11. Пусть  $x_1, x_2$  – точки золотого сечения отрезка  $[a, b]$ . Доказать, что справедливо равенство  $x_2 = a + b - x_1$ .

12. Показать, что точка минимума выпуклой квадратной функции находится за одну итерацию метода Ньютона из произвольной начальной точки.

13. Показать, что точка максимума вогнутой квадратной функции находится за одну итерацию метода Ньютона из произвольной начальной точки.

14. Материальная точка движется по прямой согласно закону:

$$S(t) = 12t^2 - \frac{2}{3} \cdot t^3,$$

где  $S(t)$  – путь в метрах,  $t$  – время в секундах. В какой момент времени  $t \in [4; 12]$  скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой скорости?

#### ***Задание № 4 (100 вариантов)***

##### **Общие требования**

- Проверить выпуклость функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .
- Найти точку минимума с указанной точностью  $\varepsilon$  (при этом точность по функции и по аргументу полагается равной,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ ).
- Сопроводить решение графической интерпретацией.
- Оценить трудоемкость метода (количество итераций, количество вычислений функции и ее производных).

##### **Варианты**

*Решить задачу методом равномерного поиска с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :*

1.  $f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}$ ,  $x \in [-2; 2]$ ,  $N = 10$ .
2.  $f(x) = 3x^4 + (x-1)^2$ ,  $x \in [-2; 2]$ ,  $N = 10$ .
3.  $f(x) = -4x \cdot \sin x$ ,  $x \in [\pi/2; \pi]$ ,  $N = 6$ .
4.  $f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}$ ,  $x \in [0; 3]$ ,  $N = 8$ .
5.  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$ ,  $x \in [-1; 0]$ ,  $N = 5$ .
6.  $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$ ,  $x \in [-5; -4]$ ,  $N = 5$ .
7.  $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$ ,  $x \in [1,5; 2]$ ,  $N = 4$ .
8.  $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$ ,  $x \in [-1; 0]$ ,  $N = 5$ .
9.  $f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in [0,1; 1]$ ,  $N = 5$ .
10.  $f(x) = x - \ln x$ ,  $x \in [0,1; 2]$ ,  $N = 8$ .
11.  $f(x) = x^2 - \sin x$ ,  $x \in [0; \pi/2]$ ,  $N = 6$ .
12.  $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$ ,  $x \in [-1,5; 1,5]$ ,  $N = 8$ .
13.  $f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}$ ,  $x \in [0,1; 2]$ ,  $N = 8$ .

*Решить задачу методом деления отрезка пополам с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :*

14.  $f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}$ ,  $x \in [-2; 2]$ .
15.  $f(x) = 3x^4 + (x-1)^2$ ,  $x \in [-2; 2]$ .
16.  $f(x) = -4x \cdot \sin x$ ,  $x \in [\pi/2; \pi]$ .
17.  $f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}$ ,  $x \in [0; 3]$ .
18.  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$ ,  $x \in [-1; 0]$ .
19.  $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$ ,  $x \in [-5; -4]$ .

$$20. f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90, x \in [1,5;2].$$

$$21. f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1, x \in [-1;0].$$

$$22. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, x \in [0,1;1].$$

$$23. f(x) = x - \ln x, x \in [0,1;2].$$

$$24. f(x) = x^2 - \sin x, x \in [0; \pi/2].$$

$$25. f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, x \in [-1,5;1,5].$$

$$26. f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}, x \in [0,1;2].$$

*Решить задачу методом Фибоначчи с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :*

$$27. f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}, x \in [-2;2], \delta = 0,2.$$

$$28. f(x) = 3x^4 + (x-1)^2, x \in [-2;2], \delta = 0,2.$$

$$29. f(x) = -4x \cdot \sin x, x \in [\pi/2; \pi], \delta = 0,07.$$

$$30. f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}, x \in [0;3], \delta = 0,15.$$

$$31. f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, x \in [-1;0], \delta = 0,05.$$

$$32. f(x) = x \sin x + 2 \cos x, x \in [-5;-4], \delta = 0,05.$$

$$33. f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90, x \in [1,5;2], \delta = 0,02.$$

$$34. f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1, x \in [-1;0], \delta = 0,05.$$

$$35. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, x \in [0,1;1], \delta = 0,05.$$

$$36. f(x) = x - \ln x, x \in [0,1;2], \delta = 0,1.$$

$$37. f(x) = x^2 - \sin x, x \in [0; \pi/2], \delta = 0,07.$$

$$38. f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, x \in [-1,5;1,5], \delta = 0,15.$$

$$39. f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}, x \in [0,1;2], \delta = 0,1.$$

*Решить задачу методом золотого сечения с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :*

$$40. f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}, x \in [-2;2].$$

$$41. f(x) = 3x^4 + (x-1)^2, x \in [-2;2].$$

$$42. f(x) = -4x \cdot \sin x, x \in [\pi/2; \pi].$$

$$43. f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}, x \in [0;3].$$

$$44. f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, x \in [-1;0].$$

$$45. f(x) = x \sin x + 2 \cos x, x \in [-5;-4].$$

$$46. f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90, x \in [1,5;2].$$

$$47. f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1, x \in [-1;0].$$

$$48. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, x \in [0,1;1].$$

$$49. f(x) = x - \ln x, x \in [0,1;2].$$

$$50. f(x) = x^2 - \sin x, x \in [0; \pi/2].$$

$$51. f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, x \in [-1,5;1,5].$$

$$52. f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}, x \in [0,1;2].$$

*Решить задачу методом Пауэлла с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :*

$$53. f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}, x^0 = 2, \Delta = 0,75.$$

$$54. f(x) = 3x^4 + (x-1)^2, x^0 = -2, \Delta = 1.$$

$$55. f(x) = -4x \cdot \sin x, x^0 = \pi, \Delta = 0,5.$$

$$56. f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}, x^0 = 3, \Delta = 0,5.$$

$$57. f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, x^0 = 0, \Delta = 0,5.$$

$$58. f(x) = x \sin x + 2 \cos x, x^0 = -5, \Delta = 0,3.$$

$$59. f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90, x^0 = 1,5, \Delta = 0,2.$$

$$60. f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1, x^0 = -1, \Delta = 0,5.$$

$$61. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, x^0 = 1, \Delta = 0,3.$$

$$62. f(x) = x - \ln x, x^0 = 2, \Delta = 0,3.$$

$$63. f(x) = x^2 - \sin x, x^0 = \pi/2, \Delta = 0,3.$$

$$64. f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, x^0 = -1,5, \Delta = 0,4.$$

$$65. f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}, x^0 = 2, \Delta = 0,5.$$

*Решить задачу методом Ньютона – Рафсона с точностью  $\varepsilon = 0,005$ :*

$$66. f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}, x \in [-2; 2].$$

$$67. f(x) = 3x^4 + (x-1)^2, x \in [-2; 2].$$

$$68. f(x) = -4x \cdot \sin x, x \in [0; \pi].$$

$$69. f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}, x \in [0; 3].$$

$$70. f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, x \in [-1; 0].$$

$$71. f(x) = x \sin x + 2 \cos x, x \in [-5; -4].$$

$$72. f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90, x \in [1,5; 2].$$

$$73. f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1, x \in [-1; 0].$$

$$74. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, x \in [0,1; 1].$$

$$75. f(x) = x - \ln x, x \in [0,1; 2].$$

$$76. f(x) = x^2 - \sin x, \quad x \in [0; \pi/2].$$

$$77. f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, \quad x \in [-1,5; 1,5].$$

$$78. f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}, \quad x \in [0,1; 2].$$

*Решить задачу методом средней точки с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :*

$$79. f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}, \quad x \in [-2; 2].$$

$$80. f(x) = 3x^4 + (x-1)^2, \quad x \in [-2; 2].$$

$$81. f(x) = -4x \cdot \sin x, \quad x \in [0; \pi].$$

$$82. f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}, \quad x \in [0; 3].$$

$$83. f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, \quad x \in [-1; 0].$$

$$84. f(x) = x \sin x + 2 \cos x, \quad x \in [-5; -4].$$

$$85. f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90, \quad x \in [1,5; 2].$$

$$86. f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1, \quad x \in [-1; 0].$$

$$87. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0,1; 1].$$

$$88. f(x) = x - \ln x, \quad x \in [0,1; 2].$$

$$89. f(x) = x^2 - \sin x, \quad x \in [0; \pi/2].$$

$$90. f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, \quad x \in [-1,5; 1,5].$$

$$91. f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}, \quad x \in [0,1; 2].$$

*Решить задачу методом кубической аппроксимации с точностью  $\varepsilon = 0,01$ :*

$$92. f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + \frac{1}{2}e^{x/2}, \quad x \in [-2; 2].$$

$$93. f(x) = 3x^4 + (x-1)^2, \quad x \in [-2; 2].$$

$$94. f(x) = -4x \cdot \sin x, x \in [0; \pi].$$

$$95. f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + e^{0,5x^2}, x \in [0; 3].$$

$$96. f(x) = x \sin x + 2 \cos x, x \in [-5; -4].$$

$$97. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, x \in [0,1; 1].$$

$$98. f(x) = x - \ln x, x \in [0,1; 2].$$

$$99. f(x) = x^2 - \sin x, x \in [0; \pi/2].$$

$$100. f(x) = \frac{10x^3 + 3x^2 + x + 5}{x}, x \in [0,1; 2].$$

### 8.1.3 Функции многих переменных

#### Общие требования

- Проверить выпуклость функции  $f(x)$ . Если функция не выпукла на всем пространстве  $R^n$ , проверить ее выпуклость в окрестностях начальной точки  $x^0$ .
- Найти точку минимума с указанной точностью  $\varepsilon$  (при этом точность по функции и по аргументу полагается равной,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ ).
- Сопроводить решение графической иллюстрацией, т. е. построить линии уровня целевой функции и траекторию спуска в точку экстремума.

#### Задание № 5 (100 вариантов)

Решить задачу симплексным методом с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :

$$1. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2, x^0 = [-1; -1]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$2. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2, x^0 = [0; 0]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$3. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, x^0 = [0; 0]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$4. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, x^0 = [1,5; 0,7]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$5. f(x) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, x^0 = [4; 2]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$6. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1 x_2, x^0 = [5, 23; 4, 41]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$7. f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{2/3} - 4, x^0 = [0, 71; 0, 77]^T, \Delta^0 = 0,5, \alpha = 0,5.$$

$$8. f(x) = (x_1^2 + x_2^2) \cdot (1 - \exp(-x_1^2 - x_2^2)), x^0 = [1, 2; 1, 5]^T, \Delta^0 = 2, \alpha = 0,5.$$

$$9. f(x) = 2x_1^3 - x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, x^0 = [0, 3; 0, 5]^T, \Delta^0 = 0,5, \alpha = 0,5.$$

$$10. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \ln x_1 - 18 \ln x_2, x^0 = [2; 1]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$11. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), x^0 = [0; 0]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$12. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, x^0 = [0, 5; 0, 5]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

$$13. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), x^0 = [0, 5; 0, 5]^T, \Delta^0 = 1, \alpha = 0,5.$$

*Решить задачу методом Хука – Дживса с точностью  $\varepsilon = 0,05$ :*

$$14. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1 x_2, x^0 = [-1; -1]^T, \Delta^0 = [0, 3; 0, 3]^T, \alpha = 0,5.$$

$$15. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + x_2, x^0 = [1; 1]^T, \Delta^0 = [1; 1]^T, \alpha = 0,5.$$

$$16. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, x^0 = [0; 1]^T, \Delta^0 = [1; 1]^T, \alpha = 0,5.$$

$$17. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, x^0 = [1, 5; 1, 5]^T, \Delta^0 = [0, 7; 0, 7]^T,$$

$\alpha = 0,5.$

$$18. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2, x^0 = [1, 5; 0, 7]^T, \Delta^0 = [1; 1]^T, \alpha = 0,5.$$

$$19. f(x) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, x^0 = [2; 2]^T, \Delta^0 = [1, 4; 1, 4]^T, \alpha = 0,5.$$

$$20. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1 x_2, x^0 = [5, 23; 4, 41]^T, \Delta^0 = [0, 5; 0, 5]^T, \alpha = 0,5.$$

$$21. f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{2/3} - 4, x^0 = [2, 31; 4, 27]^T, \Delta^0 = [1; 1]^T, \alpha = 0,5.$$

22.  $f(x) = (x_1^2 + x_2^2) \cdot (1 - \exp(-x_1^2 - x_2^2))$ ,  $x^0 = [1, 5; 2]^T$ ,  $\Delta^0 = [1, 2; 1, 2]^T$ ,  $\alpha = 0, 5$ .

23.  $f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ ,  $x^0 = [0, 3; 0, 5]^T$ ,  $\Delta^0 = [0, 7; 0, 7]^T$ ,  $\alpha = 0, 5$ .

24.  $f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2$ ,  $x^0 = [2; 1]^T$ ,  $\Delta^0 = [0, 9; 0, 9]^T$ ,  $\alpha = 0, 5$ .

25.  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2)$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ ,  $\Delta^0 = [0, 5; 0, 5]^T$ ,  $\alpha = 0, 5$ .

26.  $f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ ,  $\Delta^0 = [0, 7; 0, 7]^T$ ,  $\alpha = 0, 5$ .

27.  $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2)$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ ,  $\Delta^0 = [0, 7; 0, 7]^T$ ,  $\alpha = 0, 5$ .

*Решить задачу методом сопряженных направлений Пауэлла с точностью  $\varepsilon = 0, 01$ :*

28.  $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$ ,  $x^0 = [-1; -1]^T$ .

29.  $f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ .

30.  $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2$ ,  $x^0 = [3; 2]^T$ .

31.  $f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ ,  $x^0 = [2; 2]^T$ .

32.  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$ ,  $x^0 = [0; 0]^T$ .

33.  $f(x) = 0, 5(x_1^2 - x_2)^2 + 0, 5(1 - x_1)^2$ ,  $x^0 = [2; 2]^T$ .

34.  $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ ,  $x^0 = [1, 5; 0, 7]^T$ .

35.  $f(x) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}$ ,  $x^0 = [2; 2]^T$ .

36.  $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2$ ,  $x^0 = [5, 23; 4, 41]^T$ .

37.  $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$ ,  $x^0 = [0; 0]^T$ .

38.  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2)$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ .

$$39. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$40. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

*Решить задачу методом Коши с точностью  $\varepsilon = 0,01$ :*

$$41. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$42. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$43. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2, \quad x^0 = [2, 5; 1, 7]^T.$$

$$44. f(x) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$45. f(x) = 2x_1^3 - x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, \quad x^0 = [0, 3; 0, 5]^T.$$

$$46. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2 \ln x_1 - 18 \ln x_2, \quad x^0 = [2; 1]^T.$$

$$47. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$48. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

49. Показать, что градиенты  $\nabla f(x^k)$  и  $\nabla f(x^{k+1})$  в последовательных точках итерационного процесса метода наискорейшего спуска ортогональны, т. е.  $\nabla f(x^k) \cdot \nabla f(x^{k+1}) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$

*Решить задачу методом Ньютона с точностью  $\varepsilon = 0,01$ :*

$$50. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [-0, 5; -0, 5]^T.$$

$$51. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, \quad x^0 = [0, 78; 1]^T.$$

$$52. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$53. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2, \quad x^0 = [1, 5; 0, 7]^T.$$

$$54. f(x) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$55. f(x) = (x_1^2 + x_2^2) \cdot (1 - \exp(-x_1^2 - x_2^2)), \quad x^0 = [1, 5; 2]^T.$$

56.  $f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ ,  $x^0 = [0, 3; 0, 5]^T$ .

57.  $f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2$ ,  $x^0 = [2; 1]^T$ .

58.  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2)$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ .

59.  $f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ .

60.  $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2)$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ .

61.  $f(x) = \left(\frac{x_1 - 3}{100}\right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1))$ ,  $x^0 = [0; -1]^T$ .

62. Функция Розенброка  $f(x) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  
 $x^0 = [-1, 2; 0]^T$ .

63. Функция Химмельблау  $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ ,  
 $x^0 = [-6; 6]^T$ .

64. Показать, что точка минимума выпуклой квадратичной функции находится за одну итерацию метода Ньютона из произвольного начального приближения.

65. Показать, что точка максимума вогнутой квадратичной функции находится за одну итерацию метода Ньютона из произвольного начального приближения.

*Решить задачу модифицированным методом Ньютона с точностью  $\varepsilon = 0,01$ :*

66.  $f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2$ ,  $x^0 = [1; 1]^T$ .

67.  $f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2$ ,  $x^0 = [2; 2]^T$ .

68.  $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ ,  $x^0 = [1, 5; 0, 7]^T$ .

69.  $f(x) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}$ ,  $x^0 = [2; 2]^T$ .

$$70. f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, \quad x^0 = [0, 3; 0, 5]^T.$$

$$71. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2, \quad x^0 = [2; 1]^T.$$

$$72. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$73. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$74. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$75. f(x) = \left(\frac{x_1 - 3}{100}\right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1)), \quad x^0 = [0; -1]^T.$$

76. Функция Химмельблау  $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ ,  
 $x^0 = [-6; 6]^T$ .

77. Показать, что точка минимума выпуклой квадратичной функции находится за одну итерацию модифицированного метода Ньютона из произвольного начального приближения.

78. Показать, что точка максимума вогнутой квадратичной функции находится за одну итерацию модифицированного метода Ньютона из произвольного начального приближения.

*Решить задачу методом Марквардта с точностью  $\varepsilon = 0,01$ :*

$$79. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2, \quad x^0 = [-1; -1]^T, \quad \lambda_0 = 10^2, \quad \beta = 10.$$

$$80. f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2, \quad x^0 = [3; 2]^T, \quad \lambda_0 = 10^2, \quad \beta = 10.$$

$$81. f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2, \quad x^0 = [2; 2]^T, \quad \lambda_0 = 10^2, \quad \beta = 10.$$

$$82. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 - 5, \quad x^0 = [7; 4]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$83. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$84. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, \quad x^0 = [2; 2]^T, \quad \lambda_0 = 10^2, \quad \beta = 10.$$

$$85. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad x^0 = [1, 5; 0, 7]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$86. f(x) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, \quad x^0 = [2; 2]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$87. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1 x_2, \quad x^0 = [5, 23; 4, 41]^T, \quad \lambda_0 = 10^4, \quad \beta = 10.$$

$$88. f(x) = (x_1^2 + x_2^2) \cdot (1 - \exp(-x_1^2 - x_2^2)), \quad x^0 = [1, 5; 2]^T, \quad \lambda_0 = 10^2, \quad \beta = 10.$$

$$89. f(x) = 2x_1^3 - x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, \quad x^0 = [0, 3; 0, 5]^T, \quad \lambda_0 = 10^4, \quad \beta = 10.$$

$$90. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2 \ln x_1 - 18 \ln x_2, \quad x^0 = [2; 1]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$91. f(x) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2, \quad x^0 = [1; 1]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$92. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$93. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T, \quad \lambda_0 = 10^2, \quad \beta = 10.$$

$$94. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, \quad x^0 = [1; 1]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$95. f(x) = 3x_1^2 - 3x_1 x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$96. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$97. f(x) = \left( \frac{x_1 - 3}{100} \right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1)), \quad x^0 = [0; -1]^T, \quad \lambda_0 = 10,$$

$\beta = 10.$

$$98. \text{Функция} \quad \text{Химмельблау} \quad f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \\ x^0 = [-6; 6]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$99. \text{Функция} \quad \text{Химмельблау} \quad f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \\ x^0 = [6; -2]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

$$100. \text{Функция} \quad \text{Химмельблау} \quad f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \\ x^0 = [-6; -6]^T, \quad \lambda_0 = 10^3, \quad \beta = 10.$$

**Задание № 6 (100 вариантов)**

Решить задачу методом сопряженных градиентов для квадратичных функций:

$$1. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2, \quad x^0 = [-1; -1]^T.$$

$$2. f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2, \quad x^0 = [3; 2]^T.$$

$$3. f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$4. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$5. f(x) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$6. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$7. f(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$8. f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

Решить задачу методом Флетчера – Ривза с точностью  $\varepsilon = 0,005$ :

$$9. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2, \quad x^0 = [-1; -1]^T.$$

$$10. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$11. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, \quad x^0 = [0, 78; 1]^T.$$

$$12. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 - 5, \quad x^0 = [7; 4]^T.$$

$$13. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$14. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$15. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad x^0 = [2, 5; 1, 7]^T.$$

$$16. f(x) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$17. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2, \quad x^0 = [5, 23; 4, 41]^T.$$

$$18. f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, \quad x^0 = [0, 3; 0, 5]^T.$$

$$19. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2, \quad x^0 = [2; 1]^T.$$

$$20. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$21. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$22. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$23. f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$24. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$25. f(x) = \left(\frac{x_1 - 3}{100}\right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1)), \quad x^0 = [0; -1]^T.$$

$$26. \text{Функция Химмельблау} \quad f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \\ x^0 = [6; -2]^T.$$

*Решить задачу методом Полака – Рибьера с точностью  $\varepsilon = 0,005$ :*

$$27. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2, \quad x^0 = [-1; -1]^T.$$

$$28. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$29. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, \quad x^0 = [0, 78; 1]^T.$$

$$30. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$31. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$32. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad x^0 = [2, 5; 1, 7]^T.$$

$$33. f(x) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$34. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2, \quad x^0 = [5, 23; 4, 41]^T.$$

$$35. f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, \quad x^0 = [0, 3; 0, 5]^T.$$

$$36. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2 \ln x_1 - 18 \ln x_2, \quad x^0 = [2; 1]^T.$$

$$37. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$38. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$39. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$40. f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$41. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$42. f(x) = \left( \frac{x_1 - 3}{100} \right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1)), \quad x^0 = [0; -1]^T.$$

43. Функция Химмельблау  $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ ,  
 $x^0 = [6; -2]^T$ .

Решить задачу методом Миля – Кентрелла с точностью  $\varepsilon = 0,005$ :

$$44. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2, \quad x^0 = [-1; -1]^T.$$

$$45. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$46. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, \quad x^0 = [0, 78; 1]^T.$$

$$47. f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2, \quad x^0 = [3; 2]^T.$$

$$48. f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$49. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$50. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$51. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad x^0 = [2, 5; 1, 7]^T.$$

$$52. f(x) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$53. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2, \quad x^0 = [5, 23; 4, 41]^T.$$

$$54. f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, \quad x^0 = [0; 3; 0; 5]^T.$$

$$55. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2, \quad x^0 = [2; 1]^T.$$

$$56. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$57. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$58. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$59. f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$60. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$61. f(x) = \left(\frac{x_1 - 3}{100}\right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1)), \quad x^0 = [0; -1]^T.$$

$$62. \text{Функция Химмельблау} \quad f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \\ x^0 = [6; -2]^T.$$

Решить задачу методом Дэвидона – Флетчера – Пауэлла с точностью  $\varepsilon = 0,03$ :

$$63. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2, \quad x^0 = [-1; -1]^T.$$

$$64. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$65. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, \quad x^0 = [0; 78; 1]^T.$$

$$66. f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2, \quad x^0 = [3; 2]^T.$$

$$67. f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$68. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$69. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$70. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad x^0 = [2; 5; 1; 7]^T.$$

$$71. f(x) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$72. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1 x_2, \quad x^0 = [5, 23; 4, 41]^T.$$

$$73. f(x) = 2x_1^3 - x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, \quad x^0 = [0, 3; 0, 5]^T.$$

$$74. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2 \ln x_1 - 18 \ln x_2, \quad x^0 = [2; 1]^T.$$

$$75. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$76. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$77. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$78. f(x) = 3x_1^2 - 3x_1 x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$79. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$80. f(x) = \left( \frac{x_1 - 3}{100} \right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1)), \quad x^0 = [0; -1]^T.$$

81. Функция Химмельблау  $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ ,  
 $x^0 = [-6; 6]^T$ .

*Решить задачу методом Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шенно с точностью  $\varepsilon = 0,03$ :*

$$82. f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1 x_2, \quad x^0 = [-1; -1]^T.$$

$$83. f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + x_2, \quad x^0 = [1; 1]^T.$$

$$84. f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, \quad x^0 = [0, 78; 1]^T.$$

$$85. f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2, \quad x^0 = [3; 2]^T.$$

$$86. f(x) = 2x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3x_2^2, \quad x^0 = [2; 2]^T.$$

$$87. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 - 7x_1 - 7x_2, \quad x^0 = [0; 0]^T.$$

$$88. f(x) = 0,5(x_1^2 - x_2)^2 + 0,5(1 - x_1)^2, x^0 = [2; 2]^T.$$

$$89. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, x^0 = [2, 5; 1, 7]^T.$$

$$90. f(x) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, x^0 = [2; 2]^T.$$

$$91. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2, x^0 = [5, 23; 4, 41]^T.$$

$$92. f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, x^0 = [0, 3; 0, 5]^T.$$

$$93. f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2, x^0 = [2; 1]^T.$$

$$94. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2, x^0 = [0; 0]^T.$$

$$95. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1 + x_2), x^0 = [1; 1]^T.$$

$$96. f(x) = \exp(x_1^2) + (x_1 + x_2)^2, x^0 = [1; 1]^T.$$

$$97. f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2, x^0 = [1; 1]^T.$$

$$98. f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2), x^0 = [1; 1]^T.$$

$$99. f(x) = \left(\frac{x_1 - 3}{100}\right)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \exp(20 \cdot (x_2 - x_1)), x^0 = [0; -1]^T.$$

$$100. \text{Функция Химмельблау} \quad f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \\ x^0 = [-6; 6]^T.$$

#### 8.1.4 Линейное программирование

##### **Задание № 7 (35 вариантов)**

*Решить ЗЛП графическим методом:*

$$1. f(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_2 \leq 4, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

2.  $f(x) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

3.  $f(x) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

4.  $f(x) = -6x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

5.  $f(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 5x_2 \geq 7, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 2, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

6.  $f(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 2, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

7.  $f(x) = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 14, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

8.  $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

9.  $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 10, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

10.  $f(x) = -x_1 + x_4 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

11.  $f(x) = -x_1 + x_4 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

12.  $f(x) = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

13.  $f(x) = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

14.  $f(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

15.  $f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

16.  $f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

17.  $f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

18.  $f(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ 8x_1 + 6x_2 \geq 72, \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 128, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

19.  $f(x) = -3x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 57, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 42, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 56, \\ 2x_1 + x_2 \leq 34, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

20.  $f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 81, \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ 3x_1 + x_2 \leq 26, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

21.  $f(x) = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 81, \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ 3x_1 + x_2 \leq 26, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

22.  $f(x) = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 3, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

23.  $f(x) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

*Решить ЗЦП графическим методом:*

24.  $f(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 2, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

25.  $f(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 5x_2 \geq 7, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 2, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

26.  $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

27.  $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 10, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

28.  $f(x) = -x_1 + x_4 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

29.  $f(x) = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

30.  $f(x) = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

31.  $f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

32.  $f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

33.  $f(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ 8x_1 + 6x_2 \geq 72, \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 128, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

34.  $f(x) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 81, \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ 3x_1 + x_2 \leq 26, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

35.  $f(x) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad x \in Z. \end{cases}$$

### Задание № 8 (34 варианта)

Разработать модель линейного программирования для следующей задачи ЛП и решить ее симплекс-методом.

1. Для приготовления  $B_0$  кг сплава с заданными свойствами используют вещества  $A_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

В 1 кг вещества  $A_j$  содержится  $a_{ij}$  кг химического элемента  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Содержание элемента  $B_i$  в сплаве должно заключаться в пределах от  $\beta_i$  до  $b_i$  кг. Стоимость 1 кг вещества  $A_j$  составляет  $C_j$  рублей.

Требуется определить такой состав для приготовления сплава, при котором общая стоимость израсходованных веществ минимальна.

Исходные данные:

| Химические<br>элементы | Вещества |       |       | Минимальное<br>содержание | Максимальное<br>содержание |
|------------------------|----------|-------|-------|---------------------------|----------------------------|
|                        | $A_1$    | $A_2$ | $A_3$ |                           |                            |
| $B_1$                  | 0,15     | 0,50  | 0,20  | 175 кг                    | 250 кг                     |
| $B_2$                  | 0,30     | 0,25  | 0,45  | 200 кг                    | 300 кг                     |
| $C_j$ , руб.           | 1000     | 1200  | 700   |                           |                            |

Масса сплава  $B_0 = 600$  кг.

2. В начале рабочего дня автобусного парка на линию выходит  $x_1$  автобусов, через час к ним добавляется  $x_2$  автобусов, ещё через час – дополнительно  $x_3$  машин.

Каждый автобус работает на маршруте непрерывно в течение 8 часов. Минимально необходимое число машин на линии в  $i$ -й час рабочего дня ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) равно  $b_i$ . Превышение этого числа приводит к дополнительным издержкам в течение  $i$ -го часа в размере  $c_i$  руб. на каждый дополнительный автобус.

Определить количество машин, выходящих на маршрут в первые три часа рабочего дня, с таким расчетом, чтобы дополнительные издержки в течение всего рабочего дня были минимальны.

Решить задачу об оптимальном графике работы автобусного парка при следующих исходных данных:

|       |     |     |     |     |     |     |      |      |      |      |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|
| $i$   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7    | 8    | 9    | 10   |
| $b_i$ | 10  | 20  | 22  | 23  | 25  | 22  | 20   | 15   | 10   | 5    |
| $c_i$ | 500 | 500 | 600 | 600 | 600 | 800 | 1000 | 1500 | 1500 | 2000 |

3. Имеются два вида корма I и II, содержащих питательные вещества (витамины)  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице:

| Питательное вещество | Необходимый минимум питательных веществ | Число единиц питательных веществ в 1 кг корма |          |
|----------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------|----------|
|                      |                                         | I                                             | II       |
| $S_1$                | 9 кг                                    | 0,3 кг                                        | 0,1 кг   |
| $S_2$                | 8 кг                                    | 0,1 кг                                        | 0,2 кг   |
| $S_3$                | 12 кг                                   | 0,1 кг                                        | 0,6 кг   |
| Стоимость 1 кг корма |                                         | 400 руб.                                      | 600 руб. |

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

4. Завод производит продукцию двух видов  $A_1$  и  $A_2$ , используя сырье, запас которого составляет  $b$  т. Согласно плану, выпуск продукции  $A_1$  должен составлять не менее 60% общего объема выпуска. Расход сырья на изготовление 1 т продукции  $A_1$  и  $A_2$  составляет, соответственно,  $a_1$  и  $a_2$  т. Стоимость 1 т продукции  $A_1$  и  $A_2$  составляет, соответственно,  $c_1$  и  $c_2$  руб.

Определить план выпуска продукции  $A_1$  и  $A_2$ , при котором стоимость выпущенной продукции будет максимальной.

Решить задачу симплекс-методом в общем виде.

5. Завод выпускает три вида узлов  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  для систем управления, используя для этого два вида технологических линеек  $L_1$  и  $L_2$ . На производство одного узла вида  $N_1$  на линейке  $L_1$  затрачивается 2 часа. На изготовление одного узла  $N_2$  на линейках  $L_1$  и  $L_2$  затрачивается, соответственно, 1 час и 2 часа. На изготовление одного узла  $N_3$  на каждой из линеек  $L_1$  и  $L_2$  затрачивается по 1 часу. Завод может использовать линейку  $L_1$  в течение 10 часов, а  $L_2$  – 8 часов. Прибыль от реализации одного изделия  $N_1$  – 5 тыс. руб., а от реализации одного изделия  $N_2$  – 4 тыс. руб.

Определить количество узлов  $N_1$  и  $N_2$ , которое необходимо выпустить заводу с тем, чтобы получить максимальную прибыль.

6. Завод получает 4 вида полуфабрикатов  $B_i$  в количествах:  $B_1$  – 400 т,  $B_2$  – 250 т,  $B_3$  – 350 т и  $B_4$  – 100 т.

В результате смешения этих компонентов получают 3 вида продукции  $A_j$ . Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для  $A_1$  – 2:3:5:2, для  $A_2$  – 3:1:2:1, для  $A_3$  – 2:2:1:3. Стоимость 1 т продукции  $A_j$  составляет:  $A_1$  – 1200 руб.,  $A_2$  – 1000 руб.,  $A_3$  – 1500 руб.

Составить оптимальный план выпуска продукции по критерию максимальной стоимости выпущенной продукции.

7. Завод получает 4 вида полуфабрикатов  $B_i$  в количествах:  $B_1$  – 400 т,  $B_2$  – 250 т,  $B_3$  – 350 т и  $B_4$  – 100 т.

В результате смешения этих компонентов получают 3 вида продукции  $A_j$ . Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для  $A_1$  –

2:3:5:2, для  $A_2$  – 3:1:2:1, для  $A_3$  – 2:2:1:3. Стоимость 1 т продукции  $A_j$  составляет:  $A_1$  – 1200 руб.,  $A_2$  – 1000 руб.,  $A_3$  – 1500 руб.

Составить оптимальный план выпуска продукции по критерию максимального использования полуфабрикатов.

8. Предприятие, располагающее ресурсами сырья трех видов  $B_i$ ,  $i=1,2,3$ , может производить продукцию четырех видов  $A_j$ ,  $j=1,2,3,4$ . В таблице указаны затраты ресурсов  $B_i$  на изготовление 1 т продукции  $A_j$ , объем ресурсов и прибыль, получаемая от изготовления 1 т продукции  $A_j$ .

| Вид сырья     | Вид продукции |       |       |       |                |
|---------------|---------------|-------|-------|-------|----------------|
|               | $A_1$         | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | Объем ресурсов |
| $B_1$ , кг    | 40            | 50    | 20    | 30    | 600 кг         |
| $B_2$ , кг    | 300           | 140   | 180   | 220   | 4000 кг        |
| $B_3$ , кг    | 160           | 140   | 80    | 100   | 1280 кг        |
| Прибыль, руб. | 4800          | 2500  | 5600  | 3000  |                |

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной, при условии, что продукции  $A_2$  необходимо выпустить не менее 8 т, продукции  $A_4$  – не более 5 т, а продукции  $A_1$  и  $A_3$  – в отношении 2:1.

9. Предприятие, располагающее ресурсами сырья трех видов  $B_i$ ,  $i=1,2,3$ , может производить продукцию четырех видов  $A_j$ ,  $j=1,2,3,4$ . В таблице указаны затраты ресурсов  $B_i$  на изготовление 1 т продукции  $A_j$ , объем ресурсов и прибыль, получаемая от изготовления 1 т продукции  $A_j$ , а также издержки на производство 1 т продукции  $A_j$ :

| Вид сырья         | Вид продукции |       |       |       |                |
|-------------------|---------------|-------|-------|-------|----------------|
|                   | $A_1$         | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | Объем ресурсов |
| $B_1$ , кг        | 40            | 50    | 20    | 30    | 600 кг         |
| $B_2$ , кг        | 300           | 140   | 180   | 220   | 4000 кг        |
| $B_3$ , кг        | 160           | 140   | 80    | 100   | 1280 кг        |
| Прибыль,<br>руб.  | 4800          | 2500  | 5600  | 3000  |                |
| Издержки,<br>руб. | 300           | 900   | 1200  | 600   |                |

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной, при условии, что суммарные издержки не должны превышать 9600 руб.

10. Для изготовления сплава из меди, олова и цинка в качестве сырья используют два сплава тех же металлов, отличающихся составом и стоимостью. Данные об этих сплавах приведены в таблице:

| Компоненты<br>сплава | Содержание компонентов, % |           |
|----------------------|---------------------------|-----------|
|                      | Сплав № 1                 | Сплав № 2 |
| Медь                 | 10                        | 10        |
| Олово                | 10                        | 30        |
| Цинк                 | 80                        | 60        |
| Стоимость 1 кг       | 400                       | 600       |

Получаемый сплав должен содержать не более 2 кг меди, не менее 3 кг олова, а содержание цинка может составлять от 7,2 до 12,8 кг.

Определить количество  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ , сплавов каждого вида, обеспечивающих получение нового сплава с минимальными затратами на сырье.

11. Для изготовления двух видов изделий  $A_1$  и  $A_2$  завод использует в качестве сырья алюминий и медь. На изготовлении изделий заняты токарные и фрезерные станки. Исходные данные задачи приведены в таблице:

| Виды ресурсов                   | Объем ресурсов | Нормы расхода на 1 изделие |               |
|---------------------------------|----------------|----------------------------|---------------|
|                                 |                | Изделие $A_1$              | Изделие $A_2$ |
| Алюминий, кг                    | 570            | 10                         | 70            |
| Медь, кг                        | 420            | 20                         | 50            |
| Токарные станки, станко-час     | 5600           | 300                        | 400           |
| Фрезерные станки, станко-час    | 3400           | 200                        | 100           |
| Прибыль на 1 изделие, тыс. руб. |                | 3                          | 8             |

Определить количество  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ , изделий  $A_j$ , которые необходимо изготовить для достижения максимальной прибыли.

12. Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице указан состав поезда каждого типа, количество имеющихся в парке вагонов различных видов для формирования поездов и максимальное число пассажиров, на которое рассчитан вагон каждого вида:

| Поезда           | Багажный | Почтовый | Плацкартный | Купейный | Мягкий |
|------------------|----------|----------|-------------|----------|--------|
| Скорый           | 1        | 1        | 5           | 6        | 3      |
| Пассажирский     | 1        | —        | 8           | 4        | 1      |
| Число пассажиров | —        | —        | 58          | 40       | 32     |
| Парк вагонов     | 12       | 8        | 81          | 70       | 26     |

Определить число скорых  $x_1$  и пассажирских  $x_2$  поездов, которые необходимо формировать ежедневно из имеющегося парка вагонов, чтобы число перевозимых пассажиров было максимальным.

13. Завод производит продукцию двух видов  $A_1$  и  $A_2$ , используя сырье, запас которого составляет 16 т. Согласно плану выпуск продукции  $A_1$  должен составлять не менее 60% общего объема выпуска. Расход сырья на изготовление 1 т продукции  $A_1$  и  $A_2$  составляет соответственно 0.05 и 0.1 т. Стоимость 1 т продукции  $A_1$  и  $A_2$  составляет соответственно 900 руб. и 500 руб. Определить план выпуска продукции  $A_1$  и  $A_2$ , при котором стоимость выпущенной продукции будет максимальной.

Найти интервалы изменения цен продукции  $A_1$  и  $A_2$ , при которых план выпуска продукции не изменится.

14. Завод получает 4 вида полуфабрикатов  $B_i$  в количествах:  $B_1$  – 450 т,  $B_2$  – 200 т,  $B_3$  – 300 т и  $B_4$  – 150 т.

В результате смешения этих компонентов получают 3 вида продукции  $A_j$ . Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для  $A_1$  – 2:4:5:3, для  $A_2$  – 3:2:1:2, для  $A_3$  – 1:2:4:3. Стоимость 1 т продукции  $A_j$  составляет:  $A_1$  – 1200 руб.,  $A_2$  – 1000 руб.,  $A_3$  – 1500 руб.

Составить оптимальный план выпуска продукции по критерию максимальной стоимости выпущенной продукции.

15. Завод получает 4 вида полуфабрикатов  $B_i$  в количествах:  $B_1$  – 450 т,  $B_2$  – 200 т,  $B_3$  – 300 т и  $B_4$  – 150 т.

В результате смешения этих компонентов получают 3 вида продукции  $A_j$ . Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для  $A_1$  – 2:4:5:3, для  $A_2$  – 3:2:1:2, для  $A_3$  – 1:2:4:3. Стоимость 1 т продукции  $A_j$  составляет:  $A_1$  – 1200 руб.,  $A_2$  – 1000 руб.,  $A_3$  – 1500 руб.

Составить оптимальный план выпуска продукции по критерию максимального использования полуфабрикатов.

16. Цеху установлен план выпуска по ассортименту продукции  $A_1$  – не менее 1200 кг, продукции  $A_2$  – не менее 2000 кг. Продукция выпускается на двух аппаратах. Данные по производительности аппаратов приведены в таблице:

| Продукция | Производительность аппарата,<br>кг/час |           |
|-----------|----------------------------------------|-----------|
|           | Аппарат 1                              | Аппарат 2 |
| $A_1$     | 3                                      | 6         |
| $A_2$     | 4                                      | 2         |

Фонд времени работы 1-го аппарата – не более 720 часов, 2-го аппарата – не более 640 часов.

Плановая себестоимость продукции, выпускаемая на каждом аппарате, дана в таблице:

| Продукция | Себестоимость продукции,<br>руб./кг |           |
|-----------|-------------------------------------|-----------|
|           | Аппарат 1                           | Аппарат 2 |
| $A_1$     | 40                                  | 30        |
| $A_2$     | 20                                  | 50        |

Требуется распределить время работы аппаратов так, чтобы выполнить план выпуска продукции при наименьшей себестоимости.

17. Заводу установлен годовой план по выпуску бумаги (сорта А и Б) не менее 18 тыс. т. и картона (сорта А, Б и В) не менее 28 тыс. т. Для изготовления продукции используются два вида ресурсов:  $S_1$  – в объеме 44 тыс. т.,  $S_2$  – в объеме 16 тыс. т.

Фонд времени работы оборудования составляет: для машины 1 (производящей бумагу) – не более 7800 часов, для машины 2 (производящей

картон) – не менее 8500 часов. Максимальная мощность ТЭЦ комбината не более 210 тыс. Мкал. Удельные затраты на производство 1 т продукции даны в таблице:

| Наименование продукции | Оборудование    |                 | Ресурсы          |                  |                    | Текущие затраты, тыс. руб./т |
|------------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|--------------------|------------------------------|
|                        | Машина 1, час/т | Машина 2, час/т | $S_1$ , тыс. т/т | $S_2$ , тыс. т/т | Тепло, тыс. Мкал/т |                              |
| Бумага (А)             | 0,5             |                 | 1,0              | 0,6              | 2,6                | 130                          |
| Бумага (Б)             | 0,4             |                 | 1,3              | 0,5              | 1,8                | 50                           |
| Картон (А)             |                 | 0,3             | 0,8              | 0,2              | 2,8                | 135                          |
| Картон (Б)             |                 | 0,2             | 0,7              | 0,1              | 1,7                | 40                           |
| Картон (В)             |                 | 0,4             | 0,9              | 0,4              | 1,6                | 35                           |

Найти оптимальную производственную программу завода по критерию минимума текущих затрат на ее выполнение.

Разработать модель линейного программирования для следующей ЗЦП и решить ее методом Гомори.

18. В цехе размещены 100 станков 1-го типа и 200 станков 2-го типа, на каждом из которых можно производить детали  $A_1$  и  $A_2$ . Производительность станков в сутки, стоимость 1 детали каждого вида и минимальный суточный план их выпуска представлены в таблице:

| Детали | Производительность, дет./сут |       | Стоимость одной детали, руб. | Минимальный суточный план |
|--------|------------------------------|-------|------------------------------|---------------------------|
|        | Тип 1                        | Тип 2 |                              |                           |
| $A_1$  | 20                           | 15    | 600                          | 1510                      |
| $A_2$  | 35                           | 30    | 400                          | 4500                      |

Найти количество станков каждого типа, которые необходимо выделить для производства деталей  $A_j$ ,  $j = 1, 2$ , с таким расчетом, чтобы стоимость продукции, производимой в сутки, была максимальной.

19. Завод выпускает три вида узлов  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  для систем управления, используя для этого два вида технологических линейек  $L_1$  и  $L_2$ . На производство одного узла вида  $N_1$  на линейке  $L_1$  затрачивается 2 часа. На изготовление одного узла  $N_2$  на линейках  $L_1$  и  $L_2$  затрачивается, соответственно, 1 час и 2 часа. На изготовление одного узла  $N_3$  на линейке  $L_2$  затрачивается 3 часа. Завод может использовать линейку  $L_1$  в течение 10 часов, а  $L_2$  – 8 часов. Прибыль от реализации одного изделия  $N_1$  – 5 тыс. руб., а от реализации одного изделия  $N_2$  – 4 тыс. руб.

Определить количество узлов  $N_1$  и  $N_2$ , которое необходимо выпустить заводу с тем, чтобы получить максимальную прибыль.

20. Имеются два вида корма I и II, содержащих питательные вещества (витамины)  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице:

| Питательное вещество          | Необходимый минимум питательных веществ | Число единиц питательных веществ в 1 кг корма |           |
|-------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------|
|                               |                                         | I                                             | II        |
| $S_1$                         | 12 кг                                   | 0,3 кг                                        | 0,1 кг    |
| $S_2$                         | 8 кг                                    | 0,1 кг                                        | 0,2 кг    |
| $S_3$                         | 12 кг                                   | 0,1 кг                                        | 0,6 кг    |
| Стоимость пачки (10 кг) корма |                                         | 4000 руб.                                     | 6000 руб. |

Корм упакован в пачки по 10 кг. Необходимо определить, сколько пачек корма следует купить для дневного рациона, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела, а стоимость была бы минимальной.

21. Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице указан состав поезда каждого типа, количество имеющихся в парке вагонов различных видов для формирования поездов и максимальное число пассажиров, на которое рассчитан вагон каждого вида:

| Поезда           | Багажный | Почтовый | Плацкартный | Купейный | Мягкий |
|------------------|----------|----------|-------------|----------|--------|
| Скорый           | 1        | 1        | 5           | 6        | 3      |
| Пассажирский     | 1        | —        | 8           | 4        | 1      |
| Число пассажиров | —        | —        | 58          | 40       | 32     |
| Парк вагонов     | 12       | 8        | 88          | 70       | 26     |

Определить число скорых  $x_1$  и пассажирских  $x_2$  поездов, которые необходимо формировать ежедневно из имеющегося парка вагонов, чтобы число перевозимых пассажиров было максимальным.

22. Процесс изготовления изделий двух видов  $P_1$  и  $P_2$  состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования  $i$ -го станка составляет  $b_i$  часов в сутки,  $i = 1, 2, 3$ . Время обработки каждого изделия  $j$ -го вида,  $j = 1, 2$ , на  $i$ -м станке равно  $a_{ij}$  часам. Прибыль от реализации одного изделия  $j$ -го вида составляет  $c_j$  руб. Составить план суточного выпуска изделий так, чтобы прибыль от их производства была максимальной для следующих исходных данных:

| Обрабатывающие станки                    | Время работы станков $b_i$ , час | Время обработки изделий $a_{ij}$ , час |       |
|------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------|-------|
|                                          |                                  | $P_1$                                  | $P_2$ |
| 1                                        | 10                               | 1,5                                    | 1,2   |
| 2                                        | 15                               | 1,4                                    | 2,8   |
| 3                                        | 18                               | 0,5                                    | 1,0   |
| Стоимость единицы продукции $c_j$ , руб. |                                  | 400                                    | 750   |

Решить транспортную задачу методом потенциалов. Начальное распределение найти методом северо-западного угла.

23. Матрица перевозок:

|                    |   | Пункты назначения |  |          |  |          |  |          |  | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|---|-------------------|--|----------|--|----------|--|----------|--|----------------|
|                    |   | 1                 |  | 2        |  | 3        |  | 4        |  |                |
| Исходные<br>пункты | 1 | 10                |  | 2        |  | 20       |  | 11       |  | 15             |
|                    |   | $x_{11}$          |  | $x_{12}$ |  | $x_{13}$ |  | $x_{14}$ |  |                |
|                    | 2 | 12                |  | 7        |  | 9        |  | 20       |  | 25             |
|                    |   | $x_{21}$          |  | $x_{22}$ |  | $x_{23}$ |  | $x_{24}$ |  |                |
|                    | 3 | 0                 |  | 14       |  | 16       |  | 18       |  | 5              |
|                    |   | $x_{31}$          |  | $x_{32}$ |  | $x_{33}$ |  | $x_{34}$ |  |                |
| Спрос              |   | 5                 |  | 15       |  | 15       |  | 10       |  |                |

24. Матрица перевозок:

|                    |   | Пункты назначения                                    |                                    |                                                      |                                     |                                                      |                                     |                                                      |                                     | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|---|------------------------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|----------------|
|                    |   | 1                                                    |                                    | 2                                                    |                                     | 3                                                    |                                     | 4                                                    |                                     |                |
| Исходные<br>пункты | 1 | <div><div></div><div><math>x_{11}</math></div></div> | <div><div>7</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{12}</math></div></div> | <div><div>9</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{13}</math></div></div> | <div><div>6</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{14}</math></div></div> | <div><div>12</div><div></div></div> | 10             |
|                    | 2 | <div><div></div><div><math>x_{21}</math></div></div> | <div><div>5</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{22}</math></div></div> | <div><div>12</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{23}</math></div></div> | <div><div>11</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{24}</math></div></div> | <div><div>8</div><div></div></div>  | 5              |
|                    | 3 | <div><div></div><div><math>x_{31}</math></div></div> | <div><div>2</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{32}</math></div></div> | <div><div>13</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{33}</math></div></div> | <div><div>6</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{34}</math></div></div> | <div><div>3</div><div></div></div>  | 15             |
|                    | 4 | <div><div></div><div><math>x_{41}</math></div></div> | <div><div>8</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{42}</math></div></div> | <div><div>10</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{43}</math></div></div> | <div><div>12</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{44}</math></div></div> | <div><div>14</div><div></div></div> | 20             |
| Спрос              |   | 8                                                    |                                    | 20                                                   |                                     | 10                                                   |                                     | 12                                                   |                                     |                |

25. Матрица перевозок:

|                    |                                                                             | Пункты назначения                                                            |                                                                              |                                                                              |                                                                              |                                                                              |    |   |  | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|----|---|--|----------------|
|                    |                                                                             | 1                                                                            |                                                                              | 2                                                                            |                                                                              | 3                                                                            |    | 4 |  |                |
| Исходные<br>пункты | 1                                                                           | <div><div><div></div><div>18</div></div><div><math>x_{11}</math></div></div> | <div><div><div></div><div>9</div></div><div><math>x_{12}</math></div></div>  | <div><div><div></div><div>7</div></div><div><math>x_{13}</math></div></div>  | <div><div><div></div><div>10</div></div><div><math>x_{14}</math></div></div> | 6                                                                            |    |   |  |                |
|                    | <div><div><div></div><div>6</div></div><div><math>x_{21}</math></div></div> | <div><div><div></div><div>4</div></div><div><math>x_{22}</math></div></div>  | <div><div><div></div><div>11</div></div><div><math>x_{23}</math></div></div> | <div><div><div></div><div>14</div></div><div><math>x_{24}</math></div></div> | 8                                                                            |                                                                              |    |   |  |                |
|                    | 3                                                                           | <div><div><div></div><div>12</div></div><div><math>x_{31}</math></div></div> | <div><div><div></div><div>2</div></div><div><math>x_{32}</math></div></div>  | <div><div><div></div><div>8</div></div><div><math>x_{33}</math></div></div>  |                                                                              | <div><div><div></div><div>13</div></div><div><math>x_{34}</math></div></div> | 12 |   |  |                |
|                    | 4                                                                           | <div><div><div></div><div>5</div></div><div><math>x_{41}</math></div></div>  | <div><div><div></div><div>12</div></div><div><math>x_{42}</math></div></div> | <div><div><div></div><div>14</div></div><div><math>x_{43}</math></div></div> | <div><div><div></div><div>16</div></div><div><math>x_{44}</math></div></div> | 14                                                                           |    |   |  |                |
| Спрос              |                                                                             | 12                                                                           | 7                                                                            | 8                                                                            | 13                                                                           |                                                                              |    |   |  |                |

Решить транспортную задачу методом потенциалов. Начальное распределение найти методом наименьшей стоимости.

26. Матрица перевозок:

|                    |   | Пункты назначения |    |          |    |          |    |          |    | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|---|-------------------|----|----------|----|----------|----|----------|----|----------------|
|                    |   | 1                 |    | 2        |    | 3        |    | 4        |    |                |
| Исходные<br>пункты | 1 |                   | 10 |          | 2  |          | 20 |          | 11 | 15             |
|                    |   | $x_{11}$          |    | $x_{12}$ |    | $x_{13}$ |    | $x_{14}$ |    |                |
|                    | 2 |                   | 12 |          | 7  |          | 9  |          | 20 | 25             |
|                    |   | $x_{21}$          |    | $x_{22}$ |    | $x_{23}$ |    | $x_{24}$ |    |                |
|                    | 3 |                   | 0  |          | 14 |          | 16 |          | 18 | 5              |
|                    |   | $x_{31}$          |    | $x_{32}$ |    | $x_{33}$ |    | $x_{34}$ |    |                |
| Спрос              |   | 5                 |    | 15       |    | 15       |    | 10       |    |                |

27. Матрица перевозок:

|                    |   | Пункты назначения                                     |                                                        |                                                        |                                                        |    |   |    |    | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|---|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----|---|----|----|----------------|
|                    |   | 1                                                     |                                                        | 2                                                      |                                                        | 3  |   | 4  |    |                |
| Исходные<br>пункты | 1 | <div><div><math>x_{11}</math></div><div>7</div></div> | <div><div><math>x_{12}</math></div><div>9</div></div>  | <div><div><math>x_{13}</math></div><div>6</div></div>  | <div><div><math>x_{14}</math></div><div>12</div></div> | 10 |   |    |    |                |
|                    | 2 | <div><div><math>x_{21}</math></div><div>5</div></div> | <div><div><math>x_{22}</math></div><div>12</div></div> | <div><div><math>x_{23}</math></div><div>11</div></div> | <div><div><math>x_{24}</math></div><div>8</div></div>  |    | 5 |    |    |                |
|                    | 3 | <div><div><math>x_{31}</math></div><div>2</div></div> | <div><div><math>x_{32}</math></div><div>13</div></div> | <div><div><math>x_{33}</math></div><div>6</div></div>  | <div><div><math>x_{34}</math></div><div>3</div></div>  |    |   | 15 |    |                |
|                    | 4 | <div><div><math>x_{41}</math></div><div>8</div></div> | <div><div><math>x_{42}</math></div><div>10</div></div> | <div><div><math>x_{43}</math></div><div>12</div></div> | <div><div><math>x_{44}</math></div><div>14</div></div> |    |   |    | 20 |                |
| Спрос              |   | 8                                                     | 20                                                     | 10                                                     | 12                                                     |    |   |    |    |                |

28. Матрица перевозок:

|                    |   | Пункты назначения                                    |                                     |                                                      |                                     |                                                      |                                     |                                                      |                                     | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|---|------------------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|----------------|
|                    |   | 1                                                    |                                     | 2                                                    |                                     | 3                                                    |                                     | 4                                                    |                                     |                |
| Исходные<br>пункты | 1 | <div><div></div><div><math>x_{11}</math></div></div> | <div><div>18</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{12}</math></div></div> | <div><div>9</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{13}</math></div></div> | <div><div>7</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{14}</math></div></div> | <div><div>10</div><div></div></div> | 6              |
|                    | 2 | <div><div></div><div><math>x_{21}</math></div></div> | <div><div>6</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{22}</math></div></div> | <div><div>4</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{23}</math></div></div> | <div><div>11</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{24}</math></div></div> | <div><div>14</div><div></div></div> | 8              |
|                    | 3 | <div><div></div><div><math>x_{31}</math></div></div> | <div><div>12</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{32}</math></div></div> | <div><div>2</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{33}</math></div></div> | <div><div>8</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{34}</math></div></div> | <div><div>13</div><div></div></div> | 12             |
|                    | 4 | <div><div></div><div><math>x_{41}</math></div></div> | <div><div>5</div><div></div></div>  | <div><div></div><div><math>x_{42}</math></div></div> | <div><div>12</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{43}</math></div></div> | <div><div>14</div><div></div></div> | <div><div></div><div><math>x_{44}</math></div></div> | <div><div>16</div><div></div></div> | 14             |
| Спрос              |   | 12                                                   |                                     | 7                                                    |                                     | 8                                                    |                                     | 13                                                   |                                     |                |

Решить транспортную задачу методом потенциалов. Начальное распределение найти методом Фогеля.

## 29. Матрица перевозок:

|                    |   | Пункты назначения |  |          |  |          |  |          |  | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|---|-------------------|--|----------|--|----------|--|----------|--|----------------|
|                    |   | 1                 |  | 2        |  | 3        |  | 4        |  |                |
| Исходные<br>пункты | 1 | 10                |  | 2        |  | 20       |  | 11       |  | 15             |
|                    |   | $x_{11}$          |  | $x_{12}$ |  | $x_{13}$ |  | $x_{14}$ |  |                |
|                    | 2 | 12                |  | 7        |  | 9        |  | 20       |  | 25             |
|                    |   | $x_{21}$          |  | $x_{22}$ |  | $x_{23}$ |  | $x_{24}$ |  |                |
|                    | 3 | 0                 |  | 14       |  | 16       |  | 18       |  | 5              |
|                    |   | $x_{31}$          |  | $x_{32}$ |  | $x_{33}$ |  | $x_{34}$ |  |                |
| Спрос              |   | 5                 |  | 15       |  | 15       |  | 10       |  |                |

## 30. Матрица перевозок:

|                    |   | Пункты назначения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |   |  |   |  |   |  | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---|--|---|--|---|--|----------------|
|                    |   | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  | 2 |  | 3 |  | 4 |  |                |
| Исходные<br>пункты | 1 | <div><div><div><div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div></div><div>&lt;</div></div> |  |   |  |   |  |   |  |                |

## 31. Матрица перевозок:

|                    |          | Пункты назначения |          |          |          |          |    |    |    | Объем<br>пр-ва |
|--------------------|----------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----|----|----|----------------|
|                    |          | 1                 |          | 2        |          | 3        |    | 4  |    |                |
| Исходные<br>пункты | 1        | 18                |          | 9        |          | 7        |    | 10 |    | 6              |
|                    | $x_{11}$ | $x_{12}$          |          | $x_{13}$ |          | $x_{14}$ |    |    |    |                |
|                    | 2        | 6                 |          | 4        |          | 11       |    | 14 |    | 8              |
|                    | $x_{21}$ | $x_{22}$          |          | $x_{23}$ |          | $x_{24}$ |    |    |    |                |
| 3                  | 12       |                   | 2        |          | 8        |          | 13 |    | 12 |                |
| $x_{31}$           | $x_{32}$ |                   | $x_{33}$ |          | $x_{34}$ |          |    |    |    |                |
| 4                  | 5        |                   | 12       |          | 14       |          | 16 |    | 14 |                |
| $x_{41}$           | $x_{42}$ |                   | $x_{43}$ |          | $x_{44}$ |          |    |    |    |                |
| Спрос              |          | 12                |          | 7        |          | 8        |    | 13 |    |                |

Решить задачу о назначениях венгерским методом.

## 32. Матрица назначений:

|        |   | Работа   |  |          |  |          |  |          |  |
|--------|---|----------|--|----------|--|----------|--|----------|--|
|        |   | 1        |  | 2        |  | 3        |  | 4        |  |
| Станки | 1 | 1        |  | 4        |  | 6        |  | 3        |  |
|        |   | $x_{11}$ |  | $x_{12}$ |  | $x_{13}$ |  | $x_{14}$ |  |
|        | 2 | 9        |  | 7        |  | 10       |  | 9        |  |
|        |   | $x_{21}$ |  | $x_{22}$ |  | $x_{23}$ |  | $x_{24}$ |  |
|        | 3 | 4        |  | 5        |  | 11       |  | 7        |  |
|        |   | $x_{31}$ |  | $x_{32}$ |  | $x_{33}$ |  | $x_{34}$ |  |
|        | 4 | 8        |  | 7        |  | 8        |  | 5        |  |
|        |   | $x_{41}$ |  | $x_{42}$ |  | $x_{43}$ |  | $x_{44}$ |  |

## 33. Матрица назначений:

|        |   | Работа   |   |          |    |          |    |          |    |
|--------|---|----------|---|----------|----|----------|----|----------|----|
|        |   | 1        |   | 2        |    | 3        |    | 4        |    |
| Станки | 1 |          | 7 |          | 9  |          | 6  |          | 12 |
|        |   | $x_{11}$ |   | $x_{12}$ |    | $x_{13}$ |    | $x_{14}$ |    |
|        | 2 |          | 5 |          | 12 |          | 11 |          | 8  |
|        |   | $x_{21}$ |   | $x_{22}$ |    | $x_{23}$ |    | $x_{24}$ |    |
|        | 3 |          | 2 |          | 13 |          | 6  |          | 3  |
|        |   | $x_{31}$ |   | $x_{32}$ |    | $x_{33}$ |    | $x_{34}$ |    |
|        | 4 |          | 8 |          | 10 |          | 12 |          | 14 |
|        |   | $x_{41}$ |   | $x_{42}$ |    | $x_{43}$ |    | $x_{44}$ |    |

## 34. Матрица назначений:

|        |   | Работа   |    |          |    |          |    |          |    |
|--------|---|----------|----|----------|----|----------|----|----------|----|
|        |   | 1        |    | 2        |    | 3        |    | 4        |    |
| Станки | 1 |          | 18 |          | 9  |          | 7  |          | 10 |
|        |   | $x_{11}$ |    | $x_{12}$ |    | $x_{13}$ |    | $x_{14}$ |    |
|        | 2 |          | 6  |          | 4  |          | 11 |          | 14 |
|        |   | $x_{21}$ |    | $x_{22}$ |    | $x_{23}$ |    | $x_{24}$ |    |
|        | 3 |          | 12 |          | 2  |          | 8  |          | 13 |
|        |   | $x_{31}$ |    | $x_{32}$ |    | $x_{33}$ |    | $x_{34}$ |    |
|        | 4 |          | 5  |          | 12 |          | 14 |          | 16 |
|        |   | $x_{41}$ |    | $x_{42}$ |    | $x_{43}$ |    | $x_{44}$ |    |

### 8.1.5 Нелинейное программирование

#### *Задание № 9 (50 вариантов)*

Необходимо найти экстремум целевой функции ЗНП указанным методом и охарактеризовать его (минимум или максимум). Привести графическую иллюстрацию решения.

*Метод множителей Лагранжа:*

$$1. \quad \begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= 2x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} f(x) &= 3x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= x_1 + x_2 = 12. \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= -x_1 + x_2^2 / 5 = 0. \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min, \\ h_1(x) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ h_2(x) &= 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9/2. \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} f(x) &= x_2 - x_1^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{aligned}$$

*Критерий оптимальности Куна – Таккера:*

$$7. \quad \begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 5 - x_1 - x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} f(x) &= 3x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= x_1 + x_2 \geq 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f(x) = x_1^2 - x_2 \rightarrow \min, \\
 9. \quad & g_1(x) = x_1 - 1 \geq 0, \\
 & g_2(x) = 26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\
 & h(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f(x) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min, \\
 10. \quad & g_1(x) = 4x_2 - x_1 - 1 \geq 0, \\
 & g_4(x) = 1 - 0,5x_1 - x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad & f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\
 & g(x) = -x_1 + x_2^2 / 5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 4)^2 + e^{5x_3} \rightarrow \min, \\
 & g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\
 12. \quad & g_2(x) = x_1 \geq 0, \\
 & g_3(x) = x_2 \geq 0, \\
 & g_4(x) = x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad & f(x) = x_2 - x_1^2 \rightarrow \min, \\
 & g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 1.
 \end{aligned}$$

*Квадратичный штраф:*

$$\begin{aligned}
 14. \quad & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\
 & h(x) = 2x_1 + x_2 - 2 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad & f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \\
 & h(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad & f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow \min, \\
 & h(x) = x_1 + x_2 = 12.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad & f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\
 & h(x) = -x_1 + x_2^2 / 5 = 0.
 \end{aligned}$$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min,$$

$$18. \quad h_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7,$$

$$h_2(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9/2.$$

$$19. \quad f(x) = x_2 - x_1^2 \rightarrow \min,$$

$$h(x) = x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Логарифмический штраф:

$$20. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0.$$

$$21. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = x_1 - x_2 \geq 1.$$

$$22. \quad f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = 5 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

$$23. \quad f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = x_1 + x_2 \geq 12.$$

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$24. \quad g_1(x) = x_1 - 1 \geq 0,$$

$$g_2(x) = 26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

$$25. \quad f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = -x_1 + x_2^2 / 5 \geq 0.$$

$$26. \quad f(x) = x_2 - x_1^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Штраф типа обратной функции:

$$27. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0.$$

$$28. \quad f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min,$$

$$g(x) = 5 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

$$29. \begin{aligned} f(x) &= 3x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= x_1 + x_2 \geq 12. \end{aligned}$$

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$30. \begin{aligned} g_1(x) &= x_1 - 1 \geq 0, \\ g_2(x) &= 26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$31. \begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= -x_1 + x_2^2 / 5 \geq 0. \end{aligned}$$

$$32. \begin{aligned} f(x) &= x_2 - x_1^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= x_1^2 + x_2^2 \leq 1. \end{aligned}$$

*Штраф типа квадрата срезки:*

$$33. \begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$34. \begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 5 - x_1 - x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$35. \begin{aligned} f(x) &= 3x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= x_1 + x_2 \geq 12. \end{aligned}$$

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$36. \begin{aligned} g_1(x) &= x_1 - 1 \geq 0, \\ g_2(x) &= 26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$37. \begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= -x_1 + x_2^2 / 5 \geq 0. \end{aligned}$$

$$38. \begin{aligned} f(x) &= x_2 - x_1^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &= x_1^2 + x_2^2 \leq 1. \end{aligned}$$

*Найти проекцию точки  $z \in R^n$  на множество  $U \subset R^n$ :*

$$39. \quad U = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^0)^2 \leq R_0^2 \right\} \quad - \quad \text{замкнутый шар радиуса } R_0$$

с центром в точке  $x^0$ .

$$40. \quad U = \left\{ x \in E_n \mid \sum_{j=1}^n a_j x_j = b, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\} \quad - \quad \text{гиперплоскость}$$

с нормальным вектором  $a$ .

*По плану производства предприятию необходимо изготовить 180 изделий, которые могут быть изготовлены двумя технологическими способами. Затраты на производство  $x_1$  изделий 1-м способом составляют  $4x_1 + x_1^2$  руб., а на производство  $x_2$  изделий 2-м способом –  $8x_2 + x_2^2$  руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы затраты были минимальны. Для решения использовать:*

41. Метод множителей Лагранжа.
42. Квадратичный штраф.
43. Логарифмический штраф.
44. Штраф типа обратной функции.
45. Штраф типа квадрата срезки.

*В состав автопилота (АП) летательного аппарата входят гироскоп (Г) и бортовой компьютер (БК). Их энергетические параметры составляют: Г –  $x_1$  условных единиц (у. е.), БК –  $x_2$  у. е.*

*Масса АП равна  $M(x) = x_1 + 2x_2$ . Критерий точности работы АП:*

$$E(x) = \frac{64}{x_1 x_2}.$$

*Найти параметры АП, максимизирующие точность его работы, при условии того, что масса АП не превышает 16 у. е. Для решения использовать:*

46. Метод множителей Лагранжа.
47. Квадратичный штраф.

48. Логарифмический штраф.  
 49. Штраф типа обратной функции.  
 50. Штраф типа квадрата срезки.

### **Задание № 10 (26 вариантов)**

#### **Общие требования**

- Найти точку минимума с указанной точностью  $\varepsilon$  (при этом точность по функции и по аргументу полагается равной,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ ).
- Сопроводить решение графической интерпретацией.

#### **Варианты**

*Решить ЗНП методом линеаризации с точностью  $\varepsilon = 0,01$ :*

1.  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, x^0 = (2; 2)^T,$

$$g(x) = x_1^2 - x_2 \geq 0,$$

$$h(x) = 2 - x_1 - x_2^2 = 0,$$

$$1/2 \leq x_1 \leq 5/2, 0 \leq x_2 \leq 3.$$

2.  $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min, x^0 = (1; 1)^T,$

$$g(x) = 2x_1 - x_2^2 - 1 \geq 0,$$

$$h(x) = 9 - 0,8x_1^2 - 2x_2 = 0,$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 3.$$

3.  $f(x) = 9 \cdot (x_1 - 5)^2 + 4 \cdot (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min, x^0 = (0; 0)^T,$

$$g(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \leq 0,$$

$$h(x) = -x_1 + x_2 - 1 = 0,$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 5.$$

*Решить ЗНП методом Франка – Вульфа с точностью  $\varepsilon = 0,1$ :*

4.  $f(x) = x_1^{1/4} + (x_2 / x_1)^{1/4} + (64 / x_2)^{1/4} \rightarrow \min, x^0 = (1; 1)^T,$

$$\begin{aligned}g_1(x) &= x_1 \geq 1, \\g_2(x) &= x_2 \geq x_1, \\g_3(x) &= x_2 \leq 64, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

$$5. f(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2, \quad x^0 = (1; 1)^T,$$

$$\begin{aligned}g(x) &= x_1 + x_2 \leq 8, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

$$6. f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1; 1)^T,$$

$$\begin{aligned}g_1(x) &= -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\g_2(x) &= x_1 + x_2 \leq 4, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

$$7. f(x) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (3; 2)^T,$$

$$\begin{aligned}g_1(x) &= 4x_2 - x_1 - 1 \geq 0, \\g_2(x) &= 1 - 0,5x_1 - x_2 \geq 0, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

*Решить ЗНП методом допустимых направлений Зойтендейка с точностью  $\varepsilon = 0,1$ :*

$$8. f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (2; 3)^T,$$

$$\begin{aligned}g_1(x) &= x_1^2 - x_2 \geq 0, \\g_2(x) &= x_1 + x_2^2 \geq 2.\end{aligned}$$

$$9. f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1; 1)^T,$$

$$\begin{aligned}g_1(x) &= 2x_1 - x_2^2 - 1 \geq 0, \\g_2(x) &= 9 - 0,8x_1^2 - 2x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

$$10. f(x) = 9 \cdot (x_1 - 5)^2 + 4 \cdot (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (2; 2)^T,$$

$$g_1(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \leq 0,$$

$$g_2(x) = -x_1 + x_2 \leq 1.$$

Решить ЗНП методом условного градиента с точностью  $\varepsilon = 0,01$ :

$$11. f(x) = x_1^{1/4} + (x_2 / x_1)^{1/4} + (64 / x_2)^{1/4} \rightarrow \min, x^0 = (1; 1)^T,$$

$$g_1(x) = x_1 \geq 1,$$

$$g_2(x) = x_2 \geq x_1,$$

$$g_3(x) = x_2 \leq 64,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$12. f(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2, x^0 = (1; 1)^T,$$

$$g(x) = x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$13. f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min, x^0 = (1; 1)^T,$$

$$g_1(x) = -x_1 + 2x_2 \leq 2,$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решить ЗНП методом проекции градиента с точностью  $\varepsilon = 0,1$ :

$$14. f(x) = x_1^{1/4} + (x_2 / x_1)^{1/4} + (64 / x_2)^{1/4} \rightarrow \min, x^0 = (1; 1)^T,$$

$$g_1(x) = x_1 \geq 1,$$

$$g_2(x) = x_2 \geq x_1,$$

$$g_3(x) = x_2 \leq 64.$$

$$15. f(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2, x^0 = (1; 1)^T,$$

$$g(x) = x_1 + x_2 \leq 8.$$

$$16. f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min, x^0 = (1; 1)^T,$$

$$g_1(x) = x_1 - 2x_2 \geq -2,$$

$$g_2(x) = -x_1 - x_2 \geq -4,$$

$$g_3(x) = x_1 \geq 0,$$

$$g_4(x) = x_2 \geq 0.$$

$$17. f(x) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min, x^0 = (3; 2)^T,$$

$$g_1(x) = 4x_2 - x_1 - 1 \geq 0,$$

$$g_2(x) = 1 - 0,5x_1 - x_2 \geq 0.$$

$$18. f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 16x_2, x^0 = (1; 1)^T,$$

$$g_1(x) = x_1 \geq 0,$$

$$g_2(x) = x_2 \geq 0.$$

$$19. f(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2, x^0 = (0; 0)^T,$$

$$g_1(x) = x_1 \geq 0,$$

$$g_2(x) = x_1 \leq 1,$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0,$$

$$g_4(x) = x_2 \leq 2.$$

В состав автопилота (АП) летательного аппарата входят гироскоп (Г) и бортовой компьютер (БК). Их энергетические параметры составляют: Г –  $x_1$  условных единиц (у. е.), БК –  $x_2$  у. е.

Масса АП равна  $M(x) = x_1 + 2x_2$ . Критерий точности работы АП:

$$E(x) = \frac{64}{x_1x_2}.$$

Найти параметры АП, максимизирующие точность его работы, при условии того, что масса АП не превышает 16 у. е. Начальная точка  $x^0 = (2; 2)^T$ , для решения использовать:

20. Метод Франка – Вульфа, точность  $\varepsilon = 1$ .

21. Метод допустимых направлений Зойтендейка,  $\varepsilon = 0,1$ .

22. Метод условного градиента, точность  $\varepsilon = 1$ .

23. Метод проекции градиента,  $\varepsilon = 0,1$ .

*По плану производства предприятию необходимо изготовить 180 изделий, которые могут быть изготовлены двумя технологическими способами. Затраты на производство  $x_1$  изделий ( $x_1 \geq 0$ ) 1-м способом составляют  $4x_1 + x_1^2$  руб., а на производство  $x_2$  изделий ( $x_2 \geq 0$ ) 2-м способом –  $8x_2 + x_2^2$  руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы затраты были минимальны. Начальная точка  $x^0 = (90; 90)^T$ , для решения использовать:*

24. Метод Франка – Вульфа, точность  $\varepsilon = 0,01$ .

25. Метод условного градиента, точность  $\varepsilon = 0,01$ .

26. Метод проекции градиента,  $\varepsilon = 0,1$ .

## 8.2 Оформление работы

Оформление контрольной работы должно соответствовать требованиям образовательного стандарта вуза ОС ТУСУР 01–2013 «Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления». Текст стандарта можно найти по ссылке: <https://regulations.tusur.ru/documents/70> [5].

Образец оформления титульного листа контрольной работы приведен в приложении А. Общая структура работы:

- титульный лист;
- содержание;
- решение задания № 1;
- решение задания № 2;
- решение задания № 3;
- решение задания № 4;

- решение задания № 5;
- решение задания № 6;
- решение задания № 7;
- решение задания № 8;
- решение задания № 9;
- решение задания № 10;
- список литературы;
- приложения (при необходимости).

Каждый пункт задания должен содержать постановку задачи и ее решение.

## 9 ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

### 9.1 Задание на лабораторную работу № 1

**Целью** выполнения лабораторной работы № 1 «Безусловная оптимизация» является закрепление на практике реализации численных алгоритмов безусловной оптимизации на языках высокого уровня или в математических пакетах.

Задание состоит из двух этапов:

1. Минимизации функции одной переменной.
2. Минимизации функции многих переменных (многомерная оптимизация без ограничений).

Реализация задания должна удовлетворять следующим требованиям:

- Содержать подробные комментарии по всем этапам решения.
- Позволять модифицировать входные параметры методов – ЦФ, начальный интервал или начальную точку, точность решения и т. п.
- Отображать подробный ход решения с указанием всех промежуточных результатов.
- Включать графическую интерпретацию решения (не требуется для консольных программ).
- Не использовать готовые библиотеки или функции, реализующие лабораторное задание.

#### 9.1.1 Одномерный поиск

Реализовать в программе или математическом пакете один из методов минимизации функции одной переменной согласно варианту.

**Всего 8 вариантов:**

1. Метод равномерного поиска.
2. Метод деления отрезка пополам.
3. Метод Фибоначчи.

4. Метод золотого сечения.
5. Метод Пауэлла.
6. Метод Ньютона – Рафсона.
7. Метод средней точки.
8. Метод с использованием кубической аппроксимации.

В варианте задания 6 допускается использовать любую итерационную формулу – Стефенсена, Уолла и т. д.

***Входные данные:***

- целевая функция;
- начальный интервал (для метода Пауэлла – начальная точка, для метода с использованием кубической аппроксимации – либо интервал, либо точка);
- точность решения по функции и по аргументу (для метода Фибоначчи – только по аргументу);
- дополнительный параметр  $N$  для метода равномерного поиска;
- дополнительный параметр  $\delta$  для метода деления отрезка пополам и метода Фибоначчи.

***Выходные данные:***

- точка оптимума  $x^*$  и оптимальное значение ЦФ  $f^*$ ;
- количество итераций;
- количество вычислений функции и ее производных;
- коэффициент сходимости

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x_{k+2}|}{|x_k - x_{k+1}|^p},$$

где параметр  $p = 1$  для методов с линейной и суперлинейной сходимостью,  $p = 2$  для методов с квадратичной сходимостью и т. д.;

- графическая интерпретация решения;

– результаты всех промежуточных вычислений (интервалы, приближения точки экстремума, значение функции и ее производных во всех промежуточных точках и т. д.).

**Тестовые варианты исходных данных:**

$$- f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x}, \quad x \in [0;1];$$

$$- f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, \quad x \in [-1;0];$$

$$- f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x, \quad x \in [3;5];$$

$$- f(x) = \ln(1+x^2) - \sin x, \quad x \in [0;\pi/4];$$

$$- f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12, \quad x \in [0;2];$$

$$- f(x) = x^3 - x + 1, \quad x \in [-2;0];$$

$$- f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}, \quad x \in [1;5];$$

$$- f(x) = 4x^3 + 2x - 3x^2 + e^{x/2}, \quad x \in [-5;0];$$

$$- f(x) = 12x^2 - \frac{2}{3}x^3, \quad x \in [5;20];$$

$$- f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, \quad x \in [-1;2,5];$$

$$- f(x) = 10x^3 + 3x^2 + x + 5, \quad x \in [1;5];$$

$$- f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, \quad x \in [-1;0];$$

$$- f(x) = x^2 + e^{-x}, \quad x \in [5;10];$$

$$- f(x) = 2x + e^{-x}, \quad x \in [-4;4];$$

$$- f(x) = x^2 + x + \sin x, \quad x \in [-10;10];$$

$$- f(x) = x^2 - x + e^{-x}, \quad x \in [-3;10];$$

$$- f(x) = 2x^2 - 5 - 2^x, \quad x \in [4;6];$$

$$- f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 6, \quad x \in [-3;5];$$

$$- f(x) = -x^2 + 5x - 6, \quad x \in [-5; 10];$$

$$- f(x) = \|x(x-1)\| - 1, \quad x \in [-3; 0].$$

Остальные параметры предлагается задавать самостоятельно.

### 9.1.2 Многомерный поиск

Реализовать в программе или математическом пакете один из методов минимизации функции многих переменных согласно варианту.

**Всего 13 вариантов:**

1. Симплексный метод.
2. Метод Хука – Дживса.
3. Метод сопряженных направлений Пауэлла.
4. Метод наискорейшего спуска (Коши).
5. Метод Ньютона.
6. Модифицированный метод Ньютона.
7. Метод Марквардта.
8. Метод сопряженных градиентов для квадратичных функций.
9. Метод Флетчера – Ривза.
10. Метод Полака – Рибьера.
11. Метод Миля – Кентрелла.
12. Метод Дэвидона – Флетчера – Пауэлла.
13. Метод Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шенно.

Для реализации одномерного поиска в вариантах задания 4, 6, 9–13 использовать метод из первой части задания.

**Входные данные:**

- размерность задачи;
- целевая функция;
- начальная точка;
- точность решения по функции и по аргументу;

– дополнительные параметры  $\Delta^0$  и  $\alpha$  для симплексного метода и метода Хука – Дживса;

– дополнительный параметр  $\lambda_0$  для метода Марквардта.

***Выходные данные:***

– точка оптимума  $x^*$  и оптимальное значение ЦФ  $f^*$ ;

– количество итераций;

– количество вычислений функции, градиента, гессиана (или его приближения в квазиньютоновских методах);

– графическая интерпретация решения – линии уровня, траектория спуска, одномерный поиск и т. п.;

– результаты всех промежуточных вычислений (приближения точки экстремума, значение функции и градиента всех промежуточных точках и т. д.).

***Тестовые варианты исходных данных:***

–  $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ ,  $x^0 = [0; 0]^T$ ;

–  $f(x) = 2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$ ,  $x^0 = [0; 0]^T$ ;

–  $f(x) = 2(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ ,  $x^0 = [0; 0]^T$ ;

–  $f(x) = 2(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 6)^2$ ,  $x^0 = [0; 0]^T$ ;

–  $f(x) = 3(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2$ ,  $x^0 = [0; 0]^T$ ;

–  $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ,  $x^0 = [5; 5]^T$ ;

–  $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ ,  $x^0 = [7; 7]^T$ ;

–  $f(x) = 1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2$ ,  $x^0 = [5; 5]^T$ ;

–  $f(x) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 4x_1 + 3$ ,  $x^0 = [5; 5]^T$ ;

–  $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2$ ,  $x^0 = [3; 2]^T$ ;

- $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2, x^0 = [5, 23; 4, 41]^T$ ;
- $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{2/3} - 4, x^0 = [2, 31; 4, 27]^T$ ;
- $f(x) = (x_1^2 + x_2^2) \cdot (1 - \exp(-x_1^2 - x_2^2)), x^0 = [1, 5; 2]^T$ ;
- $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, x^0 = [1, 5; 0, 7]^T$ ;
- $f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2, x^0 = [0, 78; 1]^T$ ;
- $f(x) = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}, x^0 = [2; 2]^T$ ;
- $f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2, x^0 = [2; 1]^T$ ;
- $f(x) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2, x^0 = [0, 3; 0, 5]^T$ ;
- $f(x) = \sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2} - 2, x^0 = [3; 5]^T$ ;
- $f(x) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2, x^0 = [1, 2; 0, 75]^T$ .

Остальные параметры предлагается задавать самостоятельно.

## 9.2 Задание на лабораторную работу № 2

**Целью** выполнения лабораторной работы № 2 «Условная оптимизация» является закрепление на практике реализации численных алгоритмов условной оптимизации на языках высокого уровня или в математических пакетах.

Задание состоит из двух этапов:

1. Решение задачи линейного программирования.
2. Решение задачи нелинейного программирования.

Реализация задания должна удовлетворять следующим требованиям:

- Содержать подробные комментарии по всем этапам решения.
- Позволять модифицировать входные параметры методов – ЦФ, размерность задачи, начальную точку, точность решения и т. п.

- Отображать подробный ход решения с указанием всех промежуточных результатов.
- Включать графическую интерпретацию решения (не требуется для консольных программ).
- Не использовать готовые библиотеки или функции, реализующие лабораторное задание.

### 9.1.2 Линейное программирование

Реализовать в программе или математическом пакете ряд методов решения ЗЛП согласно варианту.

***Всего 17 вариантов:***

1. Методы:

- метод северо-западного угла;
- метод потенциалов с выделением базиса методом северо-западного угла.

2. Методы:

- графический метод решения ЗЛП;
- метод Гомори.

3. Методы:

- метод Фогеля;
- симплекс-метод решения задачи о назначении с выделением базиса методом Фогеля.

4. Методы:

- графический метод решения ЗЦП;
- симплекс-метод с выделением начального базиса методом Жордана – Гаусса.

5. Методы:

- метод наименьшей стоимости;
- метод потенциалов с выделением базиса методом наименьшей стоимости.

6. Методы:

- венгерский метод.

7. Методы:

- метод Фогеля;
- метод потенциалов с выделением базиса методом Фогеля.

8. Методы:

- графический метод решения ЗЛП;
- симплекс-метод с выделением начального базиса методом

Жордана – Гаусса.

9. Методы:

- метод наименьшей стоимости;
- симплекс-метод решения ТЗ с выделением базиса методом

наименьшей стоимости.

10. Методы:

- графический метод решения ЗЦП;
- метод Гомори.

11. Методы:

- метод наименьшей стоимости;
- симплекс-метод решения задачи о назначении с выделением базиса

методом наименьшей стоимости.

12. Методы:

- графический метод решения ЗЦП;
- симплекс-метод с выделением начального базиса методом искус-

ственного базиса.

13. Методы:

- метод северо-западного угла;
- симплекс-метод решения ТЗ с выделением базиса методом северо-

западного угла.

## 14. Методы:

- симплекс-метод для ЗЛП в СФ.
- метод Гомори.

## 15. Методы:

- метод северо-западного угла;
- симплекс-метод решения задачи о назначении с выделением базиса методом северо-западного угла.

## 16. Методы:

- графический метод решения ЗЛП;
- симплекс-метод с выделением начального базиса методом искусственного базиса.

## 17. Методы:

- метод Фогеля;
- симплекс-метод решения ТЗ с выделением базиса методом Фогеля.

В заданиях, где указан метод Гомори, реализации симплекс-метода не требуется, т. е. на вход подается уже оптимальное решение ЗЛП, но не удовлетворяющее условию целочисленности  $x \in Z$ .

***Входные данные:***

- размерность задачи;
- целевая функция для ЗЛП или ЗЦП;
- ограничения задачи для ЗЛП или ЗЦП (в виде матрицы или системы равенств и неравенств, не обязательно приведенных к СФ), исключение для метода Гомори оговорено выше;
- список базисных переменных для ЗЛП или ЗЦП.
- матрица перевозок для ТЗ;
- матрица назначений для ЗоН.

***Выходные данные:***

- точка оптимума  $x^*$  и оптимальное значение ЦФ  $f^*$ ;
- проверка выполнения ограничений задачи в точке  $x^*$ ;

- графическая интерпретация решения для графического метода;
- результаты всех промежуточных вычислений (этапы выделения базиса, модификации симплекс-таблиц, матриц перевозок и назначений и т. д.).

***Тестовые варианты исходных данных:***

См. задачи в заданиях 7–8 контрольной работы.

### **9.1.3 Нелинейное программирование**

Реализовать в программе или математическом пакете ряд методов решения ЗНП согласно варианту.

Первая часть задания ***имеет 6 вариантов:***

1. Метод множителей Лагранжа.
2. Метод Куна – Таккера.
3. Метод штрафных функций, квадратичный штраф.
4. Метод штрафных функций, логарифмический штраф.
5. Метод штрафных функций, штраф типа обратной функции.
6. Метод штрафных функций, штраф типа квадрата срезки.

Вторая часть задания ***имеет 7 вариантов:***

1. Метод линеаризации.
2. Метод Франка – Вульфа.
3. Метод допустимых направлений Зойтендейка.
4. Метод условного градиента для линейных ограничений.
5. Метод условного градиента для нелинейных ограничений.
6. Метод проекции градиента для линейных ограничений.
7. Метод проекции градиента для нелинейных ограничений.

Для поиска проекции точки на ОДР в вариантах задания 5 и 7 использовать метод из первой части задания.

***Входные данные:***

- размерность задачи;
- целевая функция;

- ограничения;
- начальная точка;
- точность решения по функции и по аргументу;
- начальное значение параметра  $R^0$  для методов штрафов.

***Выходные данные:***

- точка оптимума  $x^*$  и оптимальное значение ЦФ  $f^*$ ;
- проверка выполнения ограничений задачи в точке  $x^*$ ;
- графическая интерпретация решения – линии уровня, траектория спуска, одномерный поиск, нахождение проекций на ОДР и т. п.;
- результаты всех промежуточных вычислений (приближения точки экстремума, значение функции и выполнение ограничений в промежуточных точках и т. д.).

***Тестовые варианты исходных данных:***

См. задачи в заданиях 9–10 контрольной работы.

## **9.2 Работа в пакете Mathcad**

В данном разделе рассмотрены основы работы в пакете Mathcad, а именно – версии Mathcad 15.0. Рассмотрены лишь базовые функции, необходимые для выполнения лабораторных работ. Но, как уже отмечалось, использовать можно любое другое доступное ПО:

- среды разработки на языках высокого уровня (Microsoft Visual Studio, Qt Creator, PascalABC.Net, NetBeans и др.);
- пакеты MATLAB и Simulink компании MathWorks (официальный сайт <https://www.mathworks.com/>);
- пакет Mathematica (и его упрощенная бесплатная версия Wolfram|Alpha) компании Wolfram Research (<https://www.wolfram.com/>);
- пакет Scilab компании Scilab Enterprises – бесплатная альтернатива пакета MATLAB (<http://www.scilab.org/>);

- Свободно распространяемый пакет GNU Octave, совместимый с MATLAB (<http://www.gnu.org/software/octave/>);
  - система Maxima Массачусетского технологического института, MIT (<http://maxima.sourceforge.net/ru/>);
  - программа SMath Studio (<http://ru.smath.info>) и ее онлайн-версия SMath Studio Cloud (<http://smath.info/cloud/>) – бесплатные аналоги пакета Mathcad;
  - офисный пакет Microsoft Excel, имеющий инструменты решения оптимизационных задач и встроенный язык программирования VBA и т. д.
- В этом списке можно найти среды и пакеты, работающие практически в любой ОС – Windows, Linux, MacOS и др.

### **9.2.1 Интерфейс пакета Mathcad**

#### ***Общий вид главного окна***

С точки зрения интерфейса система Mathcad 15 является приложением, работающим в операционной системе Windows. Запустив Mathcad, можно увидеть меню пользователя, разнообразные панели инструментов с кнопками быстрого доступа, строку состояния, вертикальную и горизонтальную полосы прокрутки (рис. 9.1).

Все действия, вычисления, настройка параметров в Mathcad доступны через главное меню, которое состоит из вложенных подменю. Также большинство действий доступны на панелях инструментов и с помощью клавиатуры через комбинации соответствующих клавиш. Панели инструментов предназначены для быстрого доступа ко многим командам Mathcad с помощью мыши. Строка состояния сообщает пользователю развернутую информацию о текущем действии. Полосы прокрутки позволяют перемещаться по самому документу.

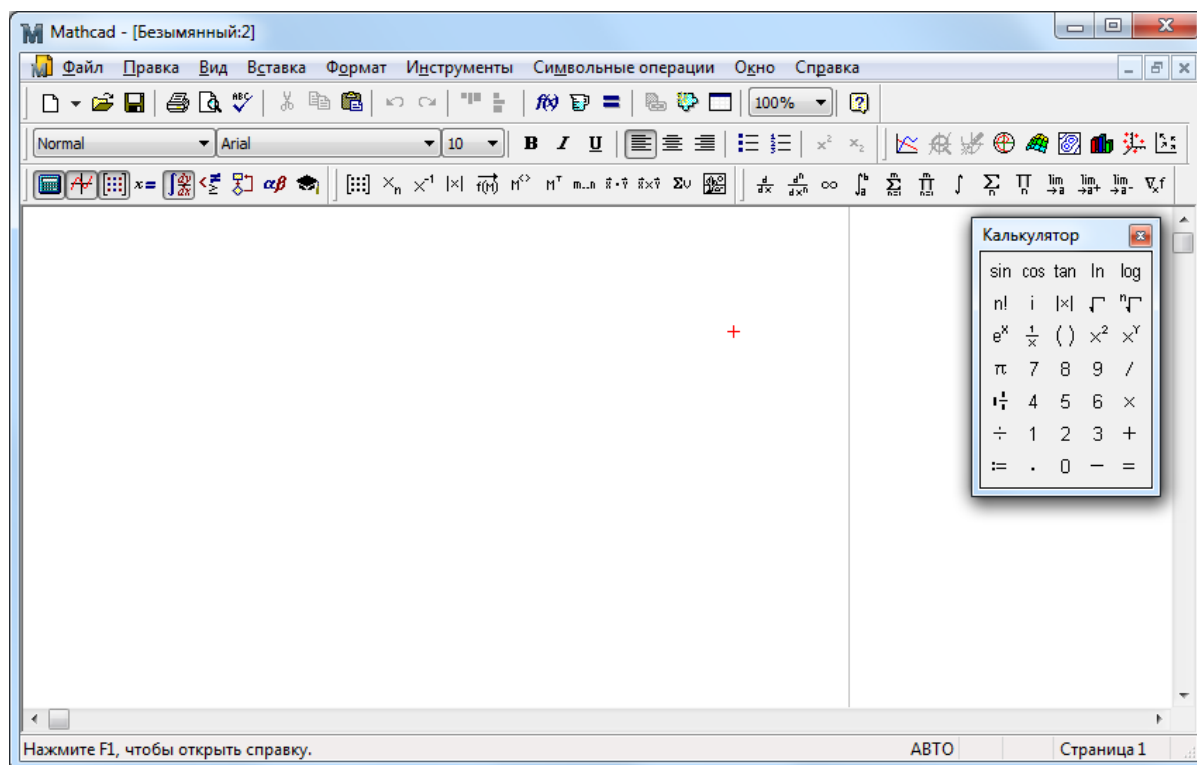


Рис. 9.1 – Интерфейс пакета Mathcad

Для того чтобы передвигаться по документу с помощью клавиатуры, существует специальный курсор. Данный курсор показывает местоположение в текущем документе и, в зависимости от своего местоположения может принимать разные формы (перекрестие, перпендикулярные линии, вертикальная черточка) и цвета (красный, синий). Непосредственно передвигать курсор можно при помощи клавиатурных кнопок ВЛЕВО, ВПРАВО, ВВЕРХ, ВНИЗ, ВВОД, ТАБУЛЯЦИЯ, BACKSPACE, ПРОБЕЛ. При нажатии клавиш PAGE UP, PAGE DOWN можно передвигаться по документу постранично, но курсор останется на прежнем месте. Курсор переносится автоматически на то место, где была нажата левая или правая кнопка мыши. Также прокрутку документа осуществляет вращение колеса мыши.

Необходимо отметить, что аналоги пакета Mathcad предоставляют схожий интерфейс. Например, на рисунке 9.2 представлен интерфейс облачного пакета SMath Studio Cloud. Данный пакет также позволяет работать с файлами формата Mathcad.

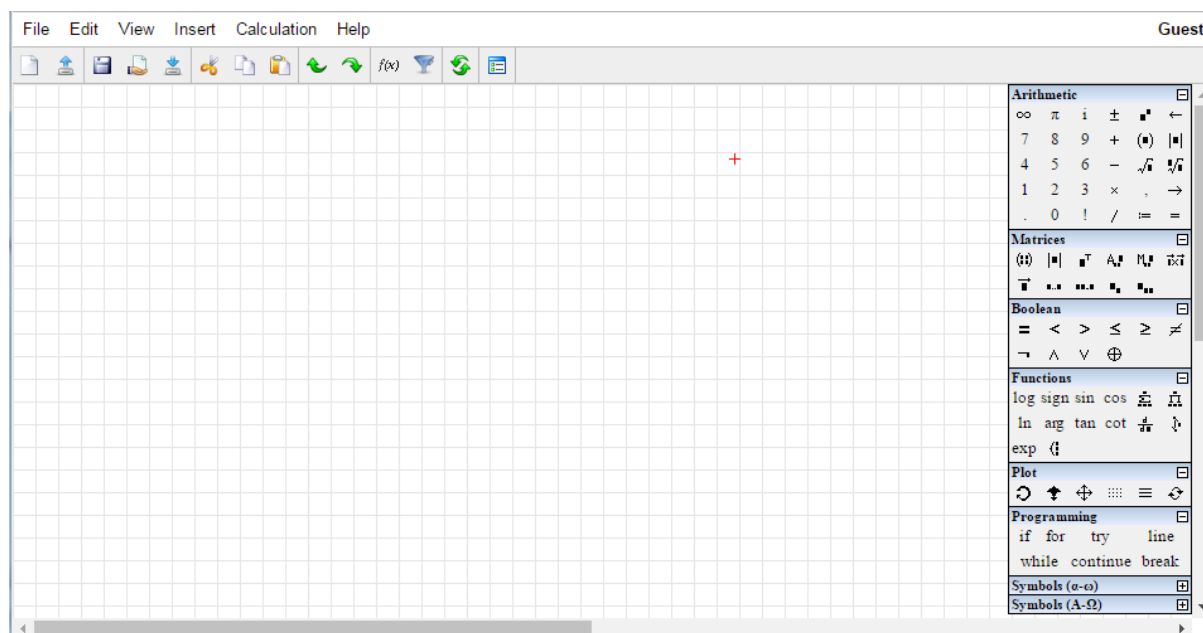


Рис. 9.2 – Интерфейс SMath Studio Cloud

### *Главное меню*

В Mathcad главное меню состоит из 9 основных пунктов: «Файл», «Правка», «Вид», «Вставка», «Формат», «Инструменты», «Символьные операции», «Окно», «Справка».

С помощью меню «Файл» можно проводить разнообразные операции с документом Mathcad: создать новый, открыть уже существующий, закрыть текущий, сохранить текущий, установить параметры печати и напечатать весь документ. Как функциональное дополнение в это меню включен список ранее открытых документов.

Меню «Правка» позволяет проводить различные действия с редактором Mathcad: отменить ошибочно выполненное действие, повторить последнее действие, вырезать (скопировать или вставить) часть документа, выполнять поиск (замену) текста в рабочем документе и т. д.

В меню «Вид» настраивается непосредственный вид главного окна Mathcad: включение/выключение панелей инструментов и окон, изменение масштаба просмотра и других параметров документа.

Меню «Вставка» помогает вставить в рабочий документ разнообразные объекты: графики, матрицы, функции, рисунки, комментарии и любые зарегистрированные в операционной системе OLE (ActiveX) объекты.

В меню «Формат» пользователю представляется возможность изменения формата представления разнообразных данных своего документа: уравнения, результата, текста, графиков, цветов и т. д.

Меню «Инструменты» позволяет пользователю управлять вычислительным процессом Mathcad, а также проверкой правописания и анимацией.

С помощью меню «Символьные операции» возможно управление аналитическими вычислениями, которые реализуются встроенным символьным транслятором.

Переключение между разными документами и изменение взаимного положения документов в Mathcad возможно с помощью меню «Окно».

Получить самую разнообразную информацию о самой системе Mathcad возможно из меню «Справка».

### ***Панели инструментов***

Стандартная панель инструментов (рис. 9.3) объединяет разнообразные, но наиболее часто используемые команды в виде кнопок быстрого доступа. Если поднести курсор мыши к какой-нибудь кнопке, то смысл ее действия будет пояснен во всплывающей подсказке, а более развернутая информация появится в строке состояния.



Рис. 9.3 – Стандартная панель инструментов

Панель форматирования (рис. 9.4) предназначена для выбора шрифта, стиля документа, выравнивания текста.



Рис. 9.4 – Панель форматирования

Математическая панель инструментов предоставляет доступ ко всем математическим ресурсам Mathcad в виде дополнительных панелей инструментов. В Mathcad можно открыть девять дополнительных панелей инструментов (рис. 9.5).

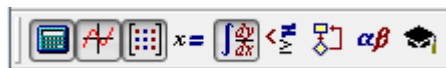


Рис. 9.5 – Математическая панель

Перечислим их в порядке расположения кнопок:

1. «Калькулятор» – предоставляет доступ к арифметическим операторам.
2. «График» – предоставляет доступ к графическим ресурсам системы Mathcad.
3. «Матрица» – предоставляет доступ к операторам работы с векторами и матрицами.
4. «Вычисление» – предоставляет доступ к операторам записи вычислений.
5. «Математический анализ» – предоставляет доступ к операторам математического анализа.
6. «Булева алгебра» – предоставляет доступ к логическим операторам.
7. «Программирование» – предоставляет доступ к операторам программирования.
8. «Греческие» – открывает доступ к символам греческого алфавита.
9. «Символьные» – дает возможность применять операторы символьного вычисления.

Все эти панели управления могут располагаться как в контейнере под главным меню, так и в виде плавающих инструментальных окон.

### 9.3.2 Работа в редакторе документов

#### *Понятие региона*

Любое математическое выражение, текстовый комментарий, рисунок и т. д. в документе Mathcad является независимым объектом и называется *регионом*. В регион можно войти, если нажать левой кнопкой мыши на него. После этого данный регион выделится черной рамочкой. Перейти в регион также можно, если переместить туда курсор.

В Mathcad все регионы являются независимыми (в смысле редактирования) объектами. Следствием данного свойства является способность располагать любой регион в любом месте документа, копировать, удалять, перемещать регион в буфер обмена Windows – все это делает редактирование самого документа более наглядным и быстрым.

Если курсор находится в самом регионе, то его границы обрамляются тонкими черными линиями, а если вне региона – видно лишь его содержимое без границ. Для того чтобы были видны границы всех регионов, необходимо включить соответствующую опцию «Регионы» в меню «Вид».

#### *Редактирование выражений*

Одно из основных достоинств системы Mathcad – естественная математическая запись любого выражения. Например, если необходимо разделить число  $a$  на число  $b$ , то в самой системе Mathcad это будет выглядеть именно как

$$\frac{a}{b},$$

а не  $a/b$  или как-то еще. Это касается и остальных математических операторов, что делает Mathcad не просто «большим калькулятором» (как, например, пакет Microsoft Excel), а мощной математической системой для решения серьезных вычислительных задач.

Для создания нового региона с математическим выражением необходимо переместить курсор на пустое (т. е. не занятое другим регионом) место рабочего документа. Курсор должен быть в виде красного перекрестия. Для примера, посчитаем с помощью Mathcad следующее выражение:  $1 + 2$ . Для этого нужно нажать на клавиатуре цифру «1». При этом в документе появится цифра «1», обведенная черной рамкой. Таким образом, мы автоматически оказались внутри региона математического выражения. В нем курсор приобретает вид синих перпендикулярных линий: вертикальная линия показывает текущее положение относительно всей формулы, а горизонтальная линия – зону охвата формулы.

Если далее нажать на клавишу «+», то в документе появится знак сложения, а после него – маленький черный прямоугольник, обозначающий пустое (но необходимое для заполнения) место. То есть Mathcad подсказывает, что оператор сложения имеет два аргумента. Заполним цифрой «2» данный черный прямоугольник. Теперь для вывода результата вычисления необходимо ввести оператор равенства «=». Автоматически после данного ввода появится ответ. Аналогичным образом можно ввести любое другое математическое выражение и вычислить его.

Очень удобно для ввода, редактирования математических выражений применять соответствующие математические палитры. Например, рассчитаем следующее выражение:

$$\frac{\log(1.5)}{\sin(1.5)} + \sqrt{58}.$$

Сделаем это двумя путями: используя клавиатуру и используя арифметическую панель инструментов (предварительно нужно перейти на пустое место рабочего документа).

**Путь первый** (с использованием клавиатуры):

1. Последовательно набираем слово «log», открывающую круглую скобку, цифру «1», точку, цифру «5», закрывающую круглую скобку.

2. Набираем косую черту «/», при этом ранее набранное выражение «log(1.5)» немного приподнимется вверх и становится делимым, под ним появится горизонтальная черта, а под чертой – черный маленький прямоугольник для делителя.

3. Запишем в знаменатель синус: «sin», «(», «1», «.», «5», «)». Левая часть нашего выражения записана.

4. Далее для ввода выражения необходимо набрать его правую часть (корень из 58). Для этого сначала необходимо нажать пробел, чтобы из знаменателя перейти на уровень охвата всей дроби, затем «+», обратную косую черту «\» (ввод оператора извлечения квадратного корня), «58». Ввод математического выражения закончен. Для получения ответа необходимо нажать «=».

**Путь второй** (с использованием арифметической панели инструментов):

1. Открываем панель инструментов «Калькулятор» (см. рис. 9.1).

2. Набираем выражение без помощи клавиатуры, используя только мышь для выбора нужных символов.

Для удаления ошибочно набранных букв, цифр или операторов используется клавиша BACKSPACE (удаляется символ, расположенный слева от курсора) или клавиша DELETE (удаляется символ, расположенный справа от курсора). Также удаление группы символов возможно, если выделить их (при помощи мыши или клавиатуры – у выделенных объектов появляется пунктирная граница) и нажать клавишу DELETE или BACKSPACE.

### ***Ввод текста***

Под текстом понимается любое выражение, которое самой системой никак не обрабатывается и не вычисляется. Такие выражения разработчиками Mathcad добавлены для того, чтобы была возможность ввода комментариев, которые можно вставлять в любое свободное место документа.

Для начала набора текста следует набрать на клавиатуре парные кавычки (или выбрать из меню «Вставка» пункт «Регион текста»). Автоматически создается регион для набора текста. Курсор принимает вид красной вертикальной черточки. Теперь можно набирать любой текст, его вставлять из любого текстового редактора, удалять, искать конкретные фразы и т. д. Для выхода из текстового региона достаточно нажать левую кнопку мыши в любом месте вне этого региона или нажать одну из клавиш: ВПРАВО, ВНИЗ, ВВЕРХ.

### ***Построение графиков***

С помощью двумерных графиков можно посмотреть графическое представление функциональной зависимости или математических выражений. Для создания региона простого двумерного графика достаточно нажать клавишу «@», нажать соответствующую кнопку в графической панели либо выбрать в меню «Вставка» в подменю «График» пункт «График X-Y». При этом появится шаблон графика (рис. 9.6).

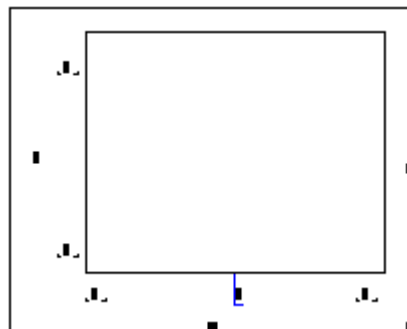


Рис. 9.6 – Шаблон региона двумерного графика

Для примера построим график функции  $y = x^2$  в диапазоне  $[-10; 10]$ . В списке переменных графика на оси абсцисс введем имя аргумента  $x$ . На оси абсцисс слева в черном квадратике введем левую границу диапазона «-10», справа – правую границу диапазона «10». На месте зависимостей на оси ординат наберем функцию  $x^2$  по правилам редактирования математических

выражений («x», «^», «2»). Теперь для расчета и просмотра самого графика достаточно нажать клавишу F9 или просто покинуть графический регион.

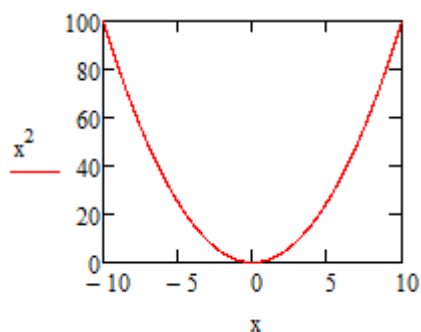


Рис. 9.7 – График функции  $y = x^2$

Заметим, что масштабирование значений функции Mathcad подберет автоматически (рис. 9.7).

Часто удобнее сначала объявить функциональную зависимость  $y(x) := x^2$ , а уже потом строить ее график.

Аналогичным образом строится 3D-график – либо в виде поверхности, либо в виде линий уровня (рис. 9.8).

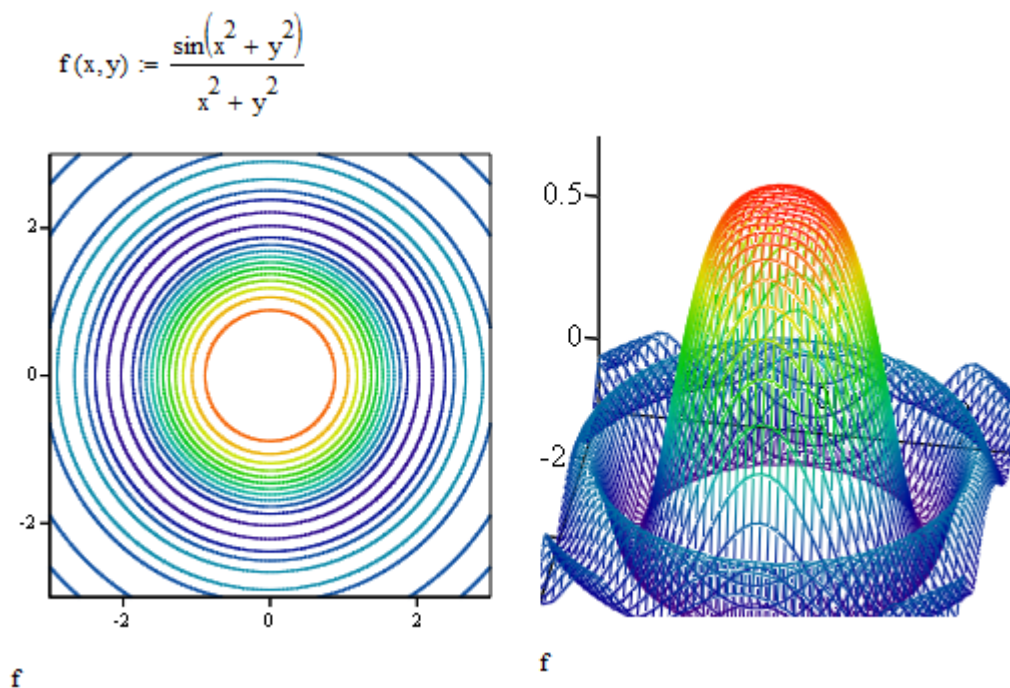


Рис. 9.8 – Виды 3D-графиков

### 9.3.3 Входной язык Mathcad

Будучи математической системой, Mathcad заметно облегчает выполнение самых разнообразных математических расчетов. Их облегчение связано с математически ориентированным входным языком общения с системой.

При решении многих задач Mathcad не требует от пользователя навыков программирования в общепринятом его понимании, т. е. подробного описания решения задачи на некотором специальном языке программирования. Вполне достаточно описать алгоритм решения нужных задач так же, как в математической литературе.

Это достигнуто за счет работы пользователя с промежуточным математически ориентированным языком описания задач, который называется *входным*. Этот язык интерпретирующего типа и поддерживает простой и удобный диалог с пользователем. Можно считать это важным аспектом общей визуализации вычислений, когда в наглядном и понятном виде не только выводятся результаты вычислений, но и задаются данные для них и описываются этапы решения задач. К важнейшим типам данных в системе Mathcad относятся константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

**Алфавит Mathcad.** Как и всякий язык (в том числе программирования), входной язык Mathcad имеет свой алфавит, т. е. набор символов, из которых состоят его объекты. В алфавит Mathcad входят:

- малые и большие латинские буквы;
- малые и большие греческие буквы;
- арабские цифры от 0 до 9;
- идентификаторы системных переменных;
- специальные знаки – операторы;
- имена встроенных функций;

- спецзнаки;
- малые и большие буквы кириллицы (при работе с русифицированными документами).

**Константы.** Константы – поименованные объекты, значения которых заведомо predeterminedены в системе. Mathcad имеет следующие типы констант:

- целочисленные константы (0, 1, 23, –45 и т. д.);
- вещественные числа с мантиссой и порядком ( $12.3 \cdot 10^{-5}$  и т. д.);
- восьмеричные числа с основанием 8 и значениями одного разряда от 0 до 7 (помечаются латинской буквой «O» от слова octal);
- шестнадцатеричные числа с основанием 16, каждый разряд которых может иметь значения от 0 до 9 и от A до F (помечаются знаком h или H в конце – от слова hexadecimal);
- комплексные числа (вводятся в виде « $x + yi$ » или « $x + yj$ », где « $x$ » – действительная часть комплексного числа, « $y$ » – его мнимая часть);
- системные константы, хранящие определенные параметры системы;
- строковые константы – любые цепочки символов, заключенные в кавычки (арифметические выражения в строковых константах рассматриваются как текст и не вычисляются);
- единицы измерения физических величин.

Знак умножения «\*» при выводе числа на экран меняется на привычную точку, а операция возведения в степень (с применением спецзнака «^») отображается путем представления порядка в виде надстрочного числа. Диапазон возможных значений чисел лежит в пределах от  $\pm 10^{307}$  до  $\pm 10^{-307}$  (это есть машинная бесконечность и машинный ноль).

**Переменные.** Переменные – поименованные объекты, которым можно присваивать различные значения. Имена констант, переменных и иных объектов называют идентификаторами. В Mathcad тип переменной

определяется ее значением – переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т. д. Поэтому тип переменной предварительно не задается.

Идентификаторы в Mathcad могут иметь практически любую длину. При их задании можно использовать латинские и греческие буквы, а также цифры. Однако начинаться идентификатор может только с буквы. Пробелы в идентификаторах вводить нельзя, но допустимо применение некоторых спецсимволов (например, знак подчеркивания «\_»). Применение знаков операторов арифметических операций недопустимо, поскольку ведет к неоднозначности идентификации переменной. Малые и большие буквы в идентификаторах различаются.

Идентификаторы должны быть уникальными, т. е. они не могут совпадать с именами встроенных или определенных пользователей функций.

**Операторы.** Операторы – элементы языка, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся операторы арифметических действий, операторы вычисления сумм, произведений, производной, интеграла и т. д. После указания операндов (аргументов соответствующих операций) операторы становятся исполняемыми программными блоками. Также Mathcad позволяет задавать и новые операторы, определенные пользователем.

**Функции.** Система Mathcad имеет множество встроенных функций. Функции обладают особым свойством – в ответ на обращение к ним по имени с указанием аргумента (или списка аргументов) в круглых скобках они возвращают некоторое значение (символьное, числовое, вектор или матрицу). В систему встроен ряд функций, например, вычисления синуса  $\sin(x)$ , натурального логарифма  $\ln(x)$  и т. д. Наряду со встроенными функциями могут задаваться и функции пользователя, отсутствующие в наборе встроенных в Mathcad функций. Благодаря встроенным функциям

обеспечивается расширение входного языка Mathcad и его адаптация к задачам пользователя.

**Программные операторы.** В ранних версиях системы Mathcad возможности программирования в них были крайне ограниченными. Фактически Mathcad позволял реализовать лишь линейные программы, осуществляя функциональное программирование, в основе которого лежит понятие функции. Условная функция и диапазонные переменные в отдельных случаях могли заменить условные выражения и циклы, но с серьезными ограничениями. Эти возможности появились в версии Mathcad 6.0 PLUS и в расширенном варианте имеются в 7.0 и выше версиях.

**Графики.** Для создания графиков в Mathcad имеется программный графический процессор. Основное внимание при его разработке было уделено обеспечению простоты задания графиков и их модификации с помощью соответствующих опций. Процессор позволяет строить самые разные графики, например, в декартовой и полярной системе координат, трехмерные поверхности, графики уровней и т. д.

**Символьные вычисления.** Для выполнения символьных вычислений система Mathcad дополнена символьным ядром (процессором). Символьные операции применяются к целым выражениям, к отдельным переменным в выражениях, к матрицам, применяются и для преобразований Лапласа, Фурье и Z-преобразования.

### ***Работа с переменными***

**Присваивание значений.** В отличие от классической записи операций в математике, в Mathcad знак « $\leftarrow$ » можно использовать как оператор присваивания только один раз, при первом присваивании значений новой переменной любого типа. Основное назначение этого оператора – вывод значения переменной или выражения, после которых ставится знак равенства.

До первого присваивания переменная не определена (не имеет значения) и потому знак «=» срабатывает как оператор присваивания.

Основным оператором присваивания является знак «:=», вводимый двусторонним. Его можно применять при любой по порядку операции присваивания (в том числе и при первой). Если переменной присваивается начальное значение с помощью оператора «:=» (или в первый раз с помощью оператора «=»), такое присваивание называется *локальным присваиванием*. До этого присваивания переменная не определена, и ее нельзя использовать. Однако с помощью знака «≡» можно обеспечить *глобальное присваивание*, т. е. оно может производиться в любом месте документа. К примеру, если переменной присвоено таким образом значение в самом конце документа, то она будет иметь это же значение и в начале документа. В дальнейшем это значение можно изменить и с помощью операции локального присваивания.

Статус присваивания не следует путать со статусом самих переменных. Все переменные, описанные выше, являются глобальными, поскольку их можно определять в любом месте документа и в любом месте изменять их значения. Локальные переменные в Mathcad содержатся в телах функций пользователя и внешних процедурах и функциях, которые будут рассмотрены позже.

**Диапазонные переменные.** В математике часто возникает необходимость в задании некоторого ряда значений – чаще всего упорядоченного. Например, для вычисления факториала  $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-1) \cdot N$  нужно сформировать ряд целых чисел от 1 до  $N$  с шагом 1. Часто ряд значений какой-то переменной (например, абсциссы  $x$ ) нужен для построения графика ломаной линии по точкам, соединяя их отрезками прямых. Для создания таких рядов в Mathcad используются так называемые *диапазонные переменные*. Иногда они заменяют управляющие структуры – циклы, но полноценной

такая замена не является. В частности потому, что не предусмотрен выбор любого значения диапазонной переменной.

В самом простом случае для создания диапазонной переменной используется выражение  $\text{name} := N_{\text{begin}} .. N_{\text{end}}$ , где  $\text{name}$  – имя переменной,  $N_{\text{begin}}$  – ее начальное значение,  $N_{\text{end}}$  – конечное значение, «.. $\rangle$ » – символ, указывающий на изменение переменной в заданных пределах (он вводится знаком точки с запятой «;»). Если  $N_{\text{begin}} < N_{\text{end}}$ , то шаг изменения переменной будет равен  $+1$ , в противном случае  $-1$ . Для создания диапазонной переменной общего вида используется выражение  $\text{name} := N_{\text{begin}}, N_{\text{next}} .. N_{\text{end}}$ . Здесь  $N_{\text{next}}$  – следующее после начального значение переменной. То есть шагом изменения значения диапазонной переменной будет  $N_{\text{next}} - N_{\text{begin}}$  (рис. 9.9).

|          |                        |              |                              |
|----------|------------------------|--------------|------------------------------|
| $x := 1$ | Локальное присваивание | $y := z + 1$ | Переменная $z$ не определена |
| $x = 1$  | Вывод значения         | $z := 1$     |                              |
| $x := 2$ | Переписывание          | $y := z + 1$ | Теперь определена            |
|          |                        | $y = 2$      |                              |
|          |                        | $y := g + 1$ | Переменная $g$ глобальная    |
|          |                        | $y = 2$      |                              |
|          |                        | $g \equiv 1$ | Глобальное присваивание      |

Диапазонные переменные:

|             |                |                   |
|-------------|----------------|-------------------|
| $x := 1..5$ | $y := 1,3..11$ | $z := 1,1.5..3.5$ |
| $x =$       | $y =$          | $z =$             |
| 1           | 1              | 1                 |
| 2           | 3              | 1.5               |
| 3           | 5              | 2                 |
| 4           | 7              | 2.5               |
| 5           | 9              | 3                 |
|             | 11             | 3.5               |

Рис. 9.9 – Примеры обычных и диапазонных переменных

Диапазонные переменные широко применяются для представления численных значений функций в виде таблиц, а также для построения их графиков.

Знак равенства после любого выражения с диапазоными переменными инициирует таблицу вывода значений выражения по диапазоным переменным. Важно отметить, что, в сущности, задание диапазоных переменных эквивалентно заданию конечных циклов. Сами диапазоные переменные являются множествами значений, что видно из выдачи их значений (она имеет форму столбца со всеми значениями переменных). Это означает, что объем памяти, занимаемой такими переменными, больше объема памяти, занимаемой обычными (одиночными) переменными.

**Применение системных переменных.** *Системные переменные* в Mathcad имеют заранее определенные имена и начальные значения. Это необходимо прежде всего для инициализации некоторых начальных установок самой системы. Однако значения системных переменных могут быть в дальнейшем изменены пользователем путем переприсваивания им значений (рис. 9.10).

Основными системными переменными являются (в скобках указано значение по умолчанию):

- TOL: значение погрешности численных методов (0,001);
- CTOL: значение погрешности при использовании блока решений given (0,001);
- ORIGIN: нижняя граница индексации массивов (0);
- $i, j$ : мнимые единицы ( $\sqrt{-1}$ );
- $\pi$ : число  $\pi$  (3,1415926...);
- $e$ : основание натурального логарифма (2.718282...);
- $\infty$ : системная бесконечность ( $10^{307}$ ).

$$\infty = 1 \times 10^{307}$$

|                        |               |               |                        |
|------------------------|---------------|---------------|------------------------|
| $\frac{1}{\infty} = 0$ | Бесконечность | $x := 5 + 7i$ | Комплексная переменная |
| $\pi = 3.142$          | Число $\pi$   | $y := 5 + 7j$ | Комплексная переменная |
| $e = 2.718$            | Число $e$     | $x - y = 0$   | При этом $i = j$       |

Рис. 9.10 – Пример работы с системными переменными

**Массивы.** В Mathcad массив задается именем, как и любая переменная. Однако он имеет ряд элементов с определенным порядком расположения. Порядковый номер элемента задается индексом. Нижняя граница индексации определяется значением системной переменной ORIGIN. Таким образом, элементы массива являются *индексированными переменными*. Это значит, что помимо имени такие переменные имеют подстрочный индекс, который вводится с помощью знака «[».

Вектор (массив размера  $n \times 1$ ) или матрица (массив размера  $n \times m$ ) могут быть созданы присваиванием их элементам тех или иных значений. Незаданные элементы по умолчанию являются нулевыми. Вместо указания индекса массива в виде конкретного числа можно использовать диапазонные переменные. Если диапазонная переменная превысит текущую размерность, то размерность массива автоматически увеличится до максимального значения, которое принимает сама диапазонная переменная.

Также можно использовать кнопку «Матрица или вектор» на панели инструментов «Матрица». При этом после ввода в диалоговом окне «Вставка матрицы» размеров матрицы или вектора будет предложено ввести значения элементов (рис. 9.11).

ORIGIN := 1      Индексы будут начинаться с 1

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Использование для описания массива диапазонных переменных:</p> <p><math>i := 1..3 \quad j := 1..5</math></p> <p><math>A_{i,j} := i + j</math></p> <p><math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; 3 &amp; 4 &amp; 5 &amp; 6 \\ 3 &amp; 4 &amp; 5 &amp; 6 &amp; 7 \\ 4 &amp; 5 &amp; 6 &amp; 7 &amp; 8 \end{pmatrix}</math></p> | <p>Использование присваивания значений для описания массива:</p> <p><math>B_{1,1} := 5 \quad B_{1,4} := 7</math></p> <p><math>B_{3,1} := 1 \quad B_{3,3} := 3</math></p> <p><math>B = \begin{pmatrix} 5 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 7 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 1 &amp; 0 &amp; 3 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p> | <p>Использование кнопки вставки матрицы или вектора:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; display: inline-block;"> <math>C := \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ 4 &amp; 5 &amp; \blacksquare \\ \blacksquare &amp; \blacksquare &amp; \blacksquare \end{pmatrix}</math> </div> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Рис. 9.11 – Способы задания матрицы или вектора

Также в этом диалоговом окне можно удалить из матрицы отдельные строки или столбцы либо вставить новые строки или столбцы.

### ***Выполнение операций***

**Математические выражения.** Самой распространенной областью применения математических систем все еще являются арифметические операции. В общем случае вычисляются *математические выражения*, в состав которых могут входить операнды с операторами и функций с параметрами. Например, в выражении  $y = 2 \cdot \ln(x) + 1$  использованы переменные  $x$  и  $y$ , числовые константы 1 и 2, операторы «=», «\*», «+», а также встроенная функция вычисления натурального логарифма.

**Арифметические операторы.** Арифметические операторы предназначены для выполнения арифметических действий над численными величинами (операндами) и конструирования математических выражений. Самыми распространенными являются операторы арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление), возведения в степень, извлечения квадратного корня и др.

Также Mathcad содержит ряд расширенных арифметических операторов: вычисления суммы и произведения ряда величин, вычисления производной и определенного интеграла (рис. 9.12). Заметим, что выражения с ними возвращают вычисленные значения, поэтому их можно использовать в составе сложных математических выражений.

В данном примере для получения аналитического значения производной, аналитического взятия неопределенного интеграла и взятия предела были использованы символьные вычисления, о них мы будем говорить ниже.

Применение расширенных операторов облегчает решение математических задач — раньше для выполняемых ими действий приходилось писать отдельные программы.

Факториал:  $\text{fact}(n) := \prod_{i=1}^n i$       Проверка:  $\text{fact}(6) = 720$        $6! = 720$

Использование диапазонных переменных:  $\text{ORIGIN} := 1$

$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$        $i := 1..3$        $j := 1..3$        $\text{sum} := \sum_i \left( \sum_j E_{i,j} \right)$        $\text{sum} = 3$

$f(x) := x \cdot \sin(x^2)$

Вычисление производной:  $\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \sin(x^2) + 2 \cdot x^2 \cdot \cos(x^2)$

Вычисление первообразной:  $\int f(x) dx \rightarrow -\frac{\cos(x^2)}{2}$

Определенный интеграл:  $\int_0^1 f(x) dx = 0.23$

Вычисление предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$

Рис. 9.12 – Вычисление расширенных арифметических операторов

**Работа с операторами отношения.** Очень часто в математических расчетах необходимо судить о равенстве или неравенстве величин, например значений переменных или выражений. Для этого служат операторы отношения или логические операторы (табл. 9.1).

Таблица 9.1 – Список операторов отношения

| Оператор   | Описание                 | Способ ввода |
|------------|--------------------------|--------------|
| $x > y$    | $x$ больше $y$           | $>$          |
| $x < y$    | $x$ меньше $y$           | $<$          |
| $x \geq y$ | $x$ больше или равно $y$ | Ctrl + )     |
| $x \leq y$ | $x$ меньше или равно $y$ | Ctrl + (     |
| $x = y$    | $x$ равно $y$            | Ctrl + =     |
| $x \neq y$ | $x$ не равно $y$         | Ctrl + 3     |

Не следует путать оператор «равно» с похожим знаком вывода значения выражения. В системе Mathcad знак равенства как оператор отношения имеет больший размер и более жирное написание, чем обычный знак равенства – оператор вывода. Все операторы отношения могут вводиться самостоятельно в месте расположения курсора. В этом случае по обе стороны от них появляются маленькие темные прямоугольники. Они являются местами ввода подлежащих сравнению выражений.

Необходимо отметить, что выражения с логическими операторами возвращают логическое значение, соответствующее выполнению или невыполнению условия, заданного оператором. Эти значения в Mathcad являются логической единицей, если условие выполнено, и логическим нулем, если оно не выполнено.

Математически значения логической единицы и нуля совпадают со значениями числовых констант 1 и 0. Указанное свойство логических операторов позволяет строить не совсем обычные выражения, содержащие в себе логические операторы, например,

$$2 * (5 > 0) = 2.$$

Нетрудно понять, что выражение  $(5 > 0)$  возвращает единицу, поэтому результат вычисления такого выражения даст число 2. Логические операторы часто используются совместно с условными функциями. Их также используют в программных модулях для организации ветвлений, зависящих от значений обрабатываемых ими данных.

**Работа с векторами и матрицами.** Для работы с векторами и матрицами Mathcad имеет ряд операторов и функций. Вначале рассмотрим операторы, введя следующие обозначения: для векторов  $v$ ,  $w$ , для матриц  $A$ ,  $B$  и для скалярных величин  $k$ :

- сложение двух векторов  $v + w$  или матриц  $A + B$ ;
- вычитание двух векторов  $v - w$  или матриц  $A - B$ ;
- смена знаков у элементов вектора  $-v$  или матрицы  $-A$ ;

- умножение вектора на скаляр  $v \cdot k, k \cdot v$ ;
- умножение матрицы на скаляр  $A \cdot k, k \cdot A$ ;
- деление на скаляр вектора  $\frac{v}{k}$  или матрицы  $\frac{A}{k}$ ;
- скалярное умножение двух векторов  $v \cdot w$ ;
- умножение матрицы на вектор  $A \cdot v$ ;
- умножение двух матриц  $A \cdot B$ ;
- обращение матрицы  $A^{-1}$ ;
- транспонирование вектора  $v^T$  или матрицы  $A^T$ .
- вычисление модуля вектора  $|v|$  или определителя матрицы  $|A|$  и т. д.

### ***Использование функций***

**Вычисление элементарных функций.** Во многих математических расчетах встречается необходимость вычисления *элементарных функций*. Система Mathcad содержит расширенный набор встроенных элементарных функций. Функции задаются своим именем и значением аргумента в круглых скобках. В ответ на обращения к ним функции возвращают вычисленные значения. Аргумент и значение функций могут быть действительными или комплексными числами:

- тригонометрические:  $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \sec(x), \csc(x), \cot(x)$ ;
- гиперболические:  $\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \operatorname{sech}(x), \operatorname{csch}(x), \operatorname{coth}(x)$ ;
- обратные тригонометрические:  $\operatorname{asin}(x), \operatorname{acos}(x), \operatorname{atan}(x)$ ;
- обратные гиперболические:  $\operatorname{asinh}(x), \operatorname{acosh}(x), \operatorname{atanh}(x)$ ;
- показательные и логарифмические:  $\exp(x), \ln(x), \log(x)$ ;
- и т. д.

**Работа с векторными и матричными функциями.** Существует также ряд встроенных векторных и матричных функций. Они облегчают решение задач линейной алгебры и других сфер приложения векторов и матриц. Приведем некоторые такие функции:

- $\text{length}(v)$  – возвращает число элементов вектора;
- $\text{last}(v)$  – возвращает индекс последнего элемента вектора;
- $\text{max}(v)$  – возвращает максимальный по значению элемент вектора;
- $\text{min}(v)$  – возвращает минимальный по значению элемент вектора;
- $\text{identity}(n)$  – создает единичную квадратную матрицу размером  $n \times n$ ;
- $\text{submatrix}(A, ir, jr, ic, jc)$  – возвращает подматрицу, состоящую из всех элементов, содержащихся в строках от  $ir$  до  $jr$  и столбцах с  $ic$  по  $jc$ ;
- $\text{diag}(v)$  – создает диагональную квадратную матрицу, элементы главной диагонали которой совпадают с элементами вектора  $v$ ;
- $\text{cols}(A)$  – возвращает число столбцов матрицы  $A$ ;
- $\text{rows}(A)$  – возвращает число строк матрицы  $A$ .

**Использование функций с условиями сравнения.** Существует ряд встроенных функций, у которых возвращаемый ими результат зависит от знака или значения аргумента:

- $\text{sign}(x)$  – возвращает знак аргумента ( $-1$ , если аргумент отрицательный,  $+1$ , если положительный, и  $0$  в противном случае);
- $\text{ceil}(x)$  – округление в большую сторону (наименьшее целое, большее или равное  $x$ );
- $\text{floor}(x)$  – округление в меньшую сторону (наибольшее целое, меньшее или равное  $x$ );

- $\text{mod}(x, y)$  – остаток от деления  $x/y$  со знаком  $x$ ;
- $\text{angle}(x, y)$  – положительный угол между осью  $OX$  и радиус-вектором точки с координатами  $(x, y)$ ;
- $\Phi(x)$  – функция Хевисайда (единичного скачка), дает 0 при  $x < 0$  и 1 в противном случае;
- $\delta(x, y)$  – функция, именуемая символом Кронекера, возвращающая 1 при  $x = y$  и 0 в противном случае.

Более широкие возможности дает функция  $\text{if}(c, x, y)$  для создания условных выражений. Если в этой функции условие  $c$  выполняется (равно логической единице), то будет вычислено выражение  $x$ , в противном случае – выражение  $y$  (рис. 9.13).

|                        |                                                             |                           |
|------------------------|-------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Знак аргумента         | Округление в меньшую сторону                                |                           |
| $\text{sign}(-1) = -1$ | $\text{floor}(5.2) = 5$                                     | $\text{floor}(-5.2) = -6$ |
| Функция Хевисайда      | Округление в большую сторону                                |                           |
| $\Phi(1) = 1$          | $\text{ceil}(5.2) = 6$                                      | $\text{ceil}(-5.2) = -5$  |
| $\Phi(-5) = 0$         | Округление до ближайшего целого                             |                           |
| Символ Кронекера       | $\text{round}(5.2) = 5$                                     | $\text{round}(-5.2) = -5$ |
| $\delta(1, 1) = 1$     | Условный оператор                                           |                           |
| $\delta(1, 2) = 0$     | $t := \text{if}(1 > 2, \text{"больше!"}, \text{"меньше!"})$ |                           |
|                        | $t = \text{"меньше!"}$                                      |                           |

Рис. 9.13 – Пример работы с функциями сравнения

**Работа с функциями пользователя.** Несмотря на довольно широкий набор встроенных функций, нередко возникает необходимость расширить систему новыми функциями, представляющими интерес для пользователя. Функции пользователя вводятся с применением следующего выражения:

имя\_функции(список\_параметров) := выражение

Имя функции задается как любой идентификатор, например, имя переменной. В скобках указывается список параметров функции, это перечень используемых в выражении переменных, разделяемых запятыми.

Выражение – любое выражение, содержащее доступные системе операторы и функции с операндами и аргументами, указанными в списке параметров. Тело функции также может быть задано программным модулем, о чем пойдет речь ниже.

Примеры задания функции одной и двух переменных:

$$\text{fun}(x) := 10 \cdot (1 - \exp(x))$$

$$\text{module}(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Следует отметить особый статус переменных, указанных в списке аргументов функции пользователя. Эти переменные являются *локальными*, поэтому они могут не определяться до задания функций – фактически их указание в списке параметров и является заданием определенного статуса этих переменных. Естественно, что локальные переменные могут использоваться только в выражении, описывающем функцию. Их имена могут совпадать с именами глобальных переменных, введенных ранее. Но при этом по выходу из блока задания функции значения этих переменных будут сохранять ранее заданные (для глобальных переменных) значения.

Следует с осторожностью относиться к применению глобальных переменных в теле выражения функции пользователя, хотя, в принципе, это возможно, но, конечно, только в том случае, когда глобальная переменная определена ранее. Например, вполне приемлемо задание следующей функции пользователя:

$$k := 10$$

$$\text{fun}(x) := k \cdot (1 - \exp(x)),$$

поскольку переменная  $k$  определена до задания функции. Однако если убрать строку с ее определением, задание функции станет невозможным,

точнее, во введенном выражении переменная  $k$  будет выделена как несуществующая. Разумеется, эту переменную можно определить глобально и после задания функции пользователя, используя для этого символ глобального присваивания.

Заданные с применением знака «:=» функции являются заданными локально, поэтому их описание должно быть в документе до того, как они будут использованы. С помощью знака «ε» можно задать функции пользователя и как глобальные. Тогда они могут задаваться в любом месте документа, в том числе и конце. Если же функция нигде и никак не задана, то применять ее, естественно, нельзя: появится сообщение об ошибке.

Функции пользователя – мощный аппарат расширения системы. Они облегчают адаптацию системы к решению специфических задач пользователя.

### ***Решение уравнений и оптимизация***

Функции Mathcad для решения алгебраических уравнений и оптимизации приведены в таблице 9.2.

Таблица 9.2 – Функции для решения уравнений и оптимизации

| Функция   | Описание                                                                          |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| root      | Решение уравнения (на всей области определения функции или на заданном интервале) |
| polyroots | Поиск корней полинома, заданного вектором коэффициентов                           |
| minimize  | Поиск локального минимума функции                                                 |
| maximize  | Поиск локального максимума функции                                                |
| find      | Решение системы уравнений                                                         |
| minerr    | Приближенное решение уравнения                                                    |

Для решения систем уравнений или неравенств, а также решения уравнений и оптимизации с ограничениями используется специальный вычислительный блок **given** (от англ. *given* – дано).

Функция `root` позволяет искать решение уравнения с одной переменной  $f(x)=0$ , или, другими словами, нули функции скалярного аргумента  $f(x)$  (рис. 9.14). Первый вариант этой функции имеет два аргумента – функция  $f(x)$ , нули которой мы ищем, и ее неизвестный аргумент  $x$ . Предварительно должна быть задана функция  $f(x)$  и начальное приближение  $x^0$ . Функцию и аргумент можно обозначить любым идентификатором, это не обязательно  $f(x)$  и  $x$ .

|                                        |                                                             |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| <code>f(x) := x<sup>2</sup> - 5</code> | Функция                                                     |
| <code>x := 0</code>                    | Начальное приближение                                       |
| <code>z := root(f(x), x)</code>        | Поиск решения уравнения $f(x)=0$ с начальной точкой $x_0=0$ |
| <code>z = 2.236</code>                 | Решение                                                     |
|                                        |                                                             |
| <code>f(x) := x<sup>2</sup> - 5</code> | Функция                                                     |
| <code>z := root(f(x), x, 0, 5)</code>  | Поиск решения уравнения $f(x)=0$ на интервале $[0,5]$       |
| <code>z = 2.236</code>                 | Решение                                                     |

Рис. 9.14 – Использование функции `root` для решения уравнений

Второй вариант функции имеет четыре аргумента – к двум перечисленным ранее добавляются границы интервала, на котором ищется решение уравнения  $f(x)=0$ . В этом случае задавать начальное приближение не нужно.

Функция `polyroots` имеет только один аргумент – вектор с коэффициентами полинома. Так, если нужно решить уравнение

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

вектор с коэффициентами должен иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \text{ или } (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1} \ a_n)^T.$$

На рисунке 9.15 решено то же самое уравнение  $x^2 - 5 = 0$ , что и в примере выше. Видим, что полином имеет два нуля – в точках  $\pm\sqrt{5} \approx \pm 1,581$ .

$$\begin{aligned} v &:= (-5 \ 0 \ 2)^T && \text{Коэффициенты полинома} \\ \text{polyroots}(v) &= \begin{pmatrix} -1.581 \\ 1.581 \end{pmatrix} && \text{Нули полинома} \end{aligned}$$

Рис. 9.15 – Использование функции polyroots для поиска нулей полинома

Использование вычислительного блока given и функции find позволяет решать уже системы уравнений и неравенств. При этом после начала блока given можно указать произвольное количество равенств или неравенств, а в конце – функцию find с указанием неизвестных аргументов. Также эта конструкция позволяет искать аналитическое решение уравнений (рис. 9.16).

Если система не имеет точного решения, то можно найти приближенное решение, используя вместо функции find функцию minerr. Если точное решение существует, результат работы этих функций будет аналогичным.

*Замечание.* Вычислительный блок использует константу STOL в качестве погрешности выполнения уравнений или неравенств, введенных после given. Другая константа, TOL, определяет условие прекращения итераций численным алгоритмом, который ищет решение системы уравнений или неравенств, либо выполняет условную оптимизацию.

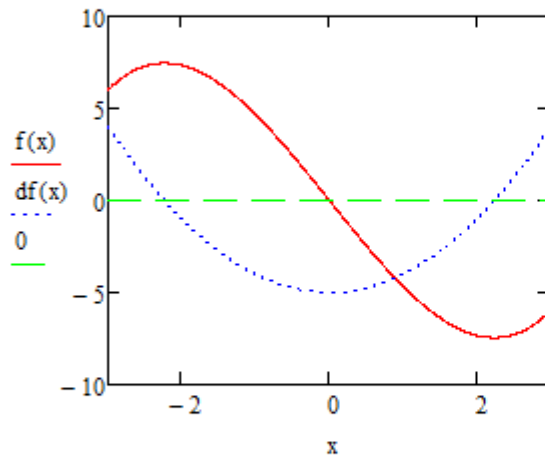
|                                                                     |                                                          |
|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $f(x) := x^2 - 5$                                                   | Функция                                                  |
| Given                                                               |                                                          |
| $f(x) = 0$                                                          | Задаем уравнение $f(x)=0$                                |
| $\text{find}(x) \rightarrow (\sqrt{5} \ -\sqrt{5})$                 | Получение аналитических решений уравнения                |
| $x := -1$                                                           | Начальное приближение                                    |
| given                                                               |                                                          |
| $f(x) = 0$                                                          | Уравнение $f(x)=0$                                       |
| $x \geq 0$                                                          | Ограничение (без него будет найден отрицательный корень) |
| $\text{find}(x) = 2.236$                                            | Решение уравнения с ограничением                         |
| $x := 1 \quad y := 1$                                               | Начальное приближение                                    |
| given                                                               |                                                          |
| $x^2 + y^2 = 1$                                                     | Система уравнений                                        |
| $x + y = 0$                                                         |                                                          |
| $\text{find}(x, y) = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$ | Решение системы уравнений                                |

Рис. 9.16 – Решение систем уравнений и неравенств

Функции `minimize` и `maximize` похожи на функцию `root`, только они ищут нули не самой функции, а ее производной, т. е. решают уравнение  $f'(x) = 0$ . Но если найденное решение не является минимумом или максимумом соответственно, выдают ошибку (рис. 9.17).

$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 5x$       Функция, экстремумы которой мы будем искать

$df(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow x^2 - 5$       Ее производная



На графике видно, что в точках экстремума производная равна 0

$x := 0$       Начальное приближение

$\text{minimize}(f, x) = 2.236$       Локальный минимум функции

$\text{maximize}(f, x) = -2.236$       Локальный максимум функции

Рис. 9.17 – Поиск экстремумов функции скалярного аргумента

Также эти функции позволяют минимизировать функции векторного аргумента, т. е. решать систему уравнений  $\nabla f(x) = 0$  (см. рис. 9.18). Другими словами, они обеспечивают безусловную оптимизацию численными методами.

ORIGIN := 1

$$f(x,y) := (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Функция векторного аргумента

$$df(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x - 2 \\ 2 \cdot y - 2 \end{pmatrix}$$

Ее градиент

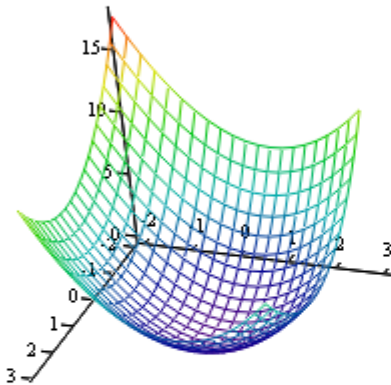


График функции

f

$$x := 0 \quad y := 0$$

Начальное приближение

$$\min := \text{minimize}(f, x, y)$$

Ищем минимум

$$\min = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad df(\min_1, \min_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найденная точка и проверка равенства градиента нулю

$$\text{maximize}(f, x, y) = \text{■}$$

Максимум не существует - функция строго выпукла

Эта переменная не определена.

Рис. 9.18 – Поиск экстремумов функции векторного аргумента

Использование функций `minimize` и `maximize` в вычислительном блоке `given` позволяет решать задачи условной оптимизации. Как и в случае решения систем уравнений, в начале блока можно записать произвольное количество ограничений задачи (равенств и неравенств), а в конце – минимизацию или максимизацию целевой функции с указанием аргументов, по которым проводится оптимизация (рис. 9.19).

|                                                   |                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x,y) := (x-1)^2 + (y-1)^2$                     | Функция векторного аргумента                                                                                                                                                        |
| $g(x,y) := x + y - 5$                             | Ограничение $g(x,y) = x + y \geq 5$ , или $g(x,y) = x + y - 5 \geq 0$ . В функции $g(x,y)$ записана только левая часть ограничения, а правая указывается в блоке <code>given</code> |
| $x := 0 \quad y := 0$                             | Начальное приближение                                                                                                                                                               |
| <code>given</code>                                |                                                                                                                                                                                     |
| $g(x,y) \geq 0$                                   | Указываем правую часть ограничения                                                                                                                                                  |
| $\min := \text{Minimize}(f, x, y)$                | Ищем минимум                                                                                                                                                                        |
| $\min = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ | Найденная точка минимума. Т.к. это условная оптимизация, то градиент в ней не обязательно будет нулевым                                                                             |

Рис. 9.19 – Условная оптимизация нелинейной функции

В случае решения задачи линейного программирования ЦФ и ограничения задачи можно записать в матричном виде. Например, на рис. 9.20 решается с ЗЛП из учебного пособия:

$$f(x) = 4000x_1 + 3600x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 10, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 45, \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

При решении, чтобы свести все ограничения к одному виду, третье ограничение задачи было приведено к виду

$$-5x_1 - 3x_2 \leq -45.$$

На рисунке 9.20 задача также была решена другим способом – сначала все ограничения были преобразованы к равенствам, но при этом количество переменных задачи увеличилось с двух до пяти:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 8, \\ x_2 + x_4 &= 10, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_5 &= 45, \\ x_{1,2,3,4,5} &\geq 0. \end{aligned}$$

Первый способ:

$$c := \begin{pmatrix} 4000 \\ 3600 \end{pmatrix} \quad f(x) := c^T \cdot x \quad \text{Вектор коэффициентов ЦФ и сама ЦФ}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -45 \end{pmatrix} \quad \text{Матрица коэффициентов ограничений и правые части ограничений. Чтобы привести все ограничения к одному виду (меньше или равно), обе части третьего ограничения были умножены на -1}$$

$$z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Начальное приближение}$$

given

$$A \cdot z \leq b \quad \text{Записываем ограничения задачи, в том числе ограничения на неотрицательность переменных}$$

$$z \geq 0$$

$$\text{minimize}(f, z) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1.667 \end{pmatrix} \quad \text{И получаем решение ЗЛП}$$

Второй способ:

$$c := \begin{pmatrix} 4000 \\ 3600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x) := c^T \cdot x \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

given

$$A \cdot z = b$$

$$z \geq 0$$

$$\text{minimize}(f, z) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1.667 \\ 0 \\ 8.333 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Решением являются первые две компоненты полученного вектора, а остальные переменные искусственные}$$

Рис. 9.20 – Решение ЗЛП средствами Mathcad

### ***Символьные вычисления***

Символьный процессор пакета Mathcad позволяет решить многие задачи математики аналитически, без применения численных методов и, соответственно, без погрешностей вычислений. Символьные вычисления в Mathcad можно осуществлять в двух различных вариантах:

- с помощью команд меню;
- с помощью оператора символьного вывода « $\rightarrow$ », ключевых слов символьного процессора и обычных формул, т. е. с помощью *символьных вычислений в реальном времени*.

Первый способ более удобен, когда требуется быстро получить какой-либо аналитический результат для однократного использования, не сохраняя сам ход вычислений. Второй способ более нагляден, т. к. позволяет записывать выражения в традиционной математической форме и сохранять символьные вычисления в документах Mathcad. Кроме того, аналитические преобразования, проводимые через меню, касаются только одного, выделенного в данный момент, выражения. Соответственно, на них не влияют формулы, находящиеся в документе Mathcad выше этого выделенного выражения (например, операторы присваивания значений каким-либо переменным). Оператор символьного вывода, напротив, учитывает все предыдущее содержимое документа и выдает результат с его учетом.

Например, введем выражение  $\sin(2 \cdot x)$ , выделим его и выберем пункт меню «Символьные операции» – «Развернуть». При этом строкой ниже символьный процессор системы Mathcad сформирует разложение данного выражения –  $2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$ . Если в дальнейшем его нужно использовать, то следует выделить его и, например, присвоить функции пользователя. В таблице 9.3 приведены некоторые символьные команды Mathcad.

Таблица 9.3 – Символьные операции Mathcad

| Команда    | Описание                                | Результат                                                                                                                               |
|------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| float      | Длинная арифметика с плавающей точкой   | $\ln(2) \cdot x^2 \text{ float} \rightarrow 0.69314718055994530942 \cdot x^2$                                                           |
| solve      | Решение уравнения или системы уравнений | $\begin{pmatrix} x + y = 2 \\ 2 \cdot x - y = 1 \end{pmatrix} \text{ solve, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow (1 \ 1)$ |
| simplify   | Упрощение выражений                     | $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 \text{ simplify} \rightarrow 1$                                                                                  |
| substitute | Замена переменной выражением            | $\sqrt{1 - x^2} \text{ substitute, } x = \cos(v) \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(2 \cdot v)}}{2}$                       |

Окончание табл. 9.3

| Команда | Описание                                     | Результат                                                                              |
|---------|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| factor  | Разложение на множители                      | $x^4 - 16$ factor $\rightarrow (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$                  |
| expand  | Разворачивание выражения                     | $\frac{x^2 + 1}{x}$ expand $\rightarrow x + \frac{1}{x}$                               |
| coeffs  | Выделение коэффициентов полинома             | $(x + 1)^2 + (x + 2)^2$ coeffs $\rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ |
| collect | Группировка слагаемых по степеням переменной | $(3 \cdot x + y)^2$ collect,y $\rightarrow y^2 + 6 \cdot x \cdot y + 9 \cdot x^2$      |

Также предусмотрены операции для символьного поиска обратной матрицы, определителя матрицы и т. д.

Для выполнения символьных операций в режиме реального времени используются две операции – «■ ■ →» («Ctrl+>» для ввода) и «■ →» («Ctrl+.» для ввода). В первой операции предусмотрено два места ввода. В первое вводится выражение, во второе – имя команды (если у команды есть аргументы, как, например, у collect, то они вводятся через запятую после имени команды). Вторая операция аналогична первой с использованием команды simplify.

Таким образом, чтобы развернуть описанное выше выражение  $\sin(2 \cdot x)$  в реальном времени, следует после этого ввода нажать комбинацию клавиш «Ctrl+>», ввести в первую позицию операции функцию  $\sin(2 \cdot x)$ , а во вторую позицию – команду expand (рис. 9.21).

|                                                                            |                                      |                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(2 \cdot x)$                                                          | Выражение                            |                                                                                |
| $2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$                                            | Символьные преобразования через меню |                                                                                |
| $\sin(2 \cdot x) \text{ expand} \rightarrow 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$ |                                      | Символьные вычисления в реальном времени                                       |
| $f(x) := \sin(2 \cdot x)$                                                  |                                      | Функция пользователя                                                           |
| $f(x) \text{ expand} \rightarrow 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$            |                                      | Символьное преобразование функции пользователя                                 |
| $g(x) := f(x) \text{ expand} \rightarrow 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$    |                                      | Определение новой функции, результатом которой будет символьное преобразование |

Рис. 9.21 – Пример выполнения символьных операций

### 9.3.4 Программирование в среде Mathcad

Программный модуль в системе Mathcad представляет собой самостоятельный модуль, выделяемый в тексте документа жирной вертикальной чертой. Модуль может вести себя как функция без имени и параметров, но возвращающая результат. Программный модуль может выполнять и роль тела функции пользователя с именем и параметрами.

#### *Программные элементы*

В Mathcad набор программных элементов для создания программных модулей весьма ограничен и содержит следующие элементы:

- Add Line – создает и при необходимости расширяет жирную вертикальную линию, справа от которой в шаблонах задается запись программного блока;
- $\leftarrow$  – символ локального присваивания (в теле модуля);
- if – оператор условного выражения;
- otherwise – оператор иного выбора (применяется с if);
- for – оператор задания цикла с фиксированным числом повторений;
- while – оператор задания цикла с выполнением по условию;
- break – оператор прерывания цикла;

- continue – оператор продолжения цикла;
- return – оператор возврата;
- on error – оператор обработки ошибок.

**Оператор Add Line.** Оператор Add Line выполняет функции расширения программного блока. Расширение фиксируется удлинением вертикальной черты программных блоков или их древовидным расширением. Благодаря этому, в принципе, можно создавать сколь угодно большие программы.

**Оператор присваивания.** Оператор внутреннего присваивания «←» выполняет функции внутреннего локального присваивания. Например, выражение « $x \leftarrow 123$ » присваивает переменной  $x$  значение 123. Локальный характер присваивания означает, что такое значение  $x$  сохраняет только в теле программы. За пределами тела программы значение переменной  $x$  может быть неопределенным.

**Оператор if.** Оператор создания условных выражений if является оператором для создания условных выражений. Он задается в виде

БЛОК if УСЛОВИЕ

Если условие выполняется, то выполняется оператор (или операторы) в блоке.

**Оператор otherwise.** Оператор иного выбора otherwise («иначе», «в противном случае») обычно используется совместно с оператором if. Его использование поясняет программная конструкция на рисунке 9.22.

Вычисление модуля числа

$$\text{abs}(x) := \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{abs}(2) = 2 \quad \text{abs}(-5) = 5$$

Рис. 9.22 – Пример использования условного оператора if...otherwise

Функция  $\text{abs}(x)$  возвращает модуль числа, т. е. само число  $x$ , если  $x \geq 0$ , и  $-x$  в противном случае.

**Оператор for.** Оператор цикла for служит для организации циклов с заданным числом повторений. Он записывается в следующем виде:

БЛОК for ПЕРЕМЕННАЯ  $\in$  НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ  
[, СЛЕДУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ] .. КОНЕЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Эта запись означает, что блок операторов выполняется для всех значений переменной от начального до конечного. Смысл начального, следующего и конечного значения – тот же, что и при определении диапазоновых переменных. Сами диапазонные переменные также можно использовать для организации цикла, тогда он принимает следующий вид (рис. 9.23):

БЛОК for ПЕРЕМЕННАЯ  $\in$  ДИАПАЗОННАЯ ПЕРЕМЕННАЯ

Вычисление факториала

```
fact(n) :=
  res ← 1
  for i ∈ 1..n
    res ← res · i
  res
fact(6) = 720
```

Сумма элементов вектора

```
ORIGIN := 1
k := 1..5    vk := k
v =
  (1)
  (2)
  (3)
  (4)
  (5)
sum(x) :=
  res ← 0
  for i ∈ k
    res ← res + xi
  res
sum(v) = 15
```

Рис. 9.23 – Примеры использования оператора цикла for

**Оператор while.** Оператор цикла while служит для организации циклов, действующих до тех пор, пока выполняется некоторое условие. Оператор записывается в следующем виде:

БЛОК while УСЛОВИЕ

**Оператор break.** Оператор прерывания break вызывает прерывание работы программы всякий раз, как он встречается. Чаще всего он используется

совместно с оператором условного выражения `if` и операторами циклов `while` и `for`, обеспечивая переход в конец тела цикла.

**Оператор `continue`.** Оператор продолжения `continue` используется для продолжения работы после прерывания программы. Он также используется обычно совместно с операторами задания циклов `while` и `for`, обеспечивая после прерывания возврат в начало цикла.

Подсчет суммы положительных элементов вектора.  
Подсчет прекращается при встрече 0. Размер вектора  
может быть произвольным

```

ORIGIN := 1
v := (1 -5 12 -4 8 11 -2 3 0 7)T

sum_pos(x) :=
  res ← 0
  i ← 0
  while 1
    i ← i + 1
    break if xi = 0
    continue if xi < 0
    res ← res + xi
  res

sum_pos(v) = 35

```

Рис. 9.24 – Пример прерывания и продолжения цикла `while`

**Оператор `return`.** Особый оператор возврата `return` прерывает выполнение программы и возвращает значение своего операнда, стоящего следом за ним.

```

ORIGIN := 1
v := (1 -5 12 -4 8 11 -2 3 0 7)T

sum_pos(x) :=
  res ← 0
  i ← 0
  while 1
    i ← i + 1
    return res if xi = 0
    res ← res + xi if xi ≥ 0
  res

sum_pos(v) = 35

```

Рис. 9.25 – Пример использования оператора `return`

Сравните решение предыдущей задачи с помощью оператора return (рис. 9.25).

### ***Приемы программирования***

Несмотря на столь скромный набор программных средств, они дают Mathcad именно те возможности, которые ранее попросту отсутствовали: задание функций с аппаратом локальных переменных, задание различных видов циклов (в том числе вложенных), упрощение алгоритмов применением операции присваивания и реализацию по классическим алгоритмам итерационных и рекурсивных процедур.

Для нескольких подмодулей, которые должны выполняться в составе циклов, нужно использовать их объединение в виде жирной вертикальной черты. Для этого служит команда Add Line, как и для исходного задания блока, добавляющая в модуль дополнительную черту для подмодуля.

Программный модуль, в сущности, является функцией, но описанной с применением упомянутых сугубо программных средств. Она может возвращать значение, определяемое последним оператором. Это значит, что после такого модуля, выделенного как целый блок, можно поставить знак равенства для вывода значения функции. В блоке могут содержаться любые операторы и функции входного языка системы. Для передачи в блок значений переменных можно использовать переменные документа, которые ведут себя в блоке как глобальные переменные.

Обычно модулю присваивается имя со списком переменных, после которого идет знак присваивания. Переменные в списке являются локальными и им можно присваивать значения при вызове функции, заданной модулем. Локальный характер таких переменных позволяет использовать для их имен (идентификаторов) те же имена, что и у глобальных переменных документа.

Задание программных модулей позволяет реализовать любые специальные приемы программирования. Оно может служить мощным средством расширения системы путем задания новых функций.

Примеры применения программных операторов были приведены выше.

## 9.4 Тестирование

Если написана вычислительная программа для минимизации, то, по-видимому, далее она будет тестироваться с целью выяснения, правильно ли она работает и какова она по сравнению с другим программным обеспечением, решающим эту же задачу. Важно обсудить два аспекта такого процесса тестирования: во-первых, каким образом следует тестировать программное обеспечение; во-вторых, какими критериями следует пользоваться при оценке его работоспособности. Может показаться неожиданным, что отсутствует единство мнений по любому из этих важных вопросов. В данном разделе кратко излагаются некоторые из основных соображений.

Первым делом при тестировании убеждаются, что программа работает правильно. Под словом «правильно» здесь понимается, главным образом, что программа работает так, как ей следует это делать, в противоположность гораздо более строгому определению понятия «правильность», используемому в программировании. Это, конечно, непростая задача. Настоятельно рекомендуется помодульная процедура тестирования, т. е. тестирование каждого модуля в том виде, как он написан, затем фрагментов, составленных из модулей, и в конце – всей программы целиком. Тестирование всей программы сразу может чрезвычайно затруднить обнаружение ошибок. При помодульном тестировании не всегда очевиден подбор входных данных для тестирования некоторых модулей. Предпочтительно начинать с данных, получаемых из простейших задач, скажем, размерностей один или два, с единичными или диагональными якобианами или

гессианами, так как в этом случае возможна проверка вычислений вручную. Затем рекомендуется проверять модули на более сложных задачах. Преимущество такого помодульного тестирования заключается в том, что оно обычно обогащает понимание алгоритмов.

Если все компоненты работают правильно, то следует протестировать программу на целом ряде нелинейных задач. Это служит двум целям: убедиться, что вся программа целиком работает правильно, и затем проследить за ее работоспособностью на некоторых стандартных задачах. Первые задачи, которые следует попробовать решить, должны быть самыми простыми: положительно определенные квадратичные функции двух или трех переменных и т. п. Далее можно попробовать полиномы более высоких степеней, не полиномиальные функции, а также задачи несколько более высокой размерности (от двух до пяти). Если программа работает на них правильно, то пора прогнать ее на некоторых стандартных задачах, принятых в данной области в качестве хороших тестов программного обеспечения для минимизации. Многие из них довольно сложны. Часто оказывается полезным запускать эти тестовые задачи не только из начальной точки  $x^0$ , но также из точек, отстоящих от нее в 10–100 раз далее и находящихся на луче, выходящем из решения  $x^*$  по направлению к  $x^0$ . Это часто выявляет в программах важные различия, которые не обнаруживаются при использовании стандартных начальных точек.

Трудный вопрос о том, как оценивать и сравнивать программное обеспечение по минимизации, является побочным. Он осложняется тем, что в одних случаях интересуются, прежде всего, измерением эффективности и надежности программы при решении задач, тогда как в других – ее общим качеством как части программного обеспечения. В последнем случае интересуются также взаимодействием между программным обеспечением и его пользователями (документация, простота использования, реакция на ошибки при вводе, надежность, качество выводимой информации),

а также между программным обеспечением и окружающей его вычислительной средой.

Под надежностью понимается способность программы успешно решать задачи, на которые она рассчитана. Это определяется, прежде всего, результатами, полученными на тестовых задачах, и, в конечном счете, тем, решает ли она задачи пользователей. Для пользователя эффективность имеет непосредственное отношение к вычислительным затратам, вызванным запуском программы на его задачах. В задачах минимизации она иногда измеряется временем счета программы на тестовых задачах. Другой популярной мерой эффективности является количество вычислений функции и ее производных, необходимых программе для решения тестовых задач. Оправданием использования этой меры служит то, что она выявляет стоимость на тех задачах, которые, по существу, дорогостоящи, а именно на тех, для которых дорогостоящим оказывается вычисление функции и производной. Количество вычислений функции и градиента, используемое при тестировании минимизации, иногда объединяется в одну характеристику:

$$\begin{aligned} & \text{Эквивалентное количество вычислений функции} = \\ & = \text{количество вычислений } f(x) + n \times \text{количество вычислений } \nabla f(x). \end{aligned}$$

Для методов второго порядка учитывается также количество вычислений гессиана:

$$\begin{aligned} & \text{Эквивалентное количество вычислений функции} = \\ & = \text{количество вычислений } f(x) + n \times \text{количество вычислений } \nabla f(x) + \\ & \quad + n^2 \times \text{количество вычислений } \nabla^2 f(x). \end{aligned}$$

Некоторыми другими возможными характеристиками эффективности выступают количество требуемых итераций, вычислительная трудоемкость одной итерации и требуемый объем памяти. Необходимое число итераций представляет собой простую характеристику, однако она полезна,

если имеется корреляция со временем решения задачи или с необходимым для этого количеством вычислений функции и производной. Вычислительная трудоемкость итерации, если не учитывать вычисления функции и производной, неизменно определяется линейной алгеброй. После умножения на требуемое число итераций она дает представление о времени счета для задач, в которой вычисление функции и производной очень недорого. Объем машинной памяти обычно не столь принципиален для задач небольшой размерности, однако память и вычислительная трудоемкость итерации становятся решающим по своей важности фактором для больших задач.

Используя указанные выше характеристики, можно сравнивать две совершенно различные программы по решению задач минимизации, но часто интересно сравнение двух или более версий лишь отдельного сегмента алгоритма, например линейного поиска. Возможно, в этом случае стоит протестировать альтернативные сегменты, подставляя их в программу модульного типа, каковыми являются наши программы, так, чтобы остальная часть программы оставалась неизменной в течение тестовых проверок. Так, организованная проверка уменьшает доверие к результатам, относящимся к программам других видов, а сравнение может оказаться необъективным, если остальная часть программы благоприятствует одной из альтернатив.

И, наконец, необходимо понимать, что в этом разделе обсуждались вопросы оценки программ, а не алгоритмов. Отличие состоит в том, что программа может содержать много деталей, которые имеют решающее значение для ее работоспособности, но не являются частью «базового алгоритма». Примерами служат критерии останова, подпрограммы линейной алгебры, а также параметры в алгоритмах линейного поиска и т. д. Базовый алгоритм можно оценить, используя уже обсуждавшиеся характеристики, такие как локальная скорость сходимости, свойства глобальной

сходимости, работоспособность на «специальных» классах функций. Однако при тестировании программы теми способами, которые обсуждалось выше, необходимо осознавать, что тестируется конкретная программная реализация базового алгоритма и что две реализации одного и того же базового алгоритма могут работать совершенно по-разному.

## 9.5 Оформление отчета

Оформление работ должно соответствовать требованиям образовательного стандарта вуза ОС ТУСУР 01–2013 «Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления». Текст стандарта можно найти по ссылке: <https://regulations.tusur.ru/documents/70>

Образец оформления титульного листа лабораторных работ № 1 и 2 приведен в приложении Б. Общая структура работы:

- титульный лист;
- содержание;
- выполнение задания № 1;
- выполнение задания № 2;
- заключение;
- список литературы;
- приложения (при необходимости).

Каждый пункт задания должен содержать его формулировку, краткую теорию по теме задания, описание хода работы и полученные результаты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мицель А. А. Методы оптимизации : учеб. пособие / А. А. Мицель, А. А. Шелестов, В. В. Романенко. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2017. – 198 с.
2. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации / Э. Вуколов и др. ; под ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1990. – 304 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
4. Рубан А. И. Методы оптимизации : учеб. пособие / А. И. Рубан. – Красноярск : Изд-во ИПЦ КГТУ, 2004. – 528 с.
5. Фильчаков П. Ф. Справочник по элементарной математике для поступающих в вузы / П. Ф. Фильчаков. – Киев : Наукова думка, 1972. – 528 с.
6. ОС ТУСУР 01–2013. Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://regulations.tusur.ru/documents/70> (дата обращения: 05.07.2018).

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**(обязательное)**

**Образец титульного листа контрольной работы**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Факультет дистанционного обучения (ФДО)

Кафедра \_\_\_\_\_

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА**

по дисциплине «\_\_\_\_\_»

Студент гр. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ И. О. Фамилия

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Проверил

канд. техн. наук,

доц. каф. АСУ

\_\_\_\_\_ В. В. Романенко

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Томск 20\_\_

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б****(обязательное)****Образец титульного листа лабораторной работы**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Факультет дистанционного обучения (ФДО)

Кафедра \_\_\_\_\_

**НАЗВАНИЕ РАБОТЫ**

отчет по лабораторной работе № \_\_\_\_ по дисциплине

«\_\_\_\_\_»

Студент гр. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ И. О. Фамилия

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Проверил

канд. техн. наук,

доц. каф. АСУ

\_\_\_\_\_ В. В. Романенко

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Томск 20\_\_