Оглавление

АННОТАЦИЯ..... 3
Схема механизма и данные для выполнения задания..... 4
1. Вывод дифференциального уравнения движения с использованием теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. 5
2. Определение закона движения системы. 10
3. Определение реакций внешних и внутренних связей. 13
4. Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью принципа Даламбера. 17
5. Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода. 20
6. Результаты вычислений. 21
7. Исследование и оптимизация механической системы..... 23
ВЫВОДЫ..... 26
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... 27

АННОТАЦИЯ

Исследуется движение механической системы с одной степенью свободы,
на которую действуют момент сопротивления $M_C = -\nu\omega$ и возмущающая гармоническая сила *F(t)*. Трением качения и скольжения пренебрегаем. Качение катков происходит без скольжения, проскальзывание нитей на блоках отсутствует. Требуется, используя основные теоремы динамики системы и аналитические методы теоретической механики, определить закон движения первого тела и реакции внешних и внутренних связей.

Схема механизма и данные для выполнения задания

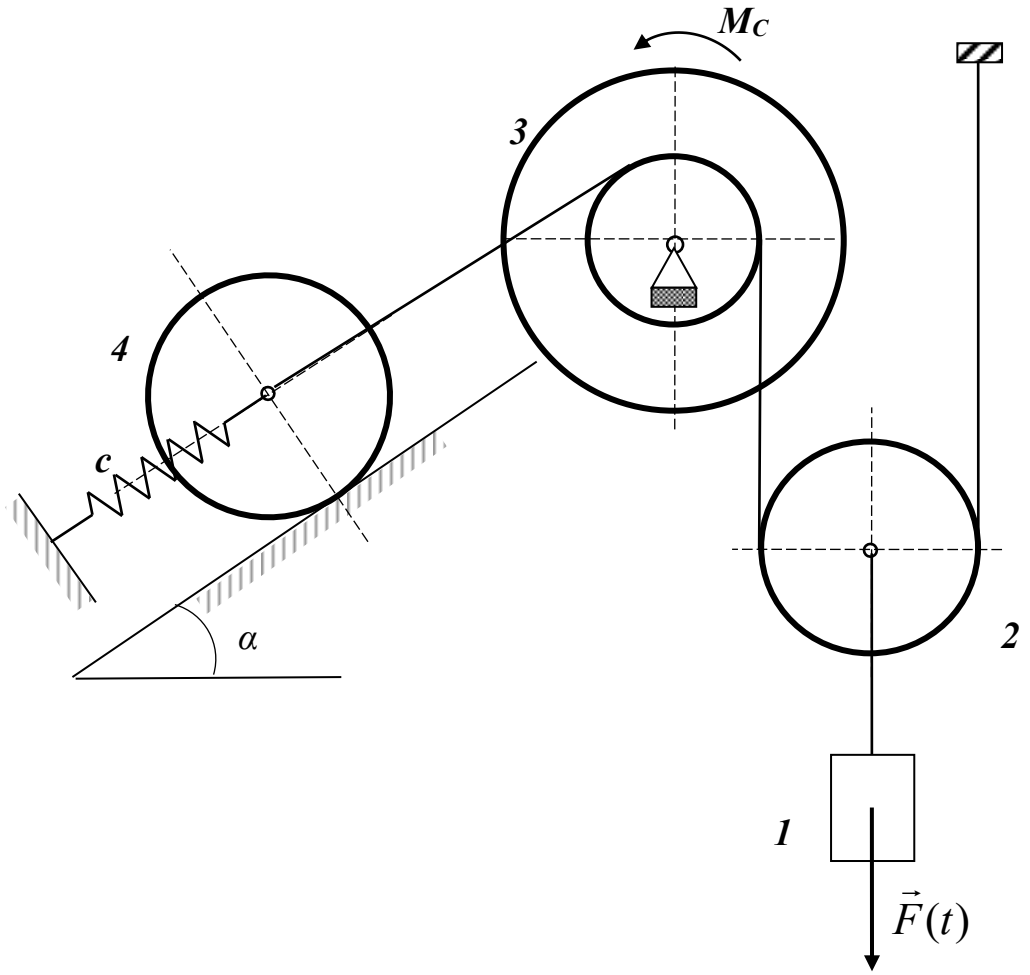


Рис. 1 Схема механизма

Исходные данные:

$m_1=4m$, $m_3=m$, $m_4=3m$ — массы тел механической системы,

с =4000 Н/м— жесткость упругого элемента,

ν =1,5 Н м с — коэффициент вязкого трения в подшипнике,

$r_2=r$, $r_3=2r$, $R_3=3r$ — радиусы блоков 2, 3

$i_2=r^{**}$, $i_3=r^{**}$, $i_4=2r$, — радиусы инерции,

$r_4=1,5r$— радиус блока 4,

$\mu = 1{,}25$ *кг / с*, $f_{сц} = 0{,}10$ $m=1$*кг*

$F_0 = 60$ *Н*, $p = \pi\ c^{-1}$, $r = 0{,}1$ *м* $\alpha=60^0$

$x_0 = 0{,}02$ *м*, $\dot{x}_0 = 0{,}07$ *м / с* - начальные условия.

1. Вывод дифференциального уравнения движения с использованием теоремы об изменении кинетической энергии механической системы.

Изобразим расчетную схему (рис.2)

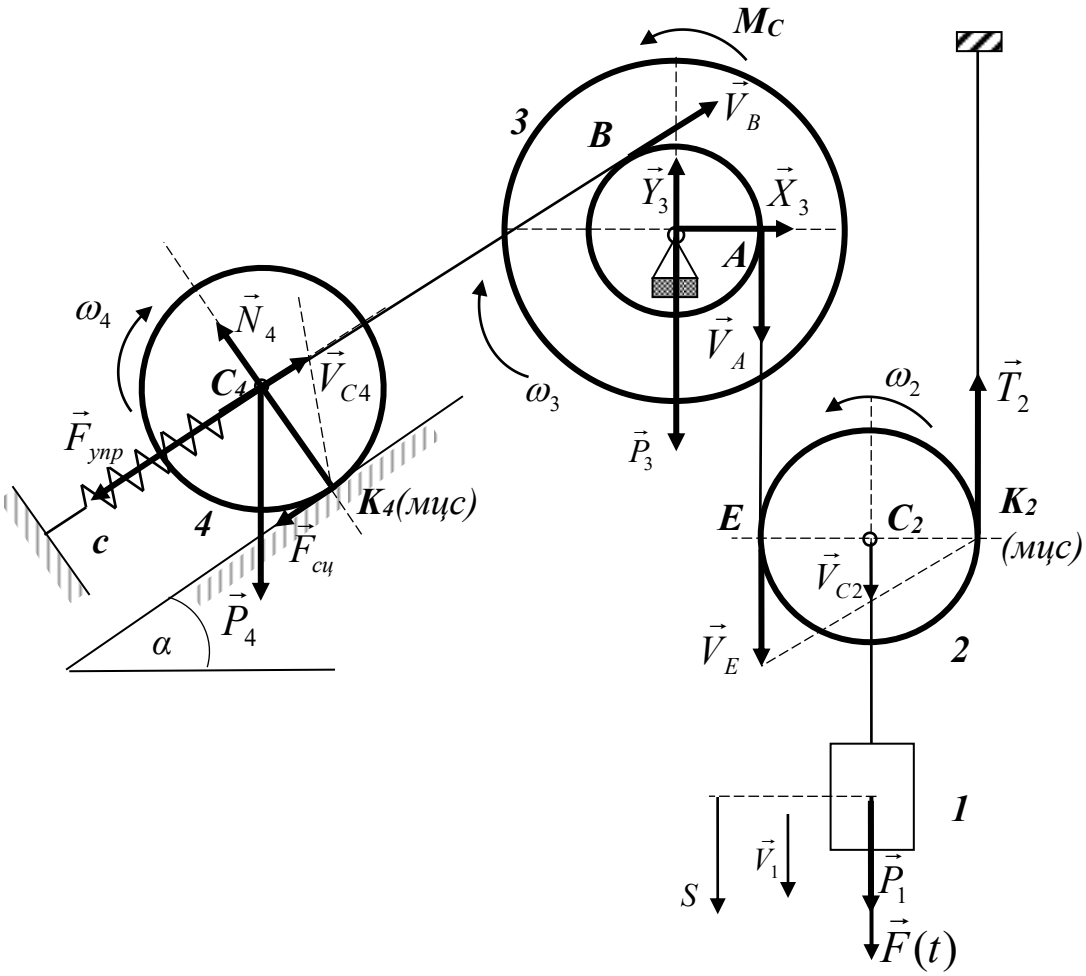


Рис. 2 Расчетная схема

На рис. 2 обозначено:

$\vec{P}_1, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ - силы тяжести,

$\vec{N}_4$ - нормальная реакция опорной плоскости,

$\vec{F}_{сц}$ - сила сцепления цилиндра 4 с наклонной плоскостью,

$\vec{F}_{упр}$ - упругая реакция пружины,

$\vec{X}_3, \vec{Y}_3$ - реакции подшипника блока 3,

$M_C = -\nu\omega$ - момент сил сопротивления в подшипнике блока 3

$\vec{T}_2$ - натяжение вертикальной нити, по которой катится цилиндр 2,

$\vec{F}(t)$ - возмущающая сила.

Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. Будем определять положение системы с помощью координаты S.

Начало отсчета координат совместим с положением статического равновесия груза 1.

Для построения дифференциального уравнения движения системы используем теорему об изменении кинетической энергии механической системы в форме:

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i \tag{1.1}$$

Где Т- кинетическая энергия системы,

N^e - сумма мощностей внешних сил,

N^i - сумма мощностей внутренних сил.

Вычисляем кинетическую энергию системы.

Кинетическая энергия системы определяется суммой кинетических энергий тел:

$$T = T_1 + T_3 + T_4 \tag{1.2}$$

Где $T_1 = m_1 V_1^2$, $T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$, $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_{C4}^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2$

Момент инерции катка: $J_4 = m_4 i_4^2 = 4 m_4 r^2$ (1.3)

Момент инерции блока: $J_3 = m_3 r_3^2 = m_3 \cdot (2r)^2 = 4 \cdot m_3 \cdot r^2$ (1.4)

Так как система имеет одну степень свободы и в качестве координаты, определяющей ее положение, принято перемещение груза 1, то кинематические характеристики всех тел механизма выражаем через кинематические характеристики груза 1 соотношениями:

$$V_1 = V_{C2} = \omega_2 r_2 = \omega_2 r, \ \omega_2 = \frac{V_1}{r},$$

$$V_E = \omega_2 \cdot 2r_2 = \omega_2 \cdot 2r = \frac{V_1}{r} \cdot 2r = 2 \cdot V_1$$

$$V_E = V_A = \omega_3 r_3 = 2\omega_3 r \Rightarrow \omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_1}{r}, \tag{1.5}$$

$$V_{C4} = V_B = \omega_3 r_3 = 2\omega_3 r = 2 \cdot \frac{V_1}{r} \cdot r = 2 \cdot V_1$$

$$V_{C4} = \omega_4 \cdot r_4 \Rightarrow \omega_4 = \frac{V_{C4}}{r_4} = 2 \cdot \frac{V_1}{1{,}5r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_1}{r}$$

Записываем выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_{c4}^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2$$

Подставляем в (1.2) все скорости, выраженные через V_1 (1.5) и моменты инерции тел (1.3),(1.4):

$$T = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m_3 r^2 \cdot \left(\frac{V_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} m_4 \cdot (2V_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m_4 r^2 \cdot \left(\frac{4V_1}{3r}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m_3 + \frac{1}{2} m_4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m_4 \cdot \frac{16}{9}\right) \cdot V_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(m_1 + 4 \cdot m_3 + m_4 \cdot \frac{100}{9}\right) \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} m_{np} \cdot V_1^2 \qquad (1.6)$$

где $m_{np} = m_1 + 4 \cdot m_3 + m_4 \cdot \frac{100}{9} = 4m + 4 \cdot m + 3m \cdot \frac{100}{9} = 41{,}33m = 41{,}33\ кг$ (1.7)

-приведенная масса системы.

Вычисляем правую часть уравнения (1.1)- сумму мощностей внешних и внутренних сил.

Рассматриваемая нами механическая система является неизменяемой, т. е. тела, входящие в систему, недеформируемы и скорости их точек относительно друг друга равны нулю. Поэтому мощности внутренних сил будут равняться нулю $N^i = 0$.

Будут равняться нулю и мощности внешних сил, приложенных в точках, скорости которых равны нулю. Как видно из расчетной схемы, таковыми являются силы $\vec{F}_{сц}, \vec{N}_4, \vec{P}_3, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{T}_2$.

Мощность силы равна скалярному произведению вектора силы на скорость точки ее приложения, а мощность момента силы- алгебраическому произведению момента силы на угловую скорость вращения тела, к которому приложен момент.

Сумма мощностей остальных сил равна:

$$N_F = \vec{F} \cdot \vec{V}_1 = F \cdot V_1$$

$$N_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \vec{V}_1 = P_1 \cdot V_1$$

$$N_M = -M_C \cdot \omega_3$$

$$N_{P4} = \vec{P}_4 \cdot \vec{V}_{C4} = -P_4 V_{C4} \sin\alpha$$

$$N_{Fупр} = \vec{F}_{упр} \cdot \vec{V}_{C4} = -F_{упр} V_{C4}$$

Или $N^e = F \cdot V_1 + P_1 \cdot V_1 - M_C \cdot \omega_3 - P_4 V_{C4} \sin\alpha - F_{упр} V_{C4}$

С учетом кинематических соотношений (1.5) сумму мощностей внешних сил преобразуем к виду:

$$N^e = F \cdot V_1 + P_1 \cdot V_1 - M_C \cdot \frac{V_1}{r} - P_4 \cdot 2 \cdot V_1 \sin\alpha - F_{упр} \cdot 2 \cdot V_1 = F_{пр} \cdot V_1 \qquad (1.8)$$

где $F_{пр} = F(t) + P_1 - \frac{M_C}{r} - 2 \cdot P_4 \sin\alpha - 2 \cdot F_{упр}$ (1.9)

- приведенная сила.

Упругую силу считаем пропорциональной удлинению пружины. Полное удлинение пружины λ равно суме статического $\lambda_{ст}$ и динамического S_{C4} удлинений $\lambda = \lambda_{Cm} + S_{C4}$.

Так как $V_{C4} = 2 \cdot V_1$, то $S_{C4} = 2 \cdot S$ и упругая сила будет равна:
$F_{упр} = c(\lambda_{Cm} + S_{C4}) = c(\lambda_{Cm} + 2 \cdot S)$.

Так как $\omega_3 = \frac{V_1}{r} = \frac{\dot{S}}{r}$, то момент вязкого сопротивления

$M_C = \nu \cdot \omega_3 = \nu \cdot \frac{\dot{S}}{r}$.

Тогда приведенная сила (1.9) в развернутой форме будет определяться выражением:

$$F_{пр} = F(t) + P_1 - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 2 \cdot P_4 \sin\alpha - 2 \cdot c \cdot (\lambda_{Cm} + 2 \cdot S) \qquad (1.10)$$

В состоянии покоя $S = \dot{S} = 0$ и условием равновесия системы определяется уравнением

$$F_{пр}^0 = F(0) + P_1 - \frac{\nu \cdot 0}{r^2} - 2 \cdot P_4 \sin\alpha - 2 \cdot c \cdot (\lambda_{Cm} + 2 \cdot 0) = 0$$

Так как $F(0) = F_0 \cdot \sin(p \cdot 0) = 0$, то

$$P_1 - 2 \cdot P_4 \sin\alpha - 2 \cdot c \cdot \lambda_{Cm} = 0 \qquad (1.11)$$

Из уравнения (1.11) определяем статическое удлинение пружины

$$\lambda_{Cm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 - 2 \cdot P_4 \sin\alpha}{c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot P_1 - P_4 \sin\alpha}{c} \qquad (1.12)$$

Окончательное выражение для приведенной силы будет иметь вид:

$$F_{пр} = F(t) + P_1 - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 2 \cdot P_4 \sin\alpha - 2 \cdot c \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot P_1 - P_4 \sin\alpha}{c} + 2 \cdot S \right) =$$

$$= F(t) - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 4 \cdot c \cdot S \qquad (1.13)$$

Подставим выражение для кинетической энергии (1.6) и сумму мощностей всех сил (1.8) с учетом (1.13) в уравнение (1.1). Тогда, после дифференцирования, получим дифференциальное уравнение движения системы:

$$m_{пр}\ddot{S} = F(t) - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 4 \cdot c \cdot S$$

$$m_{пр}\ddot{S} = -c_{пр}S - \nu_{пр}\dot{S} + F(t)$$

Обозначив $c_{пр} = 4 \cdot c$ - приведенная жесткость пружины

$\nu_{пр} = \frac{\nu}{r^2}$ - приведенный коэффициент сопротивления

Получим $m_{пр}\ddot{S} = -c_{пр}S - \nu_{пр}\dot{S} + F(t)$

Представим полученное уравнение в виде:

$$\ddot{S} + 2n\dot{S} + k^2 S = \frac{F(t)}{m_{пр}} \qquad (1.14)$$

где введены коэффициенты, имеющие определенный физический смысл:

$k = \sqrt{\frac{c_{пр}}{m_{пр}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot c}{m_{пр}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4000}{41{,}33}} = 19{,}675\ c^{-1}$ - частота собственных колебаний,

$n = \frac{\nu_{пр}}{2m_{пр}} = \frac{\nu}{2 \cdot r^2 m_{пр}} = \frac{1{,}5}{2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 41{,}33} = 1{,}815\ c^{-1}$ - показатель степени затухания колебаний.

Начальные условия:

при $t = 0 \rightarrow S\big|_{t=0} = S_0 = 0{,}02 \quad \dot{S}\big|_{t=0} = \dot{S}_0 = 0{,}07$ (1.15)

Уравнения (1.15) и (1.14) представляют математическую модель для решения второй задачи динамики.

2. Определение закона движения системы.

Возмущающая сила изменяется по гармоническому закону:

$$F = F_0 \sin(pt)$$

где F_0 - амплитуда возмущающей силы, р- циклическая частота возмущения.

Дифференциальное уравнение движения механической системы с учетом выражения для возмущающей силы примет вид:

$$\ddot{S} + 2n\dot{S} + k^2 S = h_0 \sin(pt) \qquad (2.1)$$

где $h_0 = \frac{F_0}{m_{np}} = \frac{60}{41{,}33} = 1{,}452\ м/с^2$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (2.1) складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однородное дифференциальное уравнение, соответствует неоднородному уравнению (2.1) , имеет вид:

$$\ddot{S} + 2n\dot{S} + k^2 S = 0 \qquad (2.2)$$

Решение этого уравнения ищем виде функции

$$S = Ae^{\chi t} \qquad (2.3)$$

где A, χ - неопределенные постоянные.

Подставляем (2.3) в (2.2), получим:

$$(\chi^2 + 2n\chi + k^2) \cdot Ae^{\chi t} = 0$$

Так как мы ищем нетривиальное решение, то $Ae^{\chi t} \neq 0$.

Следовательно, должно выполнятся условие:

$$\chi^2 + 2n\chi + k^2 = 0 \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (2.2). Это уравнение имеет 2 корня:

$$\chi_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm ik_1, \qquad (2.5)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{19{,}675^2 - 1{,}815^2} = 19{,}591\ c^{-1}$

В этом случае (n<k) общее решение уравнения (2.2) имеет вид:

$$S = e^{-nt}\left(A_1 \sin(k_1 t) + A_2 \cos(k_1 t)\right) = A_o e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha_0) \qquad (2.6)$$

где $A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \alpha_0 = arctg\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$- постоянные интегрирования.

Определим частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2.1). Частное решение ищем в виде правой части

$$S = B_1 \sin(pt) + B_2 \cos(pt) = B_0 \sin(pt - \beta_0) \qquad (2.7)$$

где $B_0 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \beta_0 = arctg\left(-\frac{B_2}{B_1}\right)$.

Подставляем (2.7) в (2.1) и преобразовываем:

$$\left[B_1(k^2 - p^2) - 2npB_2\right]\sin(pt) + \left[2npB_1 + B_2(k^2 - p^2)\right]\cos(pt) = h_0 \sin(pt)$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях, справа и слева, получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных B_1, B_2:

$$\begin{cases} B_1(k^2 - p^2) - 2npB_2 = h_0 \\ 2npB_1 + B_2(k^2 - p^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2 = -\frac{2np}{k^2 - p^2} B_1 \\ B_1(k^2 - p^2) + 2np\frac{2np}{k^2 - p^2} B_1 = h_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 = h_0 \cdot \frac{k^2 - p^2}{(k^2 - p^2)^2 + (2np)^2} \\ B_2 = -\frac{2np}{k^2 - p^2} \cdot h_0 \cdot \frac{k^2 - p^2}{(k^2 - p^2)^2 + (2np)^2} = -h_0 \cdot \frac{2np}{(k^2 - p^2)^2 + (2np)^2} \end{cases}$$

В результате получим:

$$B_1 = 1{,}452 \cdot \frac{19{,}675^2 - \pi^2}{(19{,}675^2 - \pi^2)^2 + (2 \cdot 1{,}452 \cdot \pi)^2} = 0{,}00385 \text{ м}$$

$$B_2 = -1{,}452 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}452 \cdot \pi}{(19{,}675^2 - \pi^2)^2 + (2 \cdot 1{,}452 \cdot \pi)^2} = -0{,}000116 \text{ м}$$

И

$$B_0 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{0{,}00385^2 + (-0{,}000116)^2} = 0{,}00385 \text{ м}$$

$$\beta_0 = arctg\left(-\frac{B_2}{B_1}\right) = arctg\left(-\frac{-0{,}000116}{0{,}00385}\right) = 0{,}0302$$

Таким образом, решение (2.7) найдено.

Складывая (2.7) и (2.6), получаем общее решение неоднородного уравнения (2.1).

$$S = e^{-nt}\left[A_1 \sin(k_1 t) + A_2 \cos(k_1 t)\right] + B_0 \sin(pt - \beta_0) = A_o e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha_0) + B_0 \sin(pt - \beta_0) \qquad (2.8)$$

Постоянные A_0, α_0 определяем из начальных условий (1.15). Для этого найдем производную по времени (2.8)

$$\dot{S} = e^{-nt}\left[A_1 k_1 \cos(k_1 t) - A_2 k_1 \sin(k_1 t)\right] - ne^{-nt}\left[A_1 \sin(k_1 t) + A_2 \cos(k_1 t)\right] + B_0 p \cos(pt - \beta_0) = \\ = e^{-nt}\left[(A_1 k_1 - nA_2)\cos(k_1 t) - (A_2 k_1 + nA_1)\sin(k_1 t)\right] + B_0 p \cos(pt - \beta_0) \quad (2.9)$$

В результате получим систему уравнений:

$$S_0 = e^0\left[A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0\right] + B_0 \sin(0 - \beta_0) = A_2 - B_0 \sin \beta_0$$

$$\dot{S}_0 = e^0\left[(A_1 k_1 - nA_2)\cos 0 - (A_2 k_1 + nA_1)\sin 0\right] + B_0 p \cos(0 - \beta_0) = \\ = A_1 k_1 - nA_2 + B_0 p \cos \beta_0$$

Решаем данную систему:

$$A_2 = S_0 + B_0 \sin \beta_0 = 0{,}02 + 0{,}00385 \cdot \sin 0{,}0302 = 0{,}02012 \text{ м}$$

$$A_1 = \frac{\dot{S}_0 + nA_2 - B_0 p \cos \beta_0}{k_1} = \frac{0{,}07 + 1{,}815 \cdot 0{,}02012 + 0{,}00385 \cdot \pi \cdot \cos 0{,}0302}{19{,}591} = 0{,}0048 \text{ м}$$

И

$$A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{0{,}0048^2 + 0{,}02012^2} = 0{,}02069 \text{ м}$$
$$\alpha_0 = arctg\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = arctg\left(\frac{0{,}02012}{0{,}0048}\right) = 1{,}3356 \quad (2.10)$$

И подставляя (2.10) в (2.8), получаем закон движения механизма, выраженный через перемещение груза:

$$S = 0{,}02069 e^{-1{,}815 \cdot t} \sin(19{,}591 \cdot t + 1{,}3356) + 0{,}00385 \cdot \sin(\pi \cdot t - 0{,}0302)$$

3. Определение реакций внешних и внутренних связей.

Для решения этой задачи расчленяем механизм на отдельные части и рисуем расчетные схемы отдельно для каждого тела.

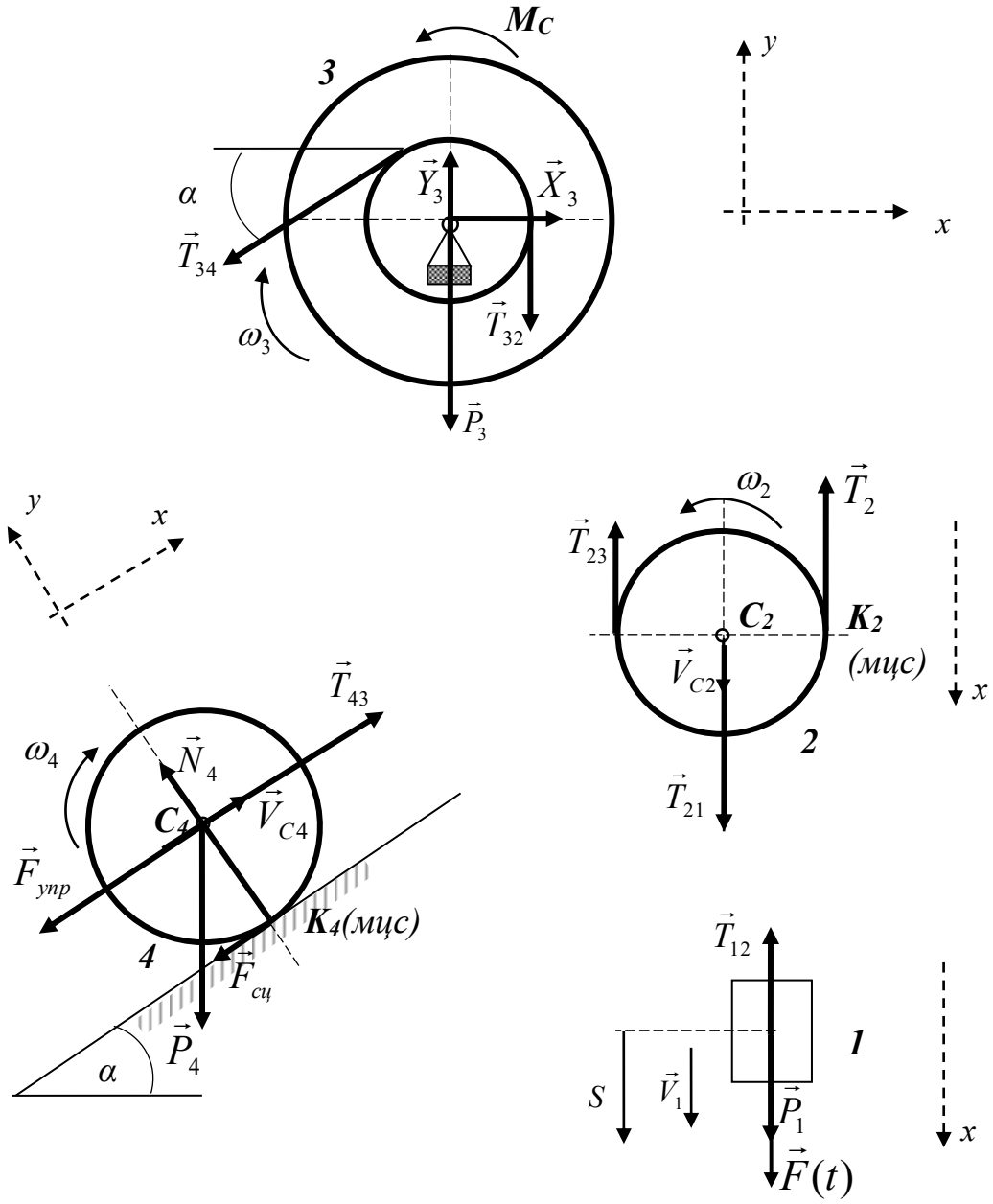


Рис. 3. Расчетные схемы для каждого тела механизма

К каждому телу, изображенного на расчетной схеме, применим две из основных теорем механики материальной системы: теорему об изменении количества движения и теорему об изменении кинетического момента.

$$\frac{dm\overline{V}_C}{dt} = \sum \overline{F}_K^e \tag{3.1}$$

$$\frac{dL_{CZ}}{dt} = \sum M_{CZ}^e \tag{3.2}$$

Для каждого тела уравнения (3.1) и (3.2) записываем в проекциях на оси координат соответственно схеме рис.3:

Тело1: $m_1 \frac{dV_1}{dt} = -T_{12} + P_1 + F(t)$ (3.3)

Тело 2:
$$\begin{aligned} 0 &= T_{21} - T_{23} - T_2 \\ 0 &= -T_{23} \cdot r_2 + T_2 \cdot r_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тело 3:

$$\begin{aligned} J_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= -T_{34} \cdot r_3 + T_{32} r_3 - M_c \\ 0 &= Y_3 - P_3 - T_{34} \sin\alpha - T_{32} \\ 0 &= X_3 - T_{34} \cos\alpha \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тело 4:

$$\begin{aligned} m_4 \frac{dV_{C4}}{dt} &= -P_4 \cdot \sin\alpha + T_{43} - F_{упр} - F_{сц} \\ 0 &= N_4 - P_4 \cdot \cos\alpha \\ J_4 \cdot \frac{d\omega_4}{dt} &= F_{сц} \cdot r_4 \end{aligned} \tag{3.6}$$

С учетом кинематических соотношений (1.5), а так же (1.3) и (1.4) систему уравнений преобразуем к виду:

$$m_1 \frac{dV_1}{dt} = -T_{12} + P_1 + F(t) \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} T_{23} &= T_2 \\ T_{23} = T_2 &= \frac{T_{21}}{2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot m_3 r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{V_1}{r}\right) &= -T_{34} \cdot 2r + T_{32} \cdot 2r - M_c \\ 0 &= Y_3 - P_3 - T_{34} \sin\alpha - T_{32} \\ 0 &= X_3 - T_{34} \cos\alpha \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot m_4 \frac{d}{dt} V_1 = -P_4 \cdot \sin\alpha + T_{43} - F_{упр} - F_{сц} \\
&0 = N_4 - P_4 \cdot \cos\alpha \\
&4 \cdot m_4 r^2 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{4V_1}{3r}\right) = F_{сц} \cdot 1{,}5r
\end{aligned}
\qquad (3.10)
$$

В результате получим:

$$
\begin{aligned}
&T_{12} = P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S} \\
&T_{23} = T_2 = \frac{P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S}}{2} \\
&4 \cdot m_3 \cdot \ddot{S} = -T_{34} \cdot 2 + T_{32} \cdot 2 - \frac{M_c}{r} \\
&Y_3 = P_3 + T_{34} \sin\alpha + T_{32} \\
&X_3 = T_{34} \cos\alpha \\
&2 \cdot m_4 \cdot \ddot{S} = -P_4 \cdot \sin\alpha + T_{43} - F_{упр} - F_{сц} \\
&F_{сц} = \frac{32}{9} m_4 \cdot \ddot{S} \\
&N_4 = P_4 \cdot \cos\alpha
\end{aligned}
\qquad (3.11)
$$

Или

$$
\begin{aligned}
&T_{12} = P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S} \\
&T_{23} = T_2 = \frac{P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S}}{2} \\
&T_{43} = 2 \cdot m_4 \cdot \ddot{S} + P_4 \cdot \sin\alpha + F_{упр} + \frac{32}{9} m_4 \cdot \ddot{S} = \frac{50}{9} \cdot m_4 \cdot \ddot{S} + P_4 \cdot \sin\alpha + F_{упр} \\
&F_{сц} = \frac{32}{9} m_4 \cdot \ddot{S} \\
&Y_3 = P_3 + \left(\frac{50}{9} m_4 \cdot \ddot{S} + P_4 \cdot \sin\alpha + F_{упр}\right) \cdot \sin\alpha + \frac{P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S}}{2} \\
&X_3 = \left(\frac{50}{9} \cdot m_4 \cdot \ddot{S} + P_4 \cdot \sin\alpha + F_{упр}\right) \cdot \cos\alpha \\
&N_4 = P_4 \cdot \cos\alpha
\end{aligned}
\qquad (3.12)
$$

Уравнения (3.12) выражают зависимость внутренних и внешних усилий относительно функции $\ddot{S}$ и активных сил, приложенных к системе

Подставив полученные выражение в третье уравнение (3.11), получим дифференциальное уравнение движения системы:

$$4 \cdot m_3 \cdot \ddot{S} = -\left(\frac{50}{9} \cdot m_4 \cdot \ddot{S} + P_4 \cdot \sin \alpha + F_{упр} \right) \cdot 2 + \frac{P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S}}{2} \cdot 2 - \frac{M_c}{r}$$

$$4 \cdot m_3 \cdot \ddot{S} = -\frac{100}{9} \cdot m_4 \cdot \ddot{S} - 2 \cdot P_4 \cdot \sin \alpha - 2 \cdot F_{упр} + P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S} - \frac{M_c}{r}$$

$$4 \cdot m_3 \cdot \ddot{S} = -\frac{100}{9} \cdot m_4 \cdot \ddot{S} - 2 \cdot P_4 \cdot \sin \alpha - 2 \cdot F_{упр} + P_1 + F(t) - m_1 \cdot \ddot{S} - \frac{M_c}{r}$$

$$\left(m_1 + 4 \cdot m_3 + \frac{100}{9} \cdot m_4 \right) \cdot \ddot{S} = P_1 + F(t) - 2 \cdot P_4 \cdot \sin \alpha - 2 \cdot F_{упр} - \frac{M_c}{r}$$

Учитывая полученные выражения для приведенной массы (1.7) и приведенной силы (1.9), получаем

$$m_{пр} \cdot \ddot{S} = F_{пр}$$

То есть полученное уравнение совпадает с полученным ранее и проведенные преобразования сделаны верно.

4. Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью принципа Даламбера.

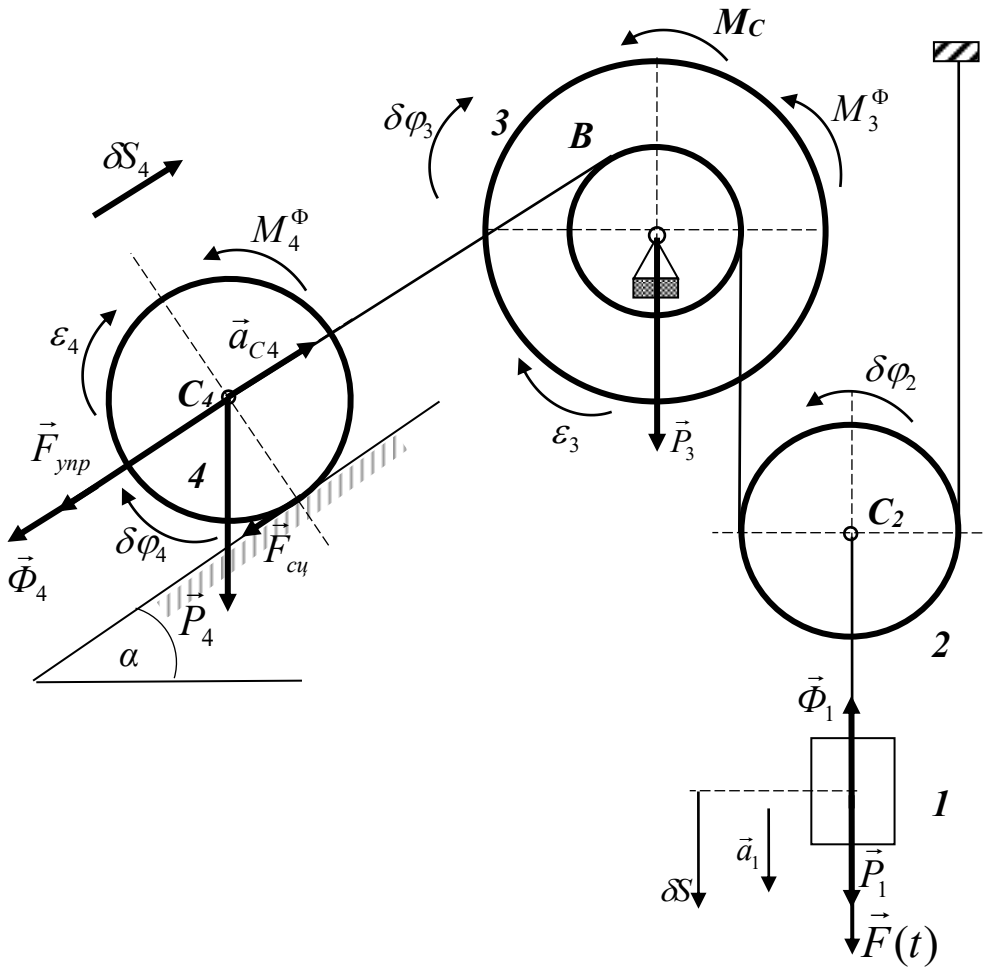


Рис. 4. Расчетная схема

Общее уравнение динамики системы есть математическое выражение принципа Даламбера Лагранжа

$$\sum \delta A_K^e + \sum A_K^u = 0 \qquad (4.1)$$

где $\sum \delta A_K^e = \sum \overline{F}_K \cdot \delta \overline{r}_k$ - сумма элементарных работ всех активных сил на возможном перемещении системы; $\sum \delta A_K^{И} = \sum m_K \overline{a}_K \cdot \delta \overline{r}_k$ - сумма элементарных работ всех сил инерции на возможном перемещении системы.

На чертеже изобразим все активные силы и силы инерции(рис.4).

Сообщим системе возможное перемещение. Возможная работа активных сил определяется как сумма следующих элементарных работ:

$$\sum \delta A_K^e = \delta A_{P1} + \delta A_F + \delta A_{Mc} + \delta A_{P3} + \delta A_{P4} + \delta A_{Fynp} \qquad (4.2)$$

Сумма элементарных работ вычисляется как и мощность по формуле (1.8) с учетом (1.13)

$$\sum \delta A_K^e = \left[F(t) - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 4 \cdot c \cdot S \right] \delta S \qquad (4.3)$$

Определяем возможную работу сил инерции:

$$\sum \delta A_K^{II} = -\Phi_1 \delta S - M^{\Phi}{}_3 \delta \varphi_3 - M^{\Phi}{}_4 \delta \varphi_4 - \Phi_4 \delta S_4 \qquad (4.4)$$

Для величин главных векторов и главных моментов сил инерции имеем следующие выражения:

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 \ddot{S} \quad \Phi_4 = m_4 a_4 = m_4 \ddot{S}_4$$
$$M_3^{\Phi} = \mathrm{J}_3 \varepsilon_3 = \mathrm{J}_3 \ddot{\varphi}_3 \quad M_4^{\Phi} = \mathrm{J}_4 \varepsilon_4 = \mathrm{J}_4 \ddot{\varphi}_4 \qquad (4.5)$$

Используя кинематические соотношения (1.5), можно записать:

$$\delta S_2 = \delta S, \ \delta S_4 = 2 \cdot \delta S \ ,$$
$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta S}{r}, \ \delta \varphi_4 = \frac{4}{3r} \delta S \qquad (4.6)$$
$$a_2 = a_1, a_4 = 2 \cdot a_1, \varepsilon_3 = \frac{a_1}{r}, \varepsilon_4 = \frac{4a_1}{3r}$$

В результате подстановки с учетом, что $J_4 = 4 \cdot m_4 r^2$, $J_3 = 4 \cdot m_3 r^2$ получим:

$$\sum \delta A_K^{II} = -m_1 \ddot{S} \delta S - 4 \cdot m_3 r^2 \cdot \left(\frac{\ddot{S}}{r} \right) \cdot \frac{\delta S}{r} - 4 \cdot m_4 r^2 \cdot \left(\frac{4\ddot{S}}{3r} \right) \cdot \frac{4}{3r} \delta S - m_4 \cdot 2 \cdot \ddot{S} \cdot 2 \cdot \delta S =$$
$$= -\ddot{S} \delta S \left(m_1 + 4 \cdot m_3 + \frac{100}{9} \cdot m_4 \right) = -m_{np} \cdot \ddot{S} \cdot \delta S \qquad (4.7)$$

Где $m_{np} = m_1 + 4 \cdot m_3 + \frac{100}{9} \cdot m_4$

Подставляем выражения (4.3) и(4.7) в общее уравнение динамики (4.1) получим:

$$\left[F(t) - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 4 \cdot c \cdot S \right] \delta S - m_{np} \ddot{S} \delta S = 0 \qquad (4.8)$$

Разделив (4.9) на $\delta S \neq 0$, получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\ddot{S} + 2n\dot{S} + k^2 S = \frac{F(t)}{m_{пр}} \qquad (4.9)$$

Где $k = \sqrt{\frac{c_{пр}}{m_{пр}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot c}{m_{пр}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4000}{41{,}33}} = 19{,}675\ c^{-1}$ - частота собственных колебаний,

$n = \frac{\nu_{пр}}{2m_{пр}} = \frac{\nu}{2 \cdot r^2 m_{пр}} = \frac{1{,}5}{2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 41{,}33} = 1{,}815\ c^{-1}$ - показатель степени затухания колебаний.

Дифференциальное уравнение (4.9) полностью совпадает с уравнением (1.14) полученным ранее.

5. Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода.

Составим уравнение Лагранжа 2-го рода. В качестве обобщенной координаты примем перемещение груза 1- S. Для механической системы с одной степенью свободы дифференциальное уравнение движения в обобщенных координатах имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} - \frac{\partial T}{\partial S} = Q \qquad (5.1)$$

где T- кинетическая энергия системы, Q- обобщенная сил, S- обобщенная координата.

Выражение для кинетической энергии было найдено (1.6)

$$T = \frac{1}{2} V_1^2 m_{np} \quad \rightarrow T = \frac{1}{2} m_{Пр} S^2 \qquad (5.2)$$

Для определения обобщенной силы сообщим системе возможное перемещение, при котором координата S получит приращение δS, и вычислим сумму элементарных работ всех активных сил на возможном перемещении.

Такая сумма работ уже вычислялась (4.3):

$$\sum \delta A_K^e = \left[F(t) - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 4 \cdot c \cdot S \right] \delta S$$

В тоже время известно, что

$$\sum \delta A_K^e = Q \delta S \qquad (5.3)$$

Из (5.3) получим выражение для обобщенной силы:

$$Q = F(t) - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 4 \cdot c \cdot S \qquad (5.4)$$

Подставляя кинетическую энергию (5.2) и обобщенную силу (5.4) в уравнение Лагранжа получаем

$$m_{np} \ddot{S} = F(t) - \frac{\nu \cdot \dot{S}}{r^2} - 4 \cdot c \cdot S$$

Или $\ddot{S} + 2n\dot{S} + k^2 S = h_0 \sin(pt)$

6. Результаты вычислений.

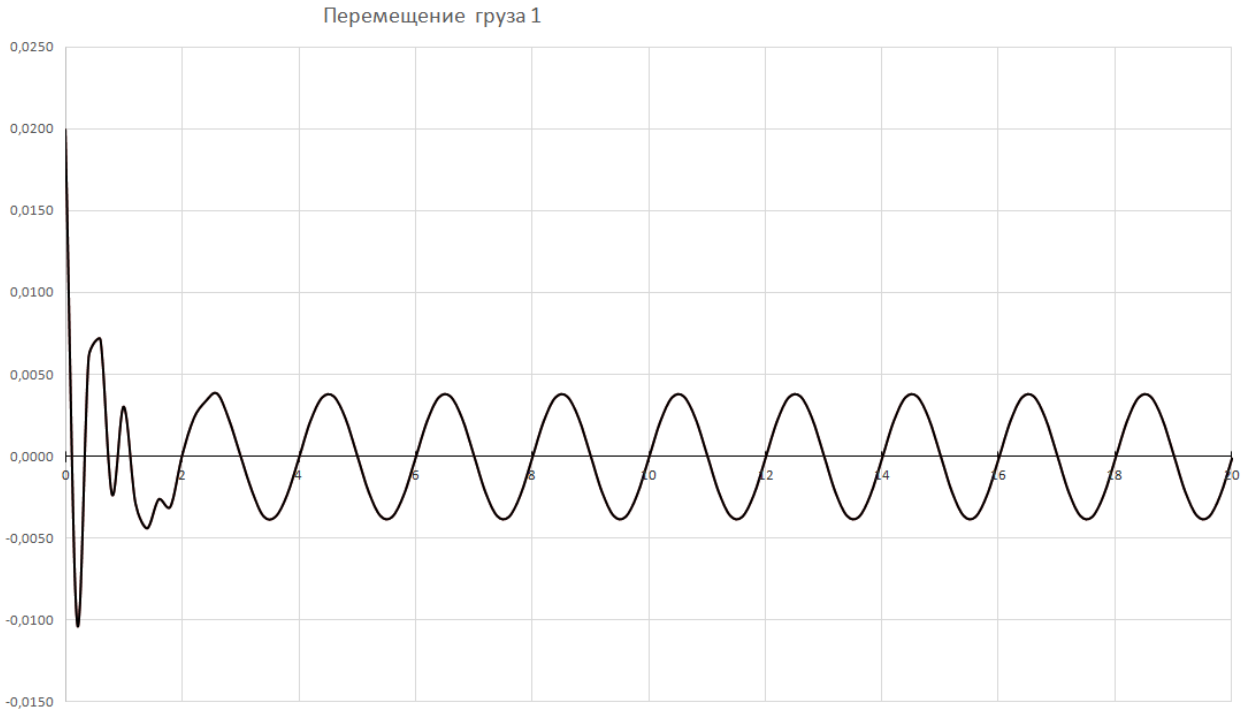
c=4000 Н/м $m_1 = 4\ кг$, $m_2 = 1\ кг$, $m_4 = 3\ кг$

$\lambda_{Ст} = -0{,}0015\ м$ $F'_{сц} = 1{,}47 H$

$m_{пр} = 41{,}33\ кг$ $k = 19{,}675\ с^{-1}$ $n = 1{,}815\ с^{-1}$ $k_1 = 19{,}591\ с^{-1}$

$A_1 = 0{,}0048\ м$ $A_2 = 0{,}02012\ м$

$B_0 = 0{,}00385\ м$ $\beta_0 = 0{,}0302$



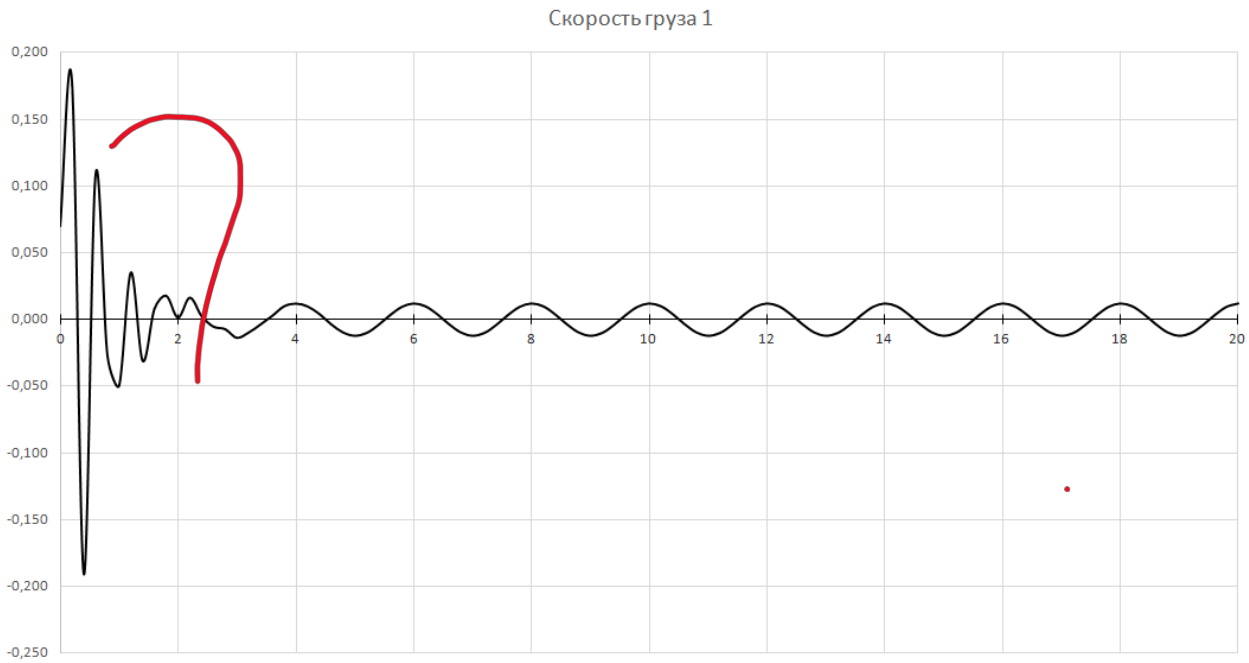
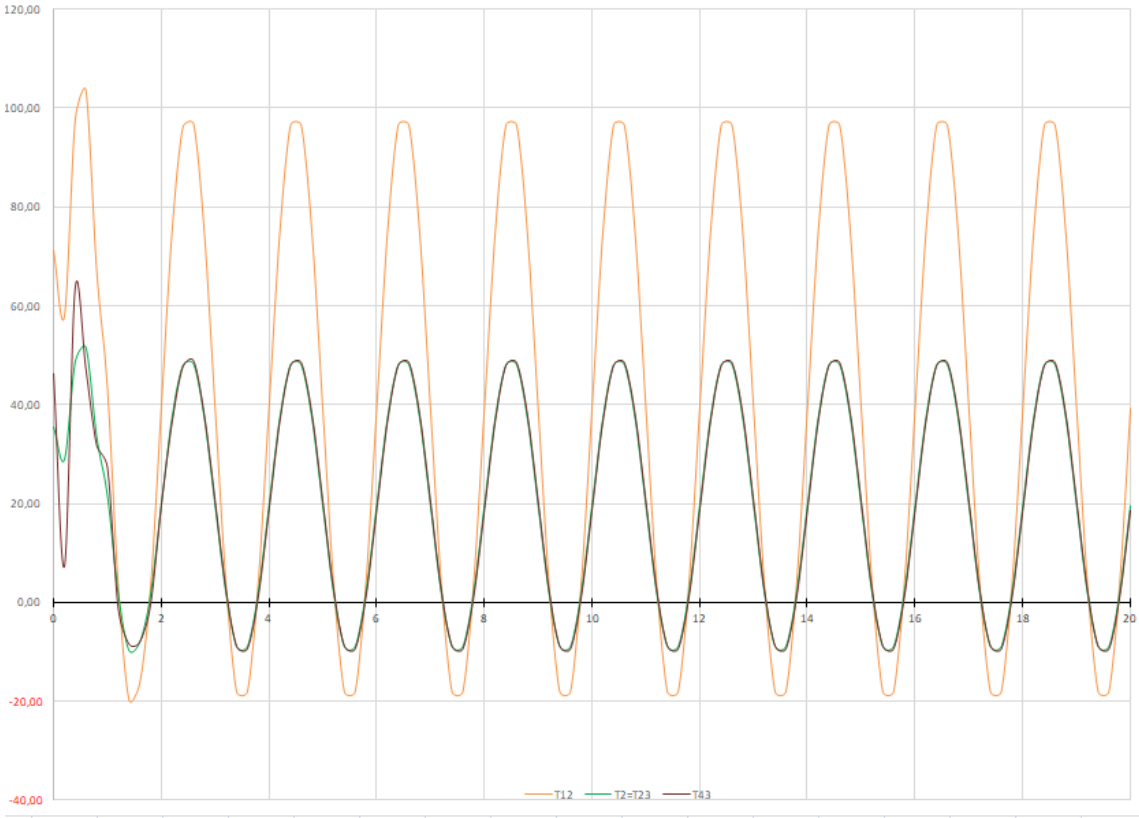
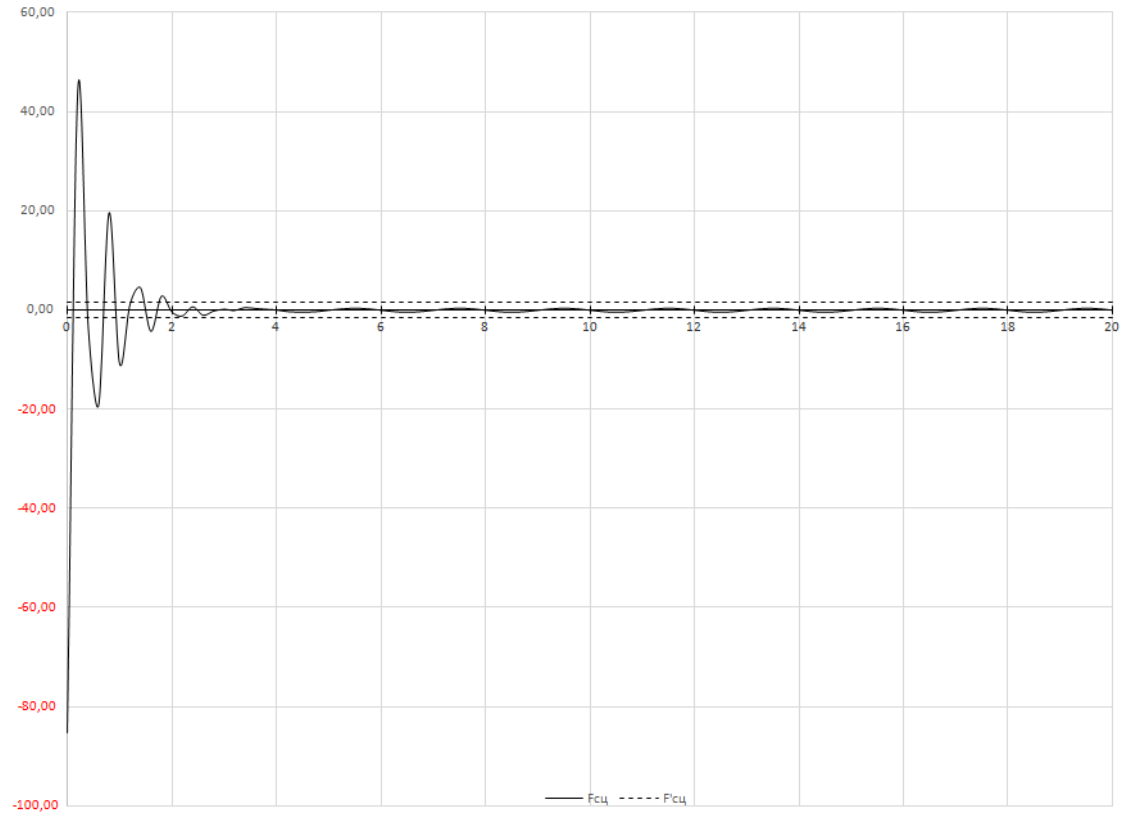


График неверен. Не соответствует графику s(t). Пересчитать!!

Силы натяжения нитей



Сила сцепления



7. Исследование и оптимизация механической системы

Математическая модель, описывающая поведение исследуемой механической системы, построена в предположении, что каток 3 движется без проскальзывания. Данное утверждение предполагает, что модуль силы сцепления $F_{СЦ}$ подчинен следующему ограничению: $|F_{сц}| \le F'_{сц} = f_{сц} N_4$

Результаты расчетов показывают, что силы натяжения канатов T_{12} , T_{23}, T_{43} в некоторые моменты времени становятся отрицательными, а сила сцепления $F_{сц}$ превышает ее предельное значение

$F'_{сц} = f_{сц} N_4 = f_{сц} P_4 \cdot \cos\alpha = f_{сц} mg \cdot \cos\alpha = 0{,}1 \cdot 3 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 60^0 = 1{,}47\ H$.

Следовательно, математическая модель не соответствует реальному поведению механической системы: нити провисают, тела движутся рывками, а каток — с проскальзыванием.

Как показывают полученные функциональные зависимости силы сцепления и сил натяжения нитей, для соответствия принятой математической модели необходимо увеличение массы блока 4 и груза 1.

Последовательно проводя расчеты по полученному алгоритму приходим к выводу, что уменьшение жесткости пружины приводит к уменьшению силы сцепления.

Натяжение нитей, соединяющих тело 1 и диск 2, и диски 2 и 3, главным образом зависит от массы груза 1. Сила сцепления в наибольшей мере зависит от массы блока 4.

Постепенно увеличивая значения m_1, m_4 приходим к выводу, что для обеспечения положительности сил натяжения канатов и движения тела 4 без проскальзывания необходимо обеспечить значения масс тел механической системы, удовлетворяющих следующим ограничениям:

$m_1 \ge 7кг$, $m_4 \ge 160кг$, $c \le 800\ H \cdot м$

Окончательно принимаем $m_1 = 7кг$, $m_4 = 85кг$, $c = 800\ H \cdot м$, оставив остальные заданные параметры без изменений и проводим новый расчет:

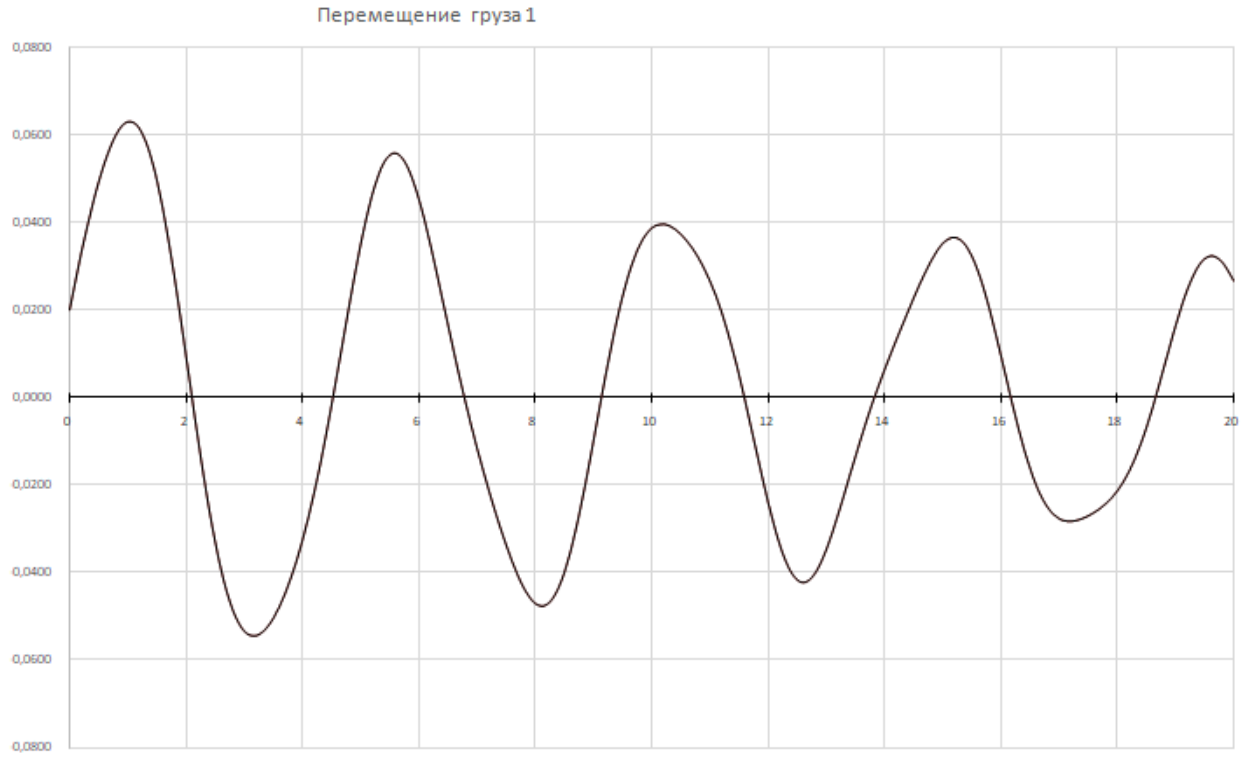
с=800 Н/м $m_1 = 7\ кг$, $m_2 = 1\ кг$, $m_4 = 160\ кг$. Это откуда взялось?

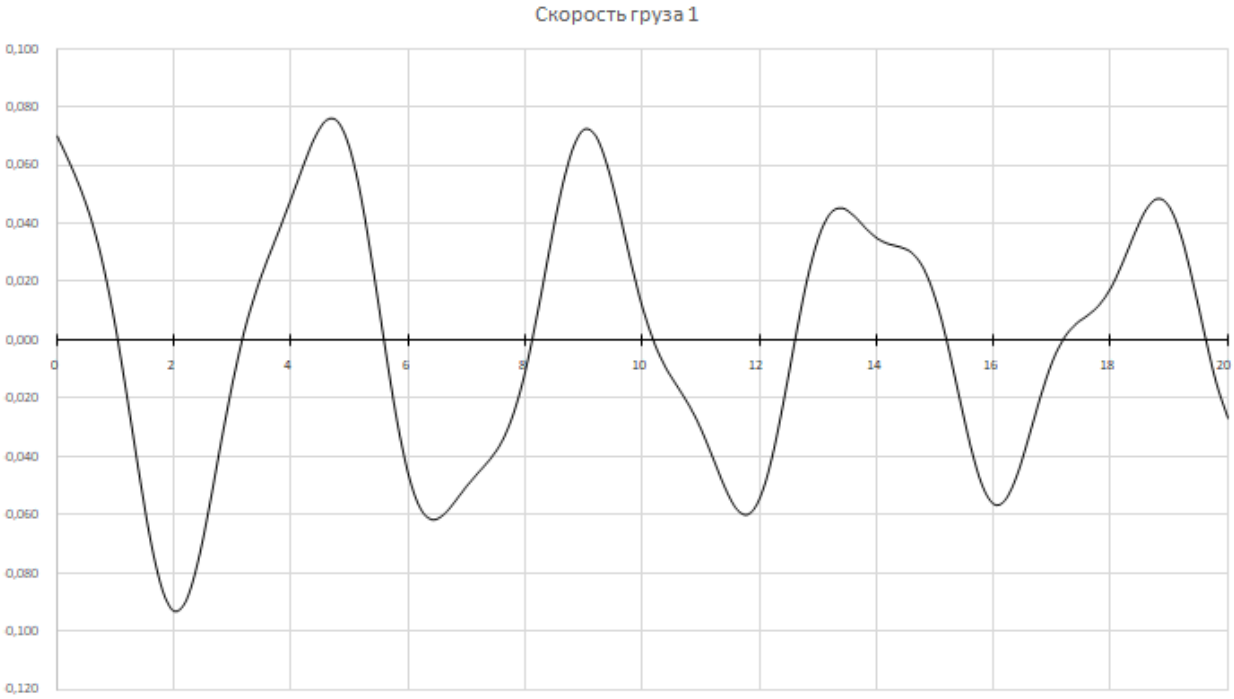
$F'_{сц} = 78{,}48 H$ Как соответствует утверждению, данному выше??? Исправить

$m_{пр} = 1788{,}78кг$ $k = 1{,}338\ c^{-1}$ $n = 0{,}042\ c^{-1}$ $k_1 = 1{,}337\ c^{-1}$

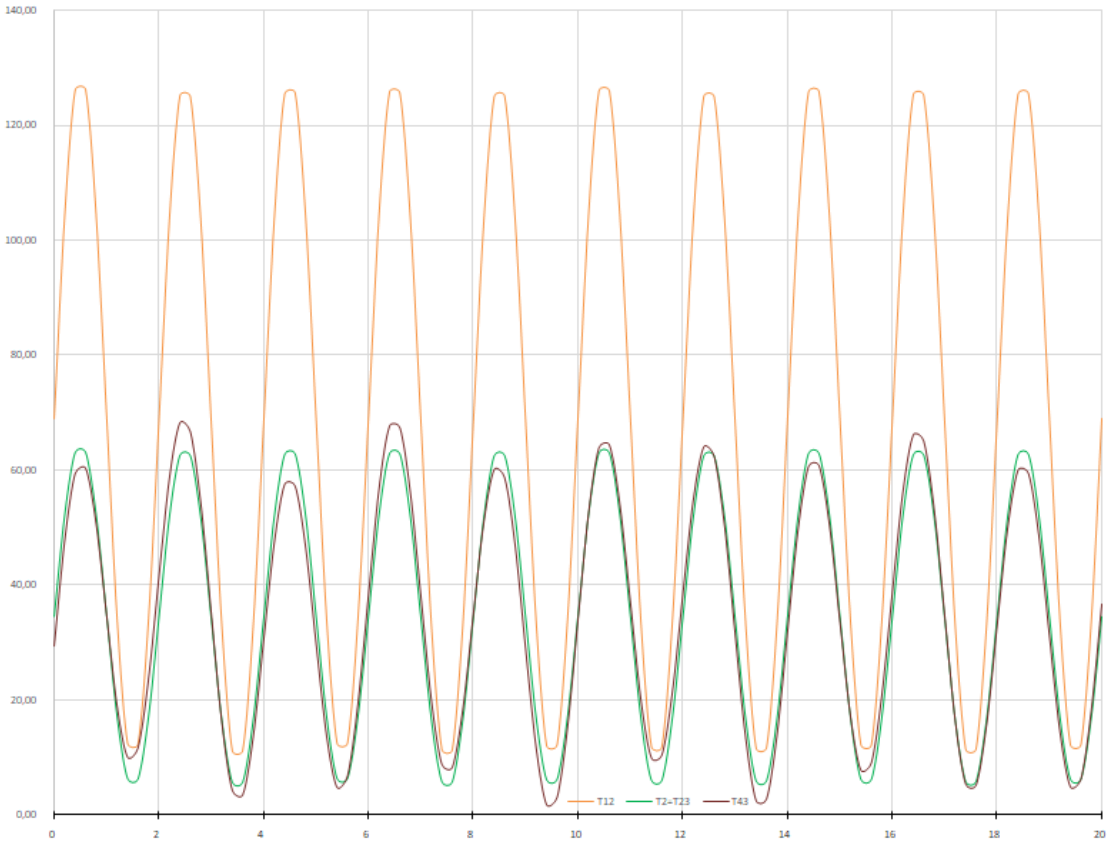
$A_0 = 0{,}06589\ м$ $\alpha_0 = 0{,}3106$

$B_0 = 0{,}0415\ м$ $\beta_0 = 3{,}109$

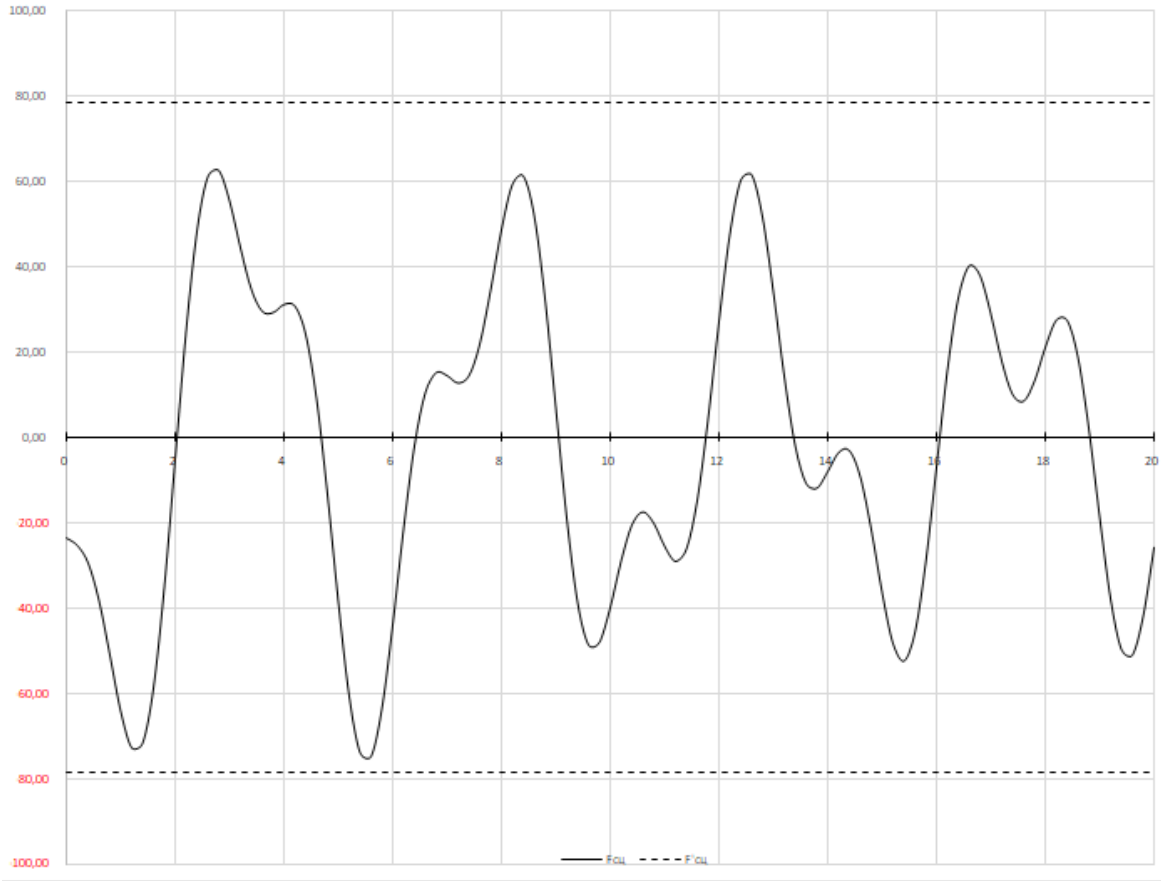

Перемещение груза 1
0,0800
0,0600
0,0400
0,0200
0,0000
0,0200
0,0400
0,0600
0,0800
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


Скорость груза 1
0,100
0,080
0,060
0,040
0,020
0,000
0,020
0,040
0,060
0,080
0,100
0,120
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Силы натяжения нитей



Сила сцепления



ВЫВОДЫ

При выполнении данной курсовой работы мы приобрели навыки исследования и анализа динамического поведения механической системы с упругими связями, формулировки задач, а также построения расчетной схемы и математической модели. Используя основные теоремы динамики системы и аналитические методы теоретической механики, мы определили закон движения первого тела и реакции внешних и внутренних связей. То, что при использовании различных теорем мы получили одинаковые законы движения, свидетельствует о правильности полученных результатов.

Используя полученный алгоритм расчетов нашли значения масс груза 1 , диска 4, жесткости упругого элемента, при которых выполняются необходимые условия выбранной математической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бертяев В.Д., Латышев И.И., Маркелов С.С. Расчет плоских и пространственных конструкций: Учеб. пособие. – Тула: ТулГУ, 2011. – 79 с.

2. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.

3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.1. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2005. – 416 с.

5. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 608 с.